Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

4ª Lista (Transformação Linear) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 1 de abril de 2021

1) Dentre as transformações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, verifique quais são lineares.

   (a) $T(x, y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

   (b) $T(x, y) = (x + 1, y)$

   (c) $T(x, y) = (xy, y)$

2) Verifique quais das transformações $T : V \to W$ são lineares:

   (a) $V = P_1(\mathbb{R}), W = M_2(\mathbb{R}),\ T(x + yt) = \begin{pmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{pmatrix}$

   (b) $V = M_2(\mathbb{R}), W = P_2(\mathbb{R}),\ T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = a - x + (b + d)t + 2ct^2$

   (c) $V = M_2(\mathbb{R}), W = \mathbb{R},\ T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$

3) Encontre a matriz A que define a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por:

   (a) $T(x, y) = (2x - y, x + y)$

   (b) $T(x, y, z) = (4x, 7y - 8z)$

4) Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x - y, x + y)$, determine:

   (a) $T(1, 1)$ e $T(2, -1)$

   (b) o conjunto de vetores do $\mathbb{R}^2$ cuja imagem é o vetor nulo.

5) Esboce a imagem do quadrado de vértices $P_1(0, 0), P_1(1, 0), P_1(0, 1), P_1(1, 1)$, usando o operador linear do $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x + 2y, 2x - y)$. Faça o desenho.

6) Encontre a matriz A do operador linear T definido pela fórmula:

   (a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

   (b) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

7) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (a) Determine a transformação linear T tal que $T(X) = AX$.

   (b) Encontre a imagem do vetor u por T.

8) Sejam $u = (1, 5)$ e $v = (3, 1)$ e o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = (2, 0)$ e $T(v) = (1, -4)$. Determine $T(2u)$, $T(3v)$ e $T(2u + 3v)$.

9) Encontre a matriz do operador linear do operador linear do $\mathbb{R}^2$ que leva um ponto (x, y) em:

(a) sua reflexão em torno da reta $y = -x$.

(b) sua reflexão em torno da origem.

(c) sua reflexão em torno do eixo y.

(d) sua rotação de 60^o (no sentido anti-horário).

10) Na fabricação dos produtos P e Q são produzidos dióxido de enxofre, óxido nítrico e partículas de outros materiais poluentes. As quantidades de poluentes na produção de 1 ton. de P e de Q são dadas (em kg) na tabela:

Produto/Poluentes	dióxido de enxofre	óxido nítrico	partículas
P	1300	100	150
Q	200	250	400

(a) Qual a quantidade produzida de cada poluente com a produção de 2 ton. de P e 3 ton. de Q.

(b) Encontre uma transformação linear que descreve a quantidade de cada poluente produzido (em kg.) com a produção de x ton. do produto P e y ton. do produto Q.

(c) Leis estaduais e federais exigem a remoção desses poluentes. Encontre a transformação linear que representa o custo total de remoção dos poluentes com a fabricação de de x ton. do produto P e y ton. do produto Q sabendo-se que o custo diário para remover cada quilo de cada poluente é dado (em reais) na tabela:

Poluentes	dióxido de enxofre	óxido nítrico	partículas
preço	8	5	10

11) Um fabricante de móveis faz cadeiras e mesas, cada uma das quais passa por um processo de montagem e outro de acabamento. O tempo necessário para esses processos é dado (em horas) pela matriz:

	Montagem	Acabamento
Cadeira	2	2
Mesa	3	4

(a) Encontre a transformação linear que descreve o tempo necessário em cada processo para a produção de x cadeiras e y mesas.

(b) Qual o tempo necessário em cada processo para a produção de 80 cadeiras e 20 mesas?

O fabricante tem uma fábrica em Belo Horizonte e outra em Ubá. O custo, por hora, para cada um dos processos são dadas (em reais) pela tabela:

	Belo Horizonte	Ubá
Montagem	9	10
Acabamento	10	12

(c) Construa uma matriz de custo unitário cujas linhas descrevem o custo de produção de cada produto em cada cidade.

(d) Encontre a transformação linear que representa o custo de produção dos produtos, por cidade.

(e) Qual o custo de produção na fabricação de 80 cadeiras e 20 mesas?

12) Um fabricante de farinha produz três tipos de farinha: de mandioca, de milho e de trigo. Para produzir cada um dos tipos de farinha o produto bruto passa por três processos: seleção, processamento e embalagem. O tempo necessário (em horas), para cada processo, para produzir uma saca de farinha, é dado na tabela.

Farinha/Processo	Seleção	Processamento	Embalagem
Mandioca	1	3	1
Milho	2	5	1
Trigo	1,5	4	1

(a) Encontre uma transformação linear que descreve o tempo necessário para a produção de x Kg de mandioca, y Kg de milho e z Kg de trigo.

(b) Encontre uma transformação linear que descreve o custo de produção de x Kg de mandioca, y Kg de milho e z Kg de trigo, de acordo com a tabela.

Seleção	Processamento	Embalagem
3	2	1

13) Em uma região, cerca de 10% da população urbana se mudam para os subúrbios vizinhos a cada ano e cerca de 20% da população suburbana se mudam para a cidade. Em 2020, existiam 100.000 residentes na cidade e 200.000 nos subúrbios.

(a) Monte uma equação de diferenças ($x_{k+1} = Mx_k, k \geq 0$) que descreve essa situação, em que x_0 é a população inicial em 2020.

(b) Obtenha uma estimativa da população na cidade e nos subúrbios dois anos mais tarde, em 2022.

14) Determine $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,0)$ e $T(1,-1) = (2,1,2)$.

15) Determine $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,1) = (1,0), T(1,-1,0) = (2,1)$ e $T(0,1,1) = (0,1)$.

16) Seja o operador linear do $\mathbb{R}^3$ definido pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, determine:

(a) A imagem dos vetores $(1,1,1), (1,0,1), (-1,2,1)$ por T.

(b) O núcleo do operador linear.

(c) O operador inverso T^{-1}.

(d) A imagem dos vetores $(0,0,1), (1,0,0), (2,-1,1)$ por T^{-1}.

17) Seja o operador linear do $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (2x - y, x - y)$.

(a) Encontre a matriz A de T tal que $T(X) = AX$.

(b) Justifique por que T é um inversível e encontre a transformação inversa de T.

(c) Encontre um vetor X cuja imagem, por T, seja o vetor $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Represente, geometricamente, a imagem por T do triângulo de vértices $O = (0,0)$, $A = (1,2)$ e $B = (2,1)$. Represente o triângulo OAB e a imagem do triângulo por T.

18) Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definidas por:

(a) $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

(b) $T(x, y, z) = (x - 2z, 2y, -x)$

(c) $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z)$

Determine:

(i) o núcleo de T, uma base para este subespaço e a sua dimensão. T é injetora?

(ii) o espaço imagem de T, uma base para este subespaço e a sua dimensão. T é sobrejetora?

(iii) caso exista, o isomorfismo inverso.

19) Dada as transformações lineares $T : U \to V$, determine:

(i) a expressão genérica de T;

(ii) $N(T)$ e $Im(T)$;

(iii) bases para $N(T)$ e $Im(T)$;

(iv) T é injetora? É sobrejetora?

Em que:

(a) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3, T(-2, 3) = (-1, 0, 1), T(1, -2) = (0, -1, 0)$

(b) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, em que $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $C = \{(-1, 0), (0, -1)\}$

(c) $U = V = M_2(\mathbb{R}), T(X) = MX - XM$, em que $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20) Determine um operador linear T do $\mathbb{R}^3$ cujo o núcleo seja gerado por $(1, 2, -1)$ e $(1, -1, 0)$.

21) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja a imagem seja gerada por $(1, 3, -1, 2)$ e $(2, 0, 1, -1)$.

22) Em cada item, determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ tal que:

(a) O núcleo tenha dimensão 1.

(b) A imagem tenha dimensão 2.

(c) É injetora mas não sobrejetora.

(d) É sobrejetora mas não é injetora.

23) Sejam $u_1 = (1, 2, -1), u_2 = (-1, a, 1)$ e $u_3 = (1, b, 0)$, e T um operador linear do $\mathbb{R}^n$ tal que $ImT = [u_1, u_2, u_3]$.

(a) Para que valores de a, b o operador T será um isomorfismo?

(b) Quais os possíveis valores para a dimensão do núcleo de T.

24) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que:

(a) Se $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_r)\}$ é linearmente independente (LI) então $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI.

(b) Se $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI, então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_r)\}$ pode não ser LI.

(c) Se T é injetora e $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ é LI, então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_r)\}$ é LI.

25) Sejam a base $B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (-1,0)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(u_1) = (1,-1,0)$ e $T(u_2) = (1,0,2)$. Determine:

(a) $[T]_D^B$, em que $D = \{(1,-1,0), (1,0,2), (0,0,1))\}$.

(b) $T(v)$, sabendo-se que $[v]_B = (1,2)^T$.

(c) $[T(u)]_D$, sabendo-se que $u = (1,2)$.

(d) $[T]_C^B$, em que C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

(e) A expressão de T.

(f) A expressão de um operador linear G do $\mathbb{R}^2$, caso exista, tal que a $\dim N(T \circ G) = 1$.

26) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear entre espaços vetoriais U e V. Mostre que:

(a) $T((0)_U) = (0)_V$, em que $(0)_U$ e $(0)_V$ são os vetores nulos de U e V, respectivamente.

(b) $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, para todo $u, v \in U$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

27) Determine um operador do $\mathbb{R}^3$ que leva o ponto (x, y, z) em sua reflexão em relação ao plano xy.

28) Seja $T : U \to V$ uma transformação linear entre espaços vetoriais U e V. Mostre que $N(T)$ e ImT são subespaços respectivamente de U e de V.

29) Seja $T : U \to \mathbb{R}^5$ uma transformação linear entre os espaços U e $\mathbb{R}^5$.

(a) Se T é sobrejetora e $\dim N(T) = 2$, qual a $\dim U$?

(b) Se T é bijetora, qual a $\dim U$?

30) Sejam S o operador do $\mathbb{R}^2$ que leva um ponto (a, b) em sua reflexão em relação à reta $y = x$, e T o operador do $\mathbb{R}^2$ que leva um ponto (a, b) em sua reflexão em relação à reta $x = 0$. Determine:

(a) $S^{-1}(x, y)$

(b) $T^{-1}(x, y)$

(c) $(S \circ T)(x, y)$ e interprete geometricamente.

(d) $(T \circ S)(x, y)$ e interprete geometricamente.

31) Seja T o operador do $\mathbb{R}^2$ que leva um ponto (a, b) em sua reflexão em relação à reta $y = 3x$. Determine uma base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

32) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, em que $B = \{(1,1), (0,1)\}$ e $C = \{(0,3,0)\,(-1,0,0), (0,1,1)\}$.

33) Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares, tais que $T_1(x, y) = (3x - y, -3x + y)$ e $T_2(x, y) = (x + y, x, 2y)$.

(a) Determine $T_1 \circ T_2$

(b) Mostre que $T_1 \circ T_2$ é uma transformação linear.

(c) Mostre que $[T_1 \circ T_2]_B^C = [T_2]_B^C [T_1]_B^B$, em que B e C são bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Gabarito

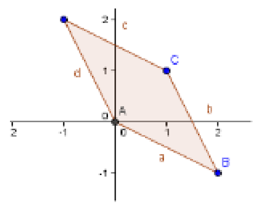
1) (a) sim
   (b) não
   (c) não

2) (a) $[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $[T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

3) (a) sim
   (b) sim
   (c) não

4) (a) $T(1,1) = (1,2) e T(2,-1) = (5,1)$.
   (b) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (2x-y, x+y) = (0,0)\} = \{(0,0)\}$. Logo, $V = \{(0,0)\}$

5) A imagem é o losango de vértices $(0,0), (-1,2), (2,-1) e (1,1)$.



6) (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

7) (a) $T(x,y,z) = (x - y - 2z, 2x + y - 3z)$
   (b) $T(1,2,-1) = (1,7)$

8) $T(2u) = (4,0), T(3v) = (3,-12). T(2u+3v) = (7,-12)$

9) (a) $T(x,y) = (-y,-x)$
   (b) $T(x,y) = (-x,-y)$
   (c) $T(x,y) = (0,y)$
   (d) $T(x,y) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + y)$

10) (a) São produzidos 3200kg, 950kg e 1500kg, respectivamente, de dióxido de enxofre, óxido nítrico e partículas.
   (b) $T(x,y,z) = (1300x + 200y, 100x + 250y, 150x + 400y)$.
   (c) $C(x,y,z) = 8(1300x + 200y) + 5(100x + 250y) + 10(150x + 400y) = 50(248x + 137y)$.

11) (a) $T(x,y) = (2x + 3y, 2x + 4y)$, em que x é o número de cadeiras e y de mesas a serem fabricadas.

(b) $T(80,20)=(220,240)$, isto é, serão necessárias 220 horas de montagem e 240 horas de acabamento na fabricação de 80 cadeiras e 20 mesas.

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 44 \\ 67 & 78 \end{bmatrix}$. Cada linha indica o custo de produção de cada produto em Belo Horizonte e em Ubá.

(d) $T(x,y)=(38x+67y, 44x+78y)$

(e) $T(80,20)=(4380,5080)$, ou seja, na fabricação de 80 cadeiras e 20 mesas, em BH serão gastos R\$ 4380,00 e, em Ubá, R\$ 5080,00.

12) (a) Dada a matriz com os dados $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1,5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz $A.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6.5 \end{bmatrix}$ indica em cada linha o tempo necessário para a produção de cada farinha. Portanto, $T(x,y,z)=(5x,8y,6.5z)$.

(b) A matriz $A.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 13.5 \end{bmatrix}$ indica em cada linha o custo de produção de cada farinha.
Logo, $T(x,y,z)=(10x,17y,13.5z)$.

13) (a) $x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} x_k$, $k \geq 0$ e $x_k = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) $x_2 = \begin{pmatrix} 151.000 \\ 149.000 \end{pmatrix}$. Em 2022: 151.000 residentes na cidade e 149.000 residentes nos subúrbios.

14) $T(x,y)=(\frac{3x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, x-y)$

15) $T(x,y,z)=(x-y+z, -x-2y+3z)$

16) (a) $T(1,1,1)=(4,3,1); T(1,0,1)=(2,2,2)$ e $T(1,2,1)=(4,4,4)$.

(b) $N(T)=\{(0,0,0)\}$

(c) $T^{-1}(x,y,z)=\frac{1}{8}(2x-y+3z, 4x-2y-2z, -2x+5y+z)$

(d) $T^{-1}(0,0,1)=\frac{1}{8}(3,-2,1), T^{-1}(1,0,0)=\frac{1}{4}(1,2,-1), T^{-1}(2,-1,1)=(1,1,-1)$

17) (a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\det(A)=-1 \neq 0$. Logo T é inversível e $T^{-1}(x,y)=(x-y, x-2y)$.

(c) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) É o triângulo de vértices $(0,0),(0,-1),(3,1)$.

18) (a) (i) $N(T)=\{(0,0)\}$, $\beta_{N(T)}=\emptyset$, $\dim N(T)=0$. T é injetora.

(ii) $Im(T)=\{(x+y,x,2y); x,y \in I\!R\}=[(1,1,0),(1,0,2)]$, $\beta_{Im(T)}=\{(1,1,0),(1,0,2)\}$, $\dim Im(T)=2$. T não é sobrejetora.

(iii) O operador não é invertível.

(iv) Não é possível compor as funções.

(b) (i) $N(T)=\{(0,0,0)\}$, $B_{N(T)}=\emptyset$, $\dim N(T)=0$. Portanto, T é injetora.

(ii) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim ImT=3=\dim\mathbb{R}^3$. Portanto, T é sobrejetora. Uma base de ImT pode ser a base canônica $\mathbb{R}^3$.

(iii) T é bijetora. O operador inverso de T é operador do $\mathbb{R}^3$ tal que $T^{-1}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(2z, -y, x+z)$.

(c) (i) $N(T) = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / x = 14y, y = 4z\}$, $\beta_{N(T)} = \{(14,4,1)\}$, $\dim N(T) = 1$. T não é injetora.

(ii) $\dim N(T) = 0, ImT = \mathbb{R}^3$. T. T é bijetora. $T^{-1}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(z,-y,x+z)$.

(iii) $Im(T) = \{(x-3y-2z, y-4z); x,y \in I\!R\} = [(1,0),(-3,1),(-2,-4)] = [(1,0),(-3,1)]$, $\beta_{Im(T)} = \{(1,0),(-3,1)\}$, $\dim Im(T) = 2$. T é sobrejetora mas não sobrejetora.

19) (a) $T(x,y) = (2x+y, 3x+2y, -2x-y)$, $N(T) = \{(0,0)\}$, $\beta_{N(T)} = \emptyset$, $\dim N(T) = 0$. T é injetora. $Im(T) = \{(2x+y, 3x+2y, -2x-y); x,y \in I\!R\} = [(2,3,-2),(1,2,-1)]$, $\beta_{Im(T)} = \{(2,3,-2),(1,2,-1)\}$, $\dim Im(T) = 2$. T não é sobrejetora.

(b) $T(x,y,z) = (-2y+z, -x+y)$, $N(T) = \{(x,y,z) \in I\!R^3 / x = y, z = 2y\}$, $\beta_{N(T)} = \{(1,1,2)\}$, $\dim N(T) = 1$. T não é injetora. $Im(T) = \{(-2y+z, -x+y); x,y \in I\!R\} = [(0,-1),(-2,1),(1,0)]$, $\beta_{Im(T)} = \{(0,-1),(1,0)\}$, $\dim Im(T) = 2$. T é sobrejetora.

(c) $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z & 2t-2x \\ 0 & -2z \end{pmatrix}$, $N(T) = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(I\!R) : x = t, z = 0\right\}$, $\beta_{N(T)} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim N(T) = 2$. T não é injetora.

20) $T(x,y) = (x+y+3z, 0, 0)$.

21) $T(x,y,z) = (x+2y, 3x, -x+y, 2x-y)$.

22)

23) (a) $a \neq -2, b \in \mathbb{R}$

(b) Pelo Teorema do núcleo e da imagem, $\dim N(T) = 0$ (se $a \neq -2$) ou $\dim N(T) = 1$(se $a = -2$).

24)

25) (a) $[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $T(v) = (3,-1,4)$

(c) $[T(u)]_D = (2,1)^T$

(d) $[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $T(x,y) = (-x+2y, -y, -2x+2y)$

(f) Por exemplo, tome G tal que $G(x,y) = (x,0)$.

26) (a)

(b)

27) $T(x,y,z) = (x,y,-z)$

28)

29) (a) $\dim V = 7$

(b) $\dim V = 5$

30) (a) $S^{-1}(x,y) = S(x,y) = (y,x)$

(b) $T^{-1}(x,y) = T(x,y) = (-x,y)$

(c) $(S \circ T)(x,y) = (y,-x)$ (rotação de 90^o no sentido horário)

(d) $(T \circ S)(x,y) = (-y,x)$ (rotação de 90^o no sentido anti-horário)

31) $B = \{(1,3),(-3,1)\}$

32) $T(x,y) = (x,-10x+9y,-4x+3y)$

33) (a) $(T2 \circ T1)(x,y) = (0,3x-y,-6x+2y)$