Equação de Advecção-Difusão

Luana Júlia Nunes Ferreira

Setembro 2020

1 Demonstração

De acordo com a 1ª lei de Difusão de Fick, o vetor fluxo de difusão F é dado por:

$$F = -k\nabla c(x,t) \tag{1}$$

onde:

- $c(x,t)$ é a concentração da substância;
- k é o coeficiente de difusão molecular.

Considere uma região de domínio Ω, bordo $\partial\Omega$ e vetor normal $\hat{n}$. Pela conservação do fluxo de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} c\,dV = -\int_{\partial\Omega} f\,\hat{n}\,dA = -\int_{\Omega} \nabla.f\,dV \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial c}{\partial x} + \nabla.f\right]dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} + \nabla.f = 0 \tag{2}$$

Reescrevendo a equação de Fick (1) com o campo de velocidade $v(x,t)$, temos que o fluxo f é:

$$f = v(x,t)\,c(x,t) - k\nabla c(x,t) \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2):

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \nabla.(v\,.\,c) = 0 = \nabla.(k\nabla c) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} + v\nabla c + \underbrace{(\nabla.v)}_{0}.c = \underbrace{\nabla k}_{0}.\nabla c + k\nabla^2 c$$

pois admite-se que o fluido é não compressível ($\nabla.v = 0$) e que o coeficiente de difusão molecular k é constante. Sendo assim, a equação de advecção-difusão é:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + v(x,t)\nabla c(x,t) = k\nabla^2 c(x,t)$$