P1 - MAT 135 - LUÍSA DE SOUZA FERREIRA 102026

1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2}{\sim}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \leftarrow -L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\sim}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$. Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ //

2) a) $A_{31} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right]$ $\det A_{31} = 0 + 0 - 4 - 0 - 0 + 3$

$\det A_{31} = -1$ //

(Por regra de Sarrus)

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ← Utilizando Laplace na terceira linha para descobrir o determinante:

$\det(A) = (-1)(-1)^{3+1} \cdot \det A_{31} + (3)(-1)^{3+2} \cdot \det A_{32} + \cancel{(0)(-1)^{3+3} \cdot \det A_{33}}^{\,0} + \cancel{(0) \cdot (-1)^{3+4} \det A_{34}}^{\,0}$

$\det(A) = (-1)(1)(-1) + 3(-1) \cdot \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right]$ $\det A_{32} = 0 + 0 - 8 - 0 - 0 + 6$

$\det A_{32} = -2$

(Por regra de Sarrus)

$\det(A) = 1 + 3(-1)(-2) = 1 + 6 = 7$ //

3) a) $A \cdot A^T - 2I$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4+1 & 2-1 \\ 2-1 & 1+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} //$$

b) $A = LU$!

$$A^\circ = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \underbrace{(-1/2)}_{-m_1} L_1 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore A = L.U$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} //$$

4- a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{Matriz ampliada escalonada do sistema } Ax = 0$$

Para analisarmos o posto e a nulidade de uma matriz, é preciso reduzí-la à forma escada:

Digitalizado com CamScanner

4-a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim_{L_1 \leftarrow -L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

I II

Seja pc o posto da matriz dos coeficientes, ou seja, o número de linhas não-nulas de I e pa o posto da matriz ampliada, ou seja, número de linhas não-nulas de II

$$2 = pc = pa < \underbrace{\text{número de incógnitas}}_{=4}$$

Se o pc é igual ao pa mas menor que o número de incógnitas do sistema, ele é classificado como sistema possível e indeterminado, tendo INFINITAS SOLUÇÕES!

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \\ z + 2t = 0 \therefore z = -2t \end{cases}$

$x + 2y - 2t - t = 0$

$x + 2y = +3t$

$x = -2y + 3t$

$S = \{(-2y - 3t, y, -2t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}$ //

c) Seja $y = -1$ e $t = 1$;

$S = \{(-2y + 3t, y, -2t, t)\} = \{(5, -1, -2, 1)\}$

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 0 \rightarrow 5 - 2 - 2 - 1 = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark \\ x + 2y + 2z + t = 0 \rightarrow 5 - 2 - 4 + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark \\ -x - 2y \quad + 3t = 0 \rightarrow -5 + 2 + 3 = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark \end{cases}$$

LOGO, UMA SOLUÇÃO NÃO-NULA DE $Ax = 0 \rightarrow S = \{(5, -1, -2, 1)\}$ //

5 - a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 1.5y + 2.5y = 12 \end{cases}$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1.5 & 2.5 & 12 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow -L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & 6 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 1/2y + 3/2z = 6 \therefore y = \dfrac{6 - \frac{3}{2}z}{1/2} = 2(6 - \frac{3}{2}z) = 12 - 3z \end{cases}$

$x + y + z = 6 \leftrightarrow x + 12 - 3z + z = 6 \leftrightarrow x = -6 + 2z$

$S = \{(-6 + 2z, 12 - 3z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$

c) Se $z = 1$:
$S = \{(-4, 9, 1)\}$ X número negativo não é solução

• Se $z = 2$
$S = \{(-2, 6, 2)\}$ X número negativo não é solução

• Se $z = 3$
$S = \{(0, 3, 3)\}$ V satisfaz as equações

• Se $z = 4$
$S = \{(2, 0, 4)\}$ V satisfaz as equações

• Se $z = 5$
$S = \{(4, -3, 5)\}$ X número negativo não é solução

Se $z > 5 \rightarrow y < 0$, logo as soluções possíveis do sistema são:
$S_1 = \{(0, 3, 3)\}$ e $S_2 = \{(2, 0, 4)\}$

5d) $C = 1000x + 2000y + 3000z$

$S_1 = \{(0,3,3)\}$

$C = \cancel{1000}(0) + 2000(3) + 3000(3)$

$C = 6000 + 9000 = 15000$ reais

$S_2 = \{(2,0,4)\}$

$C = 1000(2) + \cancel{2000}(0) + 3000(4)$

$C = 2000 + 12000 = 14000$ reais

Logo, para fornecer o menor custo é preciso ser transportado 2 toneladas do produto A, 0 do produto B e 4 do produto C. $S = \{(2,0,4)\}$

6) a) Falso!

Seja $A = B^{-1} \cdot (B^T)^2$,

$\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$

$\det(B^T) = \det(B)$

$\det(A) = \det[B^{-1} \cdot (B^T)^2] = \det(B^{-1}) \cdot (\det(B^T))^2 = \frac{1}{\cancel{\det(B)}} \cdot [\det(B)]^2 = \det(B)$

$C = 2B^{-1}(B^T)^2 \leftrightarrow C = 2A$

$\det(C) = \det(2A)$

$\det(C) = 2^3 \det(B) = 8 \cdot (-2) = -16 \neq 8$, portanto FALSO!

b) Falso!

$(A - 2I)u = 0 \;/\; u \neq 0 \rightarrow A^2 u = 4u$

$Au - 2Iu = 0$

$Aw = 2Iw$

$(Aw)^2 = (2w)^2$

$A^2 w^2 = 4w^2 \neq A^2 w = 4u$

c) Verdadeiro!

$A^{-1} = A - I \rightarrow A^2 = A + I$

$A^{-1} \cdot A \cdot A = A^{-1}(A + I)$

$A = A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot I$

$A = I_n + A^{-1}$

$A^{-1} = A - I_n$

d) Falso!

Nem sempre $A \cdot A = 0 \rightarrow A = 0$, suponha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$.

$A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$