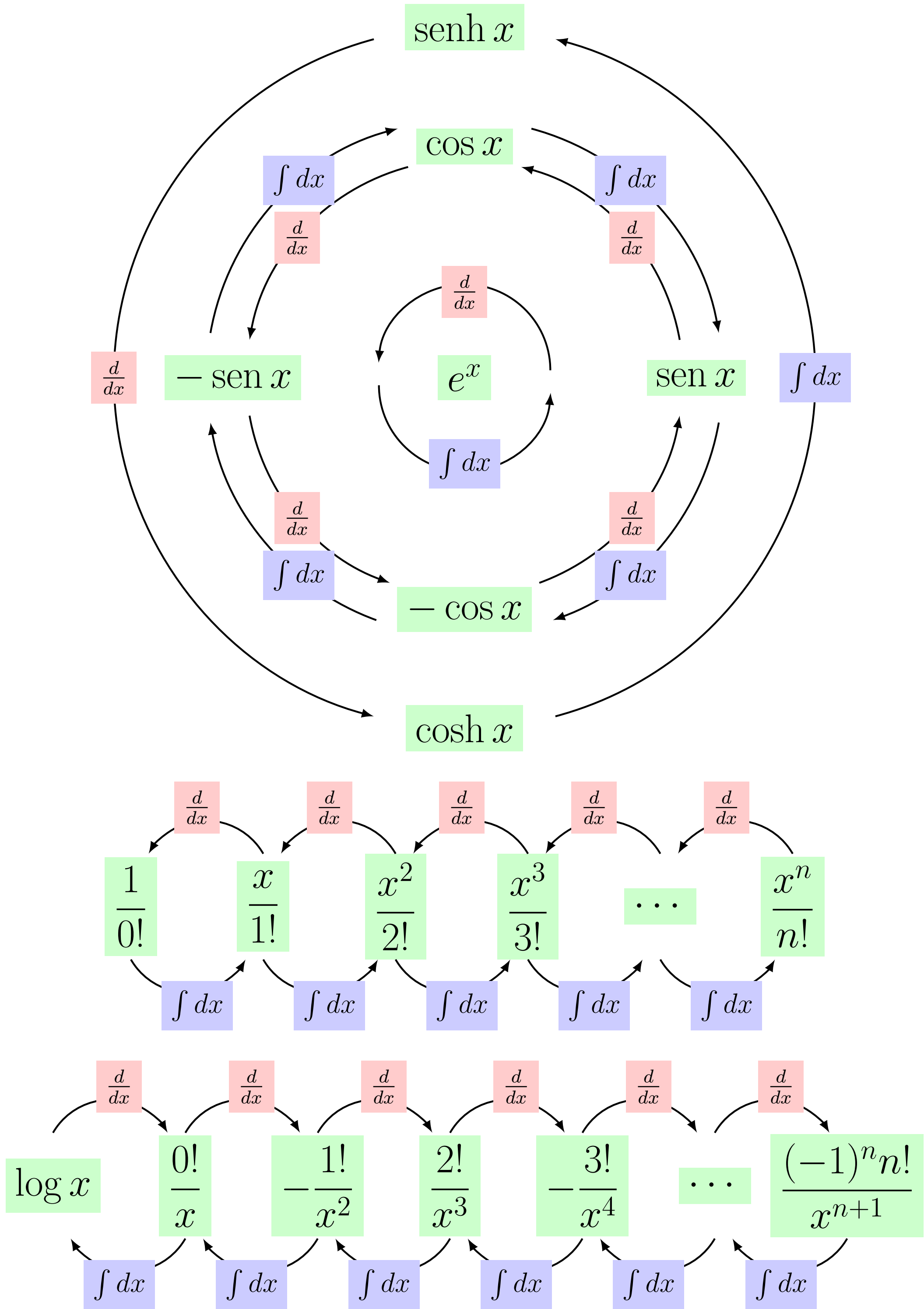
Curso de Cálculo de Uma Variável

Terceira Edição



Marco Cabral

Curso de Cálculo de Uma Variável

Terceira Edição
1 de Agosto de 2013

Marco Aurélio Palumbo Cabral
PhD em Matemática pela Indiana University — EUA
Professor do Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil

Ficha Catalográfica

Cabral, Marco A. P.
Curso de Cálculo de Uma Variável / Marco Cabral - Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, 2010.

1. Cálculo I. Título
CDD: 512.5
516.3

ISBN XX-XXXX-XXX-X

Sobre o Autor

Marco Aurélio Palumbo Cabral é carioca (natural do Rio de Janeiro) e tricolor (torcedor do fluminense).

Fez o Bacharelado em Informática na UFRJ, o Mestrado em Matemática Aplicada na UFRJ e o Doutorado em Matemática na Indiana University (Bloomington, EUA).

É professor no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro desde 1996, atuando na graduação e na pós-graduação. Suas áreas de interesse são equações diferenciais parciais (EDP), Análise Numérica e Finanças.

Agradecimentos

Primeiro aos alunos dos cursos de Cálculo, pelas erros detectados e pelas perguntas em sala de aula que inspiraram várias ideias para este livro. Aos alunos José Guilherme T. Monteiro (Engenharia de Controle e Automação UFRJ – turma 2011) e Joshua Silveira Kritz (Matemática Aplicada UFRJ – turma 2013) pelas inúmeras correções de erros.

Aos professores do IM–UFRJ que colaboraram de forma direta e indireta para este projeto.

Aos programadores que criaram os programas que permitiram a produção deste material. Este produto é herdeiro da cultura GPL (Gnu Public License), que permite o reuso de código fonte. Agradecemos:

- em primeiro lugar, Douglas Knuth pelo TEX, software que permite que este material seja tão bonito;
- Leslie Lamport pelo LATEX, pacote baseado no TEX;
- Linus Torvalds pelo kernel do sistema operacional GNU-Linux;
- Richard Stallman, responsável pelo projeto GNU, pelos diversos programas do sistema operacional GNU-Linux e milhares de pessoas por dezenas de softwares utilizados: `tar` (compactação de arquivos), `make` (gerenciador de programa), `aspell` (corretor ortográfico), `grep`, `find`, `ghostview`, `xpdf`, ...;
- Mark Shuttleworth criador da distribuição do Linux que utilizei para produzir este livro;
- Bram Moolenaar pelo (editor de texto);
- Till Tantau pelo `TikZ` e `PGF` e Supoj Sutanthavibul, Brian Smith, Paul King e outros pelo `Xfig`, que possibilitaram a geração de gráficos tão bonitos;
- Raimundo dos Santos Moura pelo `vero` (Verificador Ortográfico em português);

- a WIKIPEDIA The Free Encyclopedia e seus milhões de colaboradores, por algumas figuras e ideias utilizadas em vários exemplos.

Prefácio

> Todo aspecto deste livro foi influenciado pelo desejo de apresentar o Cálculo não somente como um prelúdio, mas como um primeiro encontro real com a Matemática. (...) Além de desenvolver a intuição do estudante sobre os belos conceitos de Análise, é certamente igualmente importante persuadi-los que a precisão e o rigor — embora não sejam um fim em si mesmo — são o meio natural para formular e pensar sobre questões matemáticas. (Prefácio do livro de Cálculo do Spivak [Sp], em tradução livre)

Para o estudante

Este livro tem como foco o aluno e suas dificuldades, tratando-os de forma inteligente. No texto colocamos em destaque, dentro de uma caixa de texto:

(a) dúvidas de **Pré-Cálculo** incorporadas diretamente aos conceitos de Cálculo, ao invés de apresentadas em Capítulo inicial de revisão, recurso didático desmotivante para o aluno (e para o Professor);

(b) **Erros Comuns** cometidos pelos alunos.

Além de diversos livros modernos de cálculo, recomendamos a consulta e leitura de livros (mais antigos) clássicos de Cálculo:
(a) Courant [Co]: Differential and Integral Calculus vol. 1(1934);
(b) Spivak [Sp]: Calculus (1967);
(c) Apostol [Ap2]: Calculus Vol. 1 (1967).

Recomendo **fortemente** que os alunos que tenham seu interesse despertado utilizem o livro de Cálculo do Spivak. É interessante também folhear sem compromisso o livro do Courant. Experimente ler o capítulo sobre limites do livro do Spivak. Experimente ler sobre a fórmula de Stirling (fatorial) no livro do Courant. Você corre o risco de ficar fascinado pelo Cálculo.

(c) Livros de Análise Real, a teoria que fundamenta a matemática: Neri e Cabral [NC] "Curso de Análise Real" (disponível online em `www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros`). Para a fundamentação teórica do Cálculo é necessário estudar análise, curso que alguns de vocês podem querer fazer depois do Cálculo.

(d) Livros de Divulgação Matemática:
— Courant, R.; Robbins, H.. O que é Matemática? Editora Ciência Moderna, 2000.
— Polya, G.; A arte de resolver problemas. Editora Interciência.
— Kasner, E.; Newman, J.; Matemática e Imaginação. Jorge Zahar.
— Davis, Philip J.; Hersh, Reuben; A Experiência Matemática. Editora Francisco Alves (1985).

Estas leituras vão abrir um pouco os horizontes. São todos clássicos. Incluem todo tipo de Matemática, passando por lógica, números, topologia, teoria da computação, filosofia da matemática.

É parte fundamental do aprendizado de Matemática resolver exercícios, tantos quanto for possível. Deve-se tentar resolver os Exemplos que aparecem ao longo do texto. Ao final de cada capítulo existem exercícios, **todos** com solução e resposta no final do livro, divididos em 4 grupos:

- Exercícios de Fixação: Devem ser feitos imediatamente após a leitura do texto. São de resposta curta. Não saber resposta correta sugere um retorno ao texto. Deve-se fazer todos antes de seguir adiante.
- Problemas: São os principais exercícios do capítulo. Todos (ou quase) devem ser feitos.
- Problemas Extras: Caso o aluno tenha feito todos os problemas e deseje mais prática.
- Desafios: Para se aprofundar na disciplina. São opcionais.

Seções marcadas por uma estrela $\star$ são opcionais.

Para o Professor

Com a massificação do ensino de Cálculo é necessário mudar os paradigmas de avaliação. Para isto, a escolha do tipo de exercício é importante. É comum cobrar em avaliações exercícios do tipo "Determine o cilindro com maior volume inscrito ...". Para avaliação em massa é melhor separar em itens independentes a modelagem (determine a função e o intervalo onde ela deve ser maximizada) da resolução (determine o máximo da função f no intervalo). Mais ainda, deve-se cobrar a aplicação dos Teoremas corretos que garantem a existência do máximo (Teorema do Valor Extremo) em intervalos fechados e limitados e métodos para determinar máximo em intervalo aberto ou ilimitado.

O mesmo vale para cálculo de áreas e volumes. Deve-se pedir a integral (ou soma de integrais) que determinam a área ou volume. A integração em si deve ser um exercício à parte.

No esboço de gráficos de funções racionais é melhor fornecer a derivada e a derivada segunda. Embora seja fácil calcular, é fácil errar um sinal ou outro, prejudicando toda a questão. Deve-se cobrar derivar em questão à parte.

Além disso, deve-se colocar mais ênfase na formação de conceitos e entendimento dos Teoremas. Isto passa por exercícios de natureza conceitual: Verdadeiro ou Falso, dê exemplo ou contraexemplo, etc.

Por que um novo livro?

- A escolha da licença do tipo `copyleft` (o contrário do `copyright`) é parte fundamental deste projeto. A licença Creative Commons Atribuição (BY) — Uso Não-Comercial (NC) — Compartilhamento pela mesma Licença permite que outros possam copiar ou redistribuir esta obra sem fins comerciais, adaptar e criar obras derivadas sobre esta obra sem fins comerciais, contanto que atribuam crédito ao autor e distribuam a obra resultante sob a mesma licença, ou sob uma licença similar à presente. Desta forma este livro poderá ser aperfeiçoado daqui por diante, ao invés de todo esforço envolvido se perder caso o livro pare de ser editado. Para detalhes consulte:

`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/br/`. Isto incentiva também a colaboração com o projeto, pois o esforço investido será revertido para toda humanidade. Mande sugestões, erros e solicite o fonte (latex) para o autor Marco Cabral em `mapcabral (at) ufrj (dot) br`.

- Permitir aos alunos de todo o Brasil acesso fácil (internet) e grátis;

- O material de pré-cálculo está disseminado ao longo do texto, dentro dos capítulos de limite, derivada e integral. A solução usual de incluir um capítulo inicial somente com pré-cálculo é pouco motivante, o que faz com que frequentemente seja ignorado pelos alunos e professores. É nosso desejo também que o aluno comece a aprender cálculo desde o primeiro dia de aula.

- Os exercícios são por capítulo, evitando exercícios desintegrados. Exercícios por Seção tendem a cobrir pouco material e treinar o aluno numa única técnica.

- É fundamental que o livro seja pequeno para que alunos leiam o texto e que a quantidade de exercícios seja razoável, para não desencorajar os alunos. A tentação é grande de colocar muitos tópicos. Por esta razão os livros de Cálculo chegam a ter 500 ou mais páginas. Mas hoje em dia é desnecessário colocar detalhes de tópicos pois podemos remeter os alunos para a internet. Levantamos diversos tópicos em observações ao longo do texto e nos Desafios de final de capítulo.

- Criar um pacote completo, com livro texto, exercícios (com respostas) e transparências para um curso de Cálculo.

Como foi escolhido o material?

Determinamos os tópicos tomando por base o curso usualmente ministrado na UFRJ. Além disso o componente estético foi fundamental: os alunos devem perceber a beleza da Matemática. Algumas escolhas importantes foram feitas:

- material de pré-cálculo está disseminado pelos diversos capítulos do livro, ao invés de colocado no primeiro capítulo. Por exemplo, optamos por colocar os tópicos:
  - modelagem: na Seção de max/min;
  - composição e inversa de funções: na Seção de regra da derivada da cadeia e da inversa;
  - equação da reta: no início do Capítulo de Derivada;
  - análise de sinal de funções (desigualdades): no Capítulo de Limites, na seção de limites no infinito;
  - translação de gráfico, função definida por partes: no Capítulo de Limites;
  - log/exp: na parte de Limites e de novo na de derivada da composta e função inversa.

- O limite fundamental trigonométrico ($\operatorname{sen}(x)/x$ quando $x \to 0$) é apresentado no final do Capítulo de Limites como uma das aplicações do Teorema do sanduíche (ou confronto). É um resultado bonito que merece o devido destaque, ao invés da opção usual de apresentá-lo como mero passo de cálculo da derivada do seno.

- Definimos o número e (base do logaritmo natural) através do limite $(1+h)^{1/h}$ quando $h \to 0$ no final do Capítulo de Limite. Conectamos com aplicações da exponencial: juros compostos contínuos, crescimento populacional, decaimento radioativo. É um resultado bonito que merece o devido destaque, ao invés da opção usual de apresentá-lo como mero passo de cálculo da derivada do logaritmo ou da exponencial. Outra opção, ainda menos feliz, é adiar isto, juntamente com a definição do logaritmo, para depois do Capítulo de Integral. Isto não impede que se faça a definição do log com integral depois.

- Esboço de gráfico de função aparece logo no início, no Capítulo de Limites (com foco em funções racionais). Vai reaparecer depois no Capítulo de Aplicações da Derivada.

- O cálculo de volume de sólidos é feito com somente uma técnica: Cavalieri. A técnica para sólidos de revolução é uma mera aplicação de Cavalieri.

- Provamos (ou indicamos a prova) de todos os Teoremas interessantes, com padrão de rigor variável, acessível aos estudantes.

- Apresentamos através de Lemas e Teoremas, com demonstração, as técnicas de integração, não somente por substituição e por partes como também para substituição trigonométrica e frações parciais. Creio que o Teorema de integração trigonométrica não tenha aparecido anteriormente em livro algum de Cálculo.

Sobre a Segunda Edição

Na segunda edição (outubro de 2011) acrescentamos no Capítulo de Integral seções de integração e substituição trigonométrica e da teoria da decomposição por frações parciais. Tratamos de Integração Trigonométrica através de um Teorema, ao invés do modo usual, através de truques. Reescrevemos a Seção de Integração de Funções Racionais. Acrescentamos muitos exercícios de Desafio. Além disso corrigimos os erros detectados no texto.

Sobre a Terceira Edição

Na terceira edição (agosto de 2013) foram retirados pequenos erros, gerado pdf com links, melhorado o sistema de numeração dos exercícios e incluído índice remissivo. Foi reescrita a Seção Funções Transcendentes e Raiz. Colocamos a Seção de Derivação Implícita no Capítulo de Derivada. Foi incluído exercícios de integração por cascas cilíndricas.

Sumário

Capítulo 1

Limite

> O conceito de limite é certamente o mais importante e provavelmente o mais difícil de todo o Cálculo. (...) O que definimos neste Capítulo não é a palavra **limite**, e sim a noção de uma função se aproximando de um limite. [Sp, p.72]

Objetivos: Apresentar o conceito de limite e diversos tipos de funções: exponencial, logaritmo, raiz e translações destas; funções definidas por partes; funções mais complicadas como $I_{\mathbb{Q}}$ (função indicadora dos racionais) e $\operatorname{sen}(1/x)$.

Apresentar o material de pré-cálculo **integrado** com limites por ser mais motivador e funcional com prática de sala de aula. Introduzir assíntotas (verticais e horizontais) e ensinar a esboçar gráficos de funções racionais logo no primeiro capítulo.

Destacar, apresentando como um lema, a técnica de mudança de variáveis do limite, que é uma prévia da mudança de variáveis na integral. Apresentar limite fundamental do seno e da exponencial (o limite que define o número e).

1.1 Softwares Gratuitos e o Cálculo

É interessante utilizar softwares para aprender Cálculo. Apresentamos alguns softwares gratuitos que podem ser utilizadas no Windows e no Linux (Ubuntu, Debian, etc.):

- `fooplot` é um site com software que permite visualizar gráficos.
- `KmPlot`: Software de visualização de gráficos de funções nativo do Linux.
- `Winplot`: Software de visualização de gráficos de funções nativo do Windows mas que roda com emulação do Wine no Linux. Pode-se visualizar gráficos 2D e 3D dados por função, parametrização explicita e implícita. Pode-se fazer animações.
- `WxMaxima`: Software de computação algébrica. Calcula, de forma exata, limites, derivadas e integrais (entre outras centenas de coisas). Um exemplo é o limite fundamental: `limit(sin(x)/x, x, 0);`. Calcula também limites laterais: `limit(exp(1/x), x, 0,minus);` (esquerda) `limit(exp(1/x), x, 0,plus);` (direita).

Utilize estes softwares para visualizar funções que apresentamos nos exemplos.

1.2 Definição de Limite

Dada uma função real f estamos interessados em saber o que acontece com o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de um ponto c sem, entretanto, assumir este valor. A definição de limite formaliza isto. O resto do capítulo será dedicado a entendermos a definição de limite.

Definição 1.1 (limite) *Seja f uma função real definida perto de $c \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente definida em c). Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c é igual a $L \in \mathbb{R}$, denotado por $\lim_{x \to c} f(x) = L$, se $f(x)$ fica tão próximo de L quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de c **mas** $x \neq c$. Escreve-se também que $f(x) \to L$ quando $x \to c$.*

Na definição de limite nos aproximamos de c pelos dois lados. Podemos definir o limite lateral, à esquerda e à direita, restringindo o lado em que ficamos próximos de c.

Definição 1.2 (limite lateral pela direita (esquerda)) *Considere uma função real f definida perto de $c \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente definida em c). Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela direita (esquerda) é igual a L, denotado por $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ ($\lim_{x \to c^-} f(x) = L$), se $f(x)$ fica tão próximo de $L \in \mathbb{R}$ quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de $c \in \mathbb{R}$ **mas** $x > c$ ($x < c$).*

Das definições acima segue o seguinte lema.

Lema 1.3 (limites e limites laterais) *Existe $\lim_{x \to c} f(x)$ se, e somente se, existem os limites laterais e $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$.*

Observação 1.1 *Valor da função no ponto **não** importa para o cálculo do limite. Desta forma o $\lim_{x \to c} f(x)$ não é necessariamente igual a $f(c)$. Pode ocorrer ainda:*
(a) do limite não existir; (b) da função não estar definida em c.
*Muitas vezes $f(x)$ se aproxima de $f(c)$ com x próximo de c. Neste caso, quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (o limite existe e é igual ao valor da função no ponto), dizemos que a função f é **contínua** em c (veja Definição 2.1 da p.45). São contínuas as funções que aprendemos no ensino médio $f(x) = x^2 - 3x - 4,\ \operatorname{sen} x,\ \tan x,\ \operatorname{arcsen} x,\ 10^x,\ \log_{10} x \ldots$*

Em Análise utilizamos o termo **vizinhança de** c ao invés de **próximo de** c.

Definição 1.4 (vizinhança) *Dado um $c \in \mathbb{R}$, uma **vizinhança de** c é um intervalo aberto $V = (a, b)$ contendo c, isto é, tal que $c \in V$.*

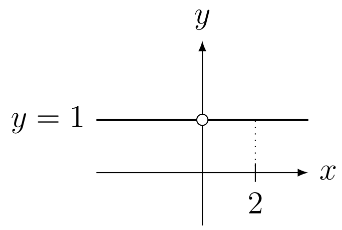
Observação 1.2 (vizinhança e limite) *Com a definição de vizinhança pode-se ver $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa: Dada vizinhança V qualquer de L, existe vizinhança W de c tal que se $x \in W$, mas $x \neq c$, então $f(x) \in V$.*

Observação 1.3 (definição rigorosa) *Apresentamos a definição informal (não-rigorosa, intuitiva) de limite. Veja Definição 2.16 da p.59 para definição **rigorosa**.*

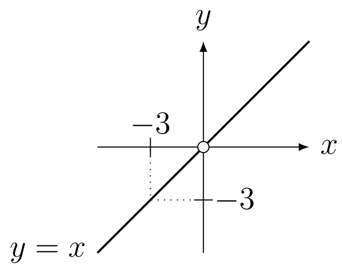
Exemplo 1.1 *Esboce o gráfico e determine (caso exista):*

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$; (b) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x}$; (c) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2}{x}$; (d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$; (e) $\lim_{x \to -2} \frac{x}{x^2}$; (f) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2}$.

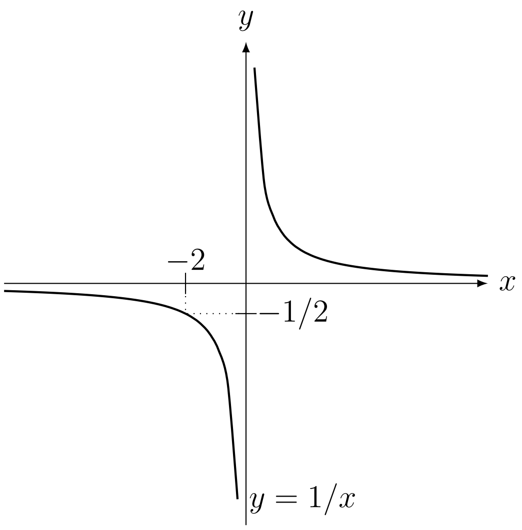
Solução: Para (a) e (b) $f(x) = x/x$ é uma função que vale 1 em todos os pontos a não ser em zero, pois f não está definida em 0 ($f(0) = 0/0!$), mas isto **não** afeta o valor do limite (veja o gráfico). Assim, os dois limites valem 1. Na verdade o limite é 1 para qualquer valor que x tenda.



Para (c) e (d), de forma similar ao anterior, $f(x) = x^2/x = x$ para todo $x \neq 0$. Em $x = 0$ a função f não está definida. Assim o gráfico (veja figura) é uma reta com um furo na origem. Assim, (c) é -3 e (d) 0.



Para (e) e (f), $f(x) = x/x^2 = 1/x$ para $x \neq 0$. Novamente, $f(0)$ não está definida (veja o gráfico). Assim (e) é $1/(-1/2) = -1/2$. Para (f) o limite não existe pois assume valores muito grandes e positivos, se tendermos pela direita, e muito grande e negativos, se tendermos pela esquerda.



■

Observação 1.4 *Quando empregar f ou $f(x)$? Tem diferença?*
A função é f, $f(x)$ é o valor da função calculada em x. Mais exatamente, f é função, $f(x)$ é um número. Frequentemente abusamos a linguagem e dizemos "a função $f(x) = x^2+3x$" quando o correto seria "a função f definida por $f(x) = x^2 + 3x$".
Na linguagem C este erro não seria perdoado pelo compilador: confundir f (ponteiro para função) com $f(x)$ (valor retornado pela função) (⌣̈).

Pré-Cálculo: Recorde o significado e como esboçar o gráfico de uma função definida por partes como por exemplo $f(x) = \begin{cases} 2; & x > 1; \\ -3; & x \leq 1. \end{cases}$

Exemplo 1.2 *Para cada item abaixo, esboce o gráfico de* $f(x)$ *e determine (caso existam)* $\lim_{x \to c^+} f(x)$, $\lim_{x \to c^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to c} f(x)$.

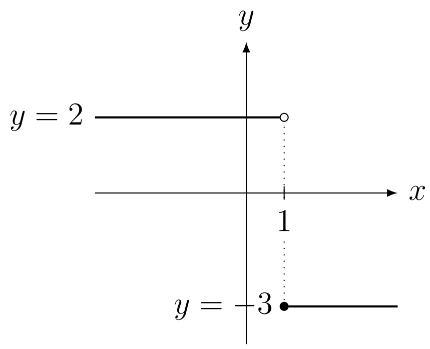
(a) $c = 0$, $c = 1$, $c = 0.9999$, $c = 1.0001$ *de* $f(x) = \begin{cases} 2; & x < 1; \\ -3; & x \geq 1. \end{cases}$

(b) $c = 2$, $c = 0$ *de* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}; & x \neq 0; \\ -2; & x = 0. \end{cases}$

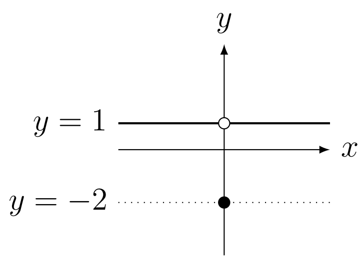
(c) $c = 0.0001$, $c = -0.0001$, $c = 0$, $f(x) = \begin{cases} -1; & x \neq 0; \\ 3; & x = 0. \end{cases}$

(d) $c = 0.99$, $c = 1.01$, $c = 1$ *de* $f(x) = \begin{cases} x; & x \leq 1; \\ 4 - x; & x > 1. \end{cases}$

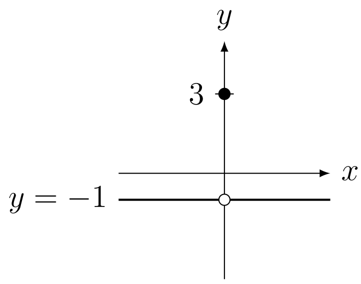
Solução: (a) A função vale 2 até $x = 1$ e depois vale -3 (veja gráfico abaixo). Assim quando $x \to 0$, que é longe de 1, tanto pela esquerda quando direita, $f(x) \to 2$. Agora, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = -3$ e portanto $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe pois $f(x)$ difere quando nos aproximamos pela esquerda ou direita do 1. Como $0.9999 < 1$, a função próxima (bem próxima mesmo!) de 0.9999 é constante igual a 2 pois estamos a esquerda do 1. Assim $\lim_{x \to 0.9999^+} f(x) = \lim_{x \to 0.9999^-} f(x) = \lim_{x \to 0.9999} f(x) = 2$. De forma análoga, $\lim_{x \to 1.001^+} f(x) = \lim_{x \to 1.001^-} f(x) = \lim_{x \to 1.001} f(x) = -3$.



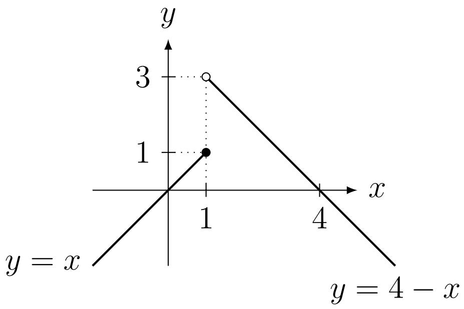
(b) Note que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 0$. No $x = 0$ não interessa o valor (que é $f(0) = -2$) para efeito do calculo do limite (veja gráfico abaixo). Assim o limite (incluindo os laterais) quando $x \to 2$ ou $x \to 0$ é sempre 1.



(c) Note que $f(x) = -1$ para todo $x \neq 0$. No $x = 0$ não interessa o valor (que é $f(0) = 3$) para efeito do calculo do limite (veja gráfico abaixo). Assim o limite (incluindo os laterais) quando $x \to 0.0001$ ou $x \to -0.0001$ ou $x \to 0$ é sempre -1.



(d) Como $0.99 < 1$, $f(x)$ para x próximo (bem próximo mesmo!) de 0.99 vale x (veja gráfico abaixo). Assim $\lim_{x\to 0.99^+} f(x) = \lim_{x\to 0.99^-} f(x) = \lim_{x\to 0.99} f(x) = 0.99$. Analogamente, como $1.01 > 1$, $f(x)$ para x próximo (bem próximo mesmo!) de 1.01 vale $4-x$. Assim, $\lim_{x\to 1.01^+} f(x) = \lim_{x\to 1.01^-} f(x) = \lim_{x\to 1.01} f(x) = 4 - 1.01 = 2.99$.



■

Observação 1.5 *A divisão $0/0$ gera limites interessantes. De forma geral deve-se eliminar raízes em comum do numerador e denominador. O limite pode ser qualquer coisa. Compare, por exemplo o valor de cada um destes limites entre si: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2}$. Pode-se eliminar raízes comuns no caso de quociente de polinômios ou então racionalizar.*

Pré-Cálculo: Manipular expressões algébricas, fatorar raízes, dividir polinômios e **Teorema D'Alembert**[1] : se c é raiz de um polinômio então $x-c$ é fator do polinômio (veja Teorema 5.20 da p.158). Ao invés do algoritmo de Briot[2]-Ruffini[3], utilize a divisão de polinômios por ser algoritmo fácil de se recordar, similar ao de divisão de inteiros.

Exemplo 1.3 *Determine os limites:*

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$; *(b)* $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$; *(c)* $\lim_{y\to 3} \dfrac{\frac{1}{y}-\frac{1}{3}}{y-3}$; *(d)* $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

(e) $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^2-t^3+t-1}{t^2-2t+1}$; *(f)* $\lim_{x\to -1} f(x)$ *se* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^6-1}{x+1}; & x \neq -1; \\ 4; & x = -1. \end{cases}$

Solução:

(a) Como 2 é raiz do numerador e denominador, pode-se dividir por $(x-2)$ ambos, obtendo-se $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$. Eliminando o fator comum, obtemos $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2-1}{2+2} = 1/4$.

(b) Dividindo-se x^3+1 por $x+1$ obtemos x^2-x+1. Logo, para $x \neq -1$, $\dfrac{x^3+1}{x+1} = x^2-x+1$. Logo o limite vale $(-1)^2-(-1)+1 = 3$.

[1] Jean Le Rond d'Alembert: ⋆1717 Paris, França — †1783 Paris, França.

[2] Charles Auguste Briot: ⋆1817 Doubs, França — †1882 Bourg-d'Ault, França.

[3] Paolo Ruffini: ⋆1765 Valentano, Itália — †1822 Modena, Itália.

(c) Primeiro expandimos o numerador obtendo $1/y - 1/3 = \dfrac{3-y}{3y}$. Portanto, $\dfrac{\frac{1}{y} - \frac{1}{3}}{y-3} = \dfrac{3-y}{3y}\frac{1}{y-3}$. Simplificando o fator $y-3$ do numerador e denominador obtemos $\dfrac{-1}{3y}$. Quando $y \to 3$ obtemos $-1/9$.

(d) Expandindo $(x+h)^3$ e subtraindo x^3 obtemos $3hx^2 + 3h^2x + h^3$. Dividindo por h (para $h \neq 0$) obtemos $3x^2 + 3hx + h^2$. Quando $h \to 0$, obtemos $3x^2$.

(e) Dividindo-se ambos por $t-1$ obtemos $\dfrac{(t-1)(1-t^2)}{(1-t)^2} = \dfrac{(t-1)(1-t)(1+t)}{(1-t)^2} = (-1)(1+t)$ para $t \neq 1$. Logo o limite é $(-1)(1+1) = -2$.

(f) O valor da função em $x = -1$ é irrelevante para efeito do cálculo do limite. Como $x = -1$ anula o numerador e o denominador, $x - (-1) = x+1$ é fator comum pelo Teorema de D'Alembert. Seguindo como em (b), dividindo $x^6 - 1$ por $x+1$ obtemos $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$. Quando $x \to -1$ obtemos $(-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -6$. ■

Pré-Cálculo: $\sqrt{9} \neq \pm 3$! Sempre, $\sqrt{x} \geq 0$, portanto, $\sqrt{9} = 3$ e $-\sqrt{9} = -3$. Com isso, $\sqrt{x^2} \neq x$, pois é falso para $x < 0$. Na verdade, $\sqrt{x^2} = |x|$. Mas $(\sqrt{x})^2 = x$ se $x > 0$ (se $x < 0$ a raiz quadrada não está definida).

Pré-Cálculo: O que é módulo de x?

(a) algebricamente, $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0; \\ -x; & x < 0. \end{cases}$

(b) geometricamente, a distância entre x e 0. De forma geral, $|x - c| = |c - x|$ é a distância entre x e c. Pode ser escrito como $|x - c| = \sqrt{(x-c)^2}$. Isto é generalizado pela distância entre dois pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ que denotamos (veja livro de geometria analítica) por $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$.

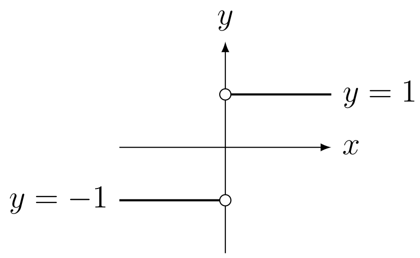
(c) graficamente, obtém-se o gráfico de $y = |f(x)|$ refletindo no eixo x os pontos do gráfico de $y = f(x)$ abaixo do eixo x (pontos onde $f(x) < 0$).

Exemplo 1.4 *Esboce o gráfico e determine (caso exista):*

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$; *(b)* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$; *(c)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} |x^2 - 9|$; *(d)* $\displaystyle\lim_{x \to -3} |x^2 - 9|$; *(e)* $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{|x^2 - 9|}{x+3}$;

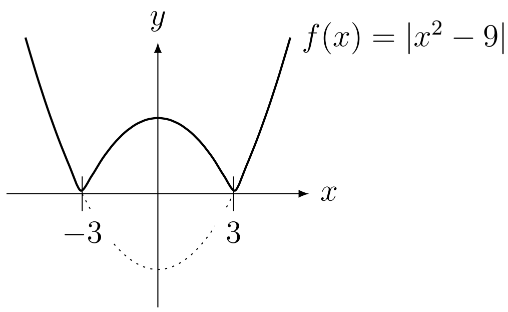
(f) $\displaystyle\lim_{x \to \pi^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|\operatorname{sen}(x)|}$; *(g)* $\displaystyle\lim_{x \to 2\pi^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{|\operatorname{sen}(x)|}$; *(h)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ *se* $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|; & x > 0 \\ -x + 1; & x \leq 0. \end{cases}$

Solução: (a) e (b): como $x/|x|$ vale 1 para $x > 0$ e -1 para $x < 0$ (veja gráfico abaixo), (a) -1 e (b) 1.

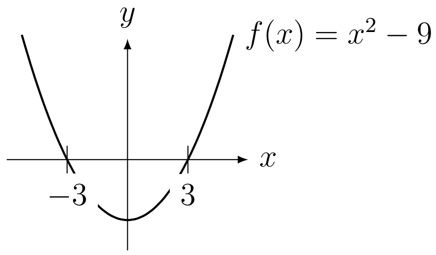


$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

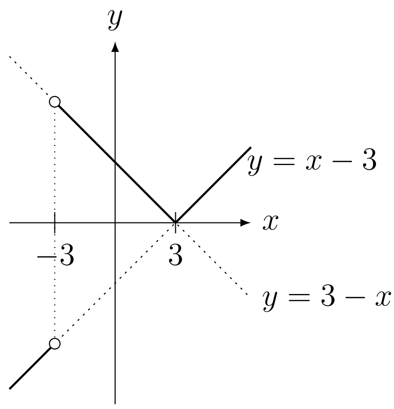
(c) e (d): Obtemos o gráfico de $|x^2 - 9|$ (veja figura abaixo) refletindo no eixo x o gráfico da parábola $x^2 - 9$ (indicada por linha pontilhada). Para calcular o limite, observe que em torno dos pontos $x = 0$ e $x = -3$ basta substituir o valor da função: (c) $|0^2 - 9| = |-9| = 9$. (d) $|(-3)^2 - 9| = |9 - 9| = 0$.



(e) Primeiro esboçamos o gráfico da parábola $x^2 - 9$.



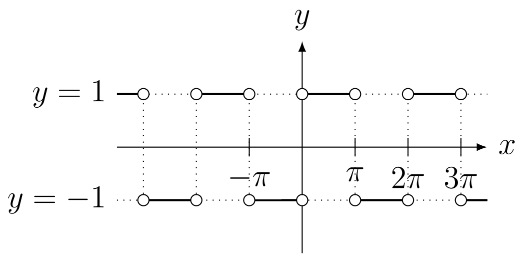
Assim para $x \notin (-3, 3)$, $|x^2 - 9| = x^2 - 9$ (pois a função é positiva) e para $x \in (-3, 3)$, $|x^2 - 9| = -(x^2 - 9) = 9 - x^2$ (pois a função é negativa). Portanto para $x \notin (-3, 3)$, $\dfrac{|x^2 - 9|}{x + 3} = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = \dfrac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = x - 3$ e para $x \in (-3, 3)$, $\dfrac{|x^2 - 9|}{x + 3} = \dfrac{9 - x^2}{x + 3} = \dfrac{(3 + x)(3 - x)}{x + 3} = 3 - x$. Portanto o gráfico de $\dfrac{|x^2 - 9|}{x + 3}$ é:



$$f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x + 3}$$

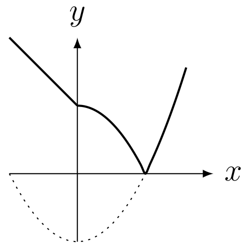
Note o salto que ocorre no gráfico em $x = -3$. Neste ponto a função não está definida pois aparece uma divisão por zero. Graficamente é claro que os limites laterais neste ponto são distintos. Como para x próximo de -3 mas $x < -3$ a função vale $x - 3$, o limite quando $x \to -3^-$ vale $(-3) - 3 = -6$. Como para x próximo de -3 mas $x > -3$ a função vale $3 - x$, o limite quando $x \to -3^+$ vale $3 - (-3) = 6$. Como os limites laterais são distintos, o limite não existe.

(f) e (g): a função alterna entre 1, se $\operatorname{sen}(x) > 0$, e -1, se $\operatorname{sen}(x) < 0$ conforme indicado no gráfico abaixo. Nos pontos onde $\operatorname{sen}(x) = 0$ ela não está definida. Assim (f) -1, (g) 1.



$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{|\operatorname{sen}(x)|}$$

(h) Obtemos o gráfico (vide figura) refletindo no eixo x o gráfico de $x^2 - 1$ para $x > 0$ e com a reta $1 - x$ para $x < 0$. O limite quando $x \to 0^+$ é $|0^2 - 1| = 1$ e quando $x \to 0^-$ é $-0 + 1 = 1$. Como os limites laterais existem e são iguais, o limite é 1.



■

> **Pré-Cálculo**: Racionalize expressões multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado: o conjugado de $\sqrt{a} - b$ é $\sqrt{a} + b$. Veja no Exemplo 1.37 da p.35 como fazer racionalização trigonométrica.

Exemplo 1.5 *Determine os limites:* *(a)* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+1} - 1}{h}$; *(b)* $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$.

Solução: (a) Para h perto de 0, $h + 1 > 0$. Logo $(\sqrt{h+1})^2 = h + 1$. Multiplicando o numerador e denominador por $\sqrt{h+1} + 1$ obtemos que

$$\frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \frac{(\sqrt{h+1})^2 - 1^2}{h(\sqrt{h+1} + 1)} =$$

$$= \frac{h + 1 - 1}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1}.$$

Quando $h \to 0$ obtemos $1/2$.

(b) Para x próximo de 9, $x > 0$ e portanto $(\sqrt{x})^2 = x$. De modo análogo, multiplicamos por $\sqrt{x} + 3$ e obtemos

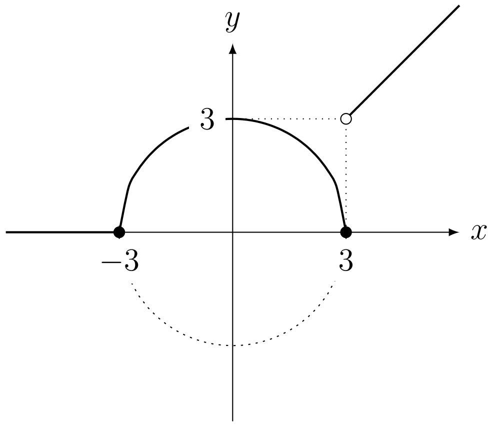
$$\frac{(x-9)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{(x-9)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \frac{(x-9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \sqrt{x} + 3.$$

Quando $x \to 9$ obtemos $\sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6$. ■

> **Pré-Cálculo**: O gráfico de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ é somente meio círculo de raio r (porque?). O gráfico de $-\sqrt{r^2 - x^2}$ é outra metade. O gráfico é parte do círculo pois $y^2 = r^2 - x^2$, e portanto $x^2 + y^2 = r^2$.

Exemplo 1.6 *Esboce o gráfico de* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}; & |x| \le 3, \\ x; & x > 3, \\ 0; & x < -3. \end{cases}$ *e determine (caso existam)* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *para:* *(a)* $c = 3$; *(b)* $c = -3$.

Solução: O gráfico da função é:



(a) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \sqrt{9-3^2} = 0$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$. Como os limites laterais são distintos, o $\lim_{x\to 3} f(x)$ não existe. (b) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \sqrt{9-(-3)^2} = 0$. Como os limites laterais são iguais, o $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$. ∎

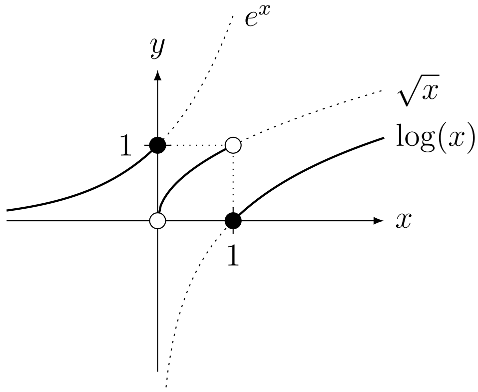
> **Pré-Cálculo**: Gráfico da função inversa: como esboçar $y = \sqrt{x}$ e $y = \log x$? Refletindo em torno da reta $y = x$ os gráficos de $y = x^2$ e $y = e^x$.

> **Observação 1.6** $\log(x)$ *em cálculo é* ***sempre*** *na base* $e = 2.718\ldots$ *(natural, veja Observação 1.20 da p.38). Assim,* $\log(x) = \ln(x) = \log_e(x) \neq \log_{10}(x)$. *Quando quisermos o log na base dez (uma única vez no texto) escrevemos* $\log_{10}$.

Exemplo 1.7 *Esboce o gráfico e determine* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *para*

$$f(x) = \begin{cases} e^x; & x \le 0; \\ \sqrt{x}; & 0 < x < 1; \\ \log(x); & x \ge 1. \end{cases}$$

Solução: Juntando os três gráficos em cada parte indicada, obtemos o gráfico da função definida por partes abaixo.



Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = e^0 = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{0} = 0$, o $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1} = 1$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \log(1) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe. ∎

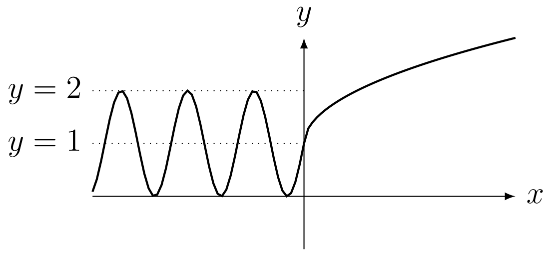
> **Pré-Cálculo**: Fazer translação de gráficos de funções: tanto vertical quanto horizontal. Por exemplo, obtemos o gráfico de $y = f(x+3) - 7$ transladando o gráfico de $y = f(x)$ em 3 unidades para esquerda (**não** é direita!) e 7 unidades para baixo.

Exemplo 1.8 *Esboce o gráfico e determine:*

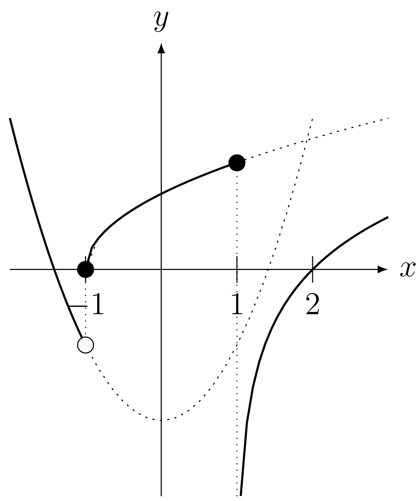
(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ *para* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1; & x>0; \\ \operatorname{sen}(x)+1; & x \le 0. \end{cases}$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *e* $\lim_{x\to -1} f(x)$ *para* $f(x) = \begin{cases} x^2-2; & x<-1; \\ \sqrt{x+1}; & -1 \le x \le 1; \\ \log(x-1); & 1<x. \end{cases}$

Solução: (a) Aplicando translações apropriadas obtemos o gráfico da figura abaixo. Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \operatorname{sen}(0)+1 = 1$ é igual ao $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{0}+1 = 1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.



(b) Aplicando translações apropriadas obtemos o gráfico da figura abaixo. Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ "=" $\log(1-1) = \log(0) = -\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe. Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = (-1)^2 - 2 = -1$ e $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \sqrt{-1+1} = 0$, $\lim_{x\to -1} f(x)$ não existe.



■

Apresentamos funções (estranhas) interessantes para o teoria do cálculo e análise.

Exemplo 1.9 *Considere* $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Determine todos os valores de x *tais que* $f(x) = 0$.

(b) Determine todos os valores de x *tais que* $f(x) = 1$ *e* $f(x) = -1$.

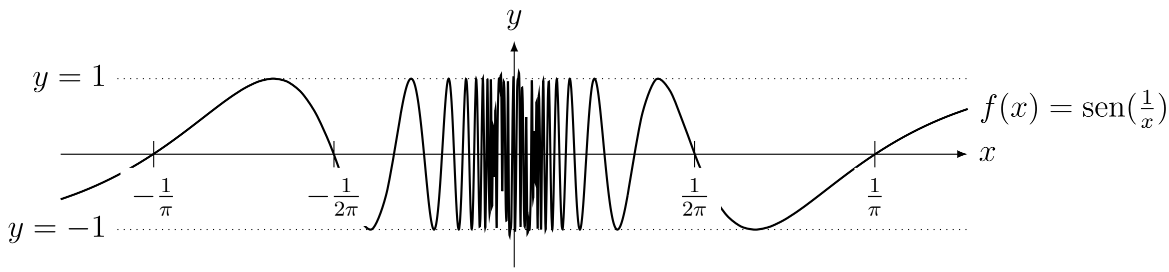
(c) Usando isto, esboce o gráfico da função f.

(d) Calcule $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solução: (a) para que $\operatorname{sen}(y) = 0$ basta que $y = k\pi$. Assim $y = \frac{1}{x} = k\pi$. Logo, se $x = \frac{1}{k\pi}$ para $k \in \mathbb{Z}$ então $f(x) = 0$.

(b) Analogamente, $f(x) = 1$ se $x = \frac{1}{2k\pi+\pi/2}$ e $f(x) = -1$ se $x = \frac{1}{2k\pi-\pi/2}$.

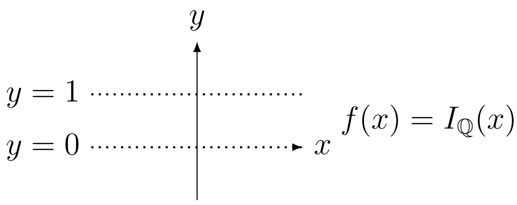
(c) partindo destes pontos obtemos o gráfico abaixo.



(d) o limite não existe pois $f(x)$ oscila entre -1 e 1 quando $x \to 0$. ■

Exemplo 1.10 *A* ***função indicadora*** *de $\mathbb{Q}$ é definida por* $I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
Ela indica (por 0 ou 1) se $x \in \mathbb{Q}$ ou não e é conhecida também como ***função característica****. Calcule o* $\lim\limits_{x \to \pi} I_{\mathbb{Q}}(x)$.

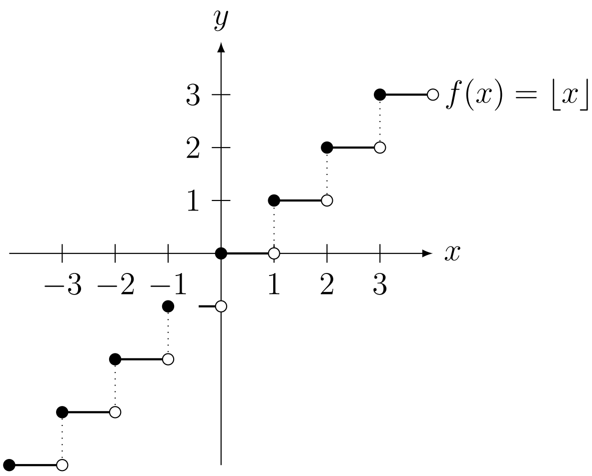
Solução: O gráfico desta função é formada por duas "retas" pontilhadas: uma em $y = 0$, nos irracionais e outra no $y = 1$, acima dos racionais (vide figura abaixo). Como existem racionais tão próximos de π quanto se queira (como por exemplo 3.14, 3.141, $3.1415\ldots$), o limite não existe. De fato o limite não existe em ponto algum.



■

Exemplo 1.11 *A função parte inteira (ou menor inteiro ou floor) de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$ é definida como sendo o único inteiro n tal que $n \leq x < n+1$. Exemplos: $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$, $\lfloor 1 \rfloor = 1$ e $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$. Esboce o gráfico de $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e determine:*
(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor$; *(b)* $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor$; *(c)* $\lim\limits_{x \to 1} \lfloor x \rfloor$; *(d)* $\lim\limits_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor$; *(e)* $\lim\limits_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor$;

Solução: Veja gráfico na figura abaixo. (a) 1; (b) 0; (c) como laterais são distintos, limite não existe. (d) 0; (e) -1.



■

Seguem as propriedades dos limites com relação a soma, produto, multiplicação e divisão. A demonstração é remetida para o Desafio 2.10 da p.63 e [NC].

Lema 1.5 *Considere $f(x) = k$ (uma função constante) e $g(x) = x$ (a função identidade). Então dado $c \in \mathbb{R}$ qualquer,*

$$\lim_{x\to c} f(x) = k \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} g(x) = c.$$

Teorema 1.6 (propriedades básicas do limite) *Considere f e g duas funções e $c, k \in \mathbb{R}$. Se os limites $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ existem, então também existem os limites:*

(a) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$ (limite da soma é igual à soma dos limites);

(b) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x)$ (limite da diferença é igual à diferença dos limites);

(c) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$ (limite do produto é igual ao produto dos limites);

(d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ (limite do quociente é igual ao quociente dos limites) se $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$.

É importante o aluno entender a demonstração do Corolário abaixo para apreciar como poucas propriedades podem gerar novas proposições.

Corolário 1.7 (limites de polinômios) *Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ para $n \in \mathbb{N}$ (ou seja, p é um polinômio de grau n) então $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.*

Prova: Aplicando $n+1$ vezes o Teorema 1.6 (a) (limite da soma) obtemos que $\lim\limits_{x\to c} p(x) = \lim\limits_{x\to c} a_0 + \lim\limits_{x\to c} a_1x + \cdots + \lim\limits_{x\to c} a_nx^n$. Pelo Lema 1.5, $\lim\limits_{x\to c} a_0 = a_0$ (limite de constante). Pelo Teorema 1.6 (limite do produto), $\lim\limits_{x\to c} a_1x = \lim\limits_{x\to c} a_1 \cdot \lim\limits_{x\to c} x$. Aplicando o Lema 1.5, $\lim\limits_{x\to c} a_1 \cdot \lim\limits_{x\to c} x = a_1c$. Agora podemos fazer algo similar em cada termo. Para o termo x^3, por exemplo, basta aplicar seguidamente o Teorema 1.6 (c) (limite do produto): $\lim\limits_{x\to c} x^3 = \lim\limits_{x\to c} x \cdot \lim\limits_{x\to c} x \cdot \lim\limits_{x\to c} x = c \cdot c \cdot c = c^3$. Complete o argumento. ∎

Exemplo 1.12 *Aplique o Teorema 1.6 para determinar $\lim\limits_{x\to 2} 6\dfrac{x^2+3x}{x+1}$.*

Solução: Deixamos para o leitor aplicar com cuidado cada uma das propriedades. Basta fazer um *mutatis mutandis*[4]na prova do Corolário 1.7. ∎

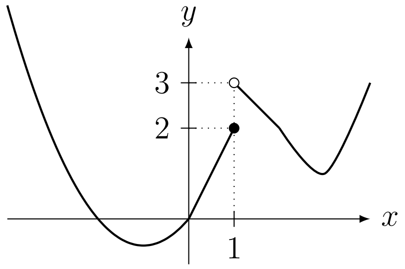
Definição 1.8 (função racional) *Dizemos que f é uma **função racional** se for o quociente entre dois polinômios, isto é, se $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são polinômios.*

[4] latim para "modifique o que tem que ser modificado"

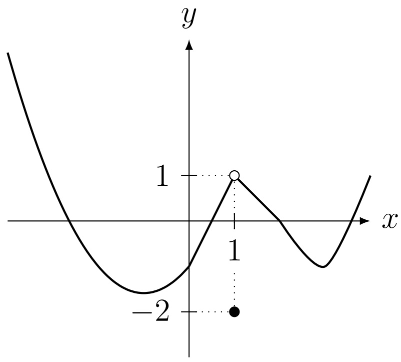
Concluímos que podemos calcular o limite de uma função racional qualquer contanto que o denominador não se anule. Caso o denominador se anule precisamos de métodos especiais para os casos onde, por exemplo, obtemos $3/0$ ou $0/0$.

No próximo exemplo apresentamos (graficamente) possibilidades de comportamento de um função quando x se aproxima de um ponto.

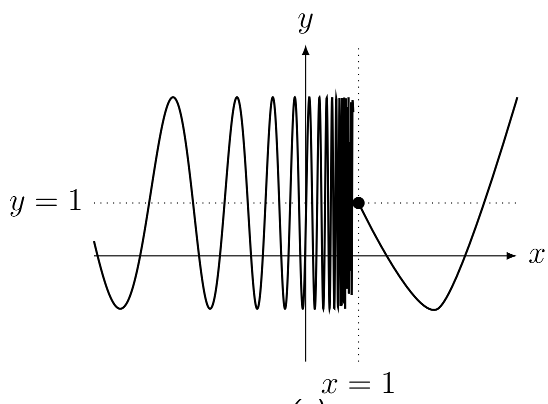
Exemplo 1.13 *Determine, em cada um dos itens abaixo, caso exista: • os limites laterais quando $x \to 1^+$ e $x \to 1^-$; • o limite quando $x \to 1$. Compare com o valor da função em $x = 1$.*



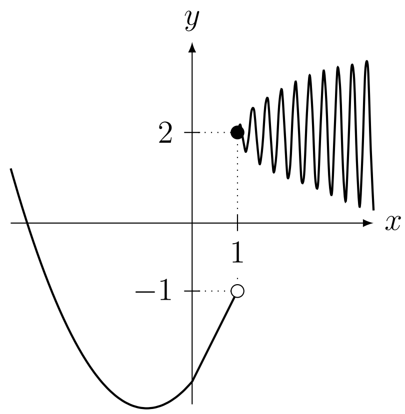
(a)



(b)



(c)



(d)

Solução: (a) limite quando $x \to 1^-$ é 2, limite quando $x \to 1^+$ é 3, limite quando $x \to 1$ não existe (laterais são distintos), $f(1) = 2$.

(b) limite quando $x \to 1^-$ é 1 , limite quando $x \to 1^+$ é 1, limite quando $x \to 1$ é 1 (limites laterais são iguais), $f(1) = -2$.

(c) limite quando $x \to 1^-$ não existe (função oscila), limite quando $x \to 1^+$ é 1, limite quando $x \to 1$ não existe (um dos limites laterais não existe), $f(1) = 1$.

(d) limite quando $x \to 1^-$ é -1, limite quando $x \to 1^+$ é 2, limite quando $x \to 1$ não existe (limites laterais são distintos), $f(1) = 2$. ∎

Pelo teorema abaixo podemos trocar o limite com a composição caso os limites existam.

Teorema 1.9 (limite e composição) *Se $\lim_{y \to L} f(y) = f(L)$ (dizemos que f é contínua em L) e $\lim_{x \to c} g(x) = L$, então $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$.*

Prova: Veja prova em [NC]. ■

Definição 1.10 (função algébrica e transcendente) *Dizemos que f é uma **função algébrica** se pode ser expressa como soma, diferença, produto, quociente ou raiz de funções polinomiais. Caso contrário é dita **transcendente**.*

Exemplo 1.14 *São funções algébricas:* $\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}-x^6+1}{1+\sqrt{x}+x^3}$, $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(3-x)^3}$.

São funções transcendentes: $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, e^{3x+4}, $\log(x^2+1)$.

Teorema 1.11 (limites de função raiz e algumas transcendentes) *Se $f(x)$ é igual a $\sqrt[n]{x}$, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\log(x)$, e^x, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, ou $\arctan(x)$, então para todo $c \in \mathbb{R}$ onde $f(c)$ existe, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.*

Prova: Leia a Seção 2.3, p.52. ■

Exemplo 1.15 *Aplique os teoremas acima para determinar:*

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \log\left(\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}\right)$; *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right)$; *(c)* $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[4]{4x+1}(x+x^2)$.

Solução: (a) Como $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}\right) = 1$, o limite vale $\log(1) = 0$.

(b) Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, o limite vale $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. (c) $2\sqrt[4]{5}$. ■

Observação 1.7 *Combinando os Teoremas 1.6 (propriedades básicas do limite), 1.9 (limite e composição) e 1.11 (função raiz e transcendente) concluímos que sabemos calcular o limite de funções bem complicadas (se denominador não se anula). Por exemplo:*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^3 e^{\operatorname{sen}(x^2-\pi^2)-\log x}}{\cos(2x+\pi)} = \frac{\pi^3 e^{\operatorname{sen}(0)-\log \pi}}{\cos(3\pi)} = -\pi^2.$$

1.3 Limites e Infinito: Assíntotas Verticais e Horizontais

Nesta seção estendemos a definição de limite para x próximo de ∞, isto é, x grande e positivo e para x próximo de $-\infty$, isto é, x grande (em módulo) e negativo. Além disso, definimos quando o valor do limite é ∞ ou $-\infty$ para x próximo de c (Veja na Observação 1.16 da p.28 como "enxergar" o infinito).

Definição 1.12 (limite igual a ∞ $(-\infty)$) *Considere uma função real f definida perto de $c \in \mathbb{R}$ (mas não necessariamente definida em c). Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c é ∞ $(-\infty)$, denotado por $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ $(-\infty)$, se $f(x)$ fica tão grande e positivo (negativo) quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de $c \in \mathbb{R}$ **mas** $x \neq c$.*

Observação 1.8 *Deixamos para o leitor definir os limites laterais* $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ *de forma análoga ao que já foi feito no início deste capítulo. Basta fazer um mutatis mutandis*[5]*. Veja definição* ***rigorosa*** *no Exemplo 2.14 da p.59.*

Observação 1.9 (infinito: ∞ ou $+\infty$?) *Alguns livros usam $+\infty$ ao invés de ∞.*

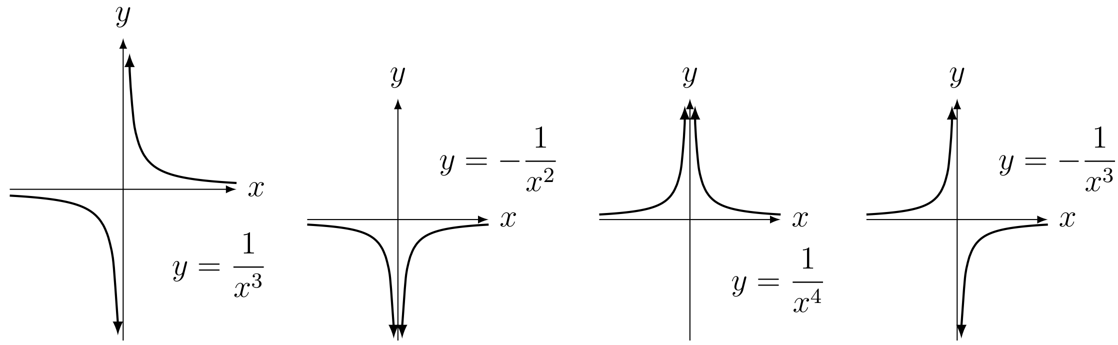
Definição 1.13 (assíntota vertical) *Se, quando $x \to c^+$ ou $x \to c^-$, $f(x) \to \infty$ ou $-\infty$, dizemos que a reta $x = c$ é uma* ***assíntota vertical*** *do gráfico de f.*

Exemplo 1.16 *Esboce o gráfico, determine os limites e as assíntotas verticais:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^3}$;

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} -\frac{1}{(x-3)^3}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} -\frac{1}{(x-2)^2}$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^9}$;

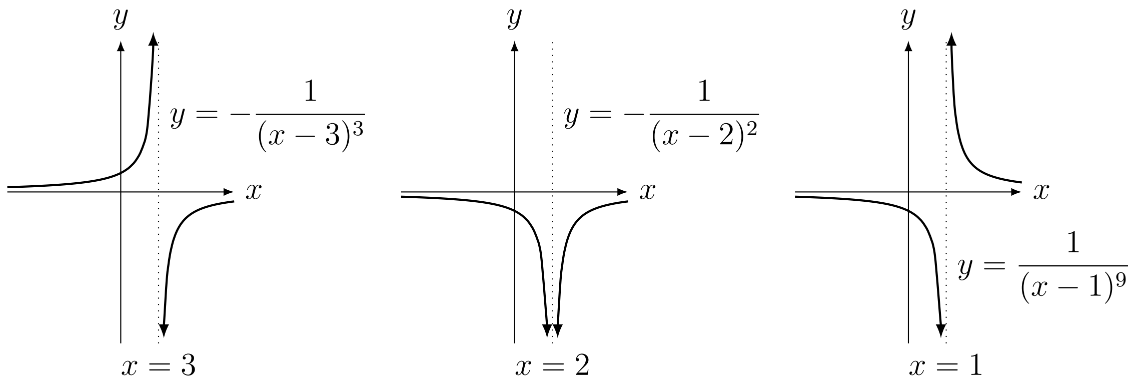
Solução: Os gráficos de (a), (b), (c) e (d) são:



(a) (b) (c) (d)

Nesses quatro itens a assíntota vertical é $x = 0$. Observando-os obtemos os limites laterais: (a) $-\infty$; (b) $-\infty$; (c) ∞; (d) $-\infty$.

Com translação podemos obter os gráficos de (e), (f) e (g):



(e) (f) (g)

(e) o limite não existe pois pela direita vale $-\infty$ e pela esquerda ∞ (mesmo sinal que $-1/x$ perto do 0). Assíntota vertical $x = 3$.

(f) o limite é $-\infty$ (mesmo sinal que $-1/x^2$ perto do 0). Assíntota vertical $x = 2$.

(g) o limite não existe pois pela direita vale ∞ e pela esquerda $-\infty$ (mesmo sinal que $1/x$ perto do 0). Assíntota vertical $x = 1$. ∎

[5] latim para "modifique o que tem que ser modificado"

Pré-Cálculo: Fazer a análise de sinal do numerador e denominador — o chamado **quadro de sinais** — para determinar o comportamento do gráfico perto da assíntota.

Exemplo 1.17 *Determine para quais* $x \in \mathbb{R}$ *é verdade que* $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{(x+1)(3-x)} \geq 0$.

Solução: Faremos a análise de sinal de cada um dos elementos: $16 - x^2,\ x + 1,\ 3 - x$ e combinamos tudo numa tabela do sinal de $f(x)$. Os pontos de troca de sinal são: $\pm 4, -1, 3$. Agora cuidado com a interpretação do zero. Os pontos onde $f(x) = 0$ são os pontos onde o **numerador** se anula ± 4. Nos pontos onde o denominador se anula (-1 e 3), $f(x) \to \pm\infty$.

		-4		-1		3		4	
$16 - x^2$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$
$x + 1$	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$3 - x$	$+$		$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\pm\infty$	$-$	0	$+$

Assim Portanto $f(x) \geq 0$ para $x \leq -4, x \in (-1,\ 3), x \geq 4$. ■

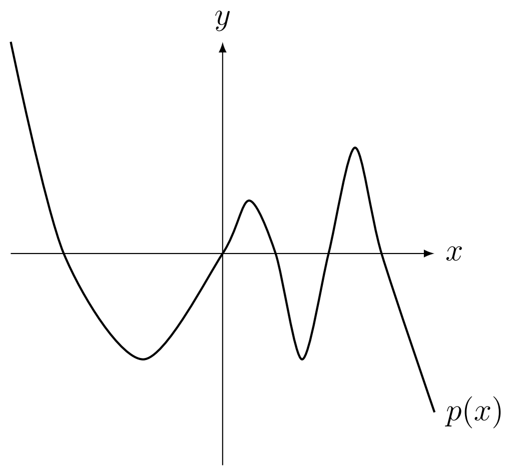
Observação 1.10 *Poderíamos no exemplo anterior (e em todos os exemplos) decompor o termo quadrático* $16 - x^2$ *em dois termos lineares* $4 - x$ *e* $4 + x$, *o que aumentaria o tamanho da tabela. Na prática, se o termo quadrático é simples, da forma* $a - bx^2$ *ou* $bx^2 - a$, *analisamos o sinal diretamente.*

Exemplo 1.18 *Faça quadro de sinais e esboce gráfico de* $p(x) = (x - 2)(25 - x^2)(x^2 - x)$.

Solução: (a) Faremos a análise de sinal de cada um dos elementos: $x - 2,\ 25 - x^2,\ x^2 - x$ e combinamos numa tabela do sinal de $p(x)$. Faremos a análise dos termos quadráticos diretamente. Note que um $(25 - x^2)$ possui concavidade para baixo e outro $(x^2 - x)$ possui concavidade para cima. Os pontos de troca de sinal são: $\pm 5, 0, 1, 2$.

		-5		0		1		2		5	
$x - 2$	$-$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$25 - x^2$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$
$x^2 - x$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$		$+$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Assim obtemos o gráfico abaixo. Esta função, um polinômio de grau 5, possui 5 raízes.



■

Pré-Cálculo: Como determinar sinal de um polinômio $ax^2 + bx + c$ com raízes complexas (não-reais)?
O gráfico da parábola estará inteiramente acima do eixo x ou abaixo do eixo x, pois senão teríamos raízes reais. Assim basta olharmos para o sinal de a: se $a > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ para todo x, se $a < 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ para todo x.
Exemplos:
(a) $x^2 - 3x + 3$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$. Logo raízes complexas. Como $a = 1 > 0$, $x^2 - 3x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $-x^2 + 4x - 5$. $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -4 < 0$. Logo raízes complexas. Como $a = -1 < 0$, $-x^2 + 4x - 5 < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.19 *Faça análise de sinal e determine os limites:*
(a) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^2}{9 - x^2}$; *(b)* $\lim_{x \to 2} \frac{9 - x^2}{(x-2)(x^2 - 5x + 6)}$; *(c)* $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x - 1}{(1-x)^3}$.

Solução: (a) Faremos o quadro de sinais. Os pontos onde numerador ou denominador se anulam: $\pm 3, 0$. A função $f(x) = 0$ onde o **numerador** se anula (0). Nos pontos onde o denominador se anula (± 3), $f(x) \to \pm\infty$.

		-3		0		3	
$2x^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$9 - x^2$	$-$		$+$		$+$		$-$
		$\pm\infty$		0		$\pm\infty$	
$f(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$

Assim a função tem sinal negativo quando $x \to -3^-$ e sinal positivo quando $x \to -3^+$. Logo quando $x \to -3^-$ o limite é $-\infty$ e quando $x \to -3^+$ o limite é ∞. Portanto o limite quando $x \to -3$ não existe.

(b) Faremos o quadro de sinais. Como $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, o denominador é $(x-2)^2(x-3)$. Os pontos onde numerador ou denominador se anulam: $\pm 3, 2$. No $x = 3$ o numerador e o denominador se anulam. Neste ponto, caso queira pode calcular o $\lim_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{(x-2)(x^2 - 5x + 6)} = -6$. Assim a indeterminação $0/0 = -6$ neste caso. A função $f(x) = 0$ onde o somente o **numerador** se anula (3). Nos pontos onde somente o denominador se anula $(2, -3)$, $f(x) \to \pm\infty$.

		-3		2		3	
$9 - x^2$	$-$		$+$		$+$		$-$
$x - 3$	$-$		$-$		$-$		$+$
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
		0		$-\infty$		-6	
$f(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$

Logo o limite quando $x \to 2$ é $-\infty$.

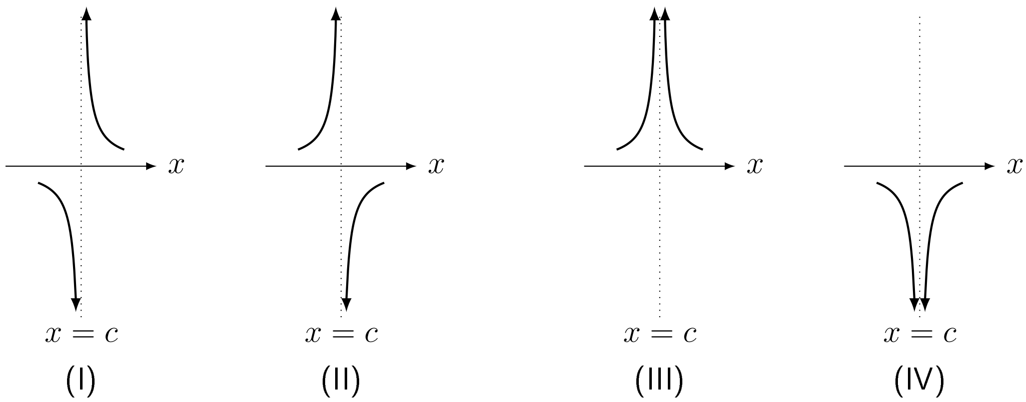
Outra Solução: Perto de 2 o numerador é positivo ($9 - 2^2 = 5$). Como $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, devemos analisar o sinal do denominador que é $(x-2)^2(x-3)$. O primeiro termo é sempre positivo e o segundo, perto de 2 é negativo ($2 - 3 = -1$). Assim o denominador é negativo. Logo o limite quando $x \to 2$ é $-\infty$.

(c) Neste caso não temos como analisar o sinal do numerador em detalhes pois é um polinômio do terceiro grau que não conhecemos as raízes (na realidade possui duas raízes complexas). Podemos, no entanto calcular o limite analisando o sinal próximo do 1. Perto de

1 o numerador é sempre negativo ($1^3 - 1 - 1 = -1$). O denominador $(1-x)^3$ possui o mesmo sinal que $(1-x)$. Assim, o denominador tem sinal positivo quando $x \to 1^-$ e sinal negativo quando $x \to 1^+$. Logo, combinando sinais do numerador (sempre negativo) e denominador, quando $x \to 1^-$ o limite é $-\infty$ e quando $x \to 1^+$ o limite é ∞. Portanto o limite quando $x \to 1$ não existe. ∎

Erro Comum: Nos limites do exemplo anterior, tentar calcular o limite sem fazer quadro de análise de sinais é caminho quase certo para cometer um erro.

Em resumo, se $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional (Definição 1.8 da p.12) e se no limite o denominador $q(x)$ se anula sem que o numerador $p(x)$ se anule — ou seja, quando $x \to c$ a função $f(x) \to \dfrac{k}{0}$ com $k \neq 0$ — existem **quatro** possibilidades para o comportamento da função perto de c conforme representado nas figuras abaixo. Precisamos fazer quadro de análise de sinais para determinar qual delas ocorre.

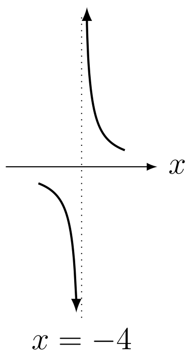


Erro Comum: Não prestar atenção nestas 4 possibilidades e concluir de forma errada que o limite é ∞ pois o denominador se anula. Um exemplo deste erro é o aluno dizer que o $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1+x}{x-2}$ é ∞ pois o denominador se anula em $x = 2$.

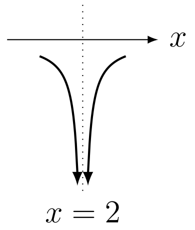
Exemplo 1.20 *Determine o comportamento da função perto de c e calcule o limite quando $x \to c$ para: (a) $y = \dfrac{3-x}{4+x}$, $c = -4$; (b) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+4}$, $c = 2$.*

Solução: Deixo para o leitor fazer o quadro de sinais de cada exemplo.

(a) perto de $x = -4$, o numerador é positivo próximo de $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$. O denominador é negativo para $x < -4$ e positivo para $x > -4$. Assim temos que perto do $x = -4$ a função é negativa para $x < -4$ e positiva para $x > -4$. O limite **não** existe pois os limites laterais diferem. O comportamento é:



(b) perto de $x = 2$ o numerador é negativo próximo de $2^2 - 9 = -5$. O denominador é igual a $(x-2)^2$, que é sempre não-negativo. Assim temos que perto do $x = 2$ a função é negativa O limite quando $x \to 2$ é $-\infty$ O comportamento é:

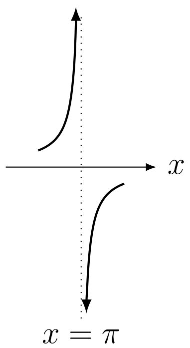


■

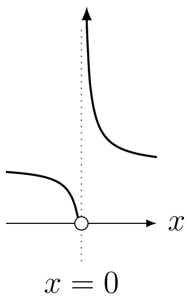
Se a função não é racional temos que analisar com cuidado os sinais.

Exemplo 1.21 *Esboce o gráfico perto do ponto do limite e calcule:*
(a) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$; *(b)* $\lim_{x\to 0} e^{1/x}$; *(c)* $\lim_{x\to 0} \log(|x|)$; *(d)* $\lim_{x\to 0^+} |\log(x)|$.

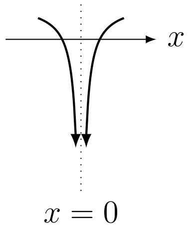
Solução: (a) Se $x \to \pi^+$, o seno é negativo próximo do π e portanto o limite é $-\infty$. Se $x \to \pi^-$ a situação é oposta e o limite é ∞. Como os limites laterais diferem, o limite quando $x \to \pi$ não existe.



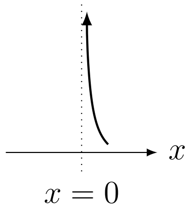
(b) Se $x \to 0^+$, $1/x \to \infty$. Portanto, $e^{1/x} \to e^{\infty} = \infty$. Se $x \to 0^-$, $1/x \to -\infty$. Portanto, $e^{1/x} \to e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$. Como os limites laterais diferem, o limite quando $x \to 0$ não existe.



(c) Se $x \to 0$, $|x| \to 0$. Como $\log(0) = -\infty$, o limite é $-\infty$.



(d) Pelo item anterior $\log(x) \to -\infty$. Aplicando o módulo concluímos que o limite é ∞. Não podemos calcular o limite quando $x \to 0^-$ pois $\log$ não está definida para $x < 0$!



■

Definição 1.14 (limite quando x tende a ∞ $(-\infty)$) *Considere uma função real f definida para todo x grande e positivo (negativo). Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a ∞ $(-\infty)$ é igual a L, denotado por $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ $(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L)$, se $f(x)$ fica tão próximo de $L \in \mathbb{R}$ quanto quisermos para todo x grande e positivo (negativo) o suficiente.*

Observação 1.11 *Este limite é, por natureza, um limite lateral: somente podemos chegar a ∞ pela esquerda e a $-\infty$ pela direita. Logo não temos limites laterais no infinito.*

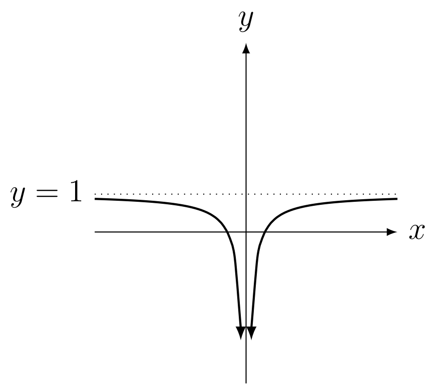
Observação 1.12 *Deixamos s para o leitor definir (mutatis mutandis), os limites: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Veja definição **rigorosa** no Exemplo 2.14 da p.59.*

Definição 1.15 (assíntota horizontal) *Se, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$, $f(x) \to L \in \mathbb{R}$, dizemos que a reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f.*

Exemplo 1.22 *Esboce o gráfico e determine os limites e a assíntota horizontal de:*

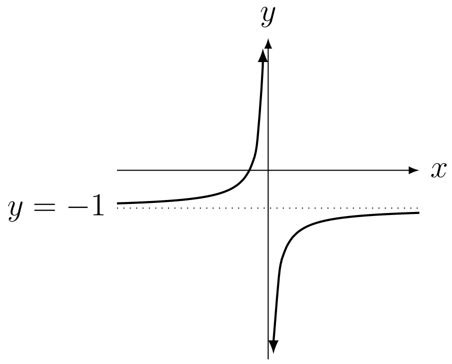
(a) $\lim_{x\to\infty} -\dfrac{1}{x^6} + 1$ (b) $\lim_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^5} - 1$ (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} 2 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

Solução: (a) o limite é 1 e a assíntota horizontal $y = 1$. O limite é 1. Obtemos o gráfico com a translação vertical de $-1/x^6$.



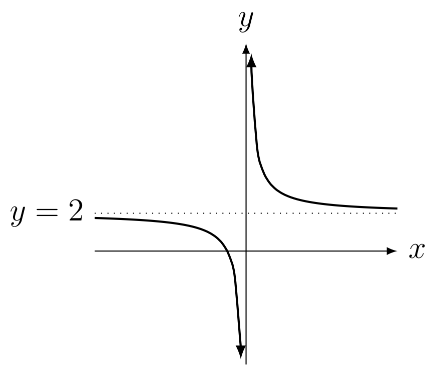
(a) $y = -\dfrac{1}{x^6} + 1$

(b) o limite é -1 e a assíntota horizontal $y = -1$. Obtemos o gráfico com a translação vertical de $-1/x^5$.



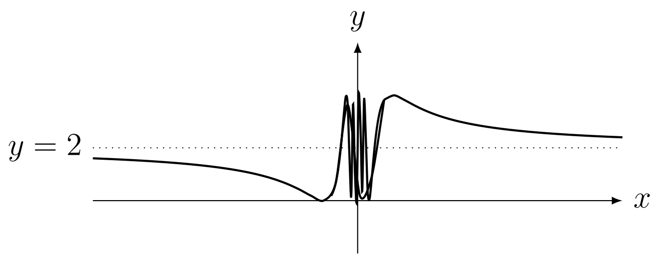
(b) $y = -\dfrac{1}{x^5} - 1$

(c) como $(2x+1)/x = 2 + 1/x$, quando $x \to \infty$ a função vai para 2 pois o segundo termo vai para 0. A assíntota horizontal é $y = 2$. O gráfico é a translação vertical de duas unidades de $1/x$.



(c) $y = \dfrac{2x+1}{x}$

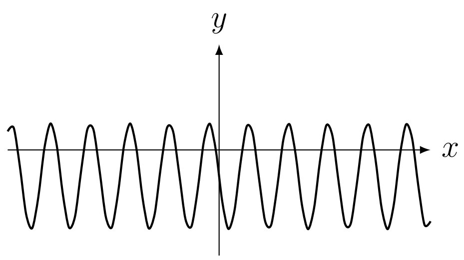
(d) é 2 pois $\frac{1}{x} \to 0$ e portanto $\operatorname{sen}\frac{1}{x} \to \operatorname{sen} 0 = 0$. A assíntota horizontal é $y = 2$. O gráfico é a translação vertical de $\operatorname{sen}(1/x)$.



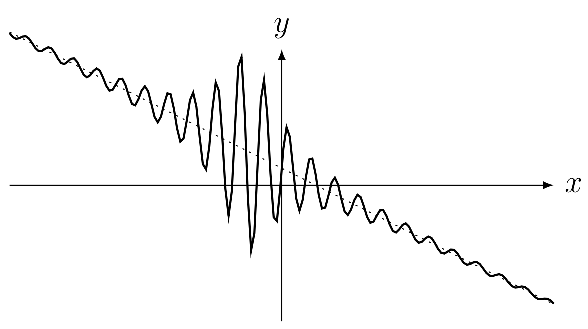
(d) $y = 2 + \operatorname{sen}(1/x)$

■

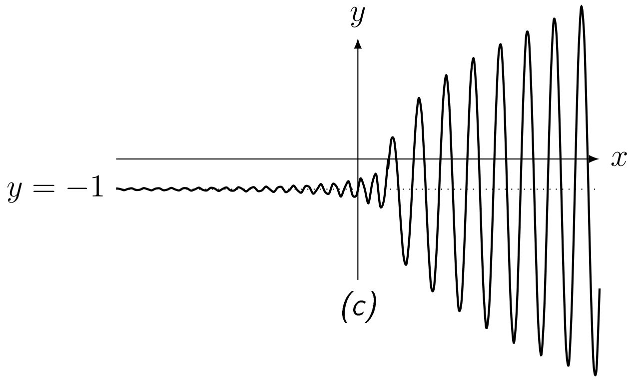
Exemplo 1.23 *Determine, caso exista, os limites quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$ e a assíntota horizontal:*



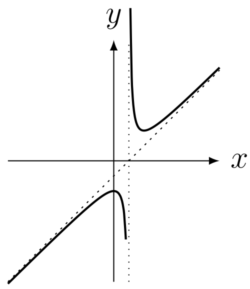
(a)



(b)



(c)



(d)

Solução: (a) Nenhum dos dois limites existe pois a função oscila de valor tanto para x grande e positivo como para grande e negativo. Não existe assíntota horizontal.

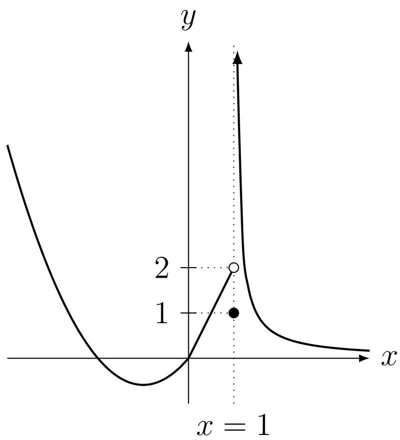
(b) limite quando $x \to -\infty$ é ∞, limite quando $x \to \infty$ é $-\infty$. Nos dois casos ela se aproxima oscilando (cada vez menos). Embora não tenha assíntota horizontal, possui o que chamamos de **assíntota oblíqua** (veja Desafio 1.5 da p.43).

(c) limite quando $x \to -\infty$ é -1 (oscilando cada vez menos), limite quando $x \to \infty$ não existe pois função oscila com amplitude cada vez maior. A reta $y = -1$ é uma assíntota horizontal.

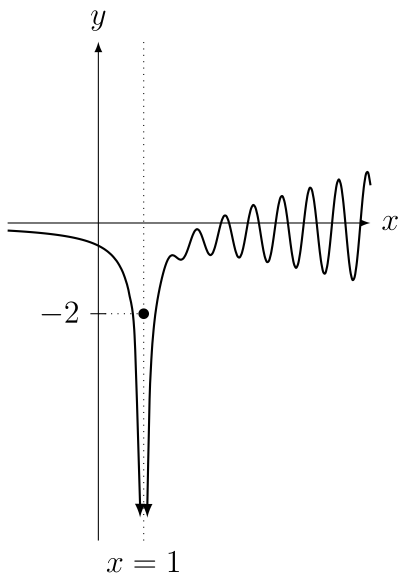
(d) limite quando $x \to -\infty$ é $-\infty$, limite quando $x \to \infty$ é ∞. Nos dois casos ela se aproxima assintoticamente (sem oscilar). Embora não tenha assíntota horizontal, possui o que chamamos de **assíntota oblíqua** (veja Desafio 1.5 da p.43). Possui uma assíntota vertical. ■

Observação 1.13 *Note por um dos exemplos apresentados (qual?) que o gráfico de uma função* ***pode*** *cruzar a assíntota horizontal uma infinidade de vezes. Isto não ocorre para a assíntota vertical (porque?)*

Exemplo 1.24 *Determine, caso exista: • os limites quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$; • os limites laterais quando $x \to 1^+$ e $x \to 1^-$; • o limite quando $x \to 1$. Compare com o valor da função em $x = 1$.*



(a)



(b)

Solução: (a) limite quando $x \to -\infty$ é ∞, limite quando $x \to \infty$ é 0, limite quando $x \to 1^-$ é 2, limite quando $x \to 1^+$ é ∞, limite quando $x \to 1$ não existe (laterais são distintos), $f(1) = 1$.

(b) limite quando $x \to -\infty$ é 0, limite quando $x \to \infty$ não existe pois o valor da função oscila, limite quando $x \to 1^-$ é $-\infty$, limite quando $x \to 1^+$ é $-\infty$, limite quando $x \to 1$ $-\infty$ (laterais são iguais), $f(1) = -2$. ■

Para calcular o limite quando $x \to \infty$ ou $-\infty$ de uma função $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, comparamos o crescimento do numerador com o do denominador. Quem crescer mais rápido ganha. Se o denominador ganhar o limite será zero. Se o numerador ganhar, será ∞ ou $-\infty$. Se houver empate, dependerá de cada caso.
Uma técnica é determinar a maior potência do numerador e do denominador para x grande e positivo (ou negativo). Assim teremos que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \approx \dfrac{x^p}{x^q}$. Dependendo se $p > q$ ou $p = q$ ou $p < q$ determinamos o limite. Para se aplicar esta técnica com rigor deve-se colocar em evidência termo de maior grau do numerador e do denominador.

Exemplo 1.25 *Calcule:* *(a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{1-2x^2}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+x^3+10}{x^8-x+1}$;
(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-5x^7+10}{-x^6-x^5+1}$; *(d)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7+x^2+10}{x^4-x^5+1}$; *(e)* $\lim\limits_{x\to\infty} x - x^2$.

Solução: (a) Colocando em evidência os termos de maior grau, $\dfrac{3x^2+1}{1-2x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} \cdot \dfrac{3+1/x^2}{1/x^2-2} = 1 \cdot \dfrac{3+1/x^2}{1/x^2-2} =\!\!\to \dfrac{3+0}{0-2} = -\dfrac{3}{2}$.

(b) Colocando em evidência os termos de maior grau, $\dfrac{x^5+x^3+10}{x^8-x+1} = \frac{x^5}{x^8} \cdot \frac{1+1/x^2+10/x^5}{1-1/x^7+1/x^8} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1+1/x^2+10/x^5}{1-1/x^7+1/x^8}$. Calculando os limites separadamente utilizando a propriedade do produto dos limites: $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ e $\dfrac{1+1/x^2+10/x^5}{1-1/x^7+1/x^8} \to \dfrac{1+0+0}{1-0+0} = 1$. Logo o limite vale $0 \cdot 1 = 0$.

(c) Colocando em evidência os termos de maior grau, $\dfrac{x^3-5x^7+10}{-x^6-x^5+1} = \frac{x^7}{x^6} \cdot \frac{1/x^4-5+10/x^7}{-1-1/x+1/x^6} = x \cdot \frac{1/x^4-5+10/x^7}{-1-1/x+1/x^6}$. Calculando os limites separadamente utilizando a propriedade do produto dos limites: $x \to -\infty$ e $\frac{1/x^4-5+10/x^7}{-1-1/x+1/x^6} \to \frac{0-5+0}{-1-0+0} = \frac{-5}{-1} = 5$. Logo o limite vale $-\infty \cdot 5 = -\infty$.

(d) Colocando em evidência os termos de maior grau, $\frac{x^7+x^2+10}{x^4-x^5+1} = \frac{x^7}{x^5} \cdot \frac{1+1/x^5+10/x^7}{1/x-1+1/x^5} = x^2 \cdot \frac{1+1/x^5+10/x^7}{1/x-1+1/x^5}$. Calculando os limites separadamente utilizando a propriedade do produto dos limites: $x^2 \to \infty$ e $\frac{1+1/x^5+10/x^7}{1/x-1+1/x^5} \to \frac{1+0+0}{0-1+0} = \frac{1}{-1} = -1$. Logo o limite vale $\infty \cdot (-1) = -\infty$.

(e) Trata-se de uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Coloque em evidência x: $x - x^2 = x(1-x)$. Calculando os limites separadamente utilizando a propriedade do produto dos limites: $x \to \infty$ e $(1-x) \to -\infty$ obtemos que o limite vale $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$. **não** é uma indeterminação. ■

Erro Comum: Confundir técnicas de $x \to \infty$ com $x \to a$. Assim o aluno calcula (de forma **errada**) o limite $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1/x}{1-1/x}$, obtendo 1 (já que erradamente o aluno pensa que "$1/x$ vai para zero").

Nos exemplos abaixo em que aparecem raízes, a técnica é similar, tomando o devido cuidado com o sinal pois, como já chamamos atenção, $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$.

Exemplo 1.26 *Calcule os limites:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{16x+3}}{x+1}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{5x-7}$; *(c)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^6-3x^2+2x-3}}{3x^3-x^2+x-1}$.

Solução: (a) O termo de maior grau do numerador é $\sqrt{16x}$ e do denominador é x. Colocando-os em evidência obtemos: $\frac{\sqrt{16x+3}}{x+1} = \frac{\sqrt{16x}\sqrt{1+3/(16x)}}{x(1+1/x)}$. Separando em dois limites temos que calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{16x}}{x} = 4\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+3/(16x)}}{1+1/x} = \dfrac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$. Assim o limite é 0. Pode-se ver de forma sucinta o mesmo resultado tomando os termos de maior grau, $\sqrt{16x+3} \approx \sqrt{16x}$ e $x+1 \approx x$ (válidos para x grande!). Assim, $\frac{\sqrt{16x+3}}{x+1} \approx \frac{\sqrt{16x}}{x} = \frac{4\sqrt{x}}{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$. Se $x \to \infty$ então isto tende a 0.

(b) Colocando-os em evidência $\sqrt{x^2} = |x|$ e $5x$ e prosseguindo como no caso anterior basta calcular o limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|}{5x}$. Como x é negativo, $\frac{|x|}{5x} = \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5}$, o valor do limite.

(c) Colocando-os em evidência $\sqrt{x^6} = |x|^3$ e $3x^3$ e prosseguindo como no caso anterior basta calcular o limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|^3}{3x^3}$. Como x é negativo, $\frac{|x|^3}{3x^3} = \frac{-x^3}{3x^3} = -\frac{1}{3}$, o valor do limite. ■

Nos próximos exemplos precisamos racionalizar antes.

Exemplo 1.27 *Calcule:* *(a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x+1} - x$; *(b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

Solução: (a) Racionalizando com $\sqrt{x^2+3x+1}+x$ obtemos

$$\frac{(\sqrt{x^2+3x+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \frac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}.$$

Agora podemos calcular o $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Coloque x em evidência no numerador e denominador e obtenha $\dfrac{x(3+1/x)}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)}$. O x entrou na raiz como x^2. Cancelando o x obtemos $\dfrac{3+1/x}{\sqrt{1+1/x^2}+1}$. Se $x \to \infty$ obtemos $\dfrac{3+0}{\sqrt{1+0}+1} = \dfrac{3}{2}$.

(b) Racionalizando com $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ obtemos

$$\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

Dividindo-se o numerador e denominador por $\sqrt{x}$ (ou, o que dá na mesma, colocando-se $\sqrt{x}$ em evidência) obtemos $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}/x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1}$. Se $x \to \infty$ obtemos $\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \dfrac{1}{2}$. ■

Observação 1.14 *Quase sempre o limite no ∞ e no $-\infty$ é o mesmo. Isto é verdade para funções racionais quando o limite é finito. Quando o limite é infinito podemos ter por exemplo* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty \neq \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$. *Outro exemplo onde o limite é distinto é* $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty \neq \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Erro Comum: Escrever que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{5x-7} = 3/5$. Note que $\frac{\sqrt{9x^2+3}}{5x-7} \approx \frac{\sqrt{9x^2}}{5x} = 3\frac{|x|}{5x}$.
Se $x > 0$, $\sqrt{9x^2} = 3|x| = 3x$ e se $x < 0$, $\sqrt{9x^2} = 3|x| = -3x$.
Assim, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{5x-7} = \dfrac{3}{5}$ e $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{5x-7} = -\dfrac{3}{5}$.

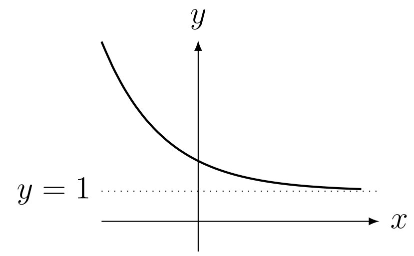
Nos exemplos abaixo (e alguns que já apareceram) não existe técnica geral pois envolvem função **transcendente** (Definição 1.10 da p.14) como por exemplo: $\operatorname{sen} x, \cos x, e^x, \log x$.

Exemplo 1.28 *Calcule os limites, esboce o gráfico e determine **todas** as assíntotas (verticais e horizontais).*

(a) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}+1$; *(b)* $\lim_{x\to\pi/2^-} \dfrac{2}{\cos(x)}$; *(c)* $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$;

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\log(x)}$; *(e)* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\log(x)}$.

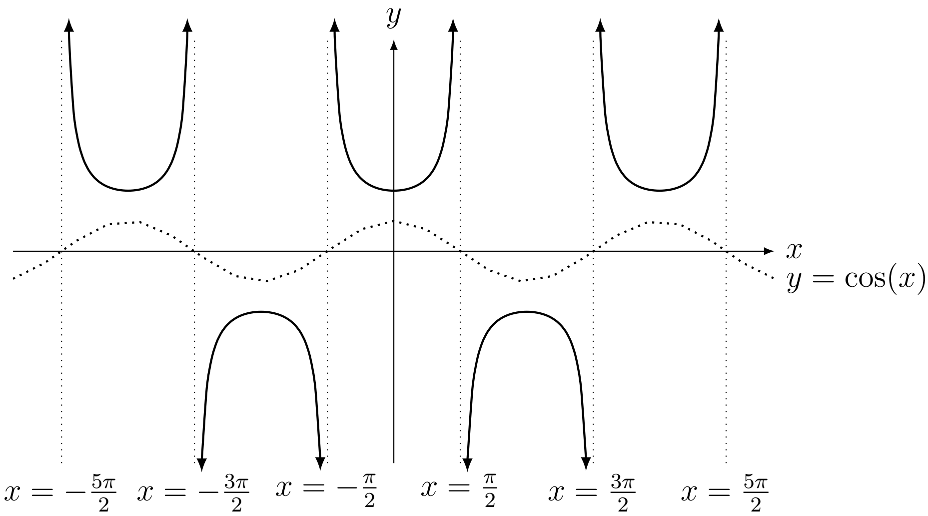
Solução: (a) $e^{-x} \to e^{-\infty} = e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$. Logo, $e{-}x+1 \to 1$. Para o esboço, quando x aumenta o valor da função diminui. Faça translação vertical. A única assíntota é $y = 1$, assíntota horizontal.



(a) $y = e^{-x}+1$

(b) Como $\cos(x) > 0$ para x próximo de $\pi/2$ mas menor que isto, o limite é ∞.

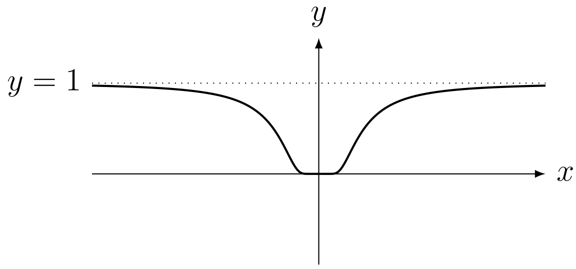
Para o esboço comece com o gráfico do cosseno (pontilhado na figura abaixo). Quando o valor, em módulo, da $\cos$, o valor de $2/\cos$ diminui em módulo. Nos pontos onde $\cos(x) = 0$, isto é, nos pontos $x = 2k\pi \pm \pi/2$ para $k \in \mathbb{Z}$, $1/\cos(x) \to \pm\infty$. Assim as assintotas verticais são nestes pontos.



(b) $y = \dfrac{2}{\cos(x)}$

(c) quando $x \to 0$, $-1/x^2 \to -\infty$. Assim, $e^{-1/x^2} \to e^{-\infty} = 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$.

Para o esboço, a função é sempre positiva. Perto do zero se aproxima de zero e longe se aproxima $e^0 = 1$.

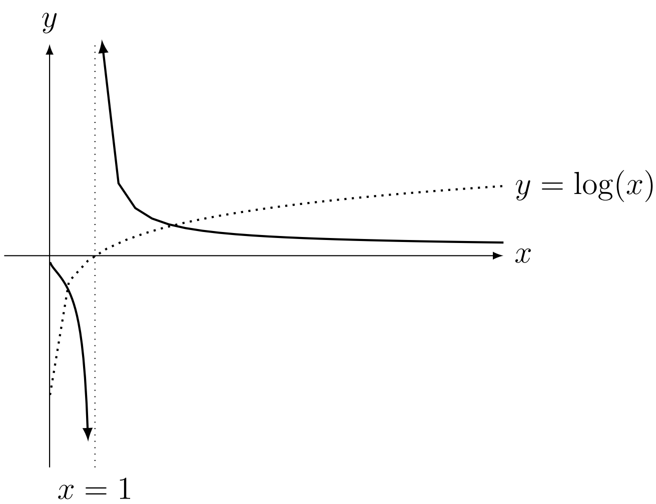


(c) $y = e^{-1/x^2}$

(d) Como $\log(1) = 0$ e $\log(x) > 0$ para $x > 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$. Como $\log(x) < 0$ para $x < 1$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Como os limites laterais são distintos, o limite não existe.

(e) Como $\log(x) \to -\infty$, $1/\log(x) \to 0$.

Para o esboço de $1/\log$, comece com o esboço de $\log$ (pontilhado na figura abaixo). Quando $\log$ é zero, $1/\log \to \pm\infty$. O que ocorre próximo do 0 é que o gráfico "cola" no eixo y, embora neste gráfico isto não fique claro. Convido o leitor a utilizar um programa (veja Seção 1.1) que plote gráficos para investigar este ponto.



(d), (e) $y = \dfrac{1}{\log(x)}$

■

Exemplo 1.29 *Calcule:* *(a)* $\lim_{x \to -\infty} \log(|x|)$; *(b)* $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(x)$;

(c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$; *(d)* $\lim_{x \to \infty} (\log(3x) - \log(x-5))$.

Solução: (a) $|x| \to \infty$ e portanto, $\log(|x|) \to \infty$. (b) Este limite não existe pois o seno oscila entre 1 e -1. (c) Este limite não existe pois como o seno oscila, $1/\operatorname{sen}(x)$ vai oscilar de 1 até ∞ e de -1 até $-\infty$. (d) Temos um caso de indeterminação $\infty - \infty$. Por propriedade do logaritmo, $(\log(3x) - \log(x-5)) = \log\left(\dfrac{3x}{x-5}\right)$. Como $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x-5} = 3$, a resposta é $\log(3)$. ■

Exemplo 1.30 *Calcule:* *(a)* $\lim_{x \to \infty} I_{\mathbb{Q}}(x)$. *(b)* $\lim_{x \to \infty} \lfloor x \rfloor$.

Solução: (a) Veja o gráfico na p.11. Limite não existe pois função oscila entre 0 e 1.

(b) Veja definição e gráfico da função $\lfloor x \rfloor$ no Exemplo 1.11 da p.11. Limite é ∞ pois quando $x \to \infty$ a função se aproxima de ∞ passando somente pelos inteiros. ■

1.4 Indeterminações do Limite

As propriedades básicas do limite (da soma, do produto, etc.) que apresentamos anteriormente não podem ser aplicadas quando o denominador se anula ou quando surge ∞ ou $-\infty$. Algumas extensões destes resultados são possíveis. Alguns exemplos:

— Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, então $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \infty$.

— Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ é finito, então $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \infty$.

Estes teoremas podem ser apresentados através do seguinte quadro.

São limites determinados:
Para soma/subtração, qualquer $k \in \mathbb{R}$ (incluindo $k = 0$),

$\infty + \infty = k + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = k - \infty = -\infty.$

Para produto/divisão:

$\infty \cdot \infty = -\infty \cdot (-\infty) = \infty, \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty \cdot \infty = -\infty.$

Para qualquer $k \in \mathbb{R}$ (incluindo $k = 0$), $\dfrac{k}{\infty} = \dfrac{k}{-\infty} = 0.$

Se $k > 0$: $\quad k \cdot \infty = \dfrac{\infty}{k} = \infty, \quad k \cdot (-\infty) = \dfrac{-\infty}{k} = -\infty.$

Se $k < 0$: $\quad k \cdot (-\infty) = \dfrac{-\infty}{k} = \infty, \quad k \cdot \infty = \dfrac{\infty}{k} = -\infty.$

Para exponenciação, para $k \in \mathbb{R}$:

Se $|k| < 1$: $\quad |k|^\infty = 0, \quad |k|^{-\infty} = \dfrac{1}{|k|^\infty} = \dfrac{1}{0^+} = \infty.$

Se $|k| > 1$: $\quad |k|^\infty = \infty, \quad |k|^{-\infty} = \dfrac{1}{|k|^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

$\infty^\infty = \infty, \quad \infty^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^\infty} = 0, \quad (0^+)^\infty = 0, \quad (0^+)^{-\infty} = \dfrac{1}{(0^+)^\infty} = \dfrac{1}{0^+} = \infty.$

Indeterminações do limite: O perigo é que ∞ **não** é número! Assim temos as seguintes indeterminações:

$\infty - \infty, \quad -\infty - (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad \infty + (-\infty)$

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{k}{0}, \quad \dfrac{\pm\infty}{0}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad (\pm\infty)^0.$

Observação 1.15 *A indeterminação 1^∞, que estudaremos no limite fundamental da exponencial no Teorema 1.19 da p.37, surge no modelo de juros contínuos compostos. Este caso é a fronteira do comportamento de a^∞. Se $0 < a < 1$ então $a^\infty = 0$ (multiplique um número positivo menor que 1 por ele mesmo uma infinidade de vezes). Se $a > 1$ então $a^\infty = \infty$. Mais exemplos de indeterminações no Desafio 4.1 da p.130.*

Exemplo 1.31 *Calcule os limites abaixo (que ilustram casos de indeterminação indicados entre colchetes):*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^4} \quad [\infty - \infty]$; *(b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2} \quad [\infty - \infty]$;

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{-3x^2+5} \quad \left[\dfrac{\infty}{-\infty}\right]$; *(d)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2}{2x} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$; *(e)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x}{2x} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$;

(f) $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x^4}$ $[0\cdot\infty]$; *(g)* $\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x}$ $[0\cdot\infty]$.

Solução: (a) Colocando o mesmo denominador vemos que $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \frac{x^2-1}{x^4}$. Para x próximo de zero o numerador é negativo (-1) e o denominador é sempre positivo. Portanto o limite quando $x \to 0$ é $-\infty$. (b) Fazendo análise similar, o numerador será $1 - x^2$. Portanto o sinal será positivo e o limite será ∞. (c) Divida numerador e denominador por x^2: $\frac{x^2+1}{-3x^2+5} = \frac{1+1/x^2}{-3+5/x^2} \to \frac{1+0}{-3+0} = -1/3$. (d) $\frac{6x^2}{2x} = \frac{6x}{2} \to 0$. (e) $\frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} \to 3$.
(f) Como $x \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3}$, o limite quando $x \to 0$ não existe pois dependendo do lado que se chega em zero: pela direita ∞, pela esquerda $-\infty$. (g) $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \to 1$. ∎

Exemplo 1.32 *Se $f(x) = x^2(3+\operatorname{sen} x)$ e $g(x) = 1/x^2$, determine o tipo de indeterminação e calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$.*

Solução: Como $3+\operatorname{sen} x \geq 2$, $f(x) \geq 2x^2$. Como $2x^2 \to \infty$ quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. Por outro lado, $g(x) \to 0$. Trata-se de indeterminação $\infty \cdot 0$. Como $f(x)g(x) = (3+\operatorname{sen} x)$, o limite do produto não existe (pois oscila entre 2 e 4). ∎

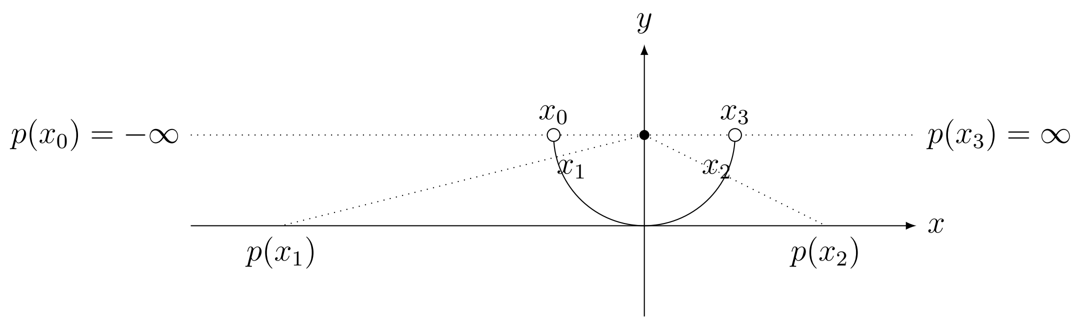
Limites que não sabemos calcular no momento: **Hierarquia do infinito**.

Quem cresce mais rápido: x^2, $\log x$, 2^x, x^x, x^n $(n \in \mathbb{N})$? Determinamos isto calculando o limite quando $x \to \infty$ do quociente entre duas funções. Com isto estabelecemos a hierarquia do infinito: entre os infinitos, quem é mais infinito. Sabemos fazer isto com $\sqrt{x}$, x^n, mas não com estas funções. **Não** sabemos calcular agora — mas vamos em breve (Seção 4.1 da p.93) saberemos com a técnica de L'Hospital — $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^n}$.

Exemplo 1.33 *Determine quem cresce mais rápido entre: $x, \sqrt[3]{x}, \sqrt{x}, x^3$.*

Solução: Como $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{1/6}}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$. Logo $\sqrt{x} \to \infty$ mais rápido que $\sqrt[3]{x}$. De forma análoga obtemos que, para x grande, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3} < \sqrt{x} = x^{1/2} < x < x^3$. ∎

Observação 1.16 *Podemos "enxergar" os infinitos de $\mathbb{R}$ utilizando meia projeção estereográfico (bijeção entre o semicírculo e $\mathbb{R}$). Veja na figura abaixo que os pontos x_0, x_3 correspondem aos pontos $\pm\infty$.*



Projeção Estereográfica p : {meio círculo} $\to \mathbb{R}$

1.5 Esboço de Gráficos (parte I)

O objetivo desta seção é esboçar gráficos de funções racionais (quociente de polinômios) utilizando somente assíntotas. Mais adiante (no capítulo de Aplicações da Derivada, na Seção 4.5, p.107) aprenderemos a determinar regiões de crescimento e decrescimento da função, concavidades, acrescentando mais detalhes ao gráfico.

Nas funções **racionais** as assíntotas verticais e horizontais são importantes. Para esboçar gráfico, devemos buscar pontos $x \in \mathbb{R}$ onde:

- $f(x) > 0,\ f(x) = 0,\ f(x) < 0$ fazendo o quadro de análise de sinais.
- $f(x) = \pm\infty$, as assíntotas verticais.
- calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, que se for **finito** determinará a assíntota horizontal.

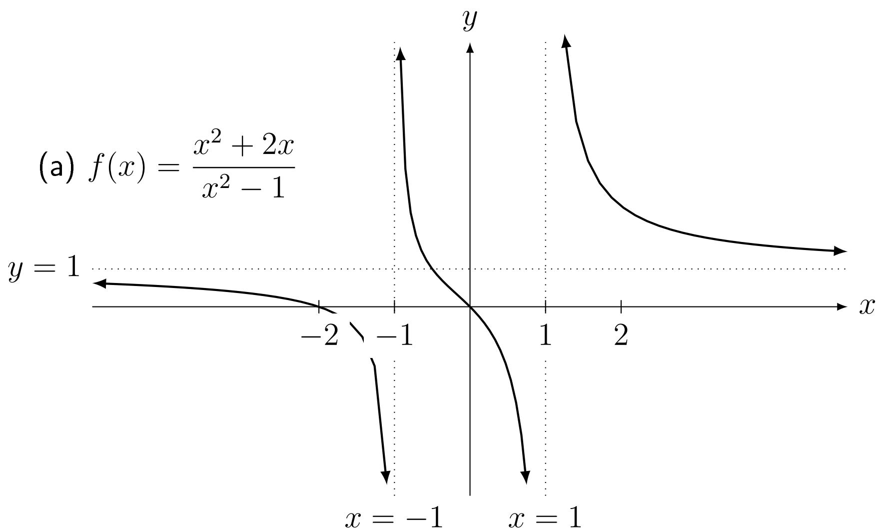
Exemplo 1.34 *Determine os sinais, as assíntotas verticais e horizontais e faça um esboço do gráfico de:*

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$; *(b)* $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{16-x^2}$; *(c)* $f(x) = \dfrac{x^4-2^4}{x(x^2-9)}$.

Solução: (a) Faremos o quadro de sinais. O numerador $x^2+2x = x(x+2)$. Os pontos onde numerador ou denominador se anulam: $\pm 1, 0, -2$. A função $f(x) = 0$ onde o **numerador** se anula: 0 e -2. Nos pontos onde o denominador se anula (± 1), $f(x) \to \pm\infty$.

		-2		-1		0		1	
$x(x+2)$	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$

Assíntota vertical (denominador se anula se $x^2-1=0$) em $x=1$ e $x=-1$; assíntota horizontal em $y=1$ pois $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = \dfrac{1+2/x}{1-1/x^2} \to \dfrac{1+0}{1-0} = 1$ quando $x \to \infty$.

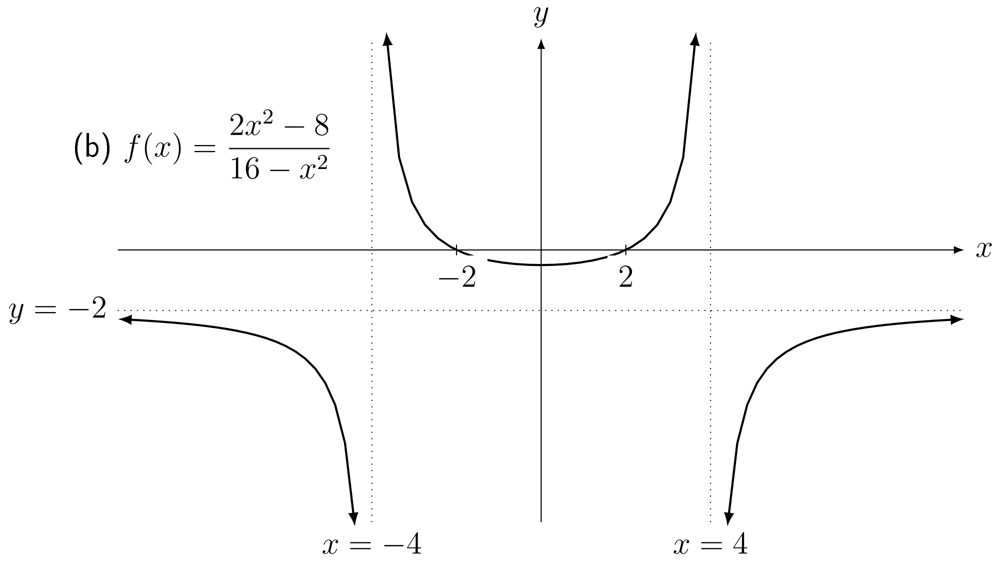


(b) Faremos o quadro de sinais. O numerador $2x^2-8 = 2(x^2-4)$. Os pontos onde numerador ou denominador se anulam: $\pm 2, \pm 4$. A função $f(x)=0$ onde o **numerador** se anula: ± 2. Nos pontos onde o denominador se anula (± 4), $f(x) \to \pm\infty$.

		-4		-2		2		4	
$2(x^2-4)$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$16-x^2$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$	$-$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$

Assíntota vertical (denominador se anula se $16-x^2=0$) em $x=4$ e $x=-4$; assíntota horizontal em $y=-2$ pois $\dfrac{2x^2-8}{16-x^2}=\dfrac{2-8/x^2}{16/x^2-1}=\dfrac{2-0}{0-1}=-2$.

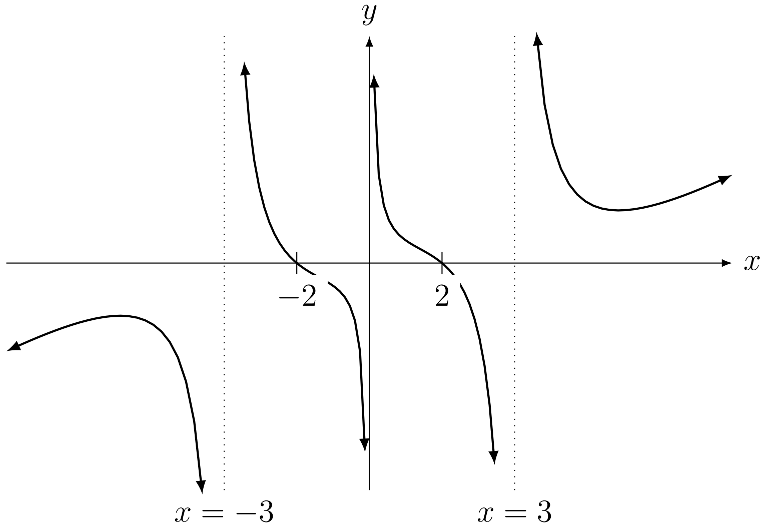
(b) $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{16-x^2}$



(c) Faremos o quadro de sinais. O numerador $x^4-2^4=(x^2-2^2)(x^2+2^2)$ e somente o primeiro termos possui raízes reais. Assim vou ignorar, no quadro de sinais, o termo $x^2+2^2>0$ (não altera os sinais). Os pontos onde numerador ou denominador se anulam: $\pm2,\pm3,0$. A função $f(x)=0$ onde o **numerador** se anula: ±2. Nos pontos onde o denominador se anula $(\pm3,0)$, $f(x)\to\pm\infty$.

		-3		-2		0		2		3	
x^2-2^2	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
x^2-9	$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$-$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$

Assíntota vertical (denominador se anula se $x(x^2-9)=0$) em $x=0$, $x=3$ e $x=-3$; não possui assíntota horizonta (limite quando $x\to\infty$ é ∞ e quando $x\to-\infty$ é $-\infty$).



$$(c) f(x) = \frac{x^4 - 2^4}{x(x^2 - 9)}$$

■

1.6 Limites Fundamentais

Apresentaremos os dois limites fundamentais do Cálculo: um relacionado ao seno, o outro à exponencial. São os primeiros resultados não triviais. Precisamos primeiro um resultado importante para calcular o limite fundamental trigonométrico (o do seno), o Teorema do Sanduíche.

Teorema 1.16 (Sanduíche) *Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x numa vizinhança de c e $x \neq c$. Se $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = k$, então $\lim_{x \to c} g(x) = k$.*

Observação 1.17 *Este Teorema continua verdadeiro para $c = \pm\infty$ e para $k = \pm\infty$.*

Exemplo 1.35 *Esboce o gráfico e aplique o Teorema do Sanduíche para determinar:*

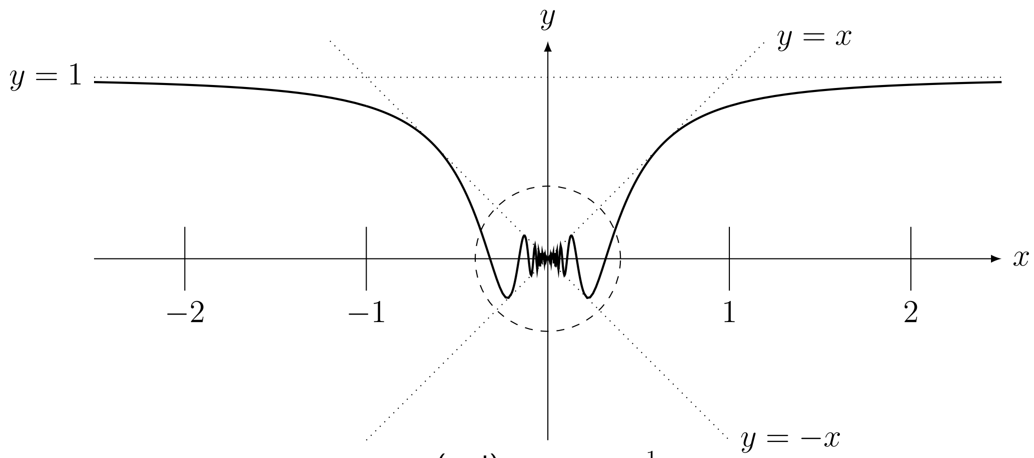
(a) $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; *(b)* $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$; *(c)* $\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

(d) $\lim_{x \to e} (x - e) I_{\mathbb{Q}}(x)$; *(e)* $\lim_{x \to 0} (x - e) I_{\mathbb{Q}}(x)$.

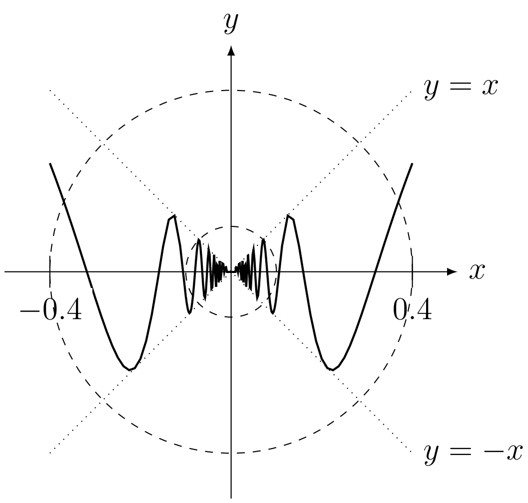
Solução: Convido o leitor a utilizar um programa (veja Seção 1.1) que plote gráficos para investigar estes exemplos.

(a) Para qualquer y temos que $-1 \leq \operatorname{sen}(y) \leq 1$. Assim, para $x \geq 0$ temos que $-x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq x$. Para $x \leq 0$ temos de forma análoga que $x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq -x$. Podemos juntar os dois utilizando o módulo: para todo $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$. Quando $x \to 0$ as funções nos extremos tendem para 0 e portanto, pelo Teorema do Sanduíche o limite é 0.

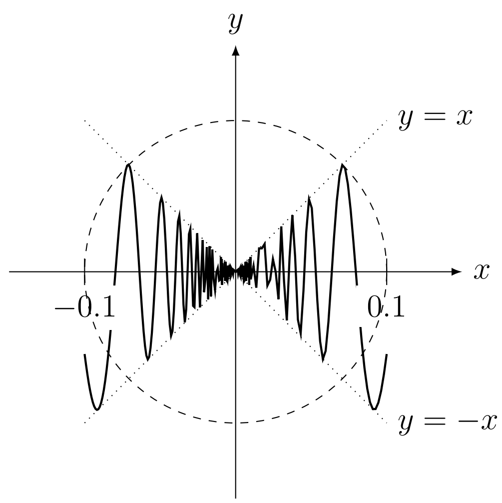
Mostramos na sequência três figuras do gráfico da função. O círculo tracejado é a zona de zoom que é mostrada na próxima figura. Note como as retas $y = \pm x$ limitam o gráfico da função.



(a, I) $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



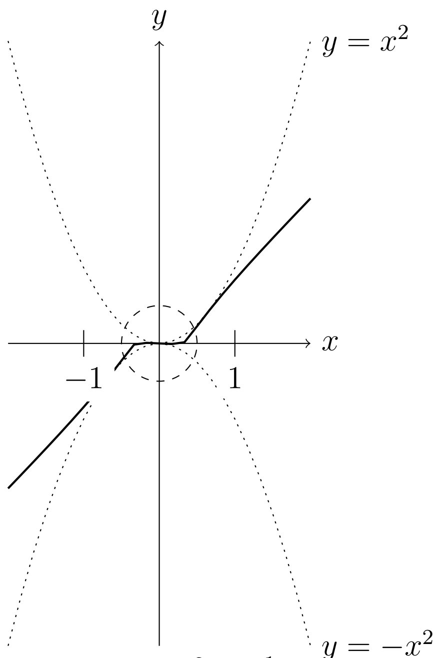
(a, II) $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



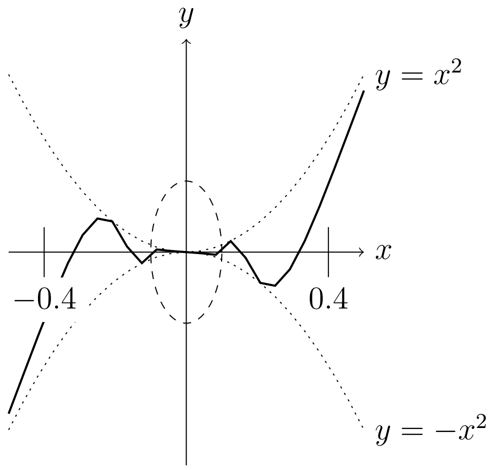
(a, III) $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(b) De forma análoga $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}(1/x) \leq x^2$. Quando $x \to 0$ as funções nos extremos tendem para 0 e portanto, pelo Teorema do Sanduíche o limite é 0.

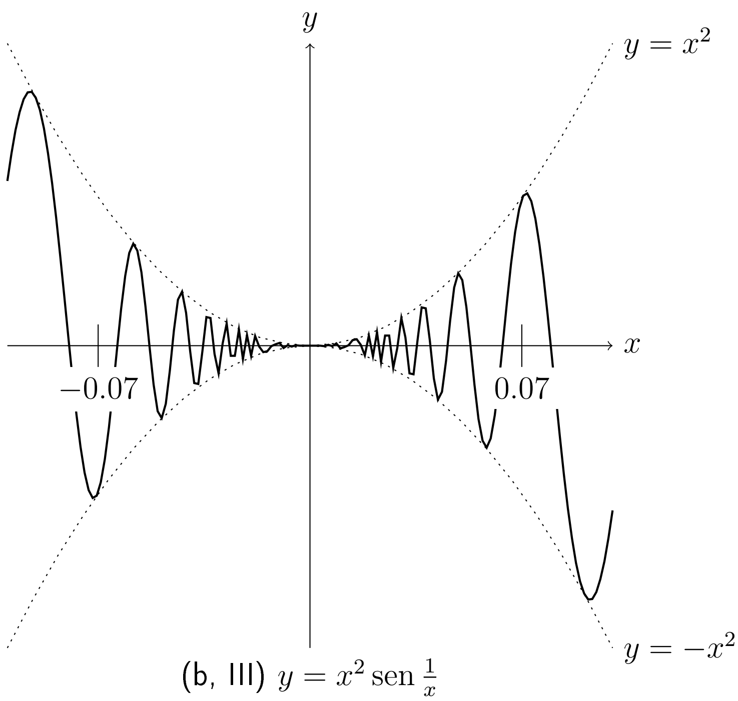
Mostramos na sequência três figuras do gráfico da função. O círculo tracejado é a zona de zoom que é mostrada na próxima. Note como as parábolas $y = \pm x^2$ limitam o gráfico da função.



(b, I) $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



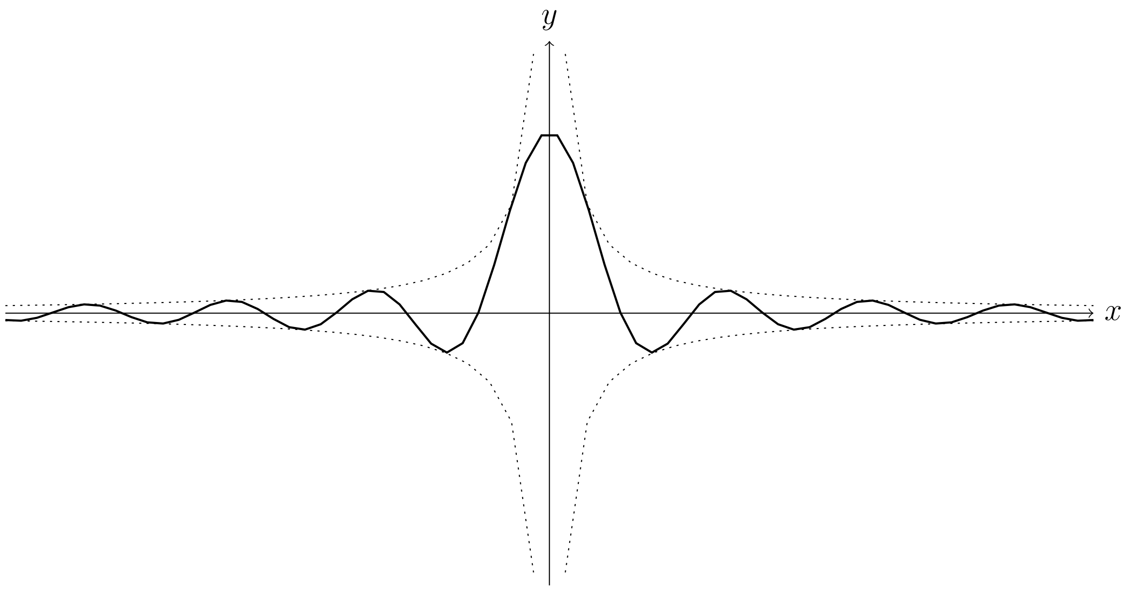
(b, II) $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$



(b, III) $y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(c) De forma análoga $-1/|x| \leq \operatorname{sen}(x)/x \leq 1/|x|$. Quando $x \to -\infty$ as funções nos extremos tendem para 0 e portanto, pelo Teorema do Sanduíche o limite é 0.

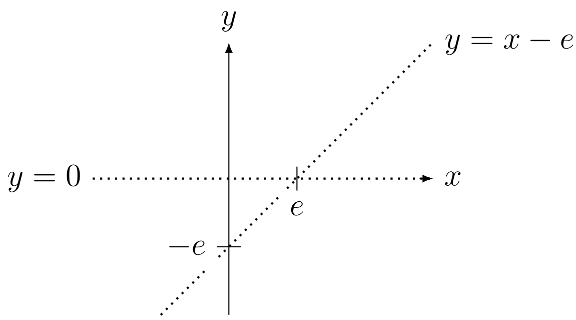
O gráfico da função é limitado por $y = \pm 1/x$.



(c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

(d) A função $I_{\mathbb{Q}}$ (função indicadora dos racionais) é limitada por 0 e 1. Assim $0 \leq I_{\mathbb{Q}}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $(x - e)$ vale no máximo $|x - e|$ e no mínimo $-|x - e|$ Assim podemos limitar $(x - e)I_{\mathbb{Q}}(x)$ por $-|x - e| \leq (x - e)I_{\mathbb{Q}}(x) \leq |x - e|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Quando $x \to e$ as funções nos extremos tendem para 0 e portanto, pelo Teorema do Sanduíche o limite é 0.

O gráfico desta função é formada por duas "retas" pontilhadas: uma em $y = 0$, nos irracionais e outra no $y = x - e$, acima dos racionais (vide figura abaixo).



(d) $f(x) = (x - e)I_Q(x)$

(e) Note que $f(0) = (0 - e)I_{\mathbb{Q}}(0) = -e \cdot 1 = -e$. No entanto, perto de zero a função assume valores próximos de $-e$, para $x \in \mathbb{Q}$ e iguais a zero, para $x \notin \mathbb{Q}$. Portanto o limite **não** existe. ■

Exemplo 1.36 *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}(3x + e^x) + 1}{x^2 + 1} + 3$.

Solução: Para qualquer y temos que $-1 \leq \operatorname{sen}(y) \leq 1$. Assim, somando 1 dos dois lados obtemos que $0 = -1 + 1 \leq \operatorname{sen}(3x + e^x) + 1 \leq 1 + 1 = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dividindo por $x^2 + 1$, que é sempre diferente de zero, e somando 3 dois dois lados obtemos que $\dfrac{0}{x^2 + 1} + 3 \leq \dfrac{\operatorname{sen}(3x + e^x) + 1}{x^2 + 1} + 3 \leq \dfrac{2}{x^2 + 1} + 3$. Quando $x \to -\infty$, os dois lados convergem para 3. Pelo Teorema do Sanduíche o limite é 3. ■

Pré-Cálculo: Identificar no círculo trigonométrico as funções seno, cosseno e tangente. Recordar identidades do $\operatorname{sen}(a+b)$ ("minha terra tem palmeiras ..." (☺)) e $\cos(a+b)$ ("cos, cos, sen, sen" (☺)).

Teorema 1.17 (limite fundamental trigonométrico) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$

Prova: Para $x > 0$ faça a comparação de áreas de dois triângulos retângulos no círculo trigonométrico com o arco de círculo. Veja *Differentiation of Trigonometric Functions* na `en.wikipedia.org`. Obtemos que

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}.$$

Para $0 < x < \pi/2$ todos os termos são positivos. Assim,

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{\cos x} \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi/2.$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ (verifique!) e $\cos(-x) = \cos x$,

$$\cos(-x) \le \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \le \frac{1}{\cos(-x)} \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi/2.$$

Trocando variáveis com $y = -x > 0$ obtemos que

$$\cos y \le \frac{\operatorname{sen} y}{y} \le \frac{1}{\cos y} \quad \text{para} \quad -\pi/2 < y < 0.$$

Juntando obtemos que

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \frac{1}{\cos x} \quad \text{para} \quad -\pi/2 < x < \pi/2, x \ne 0.$$

Pelo Teorema do Sanduíche, o limite é 1. ■

Mudança de variáveis no limite.
Pode-se mudar variáveis do limite para determiná-lo, conforme o Lema abaixo. Aprenda esta técnica (através dos exemplos abaixo) pois é importante. No Capítulo de integração introduzimos uma técnica similar: a mudança de variável de integração.

Lema 1.18 (mudança de variáveis no limite) *Se $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ (dizemos que g uma função contínua em a), então $\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{h\to g(a)} f(h)$ caso os limites existam.*

Prova: Veja prova em [NC] nos exercícios. ■

Exemplo 1.37 *Calcule os limites abaixo:*
(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$; *(b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(3x)}{x^2}$; *(c)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(7x)}$; *(d)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Solução: (a) Tome $t = 2x$. Quando $x \to 0$, $t \to 0$. Substituindo obtemos $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t/2} = 2\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 2 \cdot 1 = 2$.

(b) Substitua $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$ e utilize propriedade do limite do produto para obter $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)x} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)x}$. Agora calculamos um destes limites pois o outro é idêntico. Utilizando a propriedade do produto novamente obtemos que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(3x)} =$. O limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(3x)} = 1$. Para o primeiro fazemos a substituição $t = 3x$. Quando $x \to 0$, $t \to 0$. Substituindo obtemos $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t/3} = 3\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 3 \cdot 1 = 3$. Portanto a resposta é $3^2 = 9$.

(c) Multiplique em cima e embaixo por x (assim não alteramos o limite) e separe no produto de dois limites: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(7x)}$. O primeiro dará 5 (veja o item (a) pois é análogo) e o segundo é igual a $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(7x)} \left(\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(7x)}{x}\right)^{-1} (7)^{-1}$. Portanto a resposta é $5/7$.

(d) Multiplique por $1 + \cos x$ para racionalizar (**racionalização trigonométrica**) e obtenha $\dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$. Agora separe em dois limites, um com $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$, que vai dar 1, outro com $\dfrac{1}{(1 + \cos x)}$, que vai dar $1/2$. Portanto a resposta é $1/2$. ■

Os exemplos abaixo são um pouco mais complicados da aplicação da técnica de mudança de variáveis.

Exemplo 1.38 *Determine:* (a) $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos(x)}{x - \pi/2}$; (b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{x+h} - \sqrt[7]{x}}{h}$.

Solução: (a) Defina $t = x - \pi/2$ e aplique a identidade $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

Substituindo $t = x - \pi/2$, quando $x \to \pi/2$, $t \to 0$. Logo o limite passa a ser $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(t + \pi/2)}{t}$. Como $\cos(t + \pi/2) = \cos t \cos \pi/2 - \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \pi/2 = -\operatorname{sen} t$, obtemos o limite $\lim_{t\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen}(t)}{t}$ que vale -1 pelo limite fundamental.

(b) Coloque $\sqrt[7]{x}$ em evidência e mude variável para $t = \sqrt[7]{1 + h/x}$ e transforme o limite acima em $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}(t-1)}{x(t^7 - 1)}$. Com a mudança, quando $h \to 0$, $t \to 1$. Colocando $\sqrt[7]{x}$ em evidência obtemos que $\frac{\sqrt[7]{x+h} - \sqrt[7]{x}}{h} = \sqrt[7]{x}\frac{\sqrt[7]{1+h/x} - 1}{h}$.

Da definição de t obtemos que $t^7 = 1 + h/x$, e portanto, $t^7 - 1 = h/x$ e $h = x(t^7 - 1)$. Substituindo estas identidades obtemos o limite $\lim_{t\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x}(t-1)}{x(t^7 - 1)}$. Agora como 1 é raiz basta dividir o polinômio $t^7 - 1$ por $t - 1$ de depois fazer $t \to 1$. Obtemos $\frac{\sqrt[7]{x}}{7x} = \frac{1}{7x^{6/7}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$. ■

Pré-Cálculo: Propriedades da exponenciação e do log:
- $(a^b)^c = a^{bc}$. Assim, $(10^2)^7 = 10^{2\cdot 7} = 10^{14}$, $(1+a)^{7x} = ((1+a)^x)^7$.
- $\log(a^b) = b\log(a)$ (Propriedade do "peteleco"). Assim, $\dfrac{\log(27)}{x} = \log(27^{1/x})$.

O limite abaixo possui uma conexão importante com matemática financeira, no chamado modelo de juros compostos contínuos. Outras conexões são com modelos de crescimento populacional e de decaimento radioativo. A Matemática que conecta estas aplicações é o modelo exponencial. Trata-se de uma indeterminação do tipo $\boxed{1^\infty.}$

Teorema 1.19 (limite fundamental exponencial) *O limite* $\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$ *existe.*

Prova: Veja em [NC]. ■

Definição 1.20 *Definimos o número real* $e \in \mathbb{R}$ *por* $e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$.

Observação 1.18 *Pode-se provar (veja [NC]) que*

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}.$$

Esta é outra possibilidade para definição de e. *Utilizando esta definição pode-se provar que* $2 < e < 3$. *Na realidade,* $e = 2.718281828459045\ldots$ *Trata-se de um número irracional (veja Desafio 1.11 da p.44).*

Corolário 1.21 $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Prova: Basta mudar variável para $h = 1/x$ e aplicar o Teorema 1.19. ■

Juros compostos contínuos. Suponha um capital c investido com juros anuais de k por cento ao ano. Definindo $\alpha = k/100$, após t anos, o valor total será $c(1+\alpha)^t$ (porque?). Agora se os juros forem computados mensalmente, a taxa mensal será de $\alpha/12$ e o total será, após t anos, $c(1+\alpha/12)^{12t}$. E se quisermos computar por dia: $c(1+\alpha/365)^{365t}$. Finalmente podemos computar por hora, minuto, segundo, etc. Qual será o total após t anos se computarmos juros compostos contínuos? Denotando por n o número de vezes que o juros composto será computado chegaremos ao limite

$$\lim_{n \to \infty} c \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt}.$$

Fazendo a substituição de variável $x = n/\alpha$ obtemos que o limite

$$\lim_{x \to \infty} c \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha x} = c \left(\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)^{\alpha t} = ce^{\alpha t}.$$

Portanto o valor total após t anos será $ce^{\alpha t}$ (ver [Co] p.179).

Observação 1.19 *Veja o caso dos juros compostos. Intuitivamente não está* ***nada*** *claro o que vai ocorrer. Se por um lado parece que vai dar* ∞ *pela acumulação infinitas vezes de juros, a taxa* $(1+\alpha/n) \to (1+0) = 1$, *o que indicaria que no limite ficaríamos com o mesmo que o valor inicial. O que ocorre na realidade é que obtemos* $e^{\alpha t}$, *um valor intermediário entre* 1 *e* ∞. *Aprecie a beleza deste resultado.* (😊)

Crescimento populacional. Suponha que uma população inicial p_0 de uma bactéria aumente em k por cento a cada hora. Definindo $\alpha = k/100$, a população será de $p_0(1+\alpha)^t$ após t horas. Se o crescimento for computado a cada minuto, a taxa de crescimento por minuto será (aproximadamente) de $k/60$ por cento por minuto e a população total será, após t horas, $p_0(1+\alpha/60)^{60t}$. Passando ao limite, com o crescimento ocorrendo a cada instante, chegaremos de forma análoga que após t horas a população será de $p_0e^{\alpha t}$.

Situação análoga é o **decaimento radioativo** a uma taxa de k por cento de uma massa inicial de material radioativo m_0. Definindo $\alpha = k/100$, após t horas, a massa será de $m_0(1-\alpha)^t$. Seguindo raciocínio análogo, mas com mudança de variável $x = -n/\alpha$, deduziremos que após t horas massa será de $m_0e^{-\alpha t}$.

Exemplo 1.39 *Calcule: (a)* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{4x}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{5x}$; *(c)* $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{7/x}$.

Solução: (a) Como $(1+1/x)^{4x} = ((1+1/x)^x)^4$, obtemos que
$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^{4x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x\right)^4 = e^4$.

(b) Como $((x+3)/x)^{5x} = (1+3/x)^{5x}$, fazendo a substituição $1/y = 3/x$ obtemos o limite $\lim\limits_{y\to\infty}(1+1/y)^{15y} = \left(\lim\limits_{y\to\infty}(1+1/y)^y\right)^{15} = e^{15}$.

(c) Fazendo $y = -5x$ obtemos $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{7/(-y/5)} = \left(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right)^{-35} = e^{-35}$. ∎

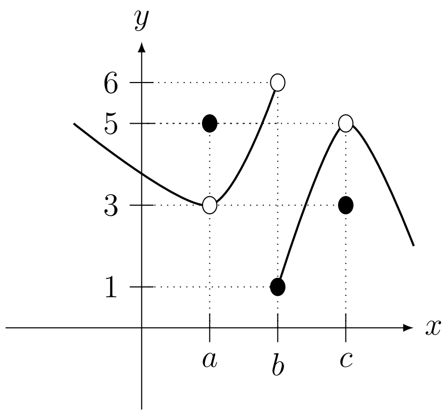
Observação 1.20 ***Porque** e **é base natural para exponencial e porque medir ângulos em radianos?***
A resposta está na Observação 3.2 da p.72 e tem relação direta com estes dois limites fundamentais.

1.7 Exercícios de Limite

1.7.1 Exercícios de Fixação

Fix 1.1: Considere o gráfico de $y = f(x)$ esboçada no gráfico abaixo. Determine os limites abaixo. Caso algum não exista, determine os limites laterais.

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to b} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.



Fix 1.2: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Se for verdadeiro justifique.

(a) $\{x \in \mathbb{R}; \quad |x-3| \leq 2\} = [1,5]$.
(b) $\{x \in \mathbb{R}; \quad |x+2| < 1\} = (1,3)$.
(c) $\sqrt{x^2} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(d) se $g(x) = \begin{cases} 4; & x \neq 2; \\ \pi; & x = 2 \end{cases}$, então $\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = \pi$.
(e) se $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x))$ existe, então existe $\lim_{x \to c} f(x)$.

Fix 1.3: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Se for verdadeiro justifique.
(a) Se $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$, então $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.
(b) Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, então $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -4$.
(c) Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, então $f(2) = 4$.
(d) Existe uma função f tal que $\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} f(x)$.

Fix 1.4: Considere a função f dada por $f(x) = \begin{cases} 5; & x \leq 1 \\ 7; & 1 < x \leq 2 \\ 9; & x > 2 \end{cases}$. Determine $\lim_{x \to k} f(x)$ ou, caso não exista, os limites laterais para:
(a) $k = 1$; (b) $k = 0.9999$; (c) $k = 1.0001$;
(d) $k = 2$; (e) $k = 1.9999$; (f) $k = 2.0001$.

Fix 1.5: Aplique a definição do módulo para esboçar o o gráfico de:
(a) $\dfrac{\cos x}{|\cos(x)|}$; (b) $\sqrt{|x|}$.

Fix 1.6: Partindo de gráfico de funções simples ($\pm x^2$, $\pm 1/x$, $\pm 1/x^2$, $\sqrt{x}$, $\operatorname{sen}(x)$, $|x|$, $\log(x)$, e^x), utilizando translações verticais e/ou horizontais e/ou reflexões, esboce o gráfico de:
(a) $y = 1 + \sqrt{x}$ (b) $y = 2 + \operatorname{sen}(x)$; (c) $y = \log(x-1) + 2$;
(d) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^3}$; (e) $y = |(x+1)(x+2)|$; (f) $y = |e^x - 2|$.

Fix 1.7: Determine: (a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(2-x)(3-x)}$; (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4+x}{x^3+2x}$; (c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-4}$.

Fix 1.8: Defina $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ seguindo *mutatis mutandis*[6] as definições dadas no texto.

Fix 1.9: Faça o estudo de sinal do numerador e denominador para determinar os valores de x que satisfazem as desigualdades:
(a) $\dfrac{3-x^2}{x^2-1} \geq 0$; (b) $\dfrac{x^3-1}{x(x^2-4)} \leq 0$.

Fix 1.10: Faça o estudo de sinal e o esboço do gráfico dos polinômios abaixo.
(a) $p(x) = (x-2)(x+3)(1-x)$; (b) $q(x) = (x-2)^2(x+1)$;
(c) $r(x) = (3-x)(x-2)^2(x-5)$.

Fix 1.11: Determine: os limites: (a) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$; (b) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$; (c) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$;
(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3}{|x|}$; (e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+1}{x-2}$; (f) $\lim_{x \to 0^-} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; (g) $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x}{x^2-9}$.

Fix 1.12: Determine: (a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (b) $\lim_{x \to \infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$; (c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1+6x}{x-2}$;

[6] latim para "modifique o que tem que ser modificado"

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4}{5x+3}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-15x^2}{13x}$;

(g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5+x-1}{x^5-7}$;

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^4+5x^5-1}{4x^5-3x^4-2x^2+x+3}$; (i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^{10}-3x^7+9x^6-12x^2-x+1}{x^9-7x^2-21}$.

Fix 1.13: Complete as lacunas com pode/não pode:

(a) A assíntota vertical do gráfico de $y=f(x)$ __________ interceptar o gráfico de f.

(b) A assíntota horizontal do gráfico de $y=g(x)$ __________ interceptar o gráfico de g.

Fix 1.14: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Se for verdadeiro justifique. Se $\displaystyle\lim_{x\to1} q(x)=0$, então

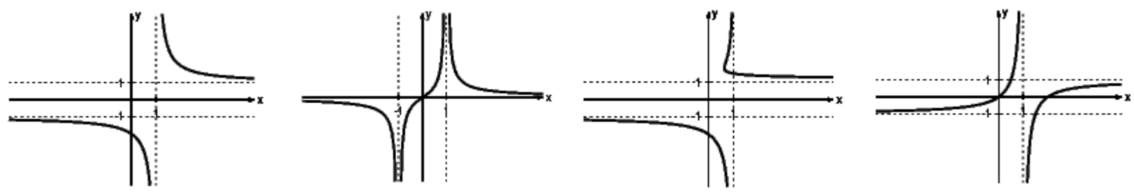
(a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{3}{q(x)}=\infty$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{q(x)}{f(x)}=0$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{q(x)}{-x^2}=0$.

Fix 1.15: Qual a diferença entre o limite ser indeterminado e o limite não existir?

Fix 1.16: Qual das Figuras abaixo pode representar o gráfico de uma função g tal que:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=1$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)=-1$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} g(x)=\infty$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} g(x)=-\infty$.



(a) (b) (c) (d)

Fix 1.17: Faça um esboço de um gráfico de uma função f tal que $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x)=2$, $f(1)=1$ e, além disso (um gráfico para cada item):

(a) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x)=-2$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x)$ não exista, (c) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x)=\infty$,

Fix 1.18: Determine: (a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}(1/x)$; (b) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{sen}(3h)}{h}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{5x}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^+}\tan(x)$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(1-2x)^{1/x}$.

Fix 1.19: Estude o Teorema 1.16 da p.31 (Sanduíche) e responda:

(a) É verdade que se $1\le g(x)\le 2$ então $\displaystyle\lim_{x\to3/2} g(x)$ existe e é um número entre 1 e 2?

(b) Explique, utilizando o Teorema do Sanduíche, como calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{x^2}$.

1.7.2 Problemas

Prob 1.1: Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{9-x^2}; & |x|\le 3\\ |x|-3; & |x|>3.\end{cases}$ (b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}; & x\ge 1;\\ \log(x)+1; & x<1.\end{cases}$

Prob 1.2: Considere a função $I_{\mathbb{Z}}$ (chamada de função característica ou indicadora do conjunto $\mathbb{Z}$) definida por $I_{\mathbb{Z}}(x)=\begin{cases}0; & x\notin\mathbb{Z}\\ 1; & x\in\mathbb{Z}.\end{cases}$ Esboce o gráfico e determine (se existir):

(a) $\lim_{x\to 3/4} I_{\mathbb{Z}}(x)$; (b) $\lim_{x\to -3} I_{\mathbb{Z}}(x)$; (c) $\lim_{x\to\infty} I_{\mathbb{Z}}(x)$.

Prob 1.3: Calcule os limites abaixo (quando eles existirem) justificando seus passos (sem utilizar a regra de L'Hospital) — Limites com raízes:

(a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1-h}}{h}$ (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{|x|-4}{\sqrt{x}-2}$; (c) $\lim_{h\to -1} \dfrac{\sqrt{h^2+3}-2}{h+1}$;

Prob 1.4: Determine os limites e, caso não exista, os limites laterais (caso existam).

(a) $\lim_{x\to -3} \operatorname{sen}\left(\dfrac{7}{x+3}\right)$; (b) $\lim_{x\to 2} \log|x-2|$; (c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|(x+1)}{x-2}$;

(d) $\lim_{x\to -5} \dfrac{x+3}{x+5}$; (e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6}$.

Prob 1.5: Calcule os limites abaixo (quando eles existirem) justificando seus passos (sem utilizar a regra de L'Hospital):

(a) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$; (b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$; (c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+2}{|x|-2}$; (d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$;

(e) $\lim_{a\to 2} \dfrac{(a-2)(a^2-4)}{a^3-5a^2+8a-4}$; (f) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; (g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x+5}$;

(h) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{1-x}$; (i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x+1-\frac{2}{x}}{x-1}$; (j) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$.

Prob 1.6: Calcule os limites abaixo (quando eles existirem) justificando seus passos (sem utilizar a regra de L'Hospital) — Limites no infinito:

(a) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; (b) $\lim_{y\to\infty} \dfrac{7-2y}{\sqrt{5-2y+9y^2}}$; (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{10x^4+3x^3+2x+5}}{5x^2-10x-100}$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}$; (e) $\lim_{y\to -\infty} \dfrac{5-3y^3}{\sqrt{8-y+10y^4}}$; (f) $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{16x^6-x+1}}{2x^3-x^2+20}\right)$.

Prob 1.7: Considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $c > 0$. Determine os limites:

(a) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{b/x}$; (b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{cx^2+a}-\sqrt{cx^2+b}\right)$; (c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{cx^2+ax}-bx\right)$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{cx^2+ax}-\sqrt{cx^2+bx}\right)$; (e) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{cx^2+ax}-\sqrt{cx^2+bx}\right)$.

Prob 1.8: Considere os polinômios $p(x) = ax^m + x^2 - 3x + 1$, $q(x) = bx^m + 2x^5 - 4$, $r(x) = cx^{2m} + 3x^7 + 2$ com $m > 10$, $a, b \neq 0$ e $c > 0$. Determine os limites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{r(x)}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{q(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{r(x)}{x^2 p(x)}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^m p(x)}{r(x)}$ (e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{r(x)}}{p(x)}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{r(x)}}{xq(x)}$

Prob 1.9: Determine os limites laterais quando $x \to 0$ para:

(a) $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; (b) $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$.

Prob 1.10: Sabendo que o quadro de sinais de $f(x)$ é dado pela tabela abaixo e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 4$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, esboce o gráfico de $f(x)$ e determine **todas** as assíntotas verticais e horizontais.

		-3		-2		3		4	
		0		$\pm\infty$		0		$\pm\infty$	
$f(x)$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$

Prob 1.11: Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo seguindo o roteiro abaixo.

(i) Faça um estudo do sinal da função (onde ela é zero, positiva e negativa).

(ii) Determine assíntotas horizontais e verticais.
(iii) Baseado em (i) e (ii) esboce o gráfico.

(a) $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; (b) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; (c) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $y = \dfrac{x^2-1}{x(x-2)}$; (e) $y = \dfrac{3x^2-3}{4-x^2}$;

Prob 1.12: Considere $h(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \\ -x; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Esboce o gráfico e determine (se existir):

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} h(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{h(x)}{x^2}$; (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{h(x)}{x^2}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{x}$.

Prob 1.13: (a) Suponha que h satisfaz $\dfrac{\sqrt{x}}{x^3+x} \leq h(x) \leq \dfrac{x}{x^2+1}$. Determine $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$.

(b) Suponha que $f(x)$ satisfaz $|f(x)-3| \leq 2|x-5|^4$. Calcule $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

Prob 1.14: Calcule os limites abaixo (quando eles existirem) justificando seus passos (sem utilizar a regra de L'Hospital): — Limites trigonométricos e exponenciais.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\tan(3x))^2 + \operatorname{sen}(11x^2)}{x\operatorname{sen}(5x)}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2}$;

(d) $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(\sqrt{h})\tan(2\sqrt{h})}{5h}$; (e) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}\left(\dfrac{7x+1}{\operatorname{sen}(\pi x/2)-1}\right)(e^{x-1}-1)$;

(f) $\lim\limits_{h\to 0^+} (1-5h^3)^{2/h^3}$; (g) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$.

1.7.3 Extras

Ext 1.1: Partindo de gráfico de funções simples ($\pm x^2, \pm 1/x, \pm 1/x^2, \sqrt{x}, \operatorname{sen}(x), |x|$), utilizando translações verticais e/ou horizontais e/ou reflexões, esboce o gráfico de:

(a) $y = |\operatorname{sen}(x)| - 1$; (b) $y = ||x|-1|$; (c) $y = |x+2|-1$.

Ext 1.2: Faça um esboço de um gráfico de uma função f tal que, simultaneamente:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$.

Ext 1.3: Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sengr}(x)}{x}$, onde sengr é a função seno do ângulo x medido em graus. Note que para a função seno utilizada em cálculo, o ângulo é medido em radianos.

Ext 1.4: Esboce o gráfico de: (a) $y = x + |x|$; (b) $x - \lfloor x \rfloor$.

Ext 1.5: Determine os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x|-1}{|x-1|}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x}{x^3-x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x^2-3x+2}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos\left(\dfrac{1}{x-\pi}\right)(x-\pi)$; (f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2x-1}$; (g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

Ext 1.6: Determine: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+x} - x^2\right)$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+|x|}{x+1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+|x|}{x+1}$; (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x+|x|+1}$.

Ext 1.7: Dado $a \in \mathbb{R}$, determine: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+a} - x\right)$.

Ext 1.8: Esboce o gráfico de: (a) $f(x) = \begin{cases} 1; & x \in \mathbb{Q}; \\ 2; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q}; \\ x^2; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

1.7.4 Desafios

Des 1.1: Considere as curvas no plano $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x|^n + |y|^n = 1\}$ e $C_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \lim_{n\to\infty}(|x|^n + |y|^n) = 1\}$. Esboce: (a) C_2. (b) C_1. (c) C_∞.

Des 1.2: A função parte inteira de x, denotada por $\lfloor x \rfloor$ é definida no Exemplo 1.11 da p.11.

(a) Calcule, se existir: $\lim_{x\to\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. (b) Calcule, se existir: $\lim_{x\to-\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

(c) Esboce o gráfico de $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. (d) Calcule, se existir: $\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Des 1.3: Considere $f(x) = A\,\mathrm{sen}(mx) + B\cos(mx)$. Prove que existem C (potência do sinal) e ϕ (fase do sinal) tais que $f(x) = C\,\mathrm{sen}(mx + \phi)$.

Des 1.4: Determine: (a) $\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{1/x}$. (b) $\lim_{x\to\infty}(1 + x)^{\alpha/\log x}$, com $\alpha \neq 0$.

Des 1.5: Como calcular assíntotas oblíquas e generalizações?

Dividindo os polinômios e separando em quociente e resto.

Assim, $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 1} = q(x) + \dfrac{6}{x - 1}$. Para x grande, $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \approx q(x)$, sua assíntota oblíqua. Plote uns gráficos para ver como se parecem. O mesmo ocorre quando a diferença entre os graus do numerador e denominador é maior que 1.

Des 1.6: Determine $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x\,\mathrm{sen}(1/x)}$. Tente esboçar o gráfico perto do zero desta função. Utilize algum software para isso.

Des 1.7: (Caricatura de $\mathrm{sen}(1/x)$ do livro do Spivak de Cálculo) Esboce o gráfico da função f que satisfaz:

(i) $f(1/n) = (-1)^{(n+1)}$,
(ii) f é linear entre $[1/(n + 1), 1/n]$ (segmento de reta),
(iii) $f(x) = 1$ para $x > 1$,
(iv) $f(-x) = f(x)$.

Des 1.8: Prove que a área do círculo de raio r é πr^2 seguindo o seguinte roteiro:

(a) Mostre que a área do polígono de n-lados inscrito no círculo é $\dfrac{n}{2} r^2\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$.
(b) Mostre que a área do polígono de n-lados circunscrito no círculo é $nr^2\tan(\pi/n)$.
(c) Faça $n \to \infty$ e conclua o argumento.

Des 1.9: Sejam f e g duas funções tais que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. Mostre que

$$\lim_{x\to 1} f(x)g(x) = 0.$$

Des 1.10: Objetivo desta atividade é aproximar a **função fatorial**. É fácil ver que (¨⌣)

$$n! = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdots \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} n^n.$$

Logo $n! = n^n \prod_{j=1}^{n-1}\left(\dfrac{j}{j+1}\right)^j = n^n / \prod_{j=1}^{n-1}(1 + 1/j)^j$. Já sabemos que o termo $(1 + 1/j)^j$ tende para "e" quando j tende para infinito. Portanto $n! \approx n^n/e^{n-1} = e(n/e)^n$ (vide [Fe]). Utilizando esta aproximação, determine os limites, quando n vai para infinito, de:

(a) $\dfrac{n!}{n}$; (b) $\dfrac{n!}{n^5}$; (c) $\dfrac{n!}{e^n}$; (d) $\dfrac{n!}{n^{n/2}}$; (e) $\dfrac{n!}{n^n}$.

Obs: Podemos definir "fatorial" de não-inteiros (e até mesmo de complexos) com a função gama de Euler (ver Desafio 5.13 da p.168).

Obs: Utilizando outro caminho (vide [C] p.361–364 ou [Sp] p.483) obtemos a **fórmula de Stirling**[7]: $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^{\theta n}$ com $|\theta| \leq 1/12$.

Des 1.11: Defina o número e por $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e prove que $e \notin \mathbb{Q}$ (é irracional) seguindo o roteiro abaixo.

(a) Suponha por absurdo existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $e = p/q$. Mostre que

$$p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!}.$$

Dica: Multiplique e por $q!$.

(b) Mostre que o lado esquerdo da igualdade em (a) é um inteiro.

(c) Mostre que o lado direito da igualdade em (a) é igual a um número entre 0 e 1.

Dica: Simplifique o fatorial e compare com a PG de razão $1/2$.

(d) Conclua a prova mostrando que (b) + (c) contradiz (a).

Des 1.12: (sequência de Fibonacci[8]) Considere a sequência F_n definida da seguinte forma:

(a) $F_0 = 0$, (b) $F_1 = 1$, (c) $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para todo $n > 1$.

É conhecida como sequência de Fibonacci e modela o número de par de coelhos depois de n meses (ver detalhes na internet). Alguns termos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Supondo que o limite de F_{n+1}/F_n exista quando $n \to \infty$, prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, onde $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, conhecida como razão áurea.

Dica: Divida a relação (c) por F_n. Supondo que o limite exista, mostre que $\phi^2 = \phi + 1$.

[7]James Stirling: ⋆1692 Garden, Escócia — †1770 Edinburgh, Escócia.

[8]Leonardo Pisano Bigollo: ⋆1170 Pisa, Itália — †1250 Pisa, Itália.

Capítulo 2

Continuidade

Objetivos: Apresentar definição de continuidade em um ponto e em um intervalo. Apresentar, demonstrar e aplicar o Teorema do Valor Intermediário (TVI), o primeiro teorema importante do Cálculo. Os Teoremas básicos de continuidade (da soma, diferença, produto, composta de funções contínuas) são consequência direta de Teoremas correspondentes do limite.

Deixamos para uma seção opcional questões delicadas como o que é (como definir) e porque são contínuas: função raiz e transcendentes (seno, cosseno, exp, log). Terminamos o capítulo com uma seção opcional de introdução à análise, disciplina que fundamenta o cálculo.

2.1 Definição de Continuidade

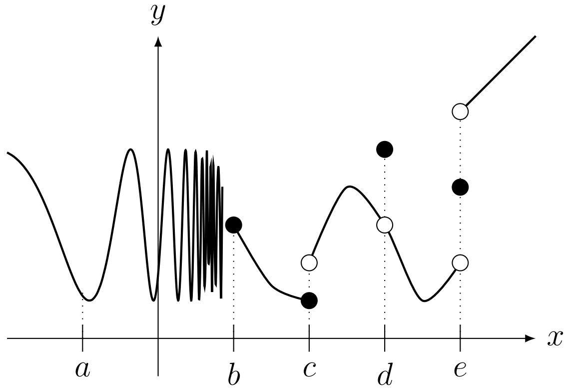
Definição 2.1 (continuidade num ponto) *Dizemos que f é contínua em $c \in \mathbb{R}$ se:*
(a) f está definida perto de c (numa vizinhança de c, veja Definição 1.4 da p.2).
(b) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (o limite existe no ponto e é igual a $f(c)$).

Pela Definição 1.1 da p.2, a função f é contínua em $x = c$ se $f(x)$ fica tão próximo de $f(c)$ quanto quisermos para todo x suficientemente próximo de c.

Observação 2.1 *Na linguagem de vizinhança (Definição 1.4 da p.2), dada vizinhança V qualquer de $f(c)$, existe vizinhança W_V de c tal que se $x \in W_V$, então $f(x) \in V$. Para definição* ***rigorosa*** *de continuidade veja Definição 2.17 da p.59.*

Definição 2.2 (continuidade em intervalos)
Dizemos que f é contínua em (a, b) se f é contínua em c para todo $c \in (a, b)$.
Dizemos que f é contínua em $[a, b]$ se f é contínua em (a, b) e além disso os limites laterais são iguais ao valor da função no extremos:
(a) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e (b) $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemplo 2.1 *Considere f esboçada no gráfico abaixo.*
(a) Determine se é contínua ou não nos pontos a, b, c, d, e. Determine, caso não seja contínua, qual (quais) condições são violadas.
(b) Determine se é contínua ou não nos intervalos: (a, b), $[a, b]$, $[b, c]$, (c, d), (c, e), $[c, d]$.



Solução: (a) Como $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é igual a $f(a)$, f é contínua em a.

O $\lim_{x \to b^-} f(x)$ não existe pois o valor da função **oscila bruscamente** próximo (e à esquerda) de b (um modelo deste comportamento é $y = \operatorname{sen}(1/x)$ do Exemplo 1.9 da p.10 em $x = 0$). O limite à direita existe e é igual ao valor da função: $f(b) = \lim_{x \to b^+} f(x)$. De todo modo, como um dos limites laterais não existe, o $\lim_{x \to b} f(x)$ não existe. Portanto, f é descontínua em b.

Em c os dois limites laterais existem mas são distintos entre si: $f(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$. Portanto, f é descontínua em c. Observe que o gráfico "**quebra**" em c.

Em d o limite existe mas é diferente do valor da função: $f(d) \neq \lim_{x \to d} f(x)$. Portanto, f é descontínua em d. Observe que o gráfico "**pula**" em d.

Em e os dois limites laterais existem mas são distintos entre si e do valor da função: $f(e) \neq \lim_{x \to e^+} f(x) \neq \lim_{x \to e^-} f(x)$. Portanto, f é descontínua em e. Observe que o gráfico "**quebra**" e "**pula**" em e.

(b) É contínua em (a, b) e (c, d) (comportamento de f nos extremos do intervalo não importa). É contínua em $[b, c]$ pois $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$ e $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ (embora não existam limites $\lim_{x \to b} f(x)$ e $\lim_{x \to c} f(x)$)).

Não é contínua em $[a, b]$ pois não existe o limite quando $x \to b^-$.

Não é contínua em $[c, d]$ pois $\lim_{x \to c^+} f(x) \neq f(c)$ (ou $\lim_{x \to d^-} f(x) \neq f(d)$).

Não é contínua em (c, e) pois $d \in (c, e)$ e $\lim_{x \to d} f(x) \neq f(d)$. ■

Observação 2.2 *Informalmente, uma função f é contínua em um intervalo se pudermos desenhar o gráfico de f neste intervalo sem retirar o* ***lápis do papel****. Ou ainda, f é contínua se o gráfico não contém pulos, quebras ou oscilações bruscas.*

Exemplo 2.2 *Verifique se são contínuas em $c = 0$:*

(a) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} + 3; & x \neq 0 \\ 3; & x = 0 \end{cases}$; *(b)* $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}; & x \neq 0 \\ 2; & x = 0 \end{cases}$;

(c) $j(x) = \begin{cases} x^2 - 9; & x \geq 0 \\ -3x - 9; & x < 0 \end{cases}$; *(d)* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x); & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$;

(e) $k(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x); & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$.

Solução: (a) Como o limite quando $x \to 0$ é $3 = f(0)$, a função é contínua no 0.
(b) O limite quando $x \to 0$ não existe. Isto ocorre pois quando $x \to 0^+$, $|x| = x$ e a função

é $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$: o limite é 1 neste caso. Quando $x \to 0^-$, $|x| = -x$ e a função é $\dfrac{\operatorname{sen} x}{-x}$: o limite é -1 neste caso. Portanto a função é descontínua no 0. (c) Como os limites laterais em 0 são ambos $= -9 = f(0)$, f é contínua em 0. (d) Veja o gráfico na p. 11. Como esta função não possui limite quando $x \to 0$, a função é descontínua em 0. (e) Veja sequência de gráficos na p. 32. Como o limite quando $x \to 0$ é $0 \neq k(0) = 1$, a função é descontínua em 0. ■

Erro Comum: Não perceber a diferença entre a definição de continuidade num ponto com a definição de continuidade em intervalos. Em particular não prestar atenção nos limites laterais da definição de continuidade em intervalo fechado $[a, b]$.

Exemplo 2.3 *Determine se* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ *é contínua ou não em cada um dos intervalos:* *(a)* $(0, 1)$; *(b)* $[0, 1]$; *(c)* $(-1, 0)$; *(d)* $[-1, 0]$.

Solução: Como os limites laterais quando $x \to 0$ diferem entre si (1 e -1), f é descontínua em 0. Veja gráfico na p.6. Note que f é contínua em todos pontos $x \neq 0$ pois vale 1 para $x > 0$ e -1 para $x < 0$.

Será contínua em (a), (c) e (d). Embora seja descontínua em $x = 0$, no caso (d) o $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 = f(0) = -1$. Descontínua em (b) pois $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0) = -1$. $f(0)$. ■

Descontinuidade removível

Se redefiníssemos a função f do Exemplo 2.1 da p.45 de modo que $f(d) = \lim_{x \to d} f(x)$, a função f seria contínua em $x = d$. Se redefiníssemos a função k do Exemplo 2.2 da p.46 (e), de modo que $k(0) = 0$, a função k seria contínua em 0.

Se uma função que é descontínua em um ponto passa a ser contínua redefinindo seu valor neste ponto, dizemos que a descontinuidade é removível. Assim estas descontinuidades são removíveis.

Observação 2.3 (Tipos de Descontinuidade) *As descontinuidades podem ser classificadas (essa classificação não é padrão) como:*

(a) ***essenciais*** *ou* ***não-removíveis****: caso o limite no ponto não exista.*

(a1) ***quebra****: Caso os limites laterais existam mas sejam diferentes entre si. Veja gráfico do Exemplo 2.1 em $x = c$ e $x = e$.*

(a2) ***oscilação****: Caso um dos limites laterais não exista. Veja gráfico do Exemplo 2.1 em $x = b$ e $y = \operatorname{sen}(1/x)$ no Exemplo 1.9 da p.10 em $x = 0$.*

(b) ***não-essenciais*** *ou* ***removíveis****: Caso o limite no ponto exista mas seja diferente do valor da função (o gráfico* ***pula*** *em um ponto). Veja gráfico do Exemplo 2.1 em $x = d$.*

Exemplo 2.4 *Determine* ***todos*** *os pontos de descontinuidade e classifique o tipo de descontinuidade de:* *(a)* $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x)$; *(b)* $g(x) = (x - e)I_{\mathbb{Q}}(x)$; *(c)* $h(x) = \lfloor x \rfloor$;

(d) $j(x)$ *é o primeiro digito da expansão decimal de* x *(ver [Sp, p.70 no.17]). Por exemplo,* $j(8.1) = 1,\ j(-3.8566) = 8$.

Solução: (a) Veja o gráfico na p. 11. Como o limite não existe próximo de todo ponto (pois os valores próximos de um ponto qualquer oscilam entre 1 e -1), o conjunto dos pontos de descontinuidade é $\mathbb{R}$. Como os limites laterais não existem, são pontos de descontinuidade por oscilação.

(b) Veja o gráfico na p. 34. No ponto $x = e$ a função é contínua pois o limite é zero quando $x \to e$ (veja p. 34) e $g(e) = (e - e)I_{\mathbb{Q}}(e) = (0)(0) = 0$. Em qualquer outro ponto

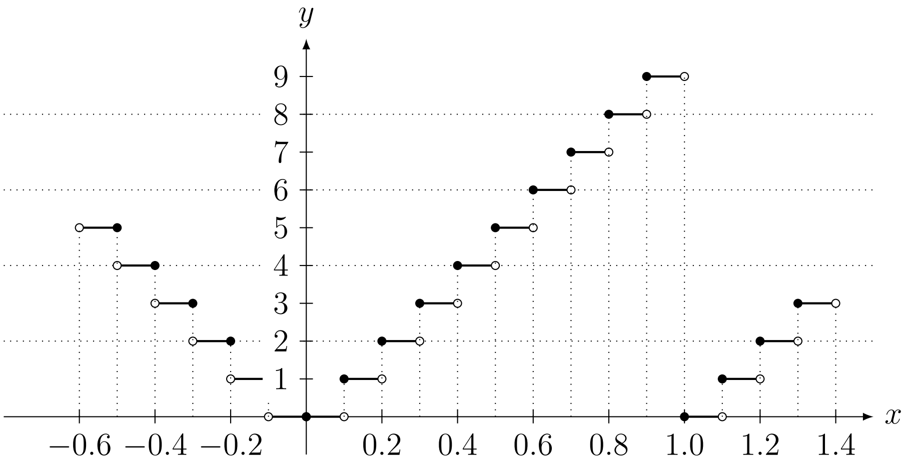
$x \neq e$, $g(x) = (x - e) \neq 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ ou $g(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Veja o gráfico da função e entenda isso! Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade é $\mathbb{R} - \{e\}$ (todos pontos menos e). Novamente são pontos de descontinuidade por oscilação.

(c) Veja o gráfico na p. 11. Fica claro que o conjunto dos pontos de descontinuidade é $\mathbb{Z}$, os lugares onde o valor da função cai de 1 para 0. Como os limites laterais existem mas são distintos entre si, são pontos de descontinuidade por quebra.

(d) Assim $j(x) \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$. Em $[0, 0.1)$ a função vale 0 ($j(0) = j(0.02) = j(0.099999) = 0$), em $[0.1, 0.2)$ a função vale 1 ($j(0.1) = j(0.12) = j(0.199999) = 1$), em $[0.2, 0.3)$ a função vale 2 ($j(0.2) = j(0.22) = j(0.299999) = 2$), (etc.) até em $[0.9, 1.0)$ a função vale 9 ($j(0.9) = j(0.92) = j(0.999999) = 9$). Quando chegamos no início do próximo intervalo, a situação se repete: em $[1.0, 1.1)$ a função vale 0 ($j(1) = j(1.02) = j(1.099999) = 0$), etc.

Portanto o gráfico é formado por dez degraus em cada intervalo $[n, n+1]$ com $n \in \mathbb{Z}$.

O conjunto dos pontos de descontinuidade é $\{\pm 0.1,\ \pm 0.2,\ \pm 0.3,\ \ldots,\ \pm 1.0,\ \pm 1.1,\ \ldots\}$, os pontos onde o gráfico da função quebra. Em 0 ela é contínua. Como os limites laterais existem mas são distintos entre si, são pontos de descontinuidade por quebra.



$j(x) =$ primeiro digito da expansão decimal de x ■

Note **paralelismo da estrutura** dos Teoremas, Lema e Corolário de continuidade que começam aqui e dos resultados correspondentes de limites das páginas 12–14.

Lema 2.3 *As funções $f(x) = C$ e $f(x) = x$ são contínuas em $\mathbb{R}$.*

Prova: Deixamos para o leitor pois é fácil ver $\left(\ddot{\smile}\right)$ que é verdade. ■

Teorema 2.4 (continuidade da soma, produto e divisão) *Se f e g são contínuas em I então $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ (nos pontos onde $g \neq 0$) são contínuas em I.*

Prova: Segue do Teorema 1.6 da p.12. ■

Corolário 2.5 (continuidade de polinômios e funções racionais) *Polinômios e funções racionais (Definição 1.8 da p.12) são funções contínuas.*

Prova: Basta aplicar o Lema 2.3 e o Teorema 2.4. Deixamos os detalhes para o leitor ou para seu professor $\left(\ddot{\smile}\right)$. Vai ajudar ler a prova do Corolário 1.7 da p.12. ■

Teorema 2.6 (continuidade da composta) *Se g é contínua em $c \in \mathbb{R}$ e f é contínua em $g(c)$, então $h(x) = f(g(x))$ é contínua em $x = c$. Ou seja, a composição de funções contínuas é uma função contínua.*

Prova: Segue do Teorema 1.9 da p.13. ∎

Teorema 2.7 (continuidade da função raiz e algumas transcendentes) *São funções contínuas:* $\sqrt[n]{x}$, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\log(x)$, e^x, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, *e* $\arctan(x)$,

Prova: Leia a Seção 2.3, p.52. ∎

Observação 2.4 *Combinando os Teoremas 2.4, 2.6 e 2.7 concluímos que todas combinações (se denominador não se anula) destas funções é uma função contínua. Por exemplo a função abaixo é contínua:*

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x^7 + 2\cos\left[\sqrt[7]{x^2 + \log(x^2+1)}\right]}{e^{x-1}+5}\right).$$

Observação 2.5 *Deixei para final desta seção uma polêmica da definição de continuidade dos livros de cálculo: a função $1/x$ é contínua ou não?*
Tudo depende de definições. Do jeito que definimos, em $(0,1)$ sim, em $(-1,1)$ não pois ela não está definida no 0. Aqui não definimos continuidade em intervalos disjuntos como $(-1,0)\cup(0,1)$, somente em intervalos conexos. Caso definíssemos, ela seria contínua em $(-1,0)\cup(0,1)$. Na prática esta polêmica não possui a menor importância.

2.2 Teorema do Valor Intermediário (TVI)

O TVI é um dos Teoremas mais importantes do Cálculo (juntamente com o TVE — Teorema dos Valores Extremos — e o TFC – Teorema Fundamental do Cálculo). Sua demonstração é interessante e sugere um método numérico importante: o **método da bisseção**.

A aplicação mais importante do TVI é garantir a existência de solução para equações. Por exemplo, o TVI, garante que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^{11} + 3x^8 - \operatorname{sen}(x) - 100\pi = 0$. Para o cálculo efetivo precisamos de um método numérico.

A demonstração do TVI é baseada no lema abaixo, que garante que o gráfico de uma função contínua que começa abaixo do eixo x ($f(a) < 0$) e que termina acima do eixo x ($f(b) > 0$) necessariamente intercepta o eixo x.

Lema 2.8 (Valor Intermediário) *Considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < 0 < f(b)$ (ou $f(b) < 0 < f(a)$), então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Prova: [cabe ao leitor desenhar uma figura e entender este texto] Para fixar ideias suponha que $f(a) < 0 < f(b)$ (o caso $f(b) < 0 < f(a)$ é análogo). Utilizamos o **método da bisseção**: tome $c = (a+b)/2$. Se $f(c) = 0$ acabou a busca. Se $f(c) > 0$ continue buscando raiz no intervalo intervalo $[a,c]$, se $f(c) < 0$ em $[c,b]$. Dependendo do caso definimos $a_1 = a$ e $b_1 = c$ ou $a_1 = c$ e $b_1 = b$ para nos dois casos continuar buscando em $[a_1, b_1]$.

Agora tome $c = (a_1 + b_1)/2$. Se $f(c) = 0$ acabou a busca, senão continue buscando em $[a_2, b_2]$ com $a_2 = a_1$ e $b_2 = c$, se $f(c) > 0$, ou $a_2 = c$ e $b_2 = b_1$, se $f(c) < 0$.

Assim construímos sequencias a_n, b_n com $b_n - a_n$ convergindo para zero (dividimos o intervalo ao meio a cada passo) e $a_n < c < b_n$. Assim $a_n \to c$ e $b_n \to c$. Por continuidade, $f(a_n) \to f(c)$ e $f(b_n) \to f(c)$.

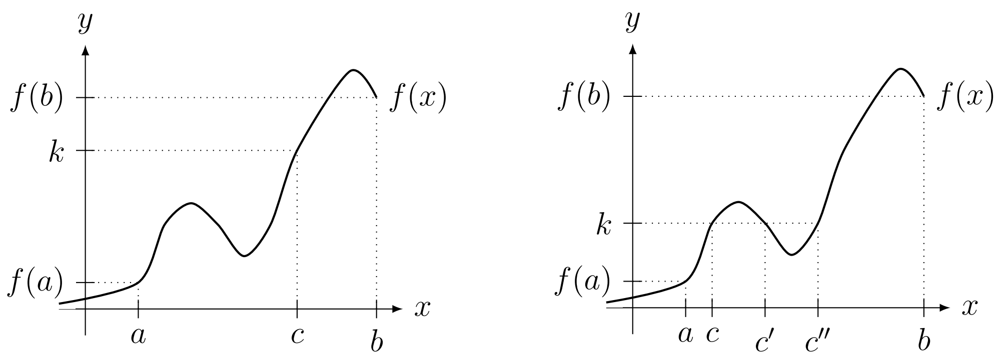
Como $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, $0 \leq f(b_n) \leq f(b_n) - f(a_n)$ pois $f(a_n) \leq 0$ implica que $-f(a_n) \geq 0$. Como $f(b_n) - f(a_n) \to f(c) - f(c) = 0$, pelo Teorema do Sanduíche, $f(b_n) \to 0$. Como $f(b_n) \to f(c)$, $f(c) = 0$. ■

Que tal escrever um programa de computador para calcular raiz usando a ideia da prova acima: o chamado método da bisseção.

Teorema 2.9 (Valor Intermediário TVI) *Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $k \in [f(a), f(b)]$ ou $k \in [f(b), f(a)]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

Antes de apresentar a prova, vou apresentar figuras que esclarecem o enunciado. Considere a mesma função f representada nas figuras abaixo. Note que fixado um k entre $f(a)$ e $f(b)$ existe sempre um $c \in [a, b]$ com $f(c) = k$. Na primeira figura existe **um único** c. Na segunda figura, existem **três** c's distintos (c, c', c'') tais que $f(c) = f(c') = f(c'') = k$. Qualquer um deles satisfaz o Teorema: O TVI apenas garante a existência de **pelo menos** um c, não afirma que ele é único!

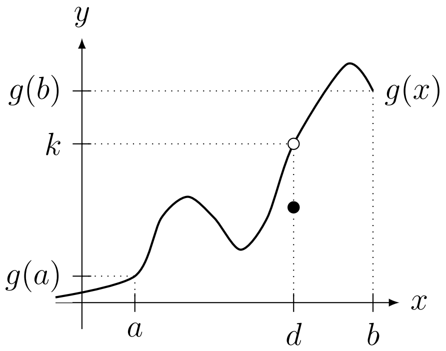
Faça mentalmente a variação de k entre $f(a)$ e $f(b)$ e verifique onde temos somente um, onde temos dois, e onde temos três c's com $f(c) = k$.

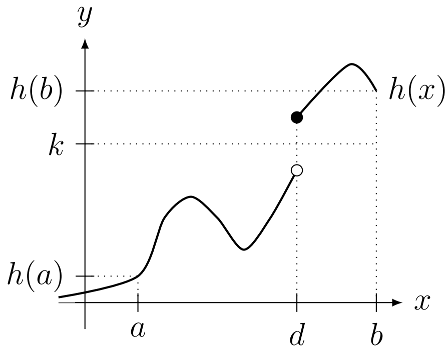


Veremos agora que caso a função seja descontínua pode ocorrer ou não a existência de c tal que $g(c) = k$. A função g da figura abaixo é descontínua em $x = d$ pois $g(d) \neq \lim_{x \to d} g(x) = k$ (o gráfico "pula" em $x = d$). Fixado o k indicado na figura, não existe c tal que $g(c) = k$. Para outros valores de $k \in [g(a), g(b)]$ existirá $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = k$.

A função h é descontínua em $x = d$ pois os limites laterais existem mas são distintos (o gráfico "quebra" em $x = d$). Fixado o k indicado na figura, não existe c tal que $h(c) = k$. Para outros valores de $k \in [h(a), h(b)]$ pode existir ou não $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = k$.

Faça mentalmente a variação de k entre $h(a)$ e $h(b)$ e verifique onde temos **nenhum** ou **pelo menos um** c com $h(c) = k$.





Prova: (do TVI) Defina $h(x) = f(x) - k$. Assim se $f(a) \leq k \leq f(b)$, $h(a) = f(a) - k \leq 0$ e $h(b) = f(b) - k \geq 0$. Se $h(a) = 0$ ou $h(b) = 0$, então $f(a) = k$ ou $f(b) = k$ e está provado o TVI. Caso contrário, $h(a) < 0 < h(b)$, e aplicando o Lema 2.8 na função h concluímos que existe c tal que $h(c) = f(c) - k = 0$ e portanto $f(c) = k$. ■

Exemplo 2.5 *Prove que:*

(a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ *possui raiz no intervalo* $(1, 2)$.

(b) existe um $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^{11} + 3x^8 - \operatorname{sen}(x) = 100\pi$.

(c) existe $x \in (2, 3)$ *tal que* $\dfrac{D}{x-2} + \dfrac{E}{x-3} = -\pi$, *com* $D, E > 0$.

Solução: (a) Como p é contínua (polinômio), $p(1) = 1+3-5 = -1$ e $p(2) = 8+3\cdot4-5 = 15$. Como $0 \in [p(1), p(2)] = [-1, 15]$, pelo TVI existe um $c \in (1, 2)$ tal que $p(c) = 0$.

(b) Defina $f(x) = x^{11} + 3x^8 - \operatorname{sen}(x) - 100\pi$. O problema agora é obter um x tal que $f(x) = 0$.

Primeiro calculamos o limite quando $x \to \pm\infty$. Colocando x^{11} em evidência,

$$f(x) = x^{11}\left(1 + \frac{3}{x^3} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{11}} - \frac{100\pi}{x^{11}}\right).$$

Passando ao limite no $\pm\infty$ o segundo termo vai para 1 (no termo $\operatorname{sen}(x)/x^{11}$ aplique o Teorema do Sanduíche para provar que $\to 0$). Assim, como x^{11}, o termo dominante, possui grau impar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Assim existem M, N tais que $f(M) < 0$ e $f(N) > 0$. Como f é contínua (porque?), pelo TVI existe $c \in [M, N] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0 \in [f(M), f(N)]$.

(c) Defina $g(x) = \dfrac{D}{x-2} + \dfrac{E}{x-3}$. Como $\lim_{x\to2^+} g(x) = \infty$ (fazendo análise de sinal: o numerador $D > 0$ e o denominador converge para 0^+) e $\lim_{x\to3^-} g(x) = -\infty$ (análise de sinal novamente), existem a e b tais que $2 < a < b < 3$ e $g(a) > -\pi > g(b)$. Assim, aplicando o TVI no intervalo $[a, b]$ obtemos que existe $c \in [a, b] \subset (2, 3)$ tal que $g(c) = -\pi$. ■

Exemplo 2.6 *Seja* $f(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0; \\ -1; & x < 0. \end{cases}$

Tente construir sequência que se aproxime do zero de f. *Porque não funciona?*

Solução: Faça um gráfico e vá dividindo o intervalo. Embora $k = 0 \in [-1, 1]$, um valor intermediário, a sequência $c_n \to 0$ mas $f(0) = 1 \neq 0$. Isto ocorre pois f é descontínua. ■

Exemplo 2.7 *Considere* $f(x) = \begin{cases} x; & x \leq 1; \\ x+1; & x > 1. \end{cases}$.

Tente construir sequência que se aproxime de $c \in [0, 1]$ *tal que* $f(c) = 1.5$.

Solução: Faça um gráfico e vá dividindo o intervalo. Note que $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$. A sequência $c_n \to 1$ mas novamente não obtemos c tal que $f(c) = 1.5$. Isto ocorre pois f é descontínua. ■

Uma aplicação importante é determinar raízes de polinômios e de equações de forma geral.

Exemplo 2.8 *Aproxime* $\sqrt[3]{70}$ *utilizando* $f(x) = x^3 - 70$.

Solução: Note que $f(5) = 5^3 - 70 = 55$ e $f(4) = 4^3 - 70 = -6$. Assim a raiz $c \in (4, 5)$. Tome $c_1 = (4 + 5)/2 = 4.5$. Como $f(4.5) = 21.125 > 0$, a raiz esta em $(4, 4.5)$. Tome $c_2 = (4 + 4.5)/2 = 4.25$. Como $f(4.25) = 6.76\ldots > 0$, a raiz esta em $(4,\ 4.25)$. Tome $c_3 = (4 + 4.25)/2 = 4.125$. Como $f(4.125) = 0.189\ldots > 0$, a raiz esta em $(4,\ 4.125)$. ■

Exemplo 2.9 *Prove que para todo* $k > 0$ *existe* $\sqrt[n]{k}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Isto é, prove que para todo* $k > 0$ *existe* $c > 0$ *tal que* $c^n = k$.

Solução: Considere $f(x) = x^n - k$. É claro que f (um polinômio) é contínua e que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Assim existe um $M > 0$ com $f(M) > 0$. Aplique o TVI no intervalo $[0, M]$ $(f(0) < 0)$ e conclua a existência de $c \in [0, M]$ tal que $f(c) = 0$, isto é, $c^n = k$. ■

2.3 ⋆Funções Transcendentes e Raiz[1]

Nesta seção construímos algumas funções transcendentes (Definição 1.10 da p.14) e raiz e provamos sua continuidade. Por precisar de matemática mais sofisticada costumam ser omitidas no Cálculo e feitas em Análise. Note a beleza (e complexidade) das expressões que definem funções como seno, cosseno, exponencial e logaritmo.

Começamos com um Teorema que garante a existência da função inversa.

Teorema 2.10 (existência da função inversa) *Se f é contínua e crescente (Definição 3.12 da p.82) em um intervalo, então sua inversa f^{-1} existe e é contínua (na imagem de f).*

Prova: Veja [NC] ou [Co] p. 67, ou [Sp, p.206]. ■

2.3.1 Função Raiz

Definição e continuidade da função Raiz 1: Pelo Corolário 2.5 da p.48 a função $f(x) = x^n$ é contínua. Ela é crescente, para $x > 0$ pois, pelo binômio de Newton é fácil ver que (⌣̈) $f(x + h) = (x + h)^n > x^n = f(x)$ para todo $h > 0$. Assim, pelo Teorema 2.10, existe a inversa f^{-1} contínua que denotamos por $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Embora pudéssemos terminar por aqui, vamos nos divertir definindo e provando continuidade da função raiz sem utilizar o Teorema 2.10. Em Matemática é comum existir mais de um tipo de abordagem: uma com métodos gerais e outra que funciona em um caso específico.

[1] A leitura desta seção é opcional.

Definição da função Raiz 2: Defina a função $\sqrt[n]{\cdot}$ para $n \in \mathbb{N}$ aplicando o TVI (ver Exemplo 2.9 da p.52).

Continuidade de $\sqrt[n]{\cdot}$ (prova1): Provaremos seguindo roteiro similar ao que utilizaremos nesta seção para provar a continuidade de e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, etc.:
(a) prove (ou assuma) continuidade no $x = 0$ ou $x = 1$; (b) prove continuidade geral.

Para provar continuidade em $x = 1$ observe que para $h > 0$,

$$1 \le 1 + h \le (1 + h)^n, \quad \text{para } h > 0.$$

Como $\sqrt[n]{\cdot}$ é crescente,

$$1 = \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{1 + h} \le \sqrt[n]{(1 + h)^n} = 1 + h.$$

Pelo Teorema 1.16 da p.31 (Sanduíche), quando $h \to 0^+$, $\sqrt[n]{1 + h} \to 1$. De forma análoga, para $h < 0$ pequeno (por exemplo, $|h| < 1/2$),

$$(1 + h)^n \le 1 + h \le 1, \quad \text{para } h < 0.$$

Novamente pelo Teorema do Sanduíche, quando $h \to 0^-$, $\sqrt[n]{1 + h} \to 1$.

Concluímos que quando $h \to 0$, $\sqrt[n]{1 + h} \to 1$. Como

$$\sqrt[n]{a + s} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{1 + s/a},$$

quando $s \to 0$, tomando $h = s/a$, $h \to 0$ e obtemos que $\sqrt[n]{a + s} \to \sqrt[n]{a}$.

Continuidade de $\sqrt[n]{\cdot}$ (prova2): Tomando $x, a > 0$,

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Assim, aplicando o módulo (descartamos $\sqrt{x}$ no denominador pois somente faz o termo ficar menor)

$$0 \le |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \le \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Fazendo $x \to a$ e usando o Teorema do Sanduíche concluímos que $\sqrt{x} \to \sqrt{a}$.

2.3.2 Funções Exponencial e Logarítmica

Existem dois caminhos:

(a) definir a função exponencial e aplicar o Teorema 2.10 para definir logaritmo.

(b) definir o logaritmo e aplicar o Teorema 2.10 para definir a exponencial.

Pode-se defini-las por soma infinita (série) – veja Série de Taylor na Definição 4.3 da p.100.

Definição de Exponencial 1: Fixe $a > 0$. Definimos a^n ($n \in \mathbb{N}$) como o produto de a por ele mesmo n-vezes. Definimos a^x para $x \in \mathbb{Q}$ por (a) $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p$ ($p, q \in \mathbb{N}$); (b) $a^0 = 1$; (c) $a^{-p/q} = \dfrac{1}{\sqrt[q]{a}}$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Depois estendemos este resultado para a^x com $x \in \mathbb{R}$ passando ao limite numa sequência de racionais que aproximam x (ver Observação 3.9 da p.76). Pode-se ver em detalhes esta construção e a prova que é contínua e crescente em [Co] p.26 e p.69.

Definição de Exponencial 2: (Exemplo 4.16 da p.100)

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Pode-se provar que é contínua e crescente. Definimos o $\log$ como a função inversa e definimos, para $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$ e $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$.

Definição de logaritmo 1: Definimos $\log c$ como a área com sinal (integral) embaixo da curva $y = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = c$. Deduzimos todas suas propriedades (exercício Extra 6.4 da p.191), incluindo ser contínua e crescente (Desafio 5.2 da p.167).

Definição de logaritmo 2: (exercício Extra 4.3 da p.124)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \cdots$$

Continuidade da Exponencial (prova): Provamos a continuidade da exponencial assumindo sua continuidade no zero:

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

Trocando variável ($x = a + h$) e utilizando a propriedade básica da exponencial ($e^{x+y} = e^x e^y$) obtemos que:

$$\lim_{x \to a} e^x = \lim_{h \to 0} e^{a+h} = \lim_{h \to 0}(e^a e^h) = e^a \cdot \lim_{h \to 0} e^h = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Pode-se fazer algo similar com $\log$: assuma continuidade em $x = 1$ e prove continuidade em ponto qualquer. Veja Desafio 2.4 da p.63.

2.3.3 Funções Trigonométricas

No ensino médio definimos $\operatorname{sen}, \cos, etc.$ através de geometria (razões em triângulos retângulo). O problema é que em Cálculo (e Análise Real) precisamos de uma definição analítica destas funções. Existem dois caminhos:

(a) definir a seno e cosseno e definir as outras funções (por exemplo $\tan x = \operatorname{sen} x / \cos x$) utilizando estas duas.

(b) definir arco-tangente e, aplicando Teorema 2.10 definir $\tan x$. Com estas duas (veja mais abaixo) definimos todas as outras.

Pode-se defini-las por soma infinita (série) – veja Série de Taylor na Definição 4.3 da p.100. A existência e a continuidade das inversas ($\operatorname{arcsen}, \operatorname{arccos}, \arctan$ nos intervalos apropriados) seguem do Teorema 2.10.

Definição de seno e cosseno: (exercício Extra 4.3 da p.124)

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \quad \text{e} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots.$$

Destas definições pode-se provar (ver Problema 3.14 da p.88) que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Estas séries, e todas outras mostradas nesta seção, são utilizadas em calculadoras e computadores para, de fato, se calcular o seno, cosseno, exponencial, logaritmo, etc.

Erro Comum: O aluno confundir arcsen com $\dfrac{1}{\operatorname{sen}}$. Como arcsen é a **função inversa** de sen, o aluno pensa no **inverso** (na multiplicação) de um número (inverso de 3 é $1/3$).

Observação 2.6 *Observe que não precisamos de secante e cossecante (bastam duas trigonométricas). Do mesmo modo que* ***não*** *definimos a função "co-raiz" como $1/\sqrt{x}$, não temos necessidade de definir secante e cossecante.*

Continuidade de seno e cosseno (prova): Da definição geométrica de seno e cosseno, utilizando o círculo trigonométrico ou da série de Taylor, obtemos que:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1.$$

Trocando variável ($x = a + h$) e utilizando identidades trigonométricas (deixamos o cosseno para o leitor):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\operatorname{sen}(x) &= \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(a+h) = \lim_{h\to 0}(\operatorname{sen}(a)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(a)) = \\ &= \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(a)\cos(h) + \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(h)\cos(a) = \\ &= \operatorname{sen}(a)\lim_{h\to 0}\cos(h) + \cos(a)\lim_{h\to 0}\operatorname{sen}(h) = \operatorname{sen}(a)\cdot 1 + \cos(a)\cdot 0 = \operatorname{sen}(a).\end{aligned}$$

Definição de arco-tangente 1: Definimos $\arctan c$ como a área com sinal (integral) embaixo da curva $y = 1/(x^2+1)$ entre $x = 0$ e $x = c$. Desta definição deduzimos que é contínua e crescente em $\mathbb{R}$ (Desafio 5.2 da p.167).

Definição de arco-tangente 2: (ver Desafio 4.3 da p.130):

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11}\cdots$$

Aplicando o Teorema 2.10 existe a inversa f^{-1} contínua que denotamos por $f^{-1}(x) = \tan x$. Tomando $t = \tan(x/2)$, definimos (veja [Co] p. 234)

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Terminamos com a chamada relação de Euler[1], que envolve funções trigonométricas, exponencial e i, a raiz quadrada de -1. Veja provas (distintas: uma usando série e outra derivada) no Desafio 2.5 da p.63 e no Desafio 3.7 da p.90.

Relação entre e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \quad \text{para todo} \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Assim, o que era no ensino médio $\operatorname{cis}(\theta)$ (iniciais de cosseno, i e seno), na Universidade é $e^{i\theta}$. Fazendo $\theta = \pi$ obtemos (verifique!) uma das fórmulas mais bonitas da Matemática:

$$e^{i\pi} = -1.$$

[1]Leonhard Euler: ⋆1707 Basel, Suíça — †1783 St Petersburg, Russia.

2.3.4 Funções Hiperbólicas

Possui alguma importância (em equações diferenciais por exemplo ou em funções complexas) os chamados seno e cosseno hiperbólicos. São definidos por (ver [Co] p.183):

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Suas propriedades são semelhantes a do seno e cosseno. Convidamos o leitor a provar (exercício Extra 2.6 da p.62) que:

$$\operatorname{senh}(0) = 0; \qquad \cosh(0) = 1; \qquad \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1;$$

$$\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \operatorname{senh} b \cosh a;$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$$

O nome decorre do fato que se $x(t) = \cosh(t)$ e $y(t) = \operatorname{senh}(t)$ então $x^2(t) - y^2(t) = 1$, a equação da hipérbole. Existem relações (veja Desafio 2.6 da p.63) surpreendentes envolvendo números complexos.

Para todo $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(i\theta) = \cosh(\theta) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}(i\theta) = i \operatorname{senh}(\theta).$$

Termino com as séries de Taylor do seno e cosseno hiperbólicos (veja exercício Extra 4.3 da p.124).

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \qquad \text{e} \qquad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots .$$

2.3.5 Outras Funções

Uma função importante em estatística é a função erro de Gauss, definida como a área com sinal (integral) embaixo da curva $y(x) = \dfrac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ entre $x = 0$ e $x = c$. Ver Observação 5.4 da p.140.

Existem outras funções (bem menos conhecidas) da Física-Matemática: função de Bessel, função hipergeométrica, função gama de Euler (generalização do fatorial: veja Desafio 5.13 da p.168). Veja a Wikipédia.

2.4 ⋆Introdução à Análise Real[1]

Nesta Seção opcional apresentamos alguns conceitos básicos de Análise Real. Remetemos os leitores a um livro de Análise como por exemplo [NC], disponível em `www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros`.

[1] A leitura desta seção é opcional.

2.4.1 Cardinalidade

Definição 2.11 (cardinalidade) *Dizemos que dois conjuntos possuem a mesma **cardinalidade** se existe uma bijeção entre os conjuntos.*

Exemplo 2.10 *Compare a cardinalidade entre:*
(a) $\mathbb{N}$ *e o conjunto dos inteiros positivos pares.* *(b)* $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$*.*

Solução: (a) defina a função $f(n) = 2n$ que é uma bijeção. Logo possuem a mesma cardinalidade.

(b) defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ que leva os pares em $0, 1, 2, \ldots$ e os impares em $-1, -2, -3, \ldots$ que é uma bijeção. Logo possuem a mesma cardinalidade. ∎

Um resultado surpreendente é que a cardinalidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ (e portanto de $\mathbb{Z}$) é a mesma.

Teorema 2.12 *A cardinalidade de* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{N}$ *é a mesma.*

Prova: (esboço) Podemos imaginar a prova como um programa de computador que apresentará **todas** as frações positivas. Basta associar a primeira fração com o 1, a segunda com o 2, etc. Isto será naturalmente uma bijeção. Basta a cada etapa mostrar todas as frações cuja soma do numerador e denominador é um certo número. Assim:
soma 1: $0/1$;
soma 2: $1/1$;
soma 3: $1/2,\ 2/1$;
soma 4: $1/3,\ 2/2,\ 3/1$;
soma 5: $1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4/1$;
soma 6: $1/5,\ 2/4,\ 3/3,\ 4/2,\ 5/1$;
soma 7: $1/6,\ 2/5,\ 3/4,\ 4/3,\ 5/2,\ 6/1$;
$\vdots$
Pode-se fazer uma figura indicando a prova. Veja detalhes em [NC] ou na internet. ∎

Definição 2.13 (conjunto enumerável) *Os conjuntos que possuem a mesma cardinalidade que* $\mathbb{N}$ *são ditos **infinitos enumeráveis**.*

Teorema 2.14 (Cantor[2]) *A cardinalidade de* $\mathbb{R}$ *é estritamente maior que a de* $\mathbb{N}$*.*

Prova: Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é claro que $\mathbb{R}$ possui cardinalidade igual ou maior. Para terminar aplique o argumento diagonal de Cantor. Outra opção é utilizar o **princípio dos intervalos encaixantes**. Veja [NC] ou wikipedia `Cantor's diagonal argument`. ∎

Observação 2.7 *Assim* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *são conjuntos enumeráveis e* $\mathbb{R}$ *é não-enumerável. Existe diferença entre conjuntos infinitos: alguns são "mais infinitos" do que outros. Na realidade existem conjuntos com cardinalidade estritamente maior do que* $\mathbb{R}$*, formando uma cadeia de conjuntos, cada um estritamente maior do que o anterior. Isto é provado pelo argumento de Cantor generalizado (vide internet ou [NC]).*

[2] Georg Cantor: ⋆1845 St Petersburg, Russia — †1918 Halle, Alemanha.

2.4.2 O que é $\mathbb{R}$?

Em análise provamos que existe (num sentido técnico) um único **corpo ordenado completo** denotado por $\mathbb{R}$. Detalhamos cada um destes termos:

(a) **corpo**: conjunto munido de operações de soma e produto satisfazendo várias propriedades (comutatividade, distributividade, existência de inversos da adição e multiplicação).

(b) **ordenado**: conjunto munido de relação de ordem satisfazendo certas propriedades que relacionam com operações definidas no conjunto (por exemplo: se $a > 0$ e $x < y$ então $ax < ay$).

(c) **completo**: Leia Desafio 5.1 da p.166.

Uma dificuldade é construir $\mathbb{R}$, que significa provar que existe um corpo ordenado completo. Uma maneira rigorosa mas tecnicamente complicada é definir $\mathbb{R}$ utilizando decimais infinitas. A dificuldade é definir operações usuais como por exemplo a soma. No algoritmo que aprendemos na escola, alinhamos os pontos decimais e começamos a operar no último digito à direita. Como fazer para calcular $\pi + \pi$ se a expansão decimal nunca termina? Ou ainda, 2^π é 2 multiplicado por ele mesmo quantas vezes? A solução destes mistérios passa por um curso de Análise Real. Leia a Observação 3.9 da p.76.

2.4.3 Racionais, Irracionais, Algébricos, Transcendentes

Os alunos aprendem a diferença entre números racionais (razões entre inteiros) e irracionais. Veremos aqui os chamados algébricos — que generalizam os racionais — e os transcendentes. Veja detalhes em [Fi].

Exemplo 2.11 *Prove que são irracionais:* (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt[3]{21}$.

Solução: (a) Suponha por contradição que $\sqrt{2} = p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Elevando ao quadrado obtemos que $2q^2 = p^2$. Agora pelo teorema da fatoração única (fatorando cada lado por potências de primos), como 2 está no lado esquerdo, ele deve aparecer no lado direito. O problema é que aparecerão um numero par de vezes no lado direito (pois é ao quadrado) e um número impar de vezes no lado esquerdo. Contradição!

(b) De forma análoga fazendo $\sqrt[3]{21} = p/q$ obtemos $21q^3 = p^3 = 3 \cdot 7q^3 = p^3$. Agora como 3 é fator do lado direito, p deve conter o fator 3. Mas no lado direito ele aparecerá $3m$ vezes (múltiplo de 3) e do lado esquerdo como $3m' + 1$ vezes. Contradição. ■

Definição 2.15 (algébricos e transcendentes) *Um **número é algébrico** se é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros ($\mathbb{Z}$). Um **número é transcendente** se não é algébrico.*

Eles generalizam os racionais pois todo número racional é um número algébrico. Todo transcendente é irracional, mas existem algébricos racionais e irracionais.

Exemplo 2.12 *Mostre que são algébricos:*

(a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt[n]{k}$ para qualquer $n, k \in \mathbb{N}$; (c) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$; (d) um racional qualquer.

Solução: (a) $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $x^2 - 2$. (b) $\sqrt[n]{k}$ é raiz do polinômio $x^n - k$.

(c) fazendo $x = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$, obtemos que $x^2 = 3 + \sqrt{2}$. Assim $(x^2 - 3)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$. Ou seja $x^4 - 6x^2 + 9 = 2$. Portanto, $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ é raiz de $x^4 - 6x^2 + 7$.

(d) se $x = p/q$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ então x é raiz do polinômio $qx - p$. ■

Observação 2.8 *É relativamente fácil provar que $e \notin \mathbb{Q}$ (veja Desafio 1.11 da p.44). Já a irracionalidade de π é bem mais difícil. Provas podem ser encontradas em [NC, cap. 9.4]. Bem mais difícil é provar que e e π são números transcendentes.*

2.4.4 Definição de Limite

Definição 2.16 (limite) *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que o* **limite** *de $f(x)$ quando x tende a $c \in \mathbb{R}$ existe e vale $L \in \mathbb{R}$, escrevemos $\lim_{x\to c} f(x) = L$, se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que se } 0 < |x - c| < \delta, \quad \text{então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.13 *(a) Seja $f(x) = x$. Mostre que $\lim_{x\to c} f(x) = c$.*

(b) Seja $f(x) = x^2$. Mostre que $\lim_{x\to c} f(x) = c^2$.

Solução: (a) Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, obtemos
$x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - c| < \delta \quad \text{implica que} \quad |f(x) - c| = |x - c| < \delta = \varepsilon.$

(b) Fixado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|c| + 1)\}$. Desta forma, se $0 < |x - c| < \delta$, então $|x| < |c| + \delta \le |c| + 1$. Além disto,

$$|f(x) - c^2| = |x^2 - c^2| = |x - c| \cdot |x + c| < \delta(|x| + |c|) < \delta(2|c| + 1) \le \varepsilon.$$

Outra forma é mudar limites de integração e escrever $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$. Como $|f(c+h) - f(c)| = |2ch + h^2| \le |h|(2|c| + |h|)$. Agora repita argumento acima. ■

O exemplo anterior pode induzir o leitor a pensar que achar δ em função de ε e de c é uma tarefa sobrenatural. Normalmente, rascunha-se a demonstração de trás para frente: sabendo que devemos obter $|f(x) - k| < \varepsilon$, procuramos saber quão grande pode ser $|x - c|$ (*i.e.*, qual deve ser o valor de δ) para que cheguemos a esta conclusão. Em seguida, passamos a limpo a demonstração e, já sabendo qual é o valor de δ, simplesmente dizemos: "seja $\delta =$*Abracadabra*. . ." Porém, dependendo da função, mesmo que achar o valor de δ não seja mágica, tal tarefa pode ser bastante enfadonha. Uma alternativa é fazer uso de propriedades do limite tais como do limite da soma e do produto (Teorema 1.6 da p.12). Elas facilitam as demonstrações de existência e os cálculos dos limites, sem necessidade de manipular ε's e δ's.

Exemplo 2.14 *Adapte a definição de $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e defina:*

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$; *(b) $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.*

Solução: (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tal que se $x > N$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(b) $\forall M < 0, \exists \delta > 0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $f(x) < M$. ■

2.4.5 Definição de Continuidade

Definição 2.17 (continuidade) *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos a função f é contínua em c se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que se } |x - c| < \delta, \quad \text{então } |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Qual a diferença entre definição de limite (Def 2.16) e de continuidade (Def 2.17)?

2.5 Exercícios de Continuidade

2.5.1 Exercícios de Fixação

Fix 2.1: Determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) Se $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, então f é contínua em a.

(b) Se f é contínua em a, então $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe.

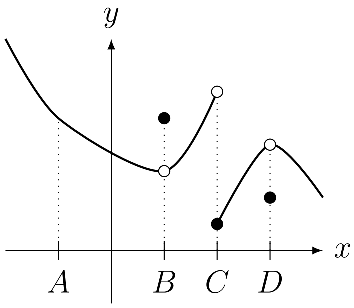
(c) Se f é descontínua em a, então $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Fix 2.2:

(a) Determine se f esboçada no gráfico abaixo é contínua ou não nos pontos A, B, C, D.

(b) Explique, caso não seja contínua, qual (quais) condições são violadas.

(c) Determine os pontos de descontinuidade removível



Fix 2.3: Considere as funções abaixo:

(I) $f(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 0; & x \geq 0; \end{cases}$ (II) $g(x) = \begin{cases} x; & x < 0; \\ 1; & x \geq 0; \end{cases}$ (III) $h(x) = \begin{cases} 5; & x \geq -2; \\ 4; & x < -2; \end{cases}$

Determine se são contínuas em: (a) $\mathbb{R}$; (b) $(-2, 0)$; (c) $[-2, 0]$.

Fix 2.4: Esboce o gráfico de uma função contínua cujos pontos de descontinuidade (únicos pontos onde a função **não** é contínua) são: (a) $\{1, 2, 3\}$; (b) $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Fix 2.5: Determine um $k \in \mathbb{R}$, se for possível, de modo que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}; & x \neq 0; \\ k; & x = 0; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}; & x \neq 0; \\ k; & x = 0; \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0; \\ k; & x = 0; \end{cases}$

Fix 2.6: Seja f contínua em $[1, 4]$ tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = -1$ e $f(4) = 2$. Determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) f não tem raiz em $[1, 2]$; (b) f tem pelo menos duas raízes em $[1, 4]$;

(c) f tem exatamente uma raiz em $[2, 3]$.

Fix 2.7: Determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) a função que representa o número de habitantes de uma cidade em função do tempo é contínua em todos os pontos;

(b) a função que representa a altura de uma pessoa em função do tempo é contínua em todos os pontos;

Fix 2.8: Estude o Teorema 2.9 da p.50 (TVI) e determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) Se f é contínua com $f(0) > 0$ e $f(1) > 0$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

(b) Se $g(1) < 0 < g(2)$, então g possui raiz em $[1, 2]$.

(c) Se h é contínua e $h(2) < k < h(4)$, então existe $c \in (2, 4)$ tal que $h(c) = k$.

(d) Se j é contínua e $k < j(2) < j(4)$, então não existe $c \in (2, 4)$ tal que $h(c) = k$.

Fix 2.9: Estude o Teorema 2.9 da p.50 (TVI). Considere $f : [-3,-1] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(-3) = 5$ e $f(-1) = 2$. Determine se é Verdadeiro ou corrija:

(a) Se $K \in [-3,-1]$, então existe $c \in [2,5]$ tal que $f(c) = K$.

(b) Se $K \in [3,4]$, então existe $c \in [-3,-1]$ tal que $f(c) = K$.

(c) Se $K \in [0,3]$, então existe $c \in [-3,-1]$ tal que $f(c) = K$.

Fix 2.10: Estude o Lema 2.3 da p.48 e o Teorema 2.4 da p.48. Supondo que f é contínua, prove, fazendo referência somente ao Lema 2.3 e o Teorema 2.4, que $h(x) = \dfrac{5[f(x)]^3}{x^2+1}$ é contínua.

2.5.2 Problemas

Prob 2.1: Determine o conjunto dos pontos de descontinuidade (pontos onde a função **não** é contínua) de: (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}; & x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ 1; & x = k\pi; \end{cases}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$;

(c) $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$; (d) $j(x) = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q}; \\ x^3; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Prob 2.2: Determine se $f(x) = \begin{cases} |x+2|; & x < 0; \\ 3; & x = 0; \\ 3 - x; & x > 0. \end{cases}$ é contínua e calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Prob 2.3:

(a) Seja $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 7\operatorname{sen}(x)$. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 10$.

(b) Mostre que existe pelo menos um $b > 0$ tal que $\log(b) = e^{-b}$.

(c) Considere f contínua em $[0,1]$ com $0 \le f(x) \le 1$. Mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

(d) Suponha que f é contínua em $[0,2]$ com $f(1) = -3$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,2]$. Prove que $f(x) < 0$ para todo $x \in [0,2]$.

Prob 2.4: Determine $a \in \mathbb{R}$, se for possível, de modo que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2(x+a)}{x^2-4x+4}; & x \neq 2 \\ 7; & x = 2. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{se } x < -1, \\ a & \text{se } x = -1, \\ x^2 - 3 & \text{se } x > -1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}; & |x| \ge 1 \\ ax; & |x| < 1. \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0; \\ a; & x = 0; \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}; & x > 0 \\ a; & x \le 0. \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(6x)}{\operatorname{sen}(8x)}; & x \neq 0; \\ a; & x = 0. \end{cases}$.

Prob 2.5: Determine $a, b \in \mathbb{R}$, se for possível, de modo que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b; & |x| \le 2; \\ |x-1|; & |x| > 2 \end{cases}.$$

Prob 2.6: Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x)$ é constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.5.3 Extras

Ext 2.1: Determine o conjunto dos pontos de descontinuidade (únicos pontos onde a função **não** é contínua) de $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1+|x|, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Ext 2.2: Determine $a \in \mathbb{R}$, se for possível, de modo que a função seja contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-2x^2+x} & \text{se } x \neq 1, \\ a & \text{se } x = 1. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{se } x < 0, \\ a & \text{se } x = 0, \\ \sqrt{x+4} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x-1}; & x \neq 1 \\ a; & x = 1 \end{cases}.$ (d) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x}; & x < 0 \\ a; & x \geq 0. \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2x+a; & x \leq 1; \\ x^2/a; & x > 1 \end{cases}.$ (f) $f(x) = \begin{cases} a\,x; & x < 0; \\ 1; & x \geq 0; \end{cases}$

Ext 2.3: Determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) se f é contínua com $f(0) = 2$ e $f(3) = 5$, então $f(x) > 0$ para todo $x \in [0, 3]$.

(b) se g é contínua com $g(1) = g(3) = -10$ e $g(2) = 10$, então g possui **exatamente** duas raízes no intervalo $[1, 3]$;

Ext 2.4: (Aplicação do TVI)

(a) Mostre que existe pelo menos um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + 2\operatorname{sen}(x_0) = 1$.

(b) Mostre que **todo** polinômio de grau impar possui pelo menos uma raiz.

(c) Mostre que a equação $\operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen}(x)) = \operatorname{sen}(x)$ possui pelo menos uma solução em $[\pi/6, \pi/2]$.

(d) Considere $h(x) = \operatorname{sen}(x) + 1 - \frac{2}{\pi}|x|$. Prove que existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ **distintos** tais que $h(x_0) = h(x_1) = 0$.

Ext 2.5: Determine $a, b \in \mathbb{R}$, se for possível, de modo que f seja contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x; & x \geq 4; \\ ax+b; & 1 < x < 4; \\ x; & x \leq 1. \end{cases}$$

Ext 2.6: Prove que: (a) $\operatorname{senh}(a+b) = \operatorname{senh} a \cosh b + \operatorname{senh} b \cosh a$;
(b) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$; (c) $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b$.

2.5.4 Desafios

Des 2.1: Um montanhista inicia a subida do Pico das Agulhas Negras do abrigo Rebouças as 8h da manhã e atinge o pico as 15h deste dia. Ele dorme no pico e retorna na manhã seguinte as 8h, chegando de volta ao abrigo Rebouças as 15h do mesmo dia.

Mostre que ele passou por um ponto do percurso na mesma hora (em dias distintos) durante a subida e durante a descida.

Des 2.2: Esboce o gráfico e determine os pontos de descontinuidade de:

(a) $f(x)$ igual ao segundo dígito da expansão decimal de x.

(b) $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é fração irredutível com $q > 0$ e $f(0) = 0$; Dica: esboce o gráfico para $q = 2, 3, \ldots$

(c) $f(x)$ igual ao número de 7's da expansão decimal de x se este número é finito e zero caso contrário.

(d) $f(x) = 0$ se 1 não aparece na expansão decimal de x e $f(x) = n$ se 1 aparece na enésima posição.

Des 2.3: Encontre uma função f que seja descontínua nos seguintes pontos, mas contínua em todos os outros: (a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; (b) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Des 2.4: Suponha que $\lim_{x \to 1} \log x = 0$. Prove que $\log(x)$ é contínua para $x > 0$.

Des 2.5: Prove (veja outra prova no Desafio 3.7 da p.90), utilizando as séries da exponencial (p.54) e do seno e cosseno (p.54), a relação de Euler: $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.}$

Des 2.6: Utilizando a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e a definição de senh e $\cosh$ dadas na p.56, prove que: $\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen}(x)$ e $\cosh(ix) = \cos(x)$.

Tome $x = i\theta$ e prove que $\cos(i\theta) = \cosh(\theta)$ e $\operatorname{sen}(i\theta) = i \operatorname{senh}(\theta)$.

Des 2.7: Dizemos que J é um intervalo em $\mathbb{R}$ se J é igual a $[a, b]$ ou (c, d) ou $[a, d)$ ou $(c, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Prove que se f é contínua em um intervalo I então a imagem $f(I)$ é um intervalo. Dizemos que função contínua leva intervalo em intervalo.

Des 2.8: Adapte a Definição 2.16 da p.59 de $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e defina:

(a) $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$; (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; (c) $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$.

Des 2.9: Prove pela definição (ver exercício anterior):

(a) $\lim_{x \to c} (2x^2 - x + 1) = 2c^2 - c + 1$; (b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$; (c) $\lim_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$.

Des 2.10: Prove pela definição que $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$ (limite do produto é igual ao produto dos limites); (Teorema 1.6 da p.12)

Dica: $f(x)g(x) - LM = g(x)(f(x) - L) + L(g(x) - M)$.

Des 2.11: Prove, utilizando a Definição 2.17 da p.59, que se f e g são contínuas, então $f + g$ é contínua (Teorema 2.4 da p.48).

Capítulo 3

Derivada

Objetivos: Introduzir o conceito de derivada, relacionando-o com sua interpretação geométrica e Física. A primeira aplicação, intimamente ligada à definição, é determinar reta tangente ao gráfico. Apresentar diversas notações utilizadas para derivadas.

Calcular a derivada pela definição para algumas funções, incluindo as trigonométricas, exponencial e logaritmo (utilizando os limites fundamentais). Apresentar propriedades básicas (derivada da soma, produto, divisão) e avançadas (derivada da composta).

Apresentar a derivada da função inversa e da função definida implicitamente como aplicações da derivada da composta.

Apresentar o Teorema do Valor Médio (TVM), um resultado importante do Cálculo, com aplicação na determinação de regiões de crescimento e decrescimento da função.

3.1 Definição de Derivada

Pré-Cálculo: Rever equação da reta na forma $y = mx+b$ e na forma $y-y_0 = m(x-x_0)$. Qual o significado geométrico de m, x_0 e y_0?

Resposta: O coeficiente m é o chamado coeficiente angular, pois $m = \tan\theta$, onde θ é o ângulo que a reta forma com o eixo x. Assim $m > 0$ implica que a função $f(x) = mx + b$ é crescente; $m < 0$ que f é decrescente e se $m = 0$ f é constante. Os coeficientes x_0, y_0 representam o ponto (x_0, y_0) onde a reta passa.
Assim, sabendo o coeficiente angular (m) e um ponto (x_0, y_0) onde a reta passa obtemos a equação da reta.

Definição 3.1 *Dada uma função f definida próxima de um ponto a, definimos a sua derivada em a por* $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. *Dizemos que f é* ***derivável*** *ou* ***diferenciável*** *em a.*

Lema 3.2 $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Prova: Mude variáveis para $x = a + h$. ■

Observação 3.1 *Se $y = f(x)$, podemos ver este limite como uma taxa de variação:* $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$*, a variação de y sobre a variação de x.*

A ideia de taxa de variação de uma função é importante. A derivada provém da ideia de passar de taxa de variação média para variação instantânea. Conforme mostra quadro abaixo, esta passagem pode ser interpretada com Geometria ou com Física.

	$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$f'(a)$
Matemática	taxa média de variação de f	taxa instantânea
Física	velocidade média	velocidade instantânea
Geometria	coef. angular reta secante	coef. angular reta tangente

Visão Analítica: Partindo da definição básica, podemos derivar diversas funções.

Lema 3.3 *A derivada de $f(x) = C$ é zero e derivada de $f(x) = x$ é 1.*

Prova: Se $f(x) = C$, $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C-C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$

Se $f(x) = x$, $\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$ ■

Exemplo 3.1 *Calcule pela definição a derivada de: (a) $f(x) = x^2$; (b) $g(x) = x^3$.*

Solução: (a) Como $(x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h \quad (\text{para } h \neq 0).$$

Assim $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x.$

(b) Como $(x+h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3xh^2 + h^3$,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{3hx^2 + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \quad (\text{para } h \neq 0).$$

Assim $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$ ■

Exemplo 3.2 *Calcule pela definição a derivada de: (a) $f(x) = \frac{1}{x}$; (b) $g(x) = \sqrt{x}$.*

Solução: (a) Como $f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$,

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$. Assim $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$.

(b) Racionalizando $g(x+h) - g(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ obtemos

$\frac{(x+h)-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$. Logo, $\frac{g(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$.

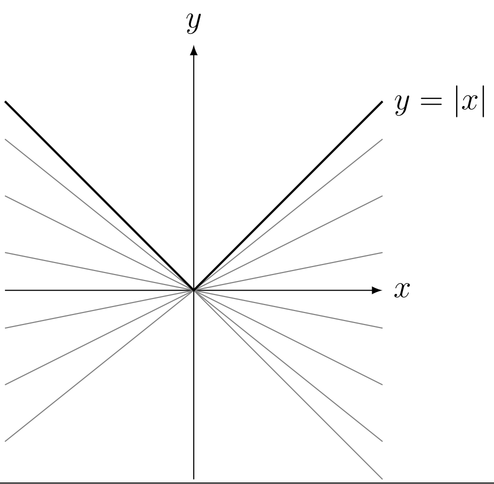
Assim $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ■

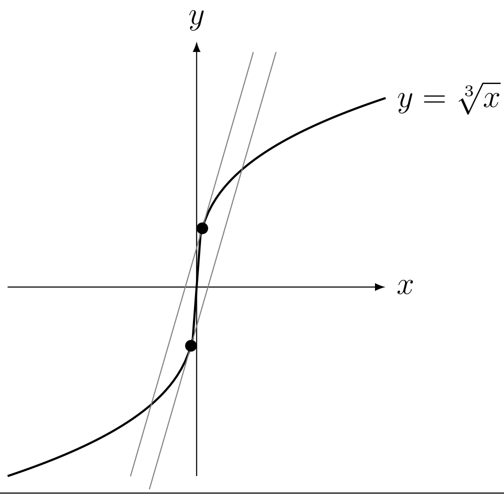
Exemplo 3.3 *Calcule pela definição $f'(0)$ e $g'(0)$ se: (a) $f(x) = |x|$; (b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$.*

Solução: (a) Note que $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.
Mas $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h}$ que não existe pois os limites laterais diferem (veja o gráfico de $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{|x|}$ na p.6). Assim a derivada **não** existe em $x = 0$.

(b) Note que $\dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$. Assim $g'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$. Como o limite não é finito, a derivada não existe. ■

Observação 3.2 *A ausência de derivada no zero de $y = |x|$ pode ser vista **geometricamente** no gráfico abaixo: o gráfico possui um "bico" em $x = 0$, o que impede a existência de uma tangente bem definida neste ponto. Representamos no gráfico em cinza diversas possíveis "tangentes".*





Observação 3.3 *Já no caso de $y = \sqrt[3]{x}$ podemos ver que o limite das retas tangente ao gráfico no zero coincide com o eixo y. O coeficiente angular da reta tangente converge para ∞ quando $x \to 0$. Marcamos no gráfico as retas tangentes ao gráfico em dois pontos próximos do zero. Observe que o gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$ pode ser obtido partindo do gráfico de $y = x^3$.*

Como a existência de derivada em um ponto impede o surgimento de "bicos", dizemos que uma função derivável é **suave**.

Exemplo 3.4 *Considere* $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in \mathbb{Q}; \\ 0; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. *Calcule $f'(0)$.*

Solução: Como $f(0) = 0$, $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h}$. Agora $f(h) = 0$ ou $f(h) = h^2$, dependendo se $h \in \mathbb{Q}$ ou não. Nos dois casos, $|f(h)| \le h^2$. Assim, usando a continuidade da função módulo,

$$|f'(0)| = \left| \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \right| = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(h)}{h} \right| \le \lim_{h \to 0} \left| \frac{h^2}{h} \right| = \lim_{h \to 0} |h| = 0.$$

Portanto, $0 \le |f'(0)| \le 0$, ou seja, $|f'(0)| = 0$ e portanto $f'(0) = 0$. ■

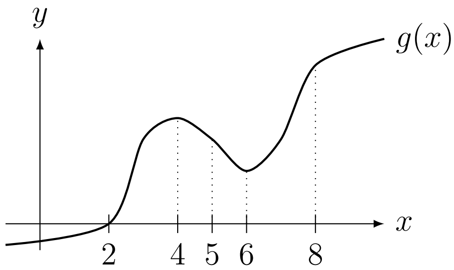
Visão Física: Se $f(t)$ é a posição de um objeto em função do tempo, $f'(t)$ é sua velocidade.

Exemplo 3.5 *A posição S em metros de um barco em função do tempo t em segundos é dada por $S(t) = \sqrt{t}$ para $t > 0$. Determine sua velocidade em m/s no instante $t = 9$.*

Solução: Pelo exemplo acima sabemos que $S'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Logo $S'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = 1/6$. Assim sua velocidade é $1/6\ m/s$. ■

Visão Geométrica: O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x, f(x))$ é igual a $f'(x)$. Em particular a reta tangente no ponto $(a, f(a))$ é: horizontal se $f'(a) = 0$; crescente se $f'(a) > 0$; decrescente se $f'(a) < 0$.

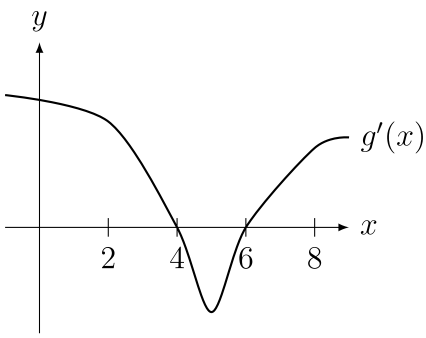
Exemplo 3.6 *Considere o gráfico de $y = g(x)$ na figura abaixo. Determine se é zero, positivo ou negativo: (a) $g'(2)$; (b) $g'(5)$; (c) $g'(6)$; (d) $g'(8)$.*



Solução: (a) positivo; (b) negativo; (c) zero; (d) positivo. ■

Exemplo 3.7 *Ainda utilizando o gráfico do exemplo anterior, esboce o gráfico de $y = g'(x)$. Comece pelos pontos onde a derivada é zero.*

Solução: É derivada é zero em $x = 4$ e $x = 6$; é positiva para $x < 4$ e $x > 6$; é negativa para $4 < x < 6$. Baseado nestas informações esboçamos o gráfico de $g'(x)$.



■

Observação 3.4 ***Outras Notações para Derivada.*** *Se $y = f(x)$, Newton[1] introduziu a notação $\dot{y}$ (ponto por cima do y) para derivada. Leibniz[2] introduziu a notação $\dfrac{df}{dx}$, que não é um quociente (mas será utilizado nos capítulos de integração como se fosse) e é sugestivo de taxa de variação instantânea, como o limite de taxa de variação média:*

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Qual notação é melhor? Isto foi motivo para a chamada "guerra do Cálculo" — consulte livros de História da Matemática como [Bo] ou a wikipedia `Leibniz-Newton_calculus_controversy`. *Na parte de derivada utilizamos a notação mais compacta f'. No Capítulo de Integral será útil utilizar $\dfrac{df}{dx}$. Além destas, existem outras notações utilizadas. Dado $y = f(x)$,*

$$f' = \frac{df}{dx} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f = Df = D_x f.$$

Os símbolos D e $\dfrac{d}{dx}$ são chamados de ***operadores diferenciais****. Se $\mathcal{I}$ é o espaço das funções deriváveis, podemos vê-los como funções nestes espaços: $D : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, pois associa a cada função sua derivada. Por exemplo, se $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g = Df$, então $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.*

Derivada segunda e de ordem superior. Definimos $f'' = (f')'$. De forma indutiva podemos definir a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Existem várias notações para derivadas de ordem superior:

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f, \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = D^n f, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Física: Se $f(t)$ representa a posição em função do tempo, f' é a velocidade e f'' a aceleração.
Geometria: Veremos (esboço de gráfico no Capítulo de Aplicações da Derivada) que f'' indica a concavidade do gráfico: para cima ou para baixo (pense em $y = x^2$ e $y = -x^2$).

Equação da reta tangente. Como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $f'(x_0) = m$, a equação da reta tangente é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 3.8 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de:*
(a) $y = x^2$ *no ponto* $(4, 16)$; *(b)* $y = \sqrt{x}$ *no ponto onde* $x = 9$.

Solução: (a) Já vimos que se $f(x) = x^2$ então $f'(x) = 2x$. Portanto a reta tangente é $y - 4^2 = 2 \cdot 4(x - 4)$, portanto, $y - 16 = 8(x - 4)$ ou $y = 8x - 16$ é a reta tangente ao gráfico em $(4, 16)$.

[2] Sir Isaac Newton: ⋆1643 Woolsthorpe, Inglaterra — †1727 Londres, Inglaterra.
[2] Gottfried Wilhelm von Leibniz: ⋆1646 Leipzig, Alemanha — †1716 Hannover, Alemanha.

(b) Já vimos que se $f(x) = \sqrt{x}$ então $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Portanto a reta tangente é $y - \sqrt{9} = 1/(2\sqrt{9})(x-9)$, portanto, $y - 3 = 1/6(x-9)$ ou $y = x/6 + 3/2$ é a reta tangente ao gráfico em $(9, 3)$. ■

Exemplo 3.9 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = x^3$ no ponto onde $x = a$. Determine **todas** as tangentes que passam pelo ponto $(0, 16)$.*

Solução: Já vimos que se $f(x) = x^3$ então $f'(x) = 3x^2$. Logo a reta tangente que passa em (a, a^3) é: $y - a^3 = 3a^2(x - a)$. Devemos determinar para quais $a \in \mathbb{R}$ esta reta passa em $x = 0$ e $y = 16$. Substituindo obtemos, $16 - a^3 = 3a^2(0 - a)$. Simplificando obtemos a equação $a^3 = -8$. A única solução em $\mathbb{R}$ é $a = -2$. Assim a única tangente que passa em $(0, 16)$ é $y + 8 = 12(x + 2)$, ou $y = 12x + 16$. ■

Erro Comum: Confundir derivada com reta tangente.
Exemplo: Determine a reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$. Como $f'(x) = 2x$, que é a equação de uma reta, responder que a reta tangente é $y = 2x$ (**errado**). O correto é $y - 4 = 2 \cdot 2(x - 2)$. Assim $y = 4x - 4$.

Erro Comum: Não calcular o coeficiente angular no ponto de tangência.
Exemplo: Determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(1, 1)$. Como $f'(x) = 3x^2$, responder que a reta tangente é $y - 1 = 3x^2(x - 1)$ (**errado**), que nem sequer é uma reta. O correto é $y - 1 = 3 \cdot 1^2(x - 1) = 3(x - 1)$.

Terminamos com um resultado que garante que toda função derivável é contínua.

Lema 3.4 (derivada e continuidade) *Se $f'(a)$ existe, então f é contínua em a.*

Prova: Divida e multiplique por $x - a$ a expressão $f(a + h) - f(a)$ e obtenha:

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} x - a = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Assim, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. ■

3.2 Derivada de Funções Transcendentes

Nesta seção calculamos pela definição as derivadas das funções trigonométricas seno e cosseno, exponencial e logarítmica. Eles decorrerão dos limites fundamentais do Teorema 1.17 da p.35 e Teorema 1.19 da p.37. Leia Seção 2.3 da p.52 para ver como definir estas funções.

Lema 3.5
(a) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$; *(b)* $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$;
(c) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$; *(d)* $(e^x)' = e^x$.

Prova: (a) Como $\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x$, obtemos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$
$$= \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Deixamos para o leitor provar que $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ (similar ao Exemplo 1.37 da p.35 (d)) Assim, fazendo $h \to 0$, graças ao limite fundamental trigonométrico (Teorema 1.17 da p.35), obtemos que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

(b) Deixamos para o leitor fazer um *mutatis mutandis* no item (a) utilizando a identidade trigonométrica: $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h$.

Para (c) e (d) precisamos estabelecer primeiro o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1. \tag{3.1}$$

Pela propriedade do "peteleco" do $\log$, $\log\left((1+h)^{1/h}\right) = \frac{\log(1+h)}{h}$. Como $\log$ é contínua (Teorema 1.11 da p.14) e o limite $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$ existe, pelo Teorema 1.9 da p.13 podemos trocar de ordem $\log$ com o limite. Assim, aplicando $\log$ no limite fundamental exponencial (Teorema 1.19 da p.37) obtemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \log\left((1+h)^{1/h}\right) = \log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right) = \log(e) = 1.$$

(c) Assim, $\frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \frac{1}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. Passando ao limite com $h \to 0$, trocando variável para $k = h/x$ e utilizando a (3.1):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{\log(1+k)}{kx} = \frac{1}{x}.$$

(d) Para derivar a exponencial precisamos provar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \tag{3.2}$$

Para isto trocamos variável. Tome $h = \log(1+y)$. Então $e^h - 1 = y$. Como $y \to 0$ quando $h \to 0$, pela mudança de variáveis do limite, $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)}$. Utilizando a equação (3.1), temos que $1 = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)}$. Assim, colocando e^x em evidência,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

■

As derivadas das outras funções trigonométricas como tangente, secante e cossecante podem ser calculadas com o Teorema 3.6 da p.72 (derivada do quociente) e as derivadas das funções trigonométricas inversas (arco-tangente, arco-seno, etc.) podem ser calculadas com o Teorema 3.9 da p.78 (derivada da função inversa).

Exemplo 3.10 *Determine a derivada de* $\log_{10} x$.

Solução: Pelas propriedades do log, $\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}$. Assim,

$$\frac{\log_{10}(x+h) - \log_{10}(x)}{h} = \frac{1}{\log 10} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}.$$

Passado ao limite com $h \to 0$ obtemos que $(\log_{10} x)' = \dfrac{1}{x \log 10}$. Aqui vemos novamente porque em cálculo é melhor utilizar a base e, pois senão a derivada é mais complicada. ∎

Porque radianos para medir ângulos?
Porque e como base de logaritmos?
A resposta é que se utilizarmos outra unidade de medida de ângulo, a derivada das funções trigonométricas será mais complicada; se utilizarmos outra base para o logaritmo/exponencial, a derivada será mais complicada. Nos dois casos surgiria uma constante (diferente de 1) nas derivadas. Isto tem relação direta com o limites fundamentais (Teorema 1.19 da p.37 e Teorema 1.17 da p.35).
Por exemplo, como vimos no exemplo acima, $\log'_{10}(x) = \dfrac{1}{x\log(10)}$. Se o ângulo for medido em graus, podemos expressar sengr$(x) = \operatorname{sen}(x\pi/180)$ — assim por exemplo sengr$(90) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ e cosgr$(x) = \operatorname{sen}(x\pi/180)$. Agora veremos mais adiante que sengr$'(x) = \frac{\pi}{180}\cos(x\pi/180) = \frac{\pi}{180}$ cosgr(x), ao invés da relação mais simples $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$.
Qualquer civilização do Universo (☺)após desenvolver alguma Matemática escolheria o mesmo. As opções de base 10 (número de dedos nas mãos dos humanos), graus (dividir o círculo em 360 graus, invenção dos babilônios) são escolhas arbitrárias.

3.3 Propriedades Básicas da Derivada

Nesta seção aprendemos técnicas que permitem calcular a derivada de uma enorme quantidade de funções sem ter que sequer relembrar a definição de derivada. Poucos teoremas vão prover um processo mecânico para derivar funções que são formadas a partir de poucas funções simples (seno, cosseno, log, raiz quadrada, potenciação) pela adição, multiplicação, divisão e composição. ([Sp p.144] em tradução livre)

Teorema 3.6 (soma, diferença, produto, quociente) *Suponha que f e g são funções deriváveis e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $(f(x) + cg(x))' = f'(x) + cg'(x)$ *(derivada é operador linear);*

(b) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$*;*

(c) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ *onde* $g(x) \neq 0$.

Prova: (a) É consequência direta da linearidade do limite dado pelo Teorema 1.6 da p.12.

(b) Se $m(x) = f(x)g(x)$, somando e subtraindo $f(x+h)g(x)$,

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Passando ao limite $h \to 0$ obtemos o resultado pois $f(x+h) \to f(x)$.

(c) Um argumento não-rigoroso, supondo que $\frac{f}{g}$ seja derivável, é definir $h = \frac{f}{g}$. Assim $hg = f$. Calculando a derivada dois dois lados obtemos por (b): $h'g + hg' = f'$. Logo, isolando h' e substituindo h por f/g: $h' = \frac{f' - hg'}{g} = \frac{f' - fg'/g}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

A prova rigorosa começa calculando a derivada de $m(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ pela definição:

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]\frac{1}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h}\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

■

Quando $h \to 0$ o primeiro termo converge para $-g'(x)$ e segundo termo converge para $\dfrac{1}{[g(x)]^2}$. Assim, $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$. Como $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$, usando o item (b) (derivada do produto), $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = f'\dfrac{1}{g} + f\dfrac{-g'}{g^2} = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Observação 3.5 *Usando a notação de derivada D da Observação 3.4 da p.69, o operador D é linear, isto é, $D(f + cg) = Df + cDg$ para toda função f e g e todo $c \in \mathbb{R}$.*

Observação 3.6 *A regra mais difícil é do produto e do quociente. Um erro (dificilmente cometido pelos alunos) e achar que a derivada do produto é o produto das derivadas.*

Corolário 3.7 $(x^m)' = mx^{m-1}$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}$.

Prova: Para $m = 0$ é consequência do Teorema 3.3 da p.66 pois $x^0 = 1$, uma função constante cuja derivada é 0. Para $m > 0$ segue por indução do Teorema 3.6 da p.72. Suponha, por hipótese de indução, que $(x^k)' = kx^{k-1}$. Assim, $(x^{k+1})' = (x\,x^k)' = x'\,x^k + x\,(x^k)' = 1\,x^k + x\,kx^{k-1} = x^k + k\,x^k = (k+1)x^k$. Como é verdade para $k = 0$ e supondo verdadeiro para k segue que é verdade para $k + 1$, é verdadeiro para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $m < 0$ basta escrever $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$. Como $-m > 0$, utilizando a derivada do quociente e a parte anterior temos que:

$$\left(\frac{1}{x^{-m}}\right)' = \frac{1'(x^{-m}) - (-m)x^{-m-1}}{x^{-2m}} = \frac{0 + mx^{-m-1}}{x^{-2m}} = mx^{-m-1+2m} = mx^{m-1}.$$

■

Juntando este Corolário e o Teorema anterior concluímos que podemos derivar:

(a) **polinômios** pois sabemos derivar soma de funções e x^m;

(b) **funções racionais** pois sabemos derivar polinômios e quocientes;

(c) combinações de somas, produtos e quocientes entre funções polinomiais e funções transcendentes (seno, cosseno, log, etc). Por exemplo tangente, secante, cossecante, etc.

Exemplo 3.11 *Calcule a derivada de* $p(x) = -5x^9 + 4x^3 - 7x^2 - 10$.

Solução: Aplicando a regra da derivada da soma várias vezes seguidas obtemos:

$$\begin{aligned} p'(x) &= (-5x^9)' + (4x^3 - 7x^2 - 10)' = (-5x^9)' + (4x^3)' - (7x^2 - 10)' = \\ &= (-5x^9)' + (4x^3)' - (7x^2)' - (10)'. \end{aligned}$$

Agora usando a propriedade $(cg)' = cg'$ se c é constante,

$$p'(x) = -5(x^9)' + 4(x^3)' - 7(x^2)' - (10)'.$$

Agora usando a regra $(x^m)' = mx^{m-1}$ para $m \in \mathbb{Z}$,

$$p'(x) = -5 \cdot 9x^8 + 4 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x^1 - 0 = -45x^8 + 12x^2 - 14x.$$

■

Observação 3.7 *Com estas regras mais as derivadas das funções transcendentes (seno, cosseno, exponencial e logaritmo) podemos derivar um conjunto* **enorme** *de funções. Existe um* **algoritmo** *para calcular a derivada: um computador pode facilmente derivar "qualquer" função.*

Exemplo 3.12 *Calcule a derivada de:*

(a) $f(x) = \log x \tan x$; *(b)* $g(x) = x^4 \cos x + \dfrac{7x}{\operatorname{sen} x}$.

Solução: (a) Primeiro calculamos a derivada da tangente utilizando a derivada do quociente:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = (\sec x)^2.$$

Agora usando a regra do produto ($\log'(x) = 1/x$),

$$f'(x) = (\log x)' \tan x + \log x (\tan x)' = \frac{\tan x}{x} + \frac{\log x}{(\cos x)^2}.$$

(b) Comece aplicando a regra da soma:

$$g'(x) = \left(x^4 \cos x + \frac{7x}{\operatorname{sen} x}\right)' = (x^4 \cos x)' + \left(\frac{7x}{\operatorname{sen} x}\right)'.$$

Agora derive cada termo, usando regra do produto no primeiro e do quociente no segundo:

$$g'(x) = (x^4)' \cos x + x^4 (\cos x)' + \frac{(7x)' \operatorname{sen} x - 7x(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Termine: $g'(x) = 4x^3 \cos x + x^4(-\operatorname{sen} x) + \dfrac{7 \operatorname{sen} x - 7x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$. ■

Observação 3.8 *É importante ser sistemático durante a derivação, executando poucos passos de cada vez. Somente com experiência podemos fazer diretamente com poucos (ou nenhum) passo intermediário. Assim aplique uma regra de cada vez.*

Exemplo 3.13 *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{\log x}{5e^x + 2 \operatorname{sen} x}$.

Solução:

$$f'(x) = \frac{(\log x)'(5e^x + 2\operatorname{sen} x) - \log x (5e^x + 2 \operatorname{sen} x)'}{(5e^x + 2 \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{(1/x)(5e^x + 2\operatorname{sen} x) - \log x((5e^x)' + (2 \operatorname{sen} x)')}{(5e^x + 2 \operatorname{sen} x)^2} =$$

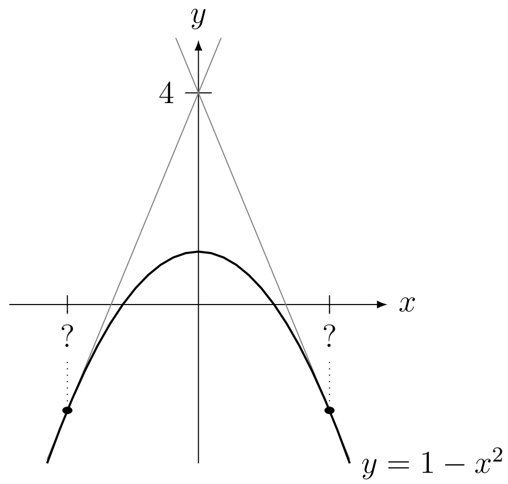
$$= \frac{(1/x)(5e^x + 2\operatorname{sen} x) - \log x(5e^x + 2 \cos x)}{(5e^x + 2 \operatorname{sen} x)^2}$$

■

Exemplo 3.14 *Determine* **todas** *as retas tangentes ao gráfico de $y = 1 - x^2$ que passam pelo ponto $(0, 4)$.*

Solução: Primeiro podemos ver geometricamente (ver gráfico abaixo) que são duas soluções.

Como $y' = -2x$, a reta tangente no ponto $(a, 1-a^2)$ é $y - (1-a^2) = -2a(x-a)$. Esta reta vai passar no ponto $(x, y) = (0, 4)$ se $4 - (1-a^2) = -2a(0-a)$, isto é, se $3 + a^2 = 2a^2$, ou se $a^2 = 3$. Isto vai ocorrer para $a = \pm\sqrt{3}$. Como $1 - (\pm\sqrt{3})^2 = 1 - 3 = -2$, as retas passam nos pontos do gráfico $(\sqrt{3}, -2)$ e $(-\sqrt{3}, -2)$. Assim as retas tangentes são $y - (-2) = -2\sqrt{3}(x - \sqrt{3})$ e $y - (-2) = 2\sqrt{3}(x + \sqrt{3})$. Simplificando obtemos que as duas retas tangentes ao gráfico são: $y = 4 \pm 2\sqrt{3}x$. ■



3.4 Derivada da Composta

Pré-Cálculo: Saber fazer composição de funções. Exemplo: se $f(x) = 4x + 2$ e $g(y) = \operatorname{sen}(y + 1)$, calcule $f(g(y))$ e $g(f(x))$.

Teorema 3.8 (Derivada da composta (cadeia)) *Considere f e g deriváveis. Então $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.*

Prova: Um argumento não-rigoroso (supondo g não-constante próximo de x) é, dividindo e multiplicando por $g(x+h) - g(x)$,

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Agora quando $h \to 0$ o segundo termo converge para $g'(x)$ por definição. Para calcular o primeiro, troque variável para $y = g(x+h)$. Quando $h \to 0$, $y \to g(x)$. Assim, definindo $a = g(x)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{y \to g(x)} \frac{f(y) - f(g(x))}{y - g(x)} = \lim_{y \to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(a) = f'(g(x)).$$

■

Erro Comum: Este é a regra de derivação mais difícil de todas. Necessário praticar bastante, pois é um ponto de dificuldade para os alunos.

Exemplo 3.15 *Calcule as derivadas de:*

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(4x^5 - 4)$; *(b)* $g(x) = [\log(\operatorname{sen}(x^5) + 2)]^7$; *(c)* $h(x) = e^{10\operatorname{sen}(x^3) + 7x^2}$.

Solução: (a) $f'(x) = \text{sen}'(4x^5 - 4)(4x^5 - 4)' = \cos(4x^5 - 4)(20x^4)$.

(b)
$$\begin{aligned} g'(x) &= 7[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]^6[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]' = \\ &= 7[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]^6 \log'(\text{sen}(x^5) + 2)(\text{sen}(x^5) + 2)' = \\ &= 7[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]^6 \frac{1}{\text{sen}(x^5) + 2} \text{sen}\,'(x^5)(x^5)' = \\ &= 7[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]^6 \frac{1}{\text{sen}(x^5) + 2} \cos(x^5) 5x^4 = \\ &= \frac{35x^4[\log(\text{sen}(x^5) + 2)]^6 \cos(x^5)}{\text{sen}(x^5) + 2}. \end{aligned}$$

(c) Utilizando $\exp(x) = e^x$ para facilitar o entendimento da aplicação das regras,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \exp'(10\,\text{sen}(x^3) + 7x^2)(10\,\text{sen}(x^3) + 7x^2)' \\ &= \exp(10\,\text{sen}(x^3) + 7x^2)(10\,\text{sen}\,'(x^3)(x^3)' + (7x^2)') = \\ &= \exp(10\,\text{sen}(x^3) + 7x^2)(10\cos(x^3)(3x^2) + 14x) = \\ &= \exp(10\,\text{sen}(x^3) + 7x^2)(30x^2\cos(x^3) + 14x). \end{aligned}$$

■

Observação 3.9 ***Como definir*** a^{x}***?***
Por exemplo, 10^π *é igual a* 10 *multiplicado por ele mesmo quantas vezes?*
Um caminho é definir primeiro $10^{p/q}$ *com* $p, q \in \mathbb{N}$ *como no ensino médio (ver [Sp, p.283] para ótima explicação):* $10^{p/q} = \sqrt[q]{10^p}$. *Para um irracional qualquer como* π, *definimos truncando a expansão decimal e passando ao limite. Assim,* $10^\pi \approx 10^{3.14} = \sqrt[100]{10^{314}}$ *ou* $10^\pi \approx 10^{3.1415} = \sqrt[10000]{10^{31415}}$, *etc. Desta forma, tomando mais casas decimais, podemos aproximar o valor com qualquer grau de precisão que se queira. O mesmo vale para um número real (positivo) qualquer. Outro exemplo: como* $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$, *podemos aproximar* $2^{\sqrt{2}} \approx 2^{1.41421} = 2^{\frac{141421}{100000}} = (\sqrt[100000]{2})^{141421}$.
Mas existe um caminho direto utilizando a exponencial e^x. *Como* $e^{\log 10} = 10$, *utilizando propriedades do expoente,* $10^x = (e^{\log 10})^x = e^{x \log 10}$. *De forma geral, definimos*

$$\boxed{a^x = e^{x \log a} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0.}$$

Exemplo 3.16 *Calcule a derivada de:*
(a) $f(x) = x^r$ $(x > 0)$; *(b)* $g(x) = a^x$ $(a > 0)$; *(c)* $h(x) = x^x$ $(x > 0)$.

Solução: (a) Como $x = e^{\log x}$, $f'(x) = (x^r)' = (e^{r \log x})' = e^{r \log x}\dfrac{r}{x} = \dfrac{rx^r}{x} = rx^{r-1}$.

(b) Como $a = e^{\log a}$ (porque?), $g(x) = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$. Assim, $g'(x) = e^{x \log a}(x \log a)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$. Aqui vemos novamente porque em cálculo é melhor utilizar a base e, pois $g' = g$ se, e somente se, $\log a = 1$ se, e somente se, $a = e$.

(c) Como $x = e^{\log x}$, $h'(x) = (x^x)' = (e^{x \log x})' = (e^{x \log x})(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$. ■

Pelo exemplo anterior item (a), $(x^r)' = rx^{r-1}$.
Assim sabemos calcular por exemplo $(\sqrt[7]{x})' = (x^{1/7})' = \frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} = \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$.
Ou então $(\sqrt[12]{x^5})' = (x^{5/12})' = \frac{5}{12}x^{\frac{5}{12}-1} = \frac{5}{12}x^{-\frac{7}{12}} = \dfrac{5}{12\sqrt[12]{x^7}}$.

Exemplo 3.17 *Calcule a derivada de:* *(a)* $h(x) = |x^2 - 9|$; *(b)* $m(x) = \log(|x|)$.

Solução: (a) Por definição $h(x) = x^2 - 9$ quando $|x| > 3$ e $h(x) = -(x^2 - 9) = 9 - x^2$ quando $|x| < 3$. Assim, $h'(x) = 2x$ quando $|x| > 3$ e $h'(x) = -2x$ quando $|x| < 3$. Note (sabe explicar geometricamente porque?) que $f'(3)$ e $f'(-3)$ não existem.

(b) Por definição $m(x) = \log(x)$ para $x > 0$ e $m(x) = \log(-x)$ para $x < 0$. Assim $m'(x) = 1/x$ para $x > 0$ e $m'(x) = \log'(-x) \cdot (-x)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$ para $x < 0$. Assim, para todo $x \neq 0$ (onde $\log(|x|)$ não está definida de qualquer jeito) $m'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ou seja, $m'(x) = (\log(|x|))' = \dfrac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. ■

Exemplo 3.18 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $y(x) = \operatorname{sen}(\log(x^2+7))$ *no ponto* $(1, \operatorname{sen}(\log(8)))$.

Solução: Como $y'(x) = \cos(\log(x^2+7))\dfrac{1}{x^2+7}2x$, a equação da reta tangente é:

$$y - \operatorname{sen}(\log(8)) = \cos(\log(1^2+7))\frac{1}{1^2+7}2 \cdot 1(x-1) = \frac{\cos(\log(8))}{4}(x-1).$$

Rearrumando, a equação da reta tangente é: $y = \operatorname{sen}(\log(8)) + \dfrac{\cos(\log(8))}{4}(x-1)$. ■

Pré-Cálculo: Coeficientes Angulares e Retas Perpendiculares entre si
Se m é o coeficiente angular da reta r e n o coeficiente angular de uma reta perpendicular a r, então $m = -1/n$.

Exemplo 3.19 *Determine a equação da reta perpendicular ao gráfico de* $y = \log(\tan x)$ *no ponto* $(\pi/4, 0)$.

Solução: Como $y' = \sec^2(x)/\tan(x)$ e $y'(\pi/4) = 2$, o coeficiente da reta tangente é 2 e, portanto, da reta perpendicular é $-1/2$. Logo a equação da reta perpendicular é $y - 0 = -1/2(x - \pi/4)$. ■

Quadro de derivadas básicas.

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
e^x	e^x
$\log(\lvert x\rvert)$	$\dfrac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$\sec^2 x$

3.5 Derivada da Inversa

Aprenderemos como calcular a derivada da inversa de uma função, em particular da inversa das trigonométricas, cuja a mais importante é o $\arctan$.

Pré-Cálculo: O que é inversa de uma função?
Cuidado com a confusão usual entre a inversa e a função "1/sobre"!
A inversa de x^2 é $\sqrt{x} \neq \dfrac{1}{x^2}$. A inversa de $\operatorname{sen}(x)$ é $\operatorname{arcsen}(x) \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.
A inversa de e^x é $\log(x) \neq \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
Obtemos o gráfico da função inversa refletindo o gráfico da função em torno de $y = x$. Faça isto para os pares: x^2 e $\sqrt{x}$, x^3 e $\sqrt[3]{x}$, e^x e $\log(x)$, $\cos(x)$ e $\arccos(x)$. Utilize um *software* para ajudá-lo nesta tarefa.

Pré-Cálculo: Quando uma função possui inversa?
Quando é injetiva (Definição 3.14 da p.83), que pode ser verificado pelo
Teste da reta horizontal: toda reta horizontal intercepta o gráfico da função em no máximo 1 ponto (0 ou 1 ponto).

Teorema 3.9 (da função inversa) *Se uma função f é derivável e possui inversa perto de x_0 (numa vizinhança de x_0, veja Definição 1.4 da p.2), com inversa contínua perto de $y_0 = f(x_0)$ e $f'(x_0) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ e $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.*

Prova: Apresentamos inicialmente um argumento não-rigoroso, supondo que a inversa é derivável. Como f possui inversa, podemos escrever que $f^{-1}(f(x)) = x$. Derive os dois lados usando a regra da composta do lado esquerdo. Obtemos que: $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Logo, definindo $y = f(x)$, temos que $x = f^{-1}(y)$. Portanto, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Para argumento rigoroso, veja prova em [NC] capítulo 8 ou [Sp, p.208] ou [Zo]. As ideias são que $f(x) - f(x_0)$ e $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$ são $\neq 0$ (senão f ou f^{-1} não seriam injetivas). Usando a mudança de variáveis no limite do Lema 1.18 da p.35 obtemos que:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Agora supondo que f é derivável em x_0 com $f'(x_0) \neq 0$ obtemos o resultado. ■

Exemplo 3.20 *Calcule a derivada de: (a) $g(y) = \arctan y$; (b) $f(y) = \operatorname{arcsen} y$.*

Solução: (a) A função $\tan$ possui inversa em $(-\pi/2, \pi/2)$. Já vimos no Exemplo 3.3 da p.74 que $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Logo $(\tan x)' \neq 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.9 da p.78) a função $\arctan$ é derivável em $\mathbb{R}$. Calculamos sua derivada derivando os dois lados de $\arctan(\tan x) = x$ e utilizando a regra da composta:

$$\arctan'(\tan x) \cdot (\tan x)' = 1 = \arctan'(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dividindo a identidade trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ obtemos que $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Logo, $1 = \arctan'(\tan x) \cdot (\tan^2 x + 1)$. Fazendo $y = \tan x$ obtemos que $\arctan'(y) = \dfrac{1}{y^2 + 1}$.

(b) A função sen possui inversa em $(-\pi/2, \pi/2)$. Como $(\operatorname{sen} x)' = \cos(x) \neq 0$ para todo $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.9 da p.78) a função arcsen é derivável em $(-1, 1)$. Calculamos sua derivada derivando os dois lados de $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ e utilizando a regra da cadeia: $\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{sen} x)' = 1 = \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$. Da identidade trigonométrica fundamental $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$. Logo, fazendo $y = \operatorname{sen} x$ obtemos que $\operatorname{arcsen}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. ■

Observação 3.10 *Refazemos a derivada do* $\arctan$ *do exemplo com a notação de Leibniz. Se* $y = \tan(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. *Como* $x = \arctan(y)$, *queremos* $\arctan'(y) = \dfrac{dx}{dy}$. *Assim,* $\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{-1}$. *Como* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, $\dfrac{dx}{dy} = \cos^2(x) = \dfrac{1}{\tan^2(x)+1} = \dfrac{1}{y^2+1}$.

Exemplo 3.21 *Utilize o fato que* $\log$ *é a função inversa de* $\exp$ *para deduzir a derivada de:*
(a) $\log y$ *assumindo que* $(e^x)' = e^x$; *(b)* e^y *assumindo que* $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$.

Solução: (a) Derivando a identidade $\log(e^x) = x$, $\log'(e^x) \cdot (e^x)' = \log'(e^x) \cdot e^x = 1$. Logo, $\log'(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$. Fazendo $y = e^x$ obtemos que $\log'(y) = \dfrac{1}{y}$.

Refazendo com a notação de Leibniz: $y = e^x$ e $x = \log y$. Assim $\dfrac{dy}{dx} = e^x$. Logo $\log'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$.

(b) Utilizamos a notação $\exp(x) = e^x$. Derivando a identidade $\exp(\log x) = x$, $\exp'(\log x) \cdot (\log x)' = \exp'(\log x) \cdot \dfrac{1}{x} = 1$. Logo, $\exp'(\log x) = x$. Fazendo $y = \log x$, temos que $e^y = x$ e obtemos que $(e^y)' = \exp'(y) = x = e^y$.

Refazendo com a notação de Leibniz: $y = \log x$ e $x = e^y = \exp(y)$. Assim $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Logo $\exp'(y) = \dfrac{dx}{dy} = x = e^y$. ■

Exemplo 3.22 *Considere* $f(x) = x^5 - 2x^3 + 7x^2 + 4$. *Como* $f(1) = 10$, *calcule* $g'(10)$.

Solução: Como $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 14x$, $f'(1) = 13$. Como $f(1) = 10$, $g(10) = 1$. Pelo Teorema da Função Inversa g é derivável e $g'(10) = \dfrac{1}{f'(g(10))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{13}$.

Outro modo de calcular a derivada é o seguinte. Como $g(f(x)) = x$, derivando os dois lados, $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$. Logo, $g'(f(1)) \cdot f'(1) = 1 = g'(10) \cdot 13$. Logo $g'(10) = \dfrac{1}{13}$.

Ainda outro modo é usando a notação de Leibniz. Seja $y = f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 14x$. $\dfrac{dy}{dx} = 20x^3 - 12x + 14$. Como $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $g'(y) = (f^{-1})'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{20x^3 - 12x + 14}$. Quando $y = 10, x = 1$. Assim $g'(10) = \dfrac{1}{20 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 + 14} = \dfrac{1}{13}$. ■

Observação 3.11 (inversa: visão geométrica) *Observe que se* m *é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto* (x_0, y_0) *e* n *o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $x = f^{-1}(y)$ *no ponto* (y_0, x_0) *então* $n = 1/m$ *pelo teorema da função inversa. Isto se deve ao seguinte fato geométrico: se* m *é coeficiente angular de uma reta* r *e se* n *é o coeficiente angular de uma reta* s *onde* s *é a reflexão de* r *pela reta* $y = x$ *então* $n = 1/m$. *Pense sobre isso...*

3.6 $\star$Derivação Implícita[1]

Funções podem ser definidas implicitamente por meio de equações. Um exemplo é a equação $x^2 + y^2 = 1$, que define, de forma implícita duas funções: $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (parte de cima do círculo) e $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ (parte de baixo). Um fato notável é que podemos calcular a derivada de uma função definida implicitamente sem ter que explicitar a função. Basta reescrevermos $x^2 + y(x)^2 = 1$ e derivarmos os dois lados, utilizando a regra da cadeia: $2x + 2y(x)y'(x) = 0$. Assim, $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$. Calculamos y'' de forma análoga (ver Exemplo 3.25).

Por trás deste truque existe o **Teorema da Função Implícita**, que determina condições para uma equação definir implicitamente uma função e como calcular sua derivada. Este teorema é deixado para um curso de Cálculo avançado. Abordamos o assunto através de exemplos.

Exemplo 3.23 *Considere a função $y = f(x)$ definida implicitamente por $y^3 + y = x$. Determine onde a derivada é positiva.*

Solução: Como $y(x)^3 + y(x) = x$, derivando implicitamente, $3y^2(x)y'(x) + y'(x) = 1$. Assim, $y'(x) = \dfrac{1}{3y^2(x) + 1}$. Assim $y'(x) > 0$ para todo x. ∎

Exemplo 3.24 *Determine a reta tangente aos gráficos definidos implicitamente por:*
(a) $x + y = \operatorname{sen}(xy)$ *em* $(0, 0)$ *(b)* $xy + \log(xy) = 1$ *em* $(1, 1)$.

Solução: (a) Primeiro reescrevo $x + y(x) = \operatorname{sen}(xy(x))$. Derivando implicitamente, $1 + y'(x) = \cos(xy(x))(y(x) + xy'(x))$. Assim em $(0, 0)$, $1 + y'(0) = \cos(0)(y(0) + 0) = 0$. Logo $y'(0) = -1$. Logo a reta tangente é $y - 0 = (-1)(x - 0) = -x$ ou $y = -x$.

(b) Primeiro reescrevo $xy(x) + \log(xy(x)) = 1$. Derivando implicitamente, $y(x) + xy'(x) + \dfrac{y(x) + xy'(x)}{xy(x)} = 0$. Assim em $(1, 1)$, $y(1) + 1y'(1) + \dfrac{y(1) + 1y'(1)}{1y(1)} = 0 = 1 + y'(1) + 1 + y'(1) = 2 + 2y'(1) = 0$. Logo $y'(1) = -1$. Logo a reta tangente é $y - 1 = (-1)(x - 1) = 1 - x$ ou $y = 2 - x$. ∎

Exemplo 3.25 *Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2 - xy + y^2 = 12$. Determine os pontos x onde $y'(x) = 0$. Calcule $y''(x)$ nestes pontos.*

Solução: Derivando implicitamente, obtemos $2x - y - xy' + 2yy' = 0$. Os pontos onde $y' = 0$ vão satisfazer: $y = 2x$. Substituindo na equação $x^2 - xy + y^2 = 12$ obtemos a equação $3x^2 = 12$. Portanto, $x_0 = \pm 2$. Assim em $x = 2$, $y = 2x = 4$ e em $x = -2$, $y = 2x = -4$. Derivando implicitamente outra vez obtemos: $2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2y'y'' = 0$. Nos pontos onde $y' = 0$ simplificamos para: $2 - xy'' + 2y'y'' = 0$. Agora em $(2, 4)$, $2 - 2y'' + 2(4)y'' = 0$, e $y''(x) = -1/3$. De forma análoga, em $(-2, -4)$, $y''(x) = 1/3$. ∎

Exemplo 3.26 *Determine a reta perpendicular à curva $yx^3 + 2y^2 = 10$ no ponto $(2, 1)$.*

Solução: Como $y'x^3 + 3yx^2 + 4yy' = 0$, substituindo $x = 2, y = 1$, $8y' + 12 + 4y' = 0$, ou $y' = -1$. Logo o coeficiente angular da reta perpendicular é $-1/(-1) = 1$. Assim a reta perpendicular é $y - 1 = x - 2$. ∎

[1] A leitura desta seção é opcional.

3.7 Teorema do Valor Médio (TVM): Crescimento e Decrescimento

> Nesta seção justificamos o tempo que gastamos aprendendo a calcular a derivada de uma função. Veremos que sabendo somente um pouco sobre f' (o sinal) nos diz muito sobre f. [Sp, p.163]

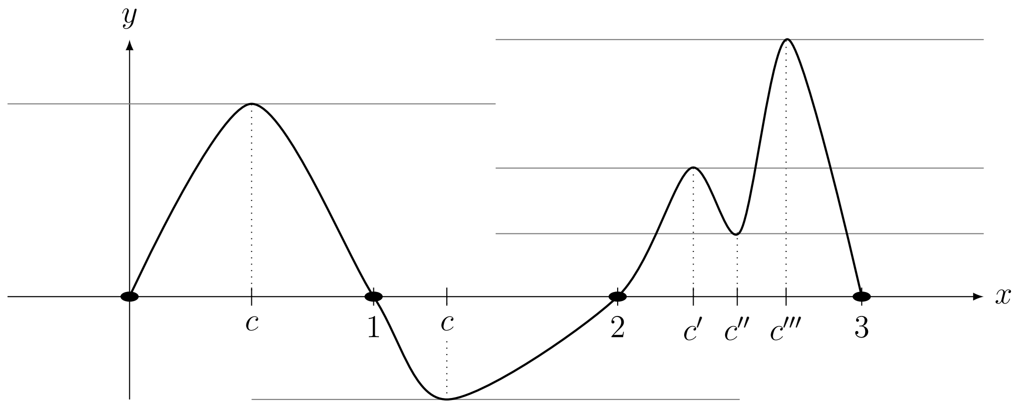
São aplicações do Teorema do Valor Médio (TVM):

- determinar intervalos onde uma função cresce ou decresce;
- determinar intervalos onde uma função é injetiva;
- determinar intervalos onde existe a função inversa;
- provar unicidade de solução de equação.

Os resultados desta seção são baseados no seguinte Teorema.

Teorema 3.10 (Rolle[3]) *Se f é contínua em $[a, b]$ (com $a < b$) e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b) = 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

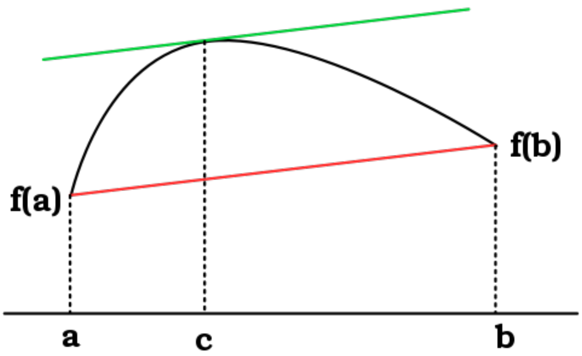
Prova: Vou somente ilustrar o resultado. Considere a função f representada no gráfico abaixo. Note que $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Assim no intervalo $[0, 1]$ existe um c tal que $f'(c) = 0$, isto é, tal que a reta tangente é paralela ao eixo x. O mesmo ocorre no intervalo $[1, 2]$. Finalmente o Teorema garante a existência de **pelo menos um** c, mas podemos ter mais de um, como no caso da aplicação do Teorema em $[2, 3]$, onde temos 3 c's distintos.



■

O Teorema do Valor Médio (TVM) apresentado como um corolário do Teorema de Rolle, "é uma das mais importantes ferramentas teóricas do Cálculo — provavelmente o resultado mais profundo sobre derivadas." [Sp p.168] O TVM é a base de métodos numéricos utilizados nas aplicações do Cálculo na Engenharia.

[3] Michel Rolle: ⋆1652 Ambert, França — †1719 Paris, França.



Corolário 3.11 (Teorema do Valor Médio (TVM)) *Se f é contínua em $[a, b]$ (com $a < b$) e derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Prova: Considere a função g definida em $[a, b]$ por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

A função $g(x)$ representa a distância vertical entre cada ponto do gráfico de $y = f(x)$ e da reta secante $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ (vide figura acima que ilustra o TVM). Como $g(a) = g(b) = 0$, podemos aplicar o Teorema 3.10 (Rolle) para concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Observação 3.12 *A interpretação Física do TVM é que existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que a a velocidade instantânea em c é igual a velocidade média em $[a, b]$.*

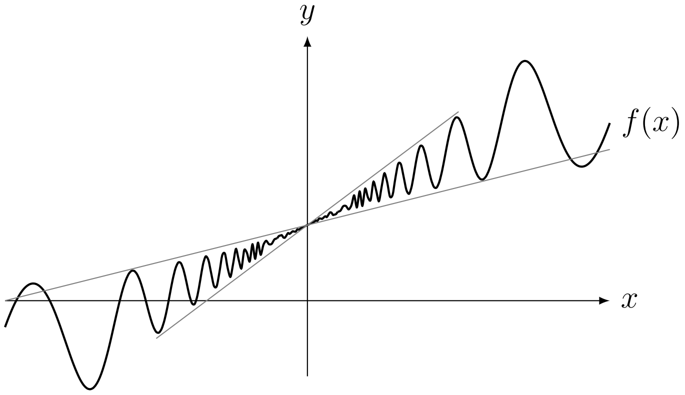
Definição 3.12 (crescente e decrescente) *Seja I um intervalo. Dizemos que f é:*
(a) **crescente** *em I se para todo $x, y \in I$ com $x < y$, temos que $f(x) < f(y)$;*
(b) **decrescente** *em I se para todo $x, y \in I$ com $x < y$, temos que $f(x) > f(y)$.*

Observação 3.13 *Poderíamos definir crescente (sem ser estritamente) por: $x < y$ implica que $f(x) \le f(y)$ (permitindo igualdade). Deixamos isto para um curso de Análise. Neste livro dizemos que a função é crescente significando estritamente crescente.*

Corolário 3.13 (sinal da derivada e crescimento/decrescimento) *Seja f uma função derivável em um intervalo I. Se, para todo $x \in I$:*
(a) $f'(x) > 0$, então f é crescente em I;
(b) $f'(x) < 0$, então f é decrescente em I;
(c) $f'(x) = 0$, então f é constante em I.

Prova: (a) Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a, b]$, obtemos que existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) > 0$. Assim $f(b) - f(a) > 0$, isto é, $f(b) > f(a)$. Logo f é crescente em I. Deixamos os outros itens para o leitor. ■

Observação 3.14 *A hipótese da derivada ser positiva num* **intervalo** *é fundamental para se concluir que a função é crescente neste intervalo. A derivada ser positiva em* **um ponto** *não implica que ela é crescente perto do ponto. Um exemplo é a função f representada no gráfico abaixo. Embora $f'(0) > 0$, a função não é crescente perto de zero pois oscila. A derivada positiva em $x = 0$ implica somente que $f(x) \le f(0) \le f(y)$ para $x < 0 < y$. Veja [NC] Capítulo 8 ou [Sp, p.198] para análise detalhada. Quem quiser ver em programa gráfico, $f(x) = 2x + 3|x|^{1.4}\,\mathrm{sen}(1/x) + 0.1$.*



Definição 3.14 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita* **injetiva** *se para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$ temos que $f(x) \neq f(y)$.*

Pré-Cálculo: Aprenda o que é **função injetiva** em termos:
(a) algébricos: f é injetiva se $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$;
(b) gráficos (**teste da reta horizontal**): f é injetiva se cada reta horizontal (isto é, paralela ao eixo x) intercepta o gráfico de f em **no máximo** um ponto (0 ou 1 ponto). É consequência do **Teste da reta vertical**: Um gráfico é uma função se cada reta vertical toca em no máximo 1 ponto.

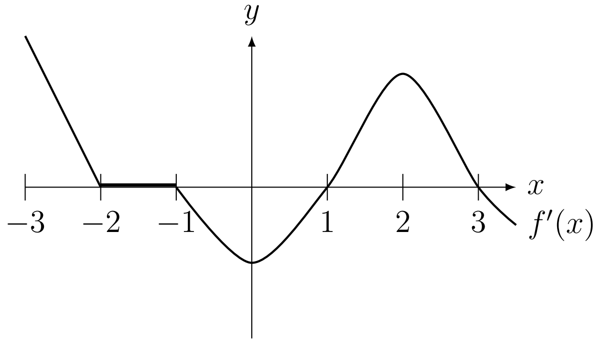
Lema 3.15 (Relação entre Continuidade e Injetividade) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo I. Então f é injetiva em I se, e somente se, f é crescente ou decrescente em I.*

Prova: A prova é delicada. Veja em [NC]. ∎

Corolário 3.16 (sinal da derivada e injetividade) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo I. Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é injetiva em I.*

Prova: Juntando o Corolário 3.13 da p.82 e o Lema 3.15, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ a função é injetiva em I pois será crescente ou decrescente em I. ∎

Exemplo 3.27 *Considere o gráfico de f' na figura abaixo. Determine onde a função f cresce, decresce ou é constante. Determine intervalos onde podemos garantir que f é injetiva.*



Solução: A função f cresce em $(-3,-2)$ e $(1,3)$. A função f decresce em $(-1,1)$. A função f é constante em $(-2,-1)$. Assim podemos garantir que f é injetiva em $(-3,-2)$, $(-1,1)$ e em $(1,3)$.

Pelo teste da reta horizontal, a função não é injetiva em $(1,3)$ por exemplo. Aplique o teste da reta horizontal neste gráfico. ■

Exemplo 3.28 *Sabendo que $f'(x) = (x^2+3)(x^2-9)(x+5)$, determine onde f é crescente e decrescente. Determine em quais intervalos f é injetiva.*

Solução: Temos que fazer a análise do sinal de $f'(x)$. Fazendo (x^2+3 não afeta o sinal, e pode ser ignorado) isto concluímos que:

(a) $f'(x) < 0$ se $x < -5$ ou $-3 < x < 3$. Assim f decresce nestes intervalos.

(b) $f'(x) > 0$ se $x > 3$ ou $-5 < x < -3$. Assim f cresce nestes intervalos.

A função f será injetiva, separadamente, em cada intervalo onde ela somente cresce ou somente decresce. Assim será injetiva em $(-\infty,-5)$, $(-5,-3)$, $(-3,3)$ e em $(3,\infty)$. ■

Exemplo 3.29 *Considere a equação $xe^x = b$. Prove que possui solução única para todo $b > -1/e$ (veja Exemplo 4.7 da p.95).*

Solução: Se $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (1+x)e^x$. Logo $f'(x) > 0$ para todo $x > -1$ (porque?). Por outro lado, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Assim, pelo TVI, a imagem do intervalo $(-1,\infty)$ por f é $(-1/e,\infty)$ (porque?). Assim dado $b > -1/e$ existe uma $c \in (-1,\infty)$ tal que $f(c) = b$, que é única pois f é crescente. ■

Exemplo 3.30 *Determine onde $f(x) = x^3$ é crescente/decrescente.*

Solução: Como $f'(x) = 3x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, garantimos que f é crescente para $x < 0$ e para $x > 0$. No entanto, pelo TVM não sabemos o que ocorre no 0. Assim, embora $f(x) = x^3$ seja crescente para todo $x \in \mathbb{R}$, o TVM garante apenas nestes intervalos separadamente. ■

Exemplo 3.31 *Prove que existe no máximo* ***uma única*** *função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $h'(x) = \operatorname{sen}(x^2+4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $h(0) = 1$.*

Solução: Suponha que exista outra g tal que $g'(x) = \operatorname{sen}(x^2+4)$ e $g(0) = 1$. Defina $f(x) = g(x) - h(x)$. Assim $f'(x) = g'(x) - h'(x) = \operatorname{sen}(x^2+4) - \operatorname{sen}(x^2+4) = 0$. Pelo TVM, como $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f é constante em $\mathbb{R}$. Como $f(0) = g(0) - h(0) = 1 - 1 = 0$, $f(x) = 0$ para todo x. Logo $g(x) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, provando que existe uma única função que resolve este problema. ■

Observação 3.15 *Este resultado é típico em Matemática: Não sabemos qual é a solução do problema, isto é, qual função h possui como derivada $\operatorname{sen}(x^2+4)$ mas sabemos que a solução é única. Provamos a* ***unicidade*** *do problema mas* ***não*** *garantimos a* ***existência*** *de solução e menos ainda sabemos como exibir uma solução. Para isto precisamos aprender a Teoria de Integração.*

Exemplo 3.32 *Suponha que os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$ se interceptam em $x = 4$ e em $x = 7$. Suponha que ambas são deriváveis, prove que e existe $c \in (4, 7)$ tal que os gráficos possuem tangentes paralelas em c.*

Solução: Defina $h(x) = f(x) - g(x)$. Como $h(4) = h(7) = 0$ (porque?), pelo Lema de Rolle existe $c \in (4, 7)$ tal que $h'(c) = 0$. Logo $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$ e portanto $f'(c) = g'(c)$, ou seja, as retas tangentes são paralelas em c. ■

3.8 Exercícios de Derivada

3.8.1 Exercícios de Fixação

Fix 3.1: Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x = -2$ sabendo que $f(-2) = 3$ e $f'(-2) = 3$.

Fix 3.2: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.

(a) Se f é contínua em $x = 3$, então f é derivável em $x = 3$.

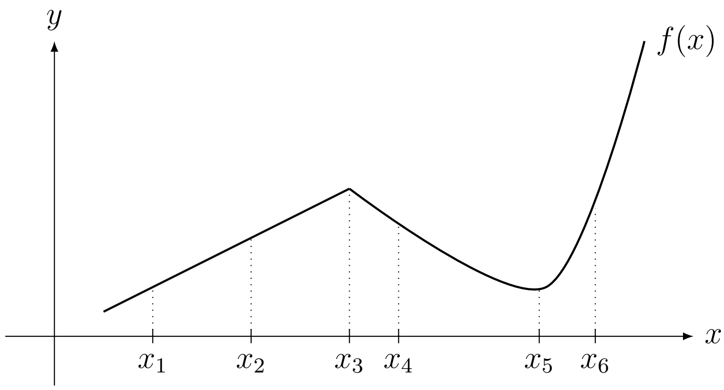
(b) Se $f(2) = g(2)$, então $f'(2) = g'(2)$.

(c) Se $f'(1) > 0$, então $f(1) > 0$.

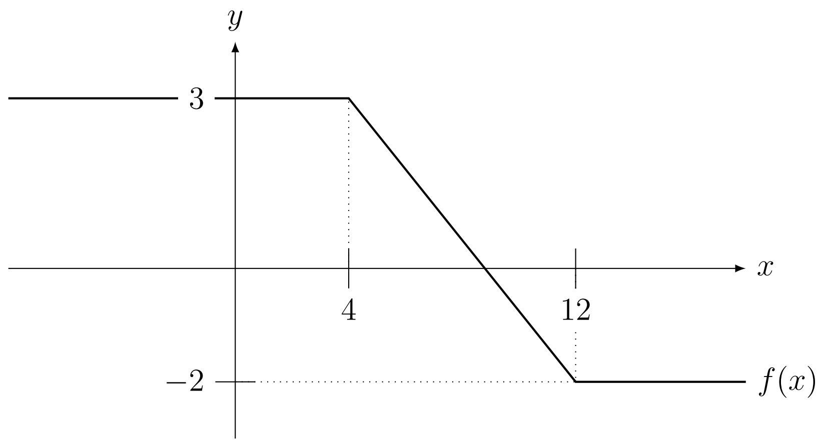
Fix 3.3: Considere o gráfico de f abaixo.

(a) se $f'(x_1) = 2$ determine $f'(x_2)$ e $f'(x_3)$.

(b) Coloque em ordem crescente $f'(x_2), f'(x_4), f'(x_5), f'(x_6)$.



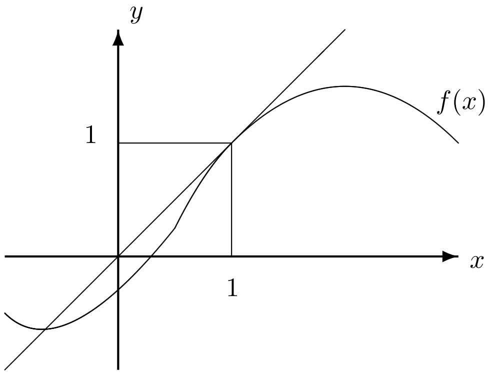
Fix 3.4: Dado o gráfico de f abaixo, faça o gráfico **exato** de f'.

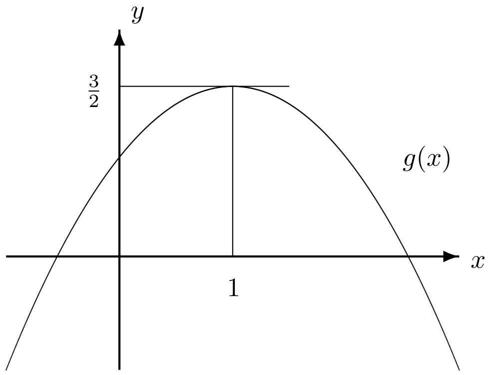


Fix 3.5: Se f e g são funções diferenciáveis tais que $f(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g(2) = -5$, $g'(2) = 2$, determine o valor de $h'(2)$ se: (a) $h(x) = f(x)g(x)$; (b) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Fix 3.6: Considere f e g duas funções cujos gráficos estão na figura abaixo. As retas que aparecem são tangentes ao gráfico. Determine o valor de $h'(1)$ se:

(a) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$; (b) $h(x) = 5f(x) - 3g(x)$.





Fix 3.7: Se um balonista joga um saco de areia de um balão a 500m de altura então o saco de areia estará numa altura (em metros) $h(t) = 500 - 16t^2$ após t segundos. Determine:

(a) sua velocidade em $t = 2$;

(b) em qual instante, com qual velocidade e aceleração o saco atingirá o solo.

Fix 3.8: Calcule a derivada em relação a x das funções:

(a) $e^x \log x$; (b) $\dfrac{\cos x}{x+5}$ (c) $\cos(x^3 + 1)$;

(d) $e^\pi + \log(\pi^2 + 1)$. (e) $\log(1 + \operatorname{sen} x)$; (f) $|x - 2|$;

Fix 3.9: Calcule: (a) $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$; (b) $\dfrac{d}{dk}(3k^2 - k^{-1})$; (c) $\dfrac{du}{dt}$ se $u = t \log t$;

(d) $\dfrac{dv}{ds}$ se $v = s^\pi$; (e) $\dfrac{dy}{dx}$ se $y = (\sqrt{3})^x$; (f) $\dfrac{d}{dt}(\log \pi)$.

Fix 3.10: Estude o Teorema do Valor Médio (Corolário 3.11 da p.82) e responda. Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $-4 \leq f'(x) \leq 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que:

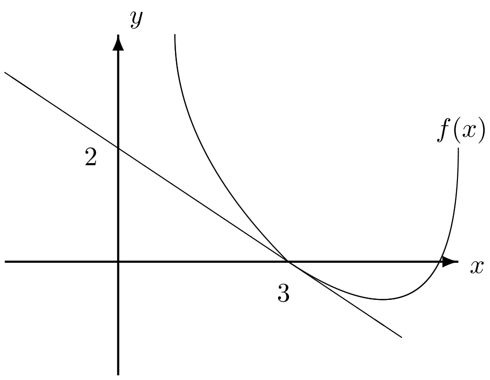
(a) $-16 \leq f(5) - f(1) \leq 12$; (b) $-4h \leq f(h) - f(0) \leq 3h$ para todo $h > 0$.

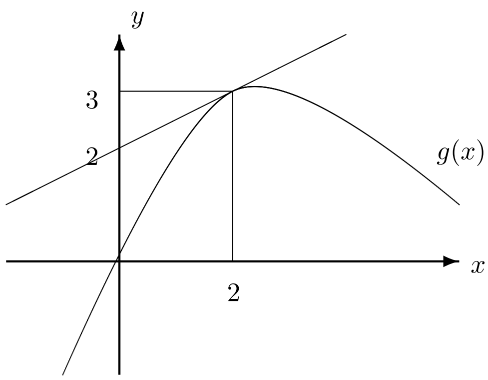
Fix 3.11: Um objeto cai do alto de um edifício de 100m e atinge o solo em 5 segundos. Aplique o Teorema do Valor Médio (TVM) e prove que em algum instante o objeto estava com velocidade (em módulo) igual a 20m/s.

Fix 3.12: Suponha que $f''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $f'(-3) = 0$ e $f(5) = \pi$, aplique uma consequência do Teorema do Valor Médio (TVM) duas vezes para concluir que $f(x) = \pi$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

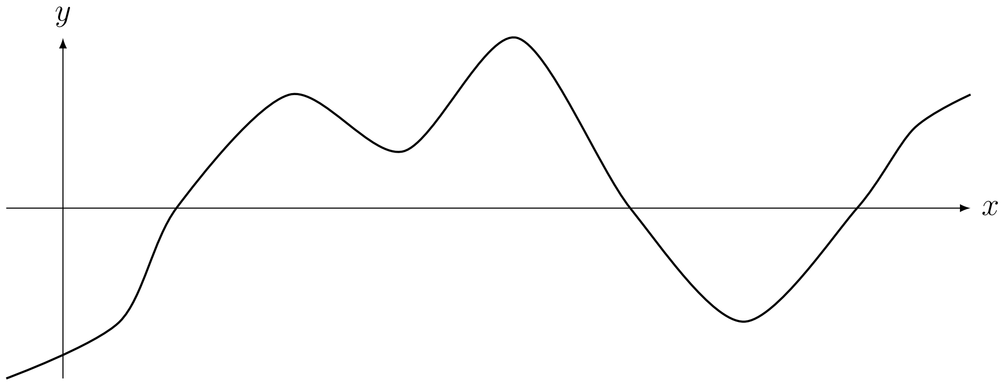
Fix 3.13: Considere f e g duas funções cujos gráficos estão na figura abaixo. As retas que aparecem são tangentes ao gráfico.

(a) Se $h(x) = f(g(x))$, determine $h'(2)$. (b) Se $k(y) = g^{-1}(y)$, determine $k'(3)$.





Fix 3.14: Considere o gráfico abaixo.



Se o gráfico representa $f(x)$ determine maiores intervalos (indique no gráfico) onde:
(a) f' é positiva e negativa; (b) f é injetiva (possui inversa).
Se o gráfico representa $f'(x)$ determine maiores intervalos (indique no gráfico) onde:
(c) f é crescente e decrescente; (d) f é injetiva (possui inversa).

Fix 3.15: Prove que. para $a > 0$, $\cos(\operatorname{arcsen}(x/a)) = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

3.8.2 Problemas

Prob 3.1: Calcule, pela definição (utilizando limite), a derivada de:
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (c) $f(x) = |x|(x-1)$; (d) $f(x) = |x|x$.

Prob 3.2: Determine $a, b \in \mathbb{R}$ se $f'(x)$ existe para todo x e $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1; \\ ax + b; & x \geq 1. \end{cases}$

Prob 3.3: Suponha que $|f(x)| \leq |x|^k$ com $k > 1$. Calcule pela definição $f'(0)$.
Dica: Veja o Exemplo 3.4 da p.67.

Prob 3.4: Para cada uma das funções abaixo, determine onde possui derivada e calcule a derivada nestes pontos.
(a) $g(x) = \begin{cases} 3; & x < 2; \\ -4; & x \geq 2; \end{cases}$ (b) $f(x) = |e^x - 1|$; (c) $h(x) = |(3-x)(x+1)|$.

Prob 3.5: Em cada um dos itens abaixo, $s(t)$ representa a posição de uma partícula se movendo em linha reta no instante t. Determine:
(i) A velocidade e aceleração da partícula no instante $t = 0$.
(ii) Os instantes em que a partícula está parada.
(a) $s(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$; (b) $s(t) = \operatorname{sen} t$.

Prob 3.6: Considere a função $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$. Determine **todos** os pontos do gráfico de f nos quais a reta tangente é: (a) horizontal; (b) paralela à reta $2y - 20x - 50 = 0$
(c) perpendicular à reta $4y + 2x - 10 = 0$.

Prob 3.7: Determine **todos** os pontos do gráfico de $y = f(x) = |x^2 - 1|(x + 1)$ onde a reta tangente é paralela ao eixo x

Prob 3.8: Determine condições sobre $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que a curva:
(a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + \pi$ tenha uma única reta tangente horizontal;
(b) $y = ax^2 + bx + c$ tenha $x + y = 1$ e $y = -1$ respectivamente como retas tangentes nos pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$.

Prob 3.9: Calcule as derivada (em relação a x) das funções:

(a) $(5x^2-3x+4)^{300}$; (b) $\operatorname{sen}\left(\sqrt[7]{\cos(x^2)+4}\right)$; (c) $\dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}$; (d) $\dfrac{\sqrt[3]{x+t}}{x^2+k}$;

(e) $\log(\operatorname{sen}(5e^x))\cdot x^4$; (f) $\arctan(\log(3x^2+1))$; (g) $e^{\operatorname{arcsen}(4-5x)}$.

Prob 3.10: Dado que $f(4)=3$, $f'(4)=-5$ e $g(x)=3\log(f(x)+x)$, determine $g'(4)$.

Prob 3.11: Considere $m_0, T_0, K, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule:

(a) $f'(x)$ se $f(x)=\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^2$; (b) $f'(t)$ se $f(t)=e^{Kt}\cos(at)$.

(c) $f'(\theta)$ se $f(\theta)=K\operatorname{sen}(a\theta^3+b)$; (d) $f'''(t)$ se $f(t)=m_0e^{(T_0-t)/K}$;

Prob 3.12: Determine a equação da reta tangente e da reta perpendicular ao gráfico de:

(a) $y=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ para $x=\sqrt{\pi/2}$; (b) $y=e^{\operatorname{sen}(-2x)}$ no ponto $(\pi,1)$.

Prob 3.13: Mostre que:

(a) $e^x \geq 1+x$ para $x\geq 0$.

(b) a equação $2x^3-15x^2+60x+4=0$ possui **exatamente uma** raiz real.

Prob 3.14: (Aplicações do Teorema do Valor Médio)

(a) Dois corredores iniciaram a corrida no mesmo instante e terminaram empatados. Prove que em algum instante durante a corrida ele têm a mesma velocidade.

(b) Considere f diferenciável com $f(0)=0$ e $f'(x)\leq 1$ para todo $x>0$. Mostre que $f(x)\leq x$ para todo $x>0$.

(c) Mostre que existe uma única $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciável tal que: $\begin{cases} h'(x)=h(x); \\ h(0)=1. \end{cases}$

Dica: Suponha que h_1 e h_2 são soluções. Defina $f(x)=\dfrac{h_1(x)}{h_2(x)}$, calcule $f'(x)$ e $f(0)$.

(d) Considere $f(x)=x^2e^x$ e $g(x)=e\sqrt{x}$. Prove que existe um $c\in(0,1)$ tal que as retas tangentes ao gráfico de f e de g são paralelas em $x=c$.

(e) Mostre, usando TVM, que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$.

Prob 3.15: Considere $f(x)=x^3+3x^2-3x+1$. Determine onde f é crescente e decrescente. Determine em quais intervalos f é injetiva.

Prob 3.16: Se f e g são funções diferenciáveis tais que $f'(2)=-1$, $f(2)=3$, $g(-1)=2$, $g'(-1)=6$, determine o valor de $h'(2)$ se: (a) $h(x)=f(g(-x/2))$; (b) $h(y)=g^{-1}(y)$.

Prob 3.17: Sabendo que a equação da reta tangente ao gráfico de $y=f(x)$ no ponto $(-1,3)$ passa no ponto $(0,6)$, determine $(f^{-1})'(3)$.

3.8.3 Extras

Ext 3.1: Se f e g possuem derivada e são tais que: $f(2)=3$, $f'(2)=-1$, $g(2)=-5$, $g'(2)=2$, determine: (a) $w'(2)$ se $w(x)=\dfrac{4f(x)}{g(x)}$; (b) $m'(0)$ se $m(x)=e^{5x}g(3x+2)$.

Ext 3.2: Calcule a derivada (em relação a x) das funções:

(a) $\operatorname{sen}(x\,e^x\log x)$; (b) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))$; (c) $3^{\arctan x}$; (d) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(e) $\operatorname{sen}(\cos x\operatorname{sen} x)$; (f) $\operatorname{sen}|1-x^2|$; (g) $e^{e^{x^4}}$; (h) $\log(\operatorname{sen}(2x))\sqrt{x^2+1}$.

Ext 3.3: Determine **todos** os pontos do gráfico de $y(x)=x^3+2x^2-4x+5$ nos quais a reta tangente: (a) é horizontal; (b) é paralela à reta $2y+8x-5=0$.

Ext 3.4: Determine $a, b \in \mathbb{R}$ se $f'(x)$ existe para todo x e $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b; & x \leq 1; \\ \dfrac{1}{x}; & x > 1. \end{cases}$

Ext 3.5: Sabendo que g é contínua em a e $f(x) = (x - a)g(x)$, determine $f'(a)$.

Ext 3.6: Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado.
(a) $y = x^2 \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi, 0)$. (b) $y = \log(\sqrt{x} - 2)$, no ponto $((e+2)^2, 1)$.

Ext 3.7: Determine:
(a) os pontos da curva $y = \dfrac{1}{x}$ nos quais a reta tangente é paralela à reta $2x + 3y = 0$;
(b) a(s) reta(s) tangente(s) ao gráfico de $y = e^{2x}$ que contem(êm) o ponto $(5/2,\ 0)$.

Ext 3.8: (Função crescente/decrescente) Mostre que:
(a) $x > \log x$ para $x > 1$;
(b) a equação $-2x^{13} - 6x^5 - x + 10 = 0$ possui **exatamente uma** raiz real.

Ext 3.9: (Aplicações do Teorema do Valor Médio)
(a) Suponha que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes reais distintas. Mostre que f' tem, no mínimo, uma raiz real.
(b) Considere uma função f diferenciável com $f'(x) \leq 4$ para todo $x \in (2, 5)$. Prove que $f(5) - f(2) \leq 12$.
(c) Mostre que existe uma única g função derivável em $\mathbb{R}$ tal que:

$$g''(x) = \cos(2x + \log(x^4 + 1)), \quad g'(2) = -1 \quad \text{e} \quad g(3) = 5.$$

Dica: Suponha que g_1 e g_2 são soluções. Defina $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$, calcule $f''(x)$ e $f'(2)$. Conclua que $f'(x) = \cdots$. Depois calcule $f(3)$.

Ext 3.10: Considere $f(x) = \begin{cases} |x|^k; & x \in \mathbb{Q}; \\ 0; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ com $k > 1$. Calcule pela definição $f'(0)$.
Dica: Veja o Exemplo 3.4 da p.67.

Ext 3.11: Determine uma fórmula para a derivada $(fgh)'$.

Ext 3.12: Seja $f(x) = \cos(x^5 + 2x + \pi/2)$. Sabendo que $f(0) = 0$, e que $g(y)$ é a inversa de f perto de $y = 0$, determine $g'(0)$.

Ext 3.13:
(a) Determine a derivada de $\operatorname{arcsenh}$ utilizando o Teorema de Função inversa e identidades hiperbólicas.
(b) Prove que $\operatorname{arcsenh}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Ext 3.14: Deduza a fórmula da derivada de $\sqrt[n]{x}$ utilizando somente a fórmula da derivada de x^n: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

3.8.4 $\star$Problemas (Derivação Implícita)

Prob 3.1: Seja $y = f(x)$ definida implicitamente em cada item abaixo. Determine a equação da reta tangente no ponto indicado:
(a) $y^3 + x^2 y = 130$ em $(1, 5)$; (b) $x^2 = \dfrac{2x - y + e}{x + e^{y^2}}$ em $(1, 1)$.

Prob 3.2: Considere a curva $x^3 + y^3 = 3xy$. Determine os pontos onde a reta tangente é vertical e onde é horizontal.

Prob 3.3: Seja $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2 - y^2 + \sqrt{xy} = 2$ próximo de $(2, 2)$.
(a) Calcule $f'(2)$.

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(2,2)$.

(c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x)/x$ no ponto $(2,1)$.

Prob 3.4: Para cada uma das funções $y = f(x)$ definidas implicitamente perto de $(x,y) = (a,b)$ determine ([Co, p.485]):

- se a função é crescente ou decrescente perto de $x = a$;
- $f'(a)$;
- $f''(a)$.

(a) $x^5 + xy + y^5 = 3$ em $(a,b) = (1,1)$.

(b) $x\cos(xy) = 0$ em $(a,b) = (1,\pi/2)$

Prob 3.5: Encontre máximo e mínimo de $y = f(x)$ definido por $x^4 - xy + y^4 = 253$.

Prob 3.6: Determine $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $(1,1)$ pertence a curva definida implicitamente por $x^2y + ay^2 = b$ e que a reta tangente nesse ponto é $4x + 3y = 7$.

Prob 3.7: Determine a reta tangente à curva $x^y = y^x$ no ponto $(k_0,\ k_0)$ com $k_0 \neq e$.

3.8.5 Desafios

Des 3.1: Calcule pela definição a derivada no ponto $x = 0$ de:

(a) $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(1/x); & x \neq 0; \\ 0; & x = 0; \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}(1/x); & x \neq 0; \\ 0; & x = 0. \end{cases}$

Des 3.2: Calcule pela definição derivada de $h(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dica: Binômio de Newton.

Des 3.3: Considere $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$. Determine uma função g tal que, para todo $x > 0$, a reta tangente ao gráfico de f em x seja paralela à reta normal ao gráfico de g em x.

Des 3.4: Considere $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$. Determine dois pontos distintos do gráfico de $y = f(x)$ com a mesma reta tangente. Prove que a solução é única.

Des 3.5: Considere f uma função polinomial de grau 2. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos x_1 e x_2 é paralela à reta tangente no ponto médio $\frac{x_1 + x_2}{2}$ quaisquer que sejam x_1 e x_2.

Des 3.6: Leia Lema 3.15 da p.83 e dê exemplo de f injetiva em $\mathbb{R}$ que não é crescente.

Des 3.7: Prove (veja outra prova no Desafio 2.5 da p.63) utilizando a derivada de seno, cosseno e exponencial, a relação de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Dica: Defina $f(\theta) = \dfrac{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{e^{i\theta}}$ e derive tratando $i \in \mathbb{C}$ como uma constante.

Des 3.8: Prove que $\log\left[\dfrac{x+i}{x-i}\right] = i\pi + 2i\arctan x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dica: Aplique TVM.

Des 3.9: Prove que existe um único par de funções $s(x)$ e $c(x)$ deriváveis para todo $x \in \mathbb{R}$ tais que $\begin{cases} s'(x) = c(x); \\ s(0) = 0; \end{cases}$ e $\begin{cases} c'(x) = -s(x); \\ c(0) = 1. \end{cases}$

Dica: Suponha que existam s_1, c_1 e s_2, c_2. Defina $f = (s_1 - s_2)^2 + (c_1 - c_2)^2$. Mostre que $f'(x) = 0$ e $f(0) = 0$. Aplique o TVM.

Des 3.10: Considere $g(y) = y - \varepsilon\,\mathrm{sen}(y)$.

(a) prove que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, se $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, então g será uma função injetiva em $\mathbb{R}$. Conclua que neste caso a função possui inversa.

(b) Considere $f = g^{-1}$ sua função inversa. Determine $f'(0)$.

Des 3.11: Seja $f_t : (0,1) \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 1/q^t$ se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ fração irredutível não nula e $f(x) = 0$ caso contrário. Prove que:

(a) se $t \leq 2$ então f_t não é diferenciável em ponto algum;

(b) se $t > 2$ então f_t é diferenciável nos irracionais.

Des 3.12: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável Prove que:

(a) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$. Este é método da diferença centrada utilizado em análise numérica.

(b) $f''(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

Des 3.13: Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determine condições em a, b, c tais que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma bijeção com inversa contínua.

Des 3.14: Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é α-Hölder[4] se existem $\alpha, M > 0$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que neste caso:

(a) f é contínua; (b) se $\alpha > 1$ f é derivável. Conclua que f é constante.

Des 3.15: Prove (por indução) a fórmula de Leibniz

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(n-i)} \cdot g^{(i)},$$

onde $\dbinom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ e a notação $f^{(m)}$ significa derivar a função f m-vezes.

[4]Otto Ludwig Hölder: ⋆1859 Stuttgart, Alemanha — †1937 Leipzig, Alemanha.

Capítulo 4

Aplicações da Derivada

Objetivos: Apresentar a técnica de L'Hospital. Aplicar derivadas nos problemas de Otimização (máximo e o mínimo de funções) e Taxas Relacionadas. Aproximar função localmente utilizando a reta tangente e introduzir o polinômio de Taylor. Apresentar a segunda parte de Esboço de Gráficos, que foi iniciado no capítulo de limites, introduzindo o conceito de concavidade e sua relação com a derivada segunda.

4.1 L'Hospital e Hierarquia dos Infinitos

Apresentamos a **regra de L'Hospital** (a pronúncia é *lôpital*, pois o s é mudo), que permite calcular limites que seriam impossíveis ou difíceis utilizando outras técnicas. Uma aplicação importante é introduzir uma hierarquia entre as funções que vão para infinito quando $x \to \infty$: quem vai mais rápido?

Teorema 4.1 (regra de L'Hospital[1]) *Suponha que* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$.
Se $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, então* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Prova: Como $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $g'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$, substituindo isto em $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, cancelando os h's obtemos que $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}$.
Trocando ordem dos limites (podemos fazer isso?) e como $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$,

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{h\to 0}\lim_{x\to c} \frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

■

Observação 4.1 *O resultado também é verdade se:*

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$; *ou*
- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$; *ou*
- $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$; *ou*
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} g(x) = \infty$.

Podemos substituir c por c^+ ou c^- e trocar ∞ por $-\infty$. Veja provas em [NC].

[1]Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital: ⋆1661 Paris, França — †1704 Paris, França.

No exemplo abaixo obtemos de modo mais fácil limites que já conhecíamos por outras técnicas. Isto faz com que os alunos na primeira prova sempre perguntem: "posso utilizar L'Hospital para calcular os limites?".

Compare, e refaça com LH, os limites dos exemplos da p.35– p.38.

Exemplo 4.1 *Calcule:* (a) $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; (b) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{b/x}$.

Solução: (a) Por LH $\lim_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to 8}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{12}$.

(b) Seja $y(x)=(1+ax)^{b/x}$. Queremos calcular $\lim_{x\to 0} y(x)$. Como $\log y(x)=b\dfrac{\log(1+ax)}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\log y(x)=\lim_{x\to 0} b\frac{\log(1+ax)}{x}=\text{ (por LH) }\lim_{x\to 0} b\frac{a}{1+ax}=ab.$$

Assim, $\lim_{x\to 0}\log y(x)=ab$. Tomando exponencial dos dois lados, $\lim_{x\to 0} y(x)=e^{ab}$. ∎

Observação 4.2 *Nem sempre L'Hospital funciona:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\textit{ (por LH) }\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\textit{ (por LH) }\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\textit{!?!?!?}$$

Podemos calcular colocando em evidência e^x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

Exemplo 4.2 *Calcule:* (a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$; (b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}$; (c) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{\log x}$; (d) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^x}$.

Solução: (a) Aplicando L'Hospital (L.H.) obtemos: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$.

(b) Aplicando L.H. obtemos: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(c) Aplicando L.H. obtemos: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1/x}\lim_{x\to\infty} xe^x=\infty$.

(d) Não precisamos de LH pois é igual a $\lim_{x\to\infty}(e/x)^x$. Como $(e/x)\to 0$, limite$=0$. ∎

Concluímos que $\log x<x<\exp x<x^x$ para x grande. Juntando com o que já sabíamos do capítulo de limites, estabelecemos, para x grande, a **Hierarquia do Infinito**:

$$\log x<x^{1/n}=\sqrt[n]{x}<\sqrt{x}<x<x^2<x^n<\exp x<x^x \text{ para } n>2.$$

Esta comparação é importante em computação na comparação do número de operações que um algoritmo executa.

Exemplo 4.3 *Quem cresce mais rápido: x^2 ou $x\log x$?*

Solução: Utilizando L.H. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x\log x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{1/x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$. Portanto x^2 vai mais rápido para infinito que $x\log x$ ∎

Exemplo 4.4 *Calcule:* *(a)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$ *(b)* $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

Solução: (a) Aplicando L.H. duas vezes: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(b) L.H. três vezes: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{6x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$. ■

Observação 4.3 *Quando limite é indeterminação $0\cdot\pm\infty$ ou $\infty-\infty$ ou 1^∞ ou 0^0 temos que reescrever o limite para obter $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. Veja os exemplos abaixo.*

Exemplo 4.5 *Determine:*
(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}$; *(b)* $\lim_{x\to 0^+} x\log x$; *(c)* $\lim_{x\to 0^+} x^x$; *(d)* $\lim_{h\to 0}(\cos(Kh))^{T/h^2}$.

Solução: Podemos aplicar L'Hospital após transformar a expressão em um quociente.

(a) Operando obtemos $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}$. Aplicando $L.H.$ duas vezes obtemos $1/2$.

(b) Como $x\log x=\dfrac{\log x}{1/x}$, por LH $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$. Note (tente fazer!) que se fizermos $\dfrac{x}{1/\log x}$ e aplicarmos L'Hospital não chegaremos a resposta. Reflita sobre isso.

(c) Como $x^x=e^{x\log x}$, pela letra (b) obtemos que o limite será $e^0=1$.

(d) Defina $z(h)=(\cos(Kh))^{T/h^2}$. Como $\log(z(h))=T/h^2\log\cos(Kh)$, podemos aplicar LH: $\log(z(h))\to-\dfrac{TK}{2}\dfrac{\operatorname{sen}(Kh)}{h\cos(Kh)}$. Pelo limite fundamental (ou LH), $\log(z(h))\to -TK^2/2$. Tomando exponencial dos dois lados obtemos que $z(h)\to e^{-TK^2/2}$. ■

Observação 4.4 *Quem cresce mais rápido: $n!$ (fatorial), e^n ou n^n?*
A resposta é: $e^n<n!<n^n$ para n grande.
Estudamos o comportamento de $n!$ (fatorial) e a fórmula de Stirling no Desafio 1.10 da p.44), que permite calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{10}}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{e^n}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

Exemplo 4.6 *(em computação) O número de operações que um algoritmo realiza depende do tamanho n da entrada. Por exemplo, um algoritmo de ordenação depende do número n de objetos que serão ordenados. Se um algoritmo realiza $\sqrt{n}$ operações, outro e^n operações, outro $\log n$ operações e outro $n!$ operações, qual deles é o mais eficiente?*

Solução: Queremos saber para n grande qual executará com menor número de operações. Pela **hierarquia do infinito** que estabelecemos, $\log n<\sqrt{n}<e^n<n!$. Portanto o algoritmo mais eficiente é o que executa com $\log n$ operações. ■

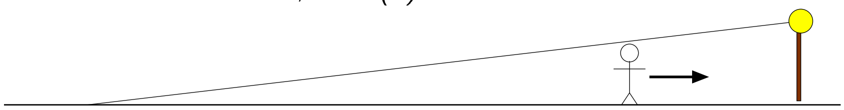
Exemplo 4.7 *Considere a equação $xe^x=b$. Determine maior intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$ tal que para todo $b\in I$ a equação possua exatamente 2 soluções distintas.*

Solução: Veja no Exemplo 3.29 da p.84 que $f(x)=xe^x$ é crescente para $x>-1$ e decrescente para $x<-1$. Por L'Hospital (verifique) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. Como a função decresce em $(-\infty,-1)$, $f(-1)=-1/e$ e "$f(-\infty)=0$" concluímos que a imagem do intervalo $(-\infty,-1)$ por f é $(-1/e,0)$. Como já vimos no Exemplo 3.29 da p.84 a imagem de $(-1,\infty)$ é $(-1/e,\infty)$. Assim se $b\in I=(-1/e,0)$ a equação possui duas soluções: $x_1\in(-\infty,-1)$ e $x_2\in(-1,\infty)$. Por f ser crescente, são somente estas as 2 soluções. ■

4.2 ⋆Taxas Relacionadas[1]

Taxas relacionadas são problemas onde quantidades (tipicamente) dependentes do tempo são relacionadas por equações. Trata-se de aplicação da regra da cadeia. Apresentamos através de exemplos.

Exemplo 4.8 *Um homem de altura H está caminhando em direção a um poste de iluminação com altura P. Supomos que o poste é mais alto que o homem. Num certo instante ele se move com velocidade V. Determine com que velocidade se move, neste instante:*
(a) a extremidade de sua sombra; *(b) o tamanho da sua sombra.*

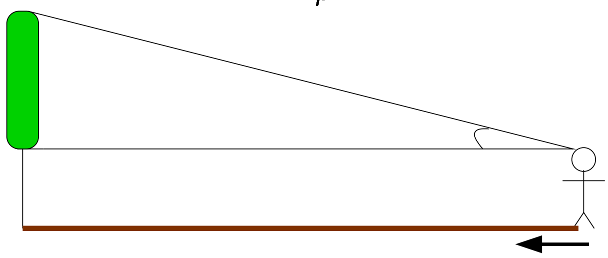


Solução: Seja x a distância entre o homem e a base do poste. Seja $S(x)$ a distância da extremidade de sua sombra até a base do poste. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{H}{P} = \dfrac{S(x)-x}{S(x)}$. Tiramos que $S(x) = x\dfrac{P}{P-H}$ e $S'(x) = \dfrac{P}{P-H}$. Por hipótese $P > H$. Sabemos que x depende do tempo: $x(t)$ e que $x'(0) = V$.

(a) Seja $g(t) = S(x(t))$ a distância da extremidade de sua sombra em função do tempo, pela regra da cadeia, $g'(t) = S'(x(t))x'(t) = \dfrac{P}{P-H}x'(t)$. Logo a velocidade da extremidade da sombra é $g'(0) = \dfrac{P}{P-H}x'(0) = \dfrac{VP}{P-H}$.

(b) Seja $f(t) = S(x(t)) - x(t)$ o tamanho da sombra (a distância entre a extremidade da sombra e o homem. Assim $f'(t) = S'(x(t))x'(t) - x'(t)$. Logo $f'(0) = \dfrac{VP}{P-H} - V = \dfrac{HV}{P-H}$. ■

Exemplo 4.9 *Um quadro de 1m de altura é colocado em uma parede de tal forma que sua base esteja no mesmo nível dos olhos de um observador que está se aproximando da parede a uma velocidade de 3m/s. Com que velocidade a medida do ângulo de visão do quadro estará variando quando o observador estiver a 2m da parede?*



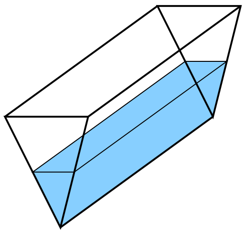
Solução: Seja $d(t)$ a distância entre a pessoa e a parede em função do tempo. Seja $\theta(t)$ o ângulo de visão do quadro. Como $\tan(\theta(t)) = \dfrac{1}{d(t)}$, $\dfrac{\theta'(t)}{\cos^2\theta(t)} = -\dfrac{d'(t)}{d^2(t)}$. Por Pitágoras, a hipotenusa é $\sqrt{5}$ quando os catetos são 1 e 2. Assim, $\cos(\theta(t_0)) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Substituindo ($d(t_0) = 2$, $d'(t_0) = -3$ pois a distância está diminuindo) obtemos que $\theta'(t_0) = \dfrac{3}{5}$rad/s. ■

[1] A leitura desta seção é opcional.

Exemplo 4.10 *Um triângulo variável ABC é formado por lados com tamanho fixo $AB = 3$ e $AC = 4$ e com lado de tamanho variável BC. Se no instante que $BC = 5$ o lado BC varia com uma taxa de $3cm/s$, determine a taxa de variação do ângulo interno no vértice A do triângulo.*

Solução: Pela lei dos cossenos, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2ABAC\cos A$. No instante do enunciado, A é um ângulo reto (triangulo retângulo clássico 3,4,5). Derivando implicitamente, $2BCBC' = 2ABAC(\operatorname{sen} A)A'$. Substituindo, $2(5)(3) = 2(3)(4)(1)A'$, logo $A' = 5/4$. ■

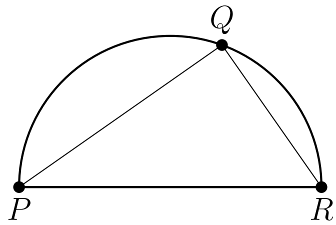
Exemplo 4.11 *Uma calha horizontal possui 100cm de comprimento e tem como seção transversal um triângulo isósceles de 8cm de base e 10cm de altura conforme mostra a figura abaixo.*



Devido à chuva, a água em seu interior está se elevando. Quão rápido o volume de água em seu interior estará aumentando no instante em que o nível da água for de 5cm e estiver aumentando a uma razão de $1/2$ cm/min?

Solução: Seja h o nível de água e b a base do triângulo contendo água. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{h}{10} = \dfrac{b}{8}$. Assim, quando o nível $h = 5$ a base $b = 4$. Suponha que $h' = 1/2$ (velocidade de subida do nível de água). Como $\dfrac{h'(t)}{10} = \dfrac{b'(t)}{8}$, $b'(t) = 2/5$. Como o volume $V(t) = 50h(t)b(t)$ (1/2 base vezes altura do triângulo vezes 100), $V' = 50(hb' + h'b) = 50(5(2/5) + 1/2(4)) = 200cm^3/min$. ■

Exemplo 4.12 *Um triângulo PQR está inscrito num semicírculo de diâmetro 15cm conforme a figura abaixo. Sabendo que o vértice Q varia sobre o semicírculo e que o lado QR aumenta à razão de 1 cm/s, determine a taxa com que a área do triângulo varia no instante em que o lado QR mede 12 cm.*



Solução: O triângulo PQR é retângulo. Chamando de x o lado QR e de y o lado PQ, temos por Pitágoras que $x^2 + y^2 = 15^2$. Quando $QR = x = 12$, $y = 9$. Derivando (e simplificando) obtemos que $xx' + yy' = 0$. No instante em que $x' = 1$, $x = 12$ e $y = 9$, obtemos que $y' = -4/3$. Como a área do triângulo é $A = xy/2$, a sua variação $A' = \dfrac{1}{2}(x'y + xy')$. Logo neste mesmo instante, $A' = \dfrac{-7}{2}cm^2/s$.

Outra forma (mais complicada) sem utilizar taxas relacionadas: substituir $y = \sqrt{15^2 - x^2}$ na fórmula da área $A = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x}{2}\sqrt{15^2 - x^2}$. Assim, $A' = \dfrac{1}{2}(x'\sqrt{15^2 - x^2} + x\dfrac{-2xx'}{2\sqrt{15^2 - x^2}})$. Resubstituindo y obtemos que: $A' = \dfrac{1}{2}(x'y - x^2\dfrac{x'}{y}) = \dfrac{1}{2}(1(9) - 12^2\dfrac{1}{9}) = -7/2$. ■

4.3 Aproximando Função Localmente

Uma ideia **importante** do Cálculo é aproximar localmente uma função por um **polinômio** utilizando suas derivadas $(f', f'', f''', \dots)$ em um ponto.

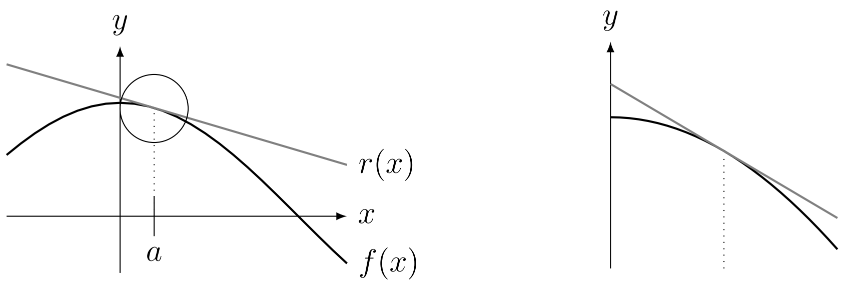
A primeira ideia é que o gráfico de uma função **localmente**, perto de um ponto a, fica parecido com sua reta tangente no ponto a pois, pela definição de derivada, para $x \approx a$ (x próximo de a),

$$f'(a) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Rearrumando obtemos que,

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Assim, para x próximo de a, $f(x)$ está próximo da reta tangente em a: $r(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Esta ideia esta ilustrada no gráfico abaixo. Incluímos ao lado o zoom da região indicada por um círculo. Veja como perto de a o gráfico da função f se confunde com o gráfico da reta tangente.



Concluímos que $f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a) = r(x)$ para $x \approx a$.

Observação 4.5 *Dizemos que a reta tangente* ***oscula*** *(= "beija") o gráfico no ponto de tangência. Veja o Desafio 4.10 da p.131 sobre o círculo osculatório, cujo inverso do raio chamamos de curvatura.*

Exemplo 4.13 *(problema anedótico do Calculo) Aproxime* $\sqrt[7]{1.1}$ *e* $\sqrt[7]{1.2}$ *numa ilha deserta (sem utilizar a calculadora, fazendo somente multiplicação, divisão, soma, subtração).*

Solução: Aproximamos a função $f(x) = \sqrt[7]{x}$ perto de $a = 1$ pela reta tangente. Como $f'(x) = 1/(7\sqrt[7]{x^6})$, podemos aproximar $f(x) \approx f(1) + (x - 1)f'(1)$. Substituindo obtemos que $\sqrt[7]{x} \approx \sqrt[7]{1} + (x - 1)/(7\sqrt[7]{1^6}) = 1 + (x - 1)/7$ para $x \approx 1$. Neste caso obtemos que $\sqrt[7]{1.1} \approx 1 + (1.1 - 1)/7 = 1.01428\dots$ O valor real é $\sqrt[7]{1.1} = 1.013708856\dots$! Do mesmo modo, $\sqrt[7]{1.2} = 1.026388096\dots \approx 1 + (1.2 - 1)/7 = 1.028571429$. ■

Exemplo 4.14 *Aproxime:* *(a)* $\sqrt{13}$; *(b)* $\operatorname{sen}(-0.1)$; *(c)* $\log(1.2)$; *(d)* $e^{0.2}$.

Solução: (a) Como a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{x} \approx \sqrt{c} + (x - c)/(2\sqrt{c})$. Temos duas opções: tomar $a = 9$ ou $a = 16$. Assim $\sqrt{13} \approx \sqrt{9} + (13 - 9)/(2\sqrt{9}) = 11/3 = 3.666\dots$ ou $\sqrt{13} \approx \sqrt{16} + (13 - 16)/(2\sqrt{16}) = 29/8 = 3.625$. O valor real é $\sqrt{13} = 3.605551275\dots$.

(b) Como a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $f'(x) = \cos x$, $\operatorname{sen}(x) \approx \operatorname{sen} 0 + (x - 0)\cos 0 = x$. Ou seja, para x pequeno, $\operatorname{sen} x \approx x$ (isto comprova o limite fundamental $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$!). Assim, $\operatorname{sen}(-0.1) \approx -0.1$ (o valor real é $-0.099833417\dots$).

(c) Como a derivada de $f(x) = \log x$ é $f'(x) = 1/x$, $\log(x) \approx \log 1 + (x - 1)/1 \approx x - 1$. Assim, $\log(1.2) \approx (1.2 - 1) = 0.2$ (o valor real é $0.182321557\dots$).

(d) Como a derivada de $f(x) = e^x$ é $f'(x) = e^x$, $e^x \approx e^0 + (x-0)e^0 \approx 1 + x$. Assim, $e^{0.2} \approx 1.2$ (o valor real é $1.221402758\ldots$). ■

Esta ideia de aproximar pela reta tangente pode ser generalizada. Uma reta é o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau. Podemos aproximar por uma função polinomial do segundo grau (uma parábola). Portanto levantamos a seguinte questão:

Qual a parábola que melhor aproxima uma função localmente?

Para responder a pergunta, a reta tangente e a função possuem a mesma derivada no ponto de aproximação. $f(x) \approx r(x) = c_0 + c_1(x-a)$ e $r(a) = f(a) = c_0$ e $r'(a) = f'(a) = c_1$.

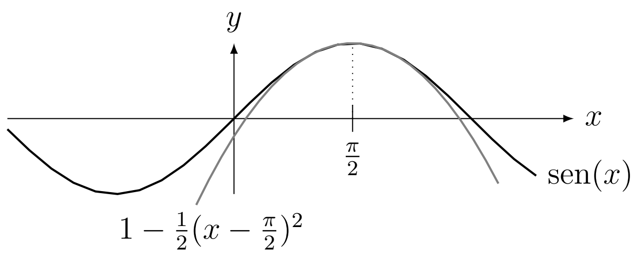
Para a parábola queremos que não somente a derivada primeira seja a mesma como a derivada segunda. Assim queremos que $f(x) \approx r(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$ e $r(a) = f(a) = c_0$, $r'(a) = f'(a) = c_1$, $r''(a) = f''(a) = 2c_2$.

Concluímos que

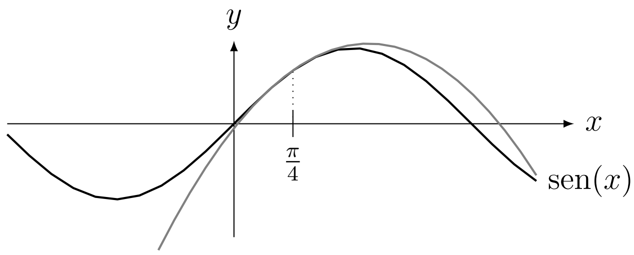
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \text{ para } x \approx a. \tag{4.1}$$

Exemplo 4.15 *Aproxime* $\operatorname{sen}(x)$ *por uma parábola perto de:* *(a)* $a = \frac{\pi}{2}$. *(b)* $a = \frac{\pi}{4}$.

Solução: (a) $\operatorname{sen}(x) \approx \operatorname{sen}(\pi/2) + \cos(\pi/2)(x-a) + \dfrac{-\operatorname{sen}(\pi/2)}{2}(x-a)^2 = 1 - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$. No gráfico abaixo a função e a parábola. Longe de $x = \frac{\pi}{2}$ a parábola se distancia do gráfico.



(b) $\operatorname{sen}(x) \approx \operatorname{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4)(x-a) + \dfrac{-\operatorname{sen}(\pi/4)}{2}(x-a)^2$. Colocando $\frac{\sqrt{2}}{2}$ em evidência obtemos: $\operatorname{sen}(x) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + (x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2)$. No gráfico abaixo a função e a parábola. Longe de $x = \frac{\pi}{4}$ a parábola se distancia do gráfico.



■

Esta ideia é generalizada pelo polinômio de Taylor.

Definição 4.2 (Polinômio de Taylor[2]) *de uma função* f *em* $x = a$ *é um polinômio* p *de grau* n *tal que* $p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$, $p''(a) = f''(a)$, $\ldots$, $p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Veja na internet ou tente provar a fórmula abaixo:

[2] Brook Taylor: ⋆1685 Edmonton, Inglaterra — †1731 Londres, Inglaterra.

Fixe $h = x - a$. Então o **polinômio de Taylor** que aproxima f perto de a é:

$$f(x) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f''''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Definição 4.3 (Série de Taylor) *de uma função f em $x = a$ é a série (soma infinita)*

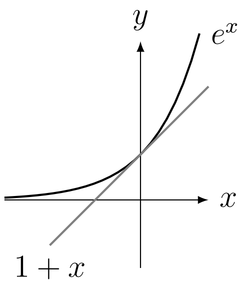
$$f(x) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

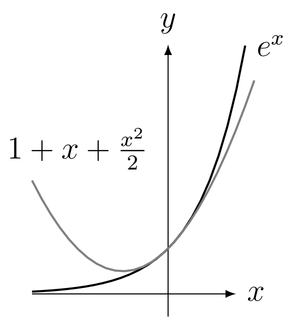
Exemplo 4.16 *Determine o polinômio de Taylor de grau n que aproxima e^x em $a = 0$.*

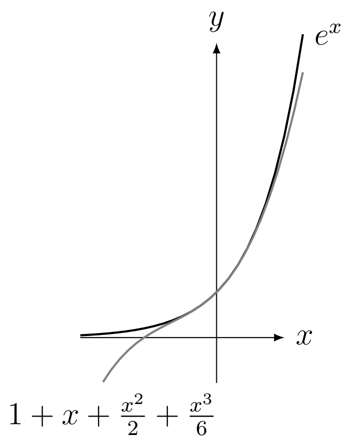
Solução: Como a derivada de ordem qualquer de $f(x) = e^x$ é e^x, e $e^0 = 1$,

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Na sequência de figuras abaixo mostramos a aproximação por grau 1 (reta), grau 2 (parábola) e grau 3. Note como elas vão aproximando cada vez melhor a exponencial para x próximo de zero.







$\blacksquare$

Determine (veja exercício Extra 4.3 da p.124) os polinômios de Taylor abaixo, utilizados pelas calculadoras científicas para calcular estas funções. Bem mais difícil é obter a expansão do arco-tangente (ver Desafio 4.3 da p.130). Aprecie a beleza das fórmulas. Compare as aproximações com a função original utilizando um software que esboce gráficos.

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \quad \text{e} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

$$\operatorname{senh} x \approx x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \quad \text{e} \quad \cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}.$$

$$\log(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

$$\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

4.4 Máximo e Mínimo

4.4.1 Máximo e Mínimo Local

Um ponto x_0 é de máximo local de f se $f(x_0)$ é o máximo da função numa vizinhança J de x_0 (Definição 1.4 da p.2), isto é, num intervalo aberto suficientemente pequeno J contendo x_0. O mínimo local é um conceito análogo. Informalmente, se o gráfico de uma função representa uma cadeia de montanhas, máximos e mínimos locais são os pontos no alto do morro e no fundo do vale.

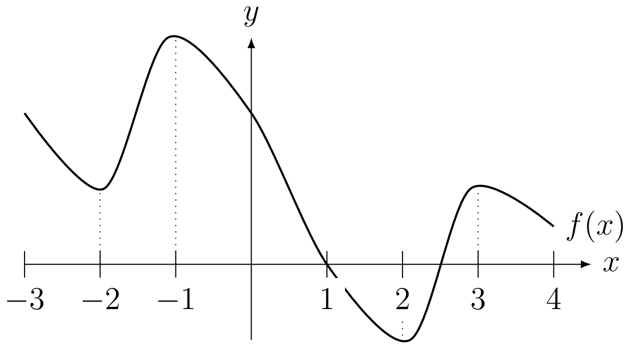
Definição 4.4 (max/min local) *Dizemos que x_0 é um*

(a) **ponto de máximo local** *de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$;*

(b) **ponto de mínimo local** *de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

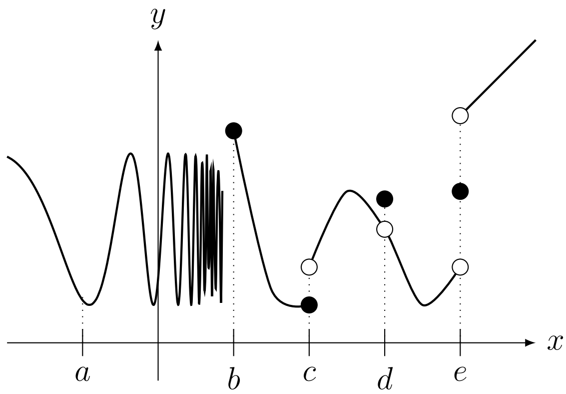
(c) **extremo local** *de f se x_0 é ponto de máximo ou mínimo local de f.*

Exemplo 4.17 *Considere a função esboçada na figura abaixo. Determine os pontos de máximo ou mínimo local.*



Solução: Máximos locais em $x = -1$ e $x = 3$. Mínimos locais em $x = -2$ e $x = 2$. ■

Exemplo 4.18 *Considere a função esboçada na figura abaixo. Determine se é máximo ou mínimo local os pontos $x = a, b, c, d, e$.*



Solução: Máximos locais: b e d, mínimo local: c, nem max nem min locais: a e e. ■

Exemplo 4.19 *Determine se $x_0 = 0$ é (ou não é) máximo ou mínimo local das seguintes funções:*

(a) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ 100, & x = 0; \end{cases}$ *(b)* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ 1/2, & x = 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = -\pi$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

Solução: (a) é mínimo local mas não é máximo local pois se $|x| < 1/10$, então $x^2 < 1/100$ e portanto $1/x^2 = f(x) > 100 = f(0)$. (b) não é máximo nem mínimo local; (ver gráfico no Exemplo 1.9 da p.10). (c) é máximo local **e** mínimo local (todo ponto onde a função é localmente constante é de máximo e mínimo local). ∎

Exemplo 4.20 *Determine **todos** os máximos e mínimos locais da função $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (ver gráfico no Exemplo 1.11 da p.11).*

Solução: Se $x \notin \mathbb{Z}$, numa vizinhança de x a função é constante. Assim todos os pontos de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ são de máximo e mínimo local. Nos pontos $x \in \mathbb{Z}$ (veja o gráfico) os pontos são de máximo local mas não são de mínimo local. Em resumo, máximo local: todos os pontos de $\mathbb{R}$, mínimo local, $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. ∎

O próximo Teorema caracteriza os pontos de máximo ou mínimo locais por meio da derivada.

Teorema 4.5 (de Fermat[3] ou dos extremos locais) *Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ possua um máximo ou mínimo local $x_0 \in I$ um intervalo aberto. Se f é derivável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

Prova: Seja $L = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Calculamos os limites laterais, que são iguais a L.

Suponhamos que x_0 é um ponto de máximo local de f (a demonstração é análoga para ponto de mínimo local). Como x_0 é ponto de máximo local, se x está próximo de x_0 então $f(x) \leq f(x_0)$. Assim $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Portanto para x próximo mas à direita de x_0 ($x - x_0 > 0$), temos $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (numerador negativo, denominador positivo). Segue que

$$L = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Por outro lado, para para x próximo mas à esquerda de x_0 ($x - x_0 < 0$), temos $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (numerador negativo, denominador negativo). Segue que

$$L = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Assim $0 \leq L \leq 0$. Portanto $f'(x_0) = L = 0$. ∎

Motivado por este Teorema, introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.6 (pontos críticos) *Dizemos que x_0 é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.*

Corolário 4.7 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função onde $x_0 \in I$ é um extremo (máximo ou mínimo) local. Então x_0 é um ponto crítico, isto é, $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.*

Erro Comum: Este Corolário diz que: se x_0 é **máximo ou mínimo local ENTÃO** x_0 **é um ponto crítico**. Este Corolário **não** diz que se x_0 é um ponto crítico então é ponto de máximo ou mínimo local.

[3] Pierre de Fermat: ⋆1601 Beaumont-de-Lomagne, França — †1665 Castres, França.

Como determinar os máximos e mínimos locais?
Pelo Teorema 4.5 da p.102 (Teorema de Fermat dos extremos locais), buscamos entre os pontos críticos. Como saber se um ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo local de uma função f?
— Será **máximo local** se f cresce antes de x_0 e decresce depois de x_0;
— Será **mínimo local** se f decresce antes de x_0 e cresce depois de x_0.
— Caso não ocorra um destes casos, não será extremo local.
Isto pode ser verificado, caso a derivada exista perto de x_0, pelo sinal da derivada antes e depois de x_0:
— Será **máximo local** se f' positiva antes e negativa depois de x_0;
— Será **mínimo local** se f' negativa antes e positiva depois de x_0.

Enunciamos como um Teorema o caso em que a função possui duas derivadas num intervalo I.

Teorema 4.8 (teste da derivada segunda) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com duas derivadas contínuas. Então x_0 é um ponto de:*
(a) mínimo local se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$;
(b) máximo local se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$.

Prova: Provamos (a) somente pois (b) é análogo (*mutatis mutandis*). Se $f''(x_0) > 0$, por continuidade $f''(x) > 0$ perto de x_0. Assim a função $f'(x)$ é crescente perto de x_0. Como $f'(x_0) = 0$, f' é negativa antes e positiva depois de x_0. Portanto f decresce antes e cresce depois de x_0, ou seja, x_0 é um mínimo local de f. ■

Exemplo 4.21 *Determine os pontos críticos e o extremos locais de $f(x) = x^3$.*

Solução: A função é derivável em todos os pontos. O único ponto crítico é $x = 0$ pois $f'(0) = 0$. Como $f'(x) = 3x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, a função cresce antes e cresce depois de $x = 0$. Logo $x = 0$ não é máximo nem mínimo local (esboce também o gráfico). Note que $f''(0) = 0$ e o teste da derivada segunda falha (nada podemos concluir). ■

Observação 4.6 (Quando $f''(x_0) = 0$) *o teste da derivada segunda falha e **nada** podemos afirmar. Aplicando-o em $x_0 = 0$ para $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$, e $h(x) = x^3$ observamos que nos três casos a derivada segunda em $x_0 = 0$ é 0 mas $x_0 = 0$: é mínimo de f, é máximo de g, não é máximo nem mínimo de h.*

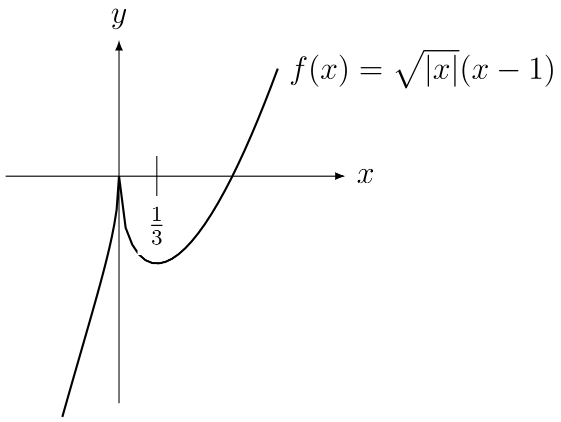
Exemplo 4.22 *Determine os pontos críticos e o extremos locais de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.*

Solução: (Veja gráfico na p.67.) A função não possui derivada em $x = 0$. Nos outros pontos a derivada é diferente de zero. Portanto o único ponto crítico é $x = 0$. A derivada é $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ para todo $x \neq 0$. Assim a função é sempre crescente. Portanto $x = 0$ não é ponto de mínimo nem máximo local. Não podemos aplicar teste da derivada segunda pois $f''(0)$ não está definida. ■

Exemplo 4.23 *Determine os pontos críticos e o extremos locais de $f(x) = \sqrt{|x|}(x-1)$.*

Solução: A função não possui derivada em $x = 0$. Podemos calcular a derivada separando em $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$ para $x > 0$, cuja derivada é $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. Assim $f'(x) = 0$ se

$x = 1/3$, um ponto crítico. Para $x < 0$, $f(x) = \sqrt{-x}(x-1)$, cuja derivada é $f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{-x}}$. Em $x < 0$ a derivada não se anula pois $f'(x) > 0$. Portanto os pontos críticos são $x = 0$ e $x = 1/3$. Pelo sinal da derivada perto de $x = 0$ (positiva a esquerda, negativa a direita), este é um máximo local. Pelo sinal perto de $x = 1/3$ (negativa a direita, positiva a esquerda), este é um mínimo local. Veja gráfico na figura abaixo.



■

4.4.2 Máximo e Mínimo Global e o TVE

Nesta seção estabelecemos os Teoremas que permitem calcular o máximo e o mínimo de uma função em um intervalo. Em contraste com o conceito apresentado anteriormente de máximo e mínimo local, dizemos **máximo e mínimo global em um intervalo**.

Definição 4.9 (máximo e mínimo (global)) *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in I$ é um*

(a) **ponto de máximo (global) em** *I de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$;*

(b) **ponto de mínimo (global) em** *I de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$;*

(c) **extremo** *em I de f se x_0 é ponto de máximo ou mínimo em I de f.*

Erro Comum: Não saber a diferença entre máximo **local** e máximo **global**. Nem todo extremo local é extremo (global) no intervalo e vice-versa. Veja o Exemplo 4.25 (a): máximo global em $[0, 4]$ **não é** máximo local.

Exemplo 4.24 *Determine o máximo e o mínimo de:*

(a) $f(x) = 1/x$ *em* $(0, 1]$; *(b)* $g(x) = x^2 + 6$ *em* $\mathbb{R}$;

(c) $h(x) = |x|$ *em* $[-3, 1]$; *(d)* $j(x) = (3 - x)(x - 7)$ *em* $\mathbb{R}$.

Solução: (a) Esboce o gráfico de $f(x) = 1/x$ e verifique que f não possui máximo em $(0, 1]$ pois se aproximando de 0 a função cresce sem limites e f possui mínimo no ponto $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico de $g(x) = x^2 + 6$ (translação da parábola $y = x^2$) e verifique que g **não** possui máximo em $\mathbb{R}$ pois ela cresce sem limites e g possui mínimo $x_0 = 0$.

(c) Esboce o gráfico de $h(x) = |x|$ e verifique que em $[-3, 1]$, g possui máximo no ponto $x = -3$ e mínimo no ponto $x = 0$.

(d) Esboce o gráfico desta parábola com concavidade para baixo com raízes 3 e 7 e verifique que j possui máximo em $x = (3 + 7)/2 = 5$ e **não** possui mínimo em $\mathbb{R}$ pois ela decresce sem limites. ■

O teorema abaixo garante a existência de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado e limitado.

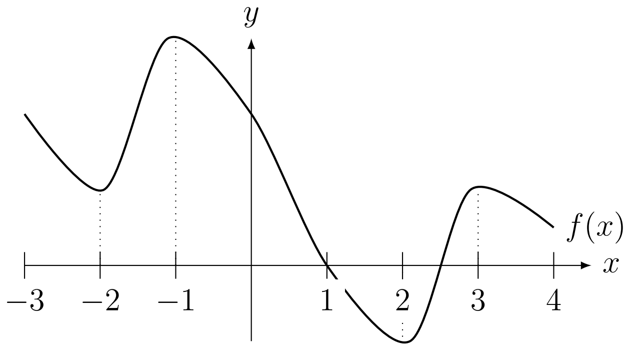
Teorema 4.10 (Weierstrass[4] ou Valor Extremo (TVE)) *Considere f contínua em $[a, b]$ (um intervalo fechado e limitado). Então f possui máximo e mínimo neste intervalo. Mais explicitamente, existem $x_{max}, x_{min} \in [a, b]$ tais que $f(x_{max}) \geq f(x) \geq f(x_{min})$ para todo $x \in [a, b]$.*

Prova: Deixamos sua demonstração para um curso de análise (veja [NC] por exemplo). ■

Observação 4.7 (f pode não possuir máximo e mínimo:)
• *Se o intervalo não for fechado: $f(x) = 1/x$ é contínua em $I = (0, 1]$, possui mínimo em $x = 1$ mas não possui máximo em I.*
• *Se o intervalo não for limitado: $f(x) = 1 - x$ é contínua em $I = [0, \infty)$, possui máximo em $x = 0$ mas não possui mínimo em I.*

Observação 4.8 *Mesmo sendo descontínua, a função pode ter máximo e mínimo. Por exemplo $f(x) = I_{\mathbb{Q}}(x)$ (vale 0 nos irracionais, 1 nos racionais). Mesmo sendo descontínua em todos os pontos, no intervalo $[0, 1]$ possui máximo em $x = 0$ e mínimo em $x = \pi/10$.*

Exemplo 4.25 *Considere a função f esboçada na figura abaixo. Determine os pontos extremos de f em (a) $[0, 4]$; (b) $[-3, 4]$; (c) $[-3, 1]$.*



Solução: (a) Mínimo em $x = 2$, máximo em $x = 0$. (b) Mínimo em $x = 2$, máximo em $x = -1$. (c) Mínimo em $x = 1$, máximo em $x = -1$. ■

Como determinar os máximos e mínimos (globais) em um intervalo I?
O mais seguro é esboçar o gráfico da função mas um método sistemático é comparar:
(a) o valor ou limite do valor da função nos **extremos do intervalo** I. Por exemplo se $I = (-\infty, a)$ temos que calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $f(a)$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x)$.
(b) o valor da função nos **pontos críticos** (pontos com derivada nula ou sem derivada) do intervalo I.

Exemplo 4.26 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1|(5 - x)$ para todo $x \in [0, 4]$. Determine o máximo e mínimo de f em $[0, 4]$.*

Solução: Como f é contínua em $[0, 4]$, pelo Teorema 4.10 da p.105 (TVE) f tem máximo e mínimo. Vamos determiná-los. É imediato que

$$f(x) = \begin{cases} (1 - x)(5 - x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ (x - 1)(5 - x) & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

[4] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass: ⋆1815 Ostenfelde, Alemanha — †1897 Berlin, Alemanha.

Segue facilmente (verifique) que f é derivável em todo ponto $x \neq 1$. Além disto,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \\ 6 - 2x & \text{se } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Com $f'(x) = 0$ para $x = 3$, o max/min de f em $[0, 4]$ está em $\{0, 1, 3, 4\}$ (extremos do intervalo, ponto sem derivada, ponto com derivada nula). Uma verificação nos dá $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 3$. Portanto, 0 é o ponto de máximo e 1 é o ponto de mínimo de f. ■

Exemplo 4.27 *(mínimos quadrados) Fixe $N \in \mathbb{N}$ e considere $a_1, a_2, \cdots, a_N$. Determine para quais $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \sum_{i=1}^{N} (x - a_i)^2$ assumirá o maior e o menor valor.*

Solução: Não podemos aplicar Teorema 4.10 da p.105 (TVE) pois estamos buscando extremo em $\mathbb{R}$: pode ser que tenha ou não. Como a função é derivável em todos os pontos, os pontos críticos são somente os pontos com derivada zero. Pontos críticos: $f'(x) = 2\sum_{i=1}^{N}(x - a_i) = 0$. Assim para que $f'(x_0) = 0$ temos que

$$\sum_{i=1}^{N} x_0 = x_0 + x_0 + \cdots + x_0 \text{ (N vezes)} = N x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Logo, o único ponto crítico é $x_0 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} a_i$, a média dos pontos. Como $f(x) \to \infty$ se $x \to \pm\infty$, mesmo sem calcular $f(x_0)$ sabemos que o mínimo global é em $x = x_0$. Pela mesma razão, esta função não possui máximo em $\mathbb{R}$, pois $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. ■

Exemplo 4.28 *Determine máximos e mínimos locais e o máximo e mínimo de cada função abaixo no intervalo I indicado:* *(a)* $f(x) = x^7 - x^3$ *em* $I = [0, 1]$;
(b) $f(x) = \cos x + x/2$ *em* $I = [0, 2\pi]$; *(c)* $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ *em* $I = [1, \infty)$.

Solução: (a) Os pontos críticos são somente onde a derivada se anula (porque?). Como $f'(x) = 7x^6 - 3x^2 = x^2(7x^4 - 3)$, os pontos críticos são $\left\{0, \pm\sqrt[4]{3/7}\right\}$. Agora fazendo a análise de sinal de f' (x^2 é sempre positivo e $7x^4 - 3$ possui somente duas raízes reais): $f'(x) > 0$ em $x > \sqrt[4]{3/7}$ e $x < \sqrt[4]{3/7}$; $f'(x) < 0$ em $x \in (-\sqrt[4]{3/7},\ \sqrt[4]{3/7})$. Portanto, perto de $x = 0$ a função decresce: logo o ponto crítico $x = 0$ não é máximo nem mínimo local. Perto de $x = -\sqrt[4]{3/7}$ a função cresce e depois decresce: é máximo local. Perto de $x = \sqrt[4]{3/7}$ é o contrário: é mínimo local.

Se tentar utilizar a derivada segunda as contas ficarão complicadas.

Finalmente, como $f(0) = f(1) = 0$ e $\sqrt[4]{3/7} \in [0, 1]$, no intervalo $[0, 1]$ o mínimo é em $x = \sqrt[4]{3/7}$ e o máximo em $x = 0$ ou $x = 1$.

Podemos fazer análise de sinal de $f(x) = x^3(x^4 - 1)$ e com estas informações esboçar o gráfico (tente e verifique com software gráfico).

(b) Os pontos críticos são somente onde a derivada se anula (porque?). Como $f'(x) = -\operatorname{sen} x + 1/2$, os pontos críticos são onde $\operatorname{sen} x = 1/2$, isto é, os pontos críticos são $\{(2k + 1/2)\pi \pm \pi/4;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Como $f''(x) = -\cos x$:

• nos pontos $\{(2k+1/2)\pi - \pi/4;\ k \in \mathbb{Z}\}$ f'' é negativa ($f''(\pi/4) = -\cos\pi/4 = -\sqrt{2}/2 < 0$): são pontos de máximo local;

• nos pontos $\{(2k+1/2)\pi + \pi/4;\ k \in \mathbb{Z}\}$ f'' é positiva ($f''(3\pi/4) = -\cos 3\pi/4 = -(-\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/2 > 0$): são pontos de mínimo local.

Para calcular o valor extremo em I basta comparar $f(0) = \cos 0 + 0 = 1$, $f(2\pi) = \cos 2\pi + 2\pi/2 = 1+\pi$, $f(\pi/4) = \cos\pi/4 + \pi/8 = 1/2 + \pi/8$, $f(3\pi/4) = \cos 3\pi/4 + 3\pi/8 = -1/2 + \pi/8$. É fácil ver que $-1/2 + \pi/8$ é o menor valor e $1+\pi$ o maior. Portanto, em I, o mínimo é em $x = 3\pi/4$ e o máximo em $x = 2\pi$.

Use algum software para ver o gráfico desta função.

(c) $f'(x) = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3}$. Assim o ponto crítico é $\log x_0 = 1/2$, ou, $x_0 = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Este ponto é de máximo local pois a derivada é positiva antes e negativa depois.

Comparando o valor da função no intervalo: $f(1) = 0$, $f(\infty) = 0$ por L'Hospital. Logo o mínimo em $[1, \infty]$ é zero em $x = 1$ e o máximo é em $x = \sqrt{e}$, $f(\sqrt{e}) = 1/(2e)$. ■

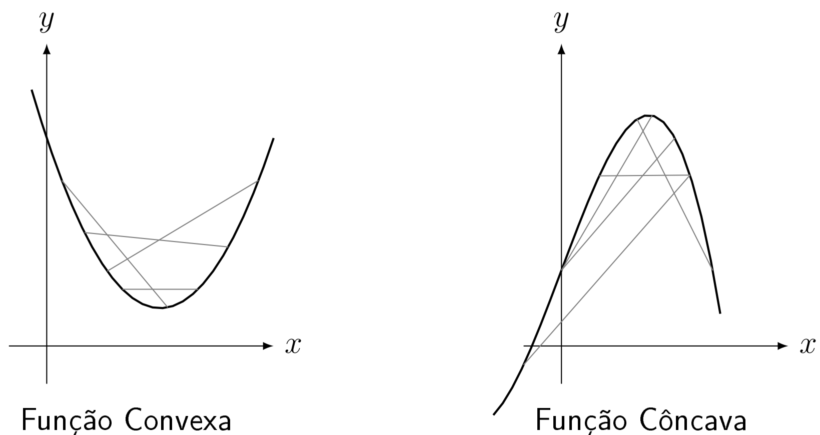
4.5 Esboço de Gráficos (parte II)

Nesta seção terminamos o que começamos no capítulo de limite: reveja a Seção 1.5, p.29: Esboço de Gráficos (parte I). Veremos como a derivada acrescenta informação de crescimento/decrescimento e concavidade ao gráfico.

A relação entre a derivada e o crescimento/decrescimento de função foi vista no Corolário 3.13, p.82 (corolário do TVM): o sinal da derivada determina os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Precisamos agora de um conceito novo: **concavidade de um gráfico**.

> Embora o gráfico de uma função possa ser esboçado de forma bastante fiel com base somente na derivada, alguns aspectos sutis do gráfico são revelados somente examinando a derivada segunda. (. . .) provas corretas dos fatos relevantes são difíceis o suficiente para serem colocadas em um apêndice. Apesar destes comentários desencorajadores, as informações aqui presentes valem a pena serem assimiladas porque as noções de convexidade e concavidade são mais importantes do que somente como um auxílio no esboço de gráficos. [Sp, p.191]

Definição 4.11 (convexa (côncava)) *Uma função f é **convexa (côncava)** ou possui **concavidade para cima (concavidade para baixo)** em um intervalo I se para todo $a, b \in I$, o segmento de reta unindo $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ está acima (abaixo) do gráfico de f.*



Função Convexa Função Côncava

Exemplo 4.29 *Verifique que:*

(a) $y = x^2$ é convexa (possui concavidade para cima).

(b) $y = -x^2$ é côncava (possui concavidade para baixo).

Solução: Basta fazer uns desenhos para comprovar isso. Estes são modelos padrão de função côncava e convexa. ■

Teorema 4.12 *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função com duas derivadas. Se, para todo $x \in I$:*

(a) $f''(x) > 0$, então o gráfico de f possui concavidade para cima (é convexa) em I;

(b) $f''(x) < 0$, então o gráfico de f possui concavidade para baixo (é côncava) em I;

Prova: A ideia geométrica é que se $f''(x) > 0$ então f' está crescendo, isto é, o coeficiente angular está aumentando. Acompanhando o movimento da reta tangente ao longo do gráfico (faça uma figura!), ela terá que aumentar sua inclinação. Concluiremos que a função é convexa. Raciocínio análogo para $f'' < 0$.

A ideia algébrica é mais simples. Pelo polinômio de Taylor de grau 2 da equação (4.1) da p.99, localmente a função se parece com uma parábola da forma $\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2+f'(a)(x-a)+f(a)$. A concavidade da parábola depende do sinal do coeficiente de x^2 que é $f''(a)/2$. Logo o o sinal da derivada segunda determinará a concavidade do gráfico de f. Para detalhes (difíceis) ver [Sp, p. 191]. ■

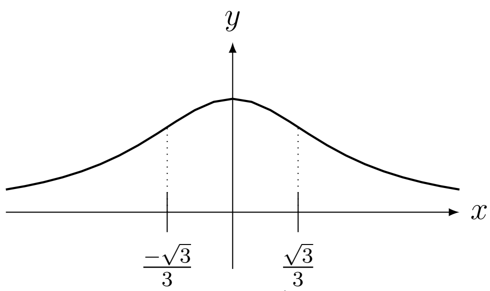
Exemplo 4.30 *Determine os intervalos cujo gráfico possui concavidade para cima e para baixo de:*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, sabendo que $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$;

(b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, sabendo que $g''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$;

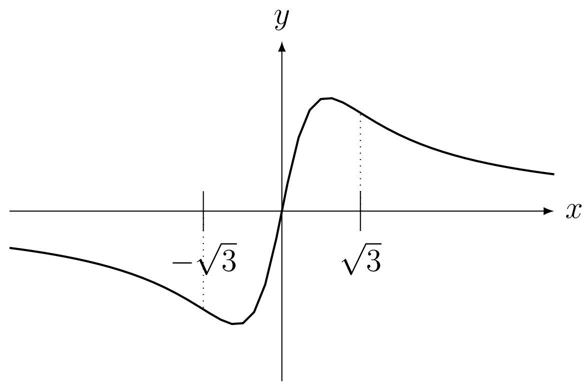
(c) $h(x) = e^{-x^2}$, sabendo que $h''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

Solução: (a) Fazendo análise de sinal, como o denominador é sempre positivo, basta analisar sinal da parábola $3x^2 - 1$. Concluímos que o gráfico de f possui a concavidade para baixo em $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ e a concavidade para cima em $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$ e $(\sqrt{3}/3, \infty)$ conforme figura abaixo.



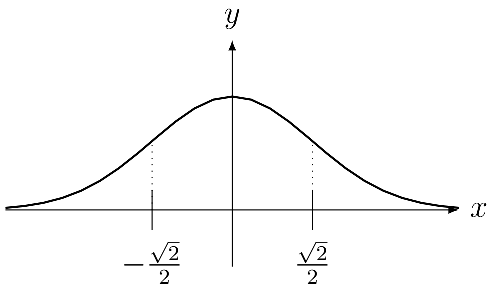
$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) De forma análoga, como o denominador é sempre positivo, basta analisar os sinal de $4x(x^2-3)$. Concluímos que o gráfico de g possui a concavidade para baixo em $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(0, \sqrt{3}$, a concavidade para cima em $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, \infty)$ conforme figura abaixo. Observe bem as mudanças na concavidade!



$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

(c) Como e^{-x^2} é sempre positivo (exponencial é uma função sempre positiva), basta analisar os sinal de $2x^2 - 1$. Concluímos que o gráfico de h possui a concavidade para baixo em $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e a concavidade para cima em $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{2}/2, \infty)$ conforme figura abaixo.



$h(x) = e^{-x^2}$

■

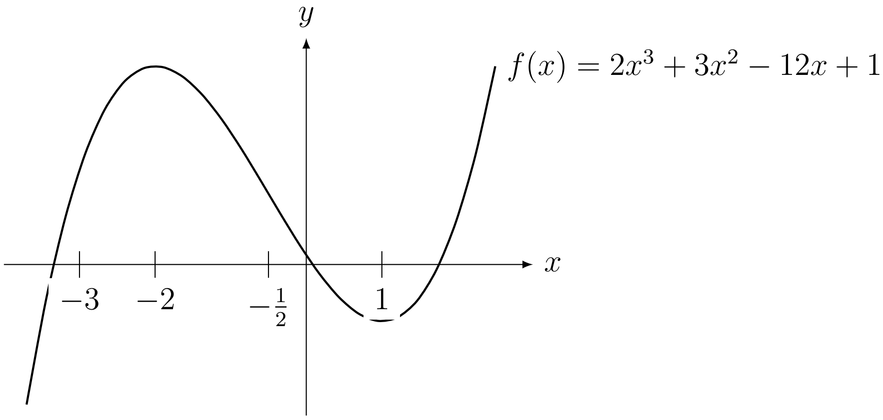
Observação 4.9 (Gráfico de $y = f(x)$ e sinal de f' e f''.) *Combinando informações de crescimento/decrescimento (f') e concavidade (f'') obtemos:*

	$f' > 0$	$f' < 0$
$f'' > 0$		
$f'' < 0$		

Para **esboçar um gráfico** determinamos:
(a) **todos** os pontos de interseção com os eixos x e y;
(b) os limites no infinito e **todas** as assíntotas;
(c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
(d) **todos** os pontos de máximo e mínimo locais;
(e) os intervalos com concavidade para cima e para baixo;

Exemplo 4.31 *Esboce o gráfico de* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

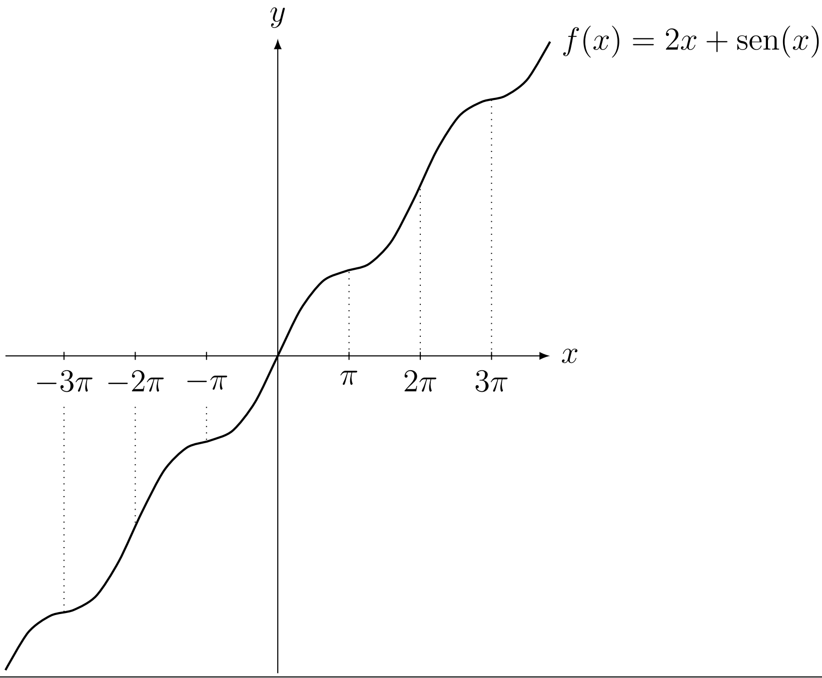
Solução: Intersepta o eixo y em $(0, 1)$. Não vou calcular onde intersepta o eixo x pois teria que resolver uma equação do terceiro grau ... Os limites no ∞ é ∞ e no $-\infty$ é $-\infty$. Não possui assíntotas. Como $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, cujas raízes são 1 e -2, cresce até $x = -2$, decresce em $(-2, 1)$, cresce depois de $x = 1$. Assim $x = 1$ é mínimo local e $x = -2$ é máximo local. Como $f''(x) = 12x + 6$, cuja raiz é $-1/2$, concavidade para baixo até $x = -1/2$, concavidade para cima depois.



■

Exemplo 4.32 *Esboce o gráfico de* $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$.

Solução: Intercepta o eixo y em $(0,0)$. Veremos que não intersepta o eixo x em outro ponto pelo crescimento da função. Quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$. Não possui assíntotas. Como $f'(x) = 2 + \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função sempre cresce. Assim não possui máximos nem mínimos locais. Como $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, a concavidade varia: de $(0,\pi)$ para baixo, de $(\pi, 2\pi)$ para cima e vai alternado desta forma.



■

Observação 4.10 *Como filosofia geral, quando f não é um polinômio ou função simples, daremos as expressões de f' e f'' (calculadas com o software Maxima) pois queremos separar a dificuldade de esboço do gráfico da questão de saber calcular a derivada.*

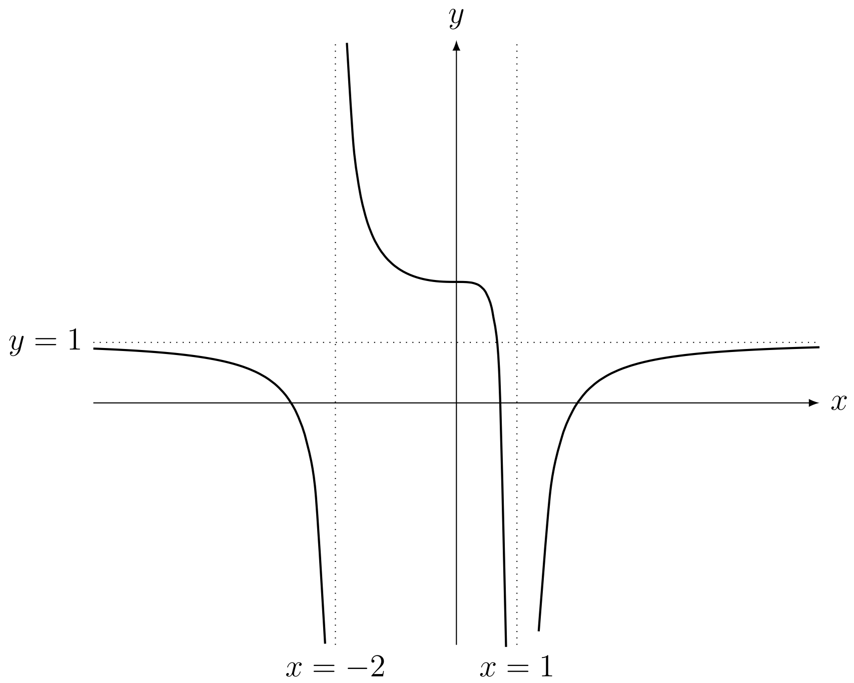
Exemplo 4.33 *Esboce o gráfico de* $f(x) = \dfrac{-x^3}{(x-1)^2(x+2)} + 2$.

Dica: $f'(x) = \dfrac{6x^2}{(x-1)^3(x+2)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{-6x(3x^2+2x+4)}{(x-1)^4(x+2)^3}$.

Solução: Intercepta o eixo y em $(0,2)$. Não vou calcular onde intersepta o eixo x pois teria que resolver uma equação complicada. Quando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 1$. Assim a assintota horizontal é $y = 1$. A assíntota vertical (onde denominador se anula) é: $x = 1$ e $x = -2$.

Analisando sinal de f': como numerador é sempre positivo, valendo zero em $x = 0$, basta olhar sinal do denominador, que tem o mesmo sinal que $x - 1$. Assim a função decresce até 1 e cresce dai em diante. Como a derivada se anula somente no zero, este é o único candidato a ponto extremo local. Como a função decresce ai, $x = 0$ não é extremo local. A função não tem máximo nem mínimo local.

O sinal de f''. O polinômio $3x^2 + 2x + 4$ possui raízes complexas. Logo este termo é sempre positivo. Assim o sinal de f'' é dado por $-6x$ e $x + 2$. Logo a concavidade é para baixo até $x = -2$, para cima em $(-2, 0)$, para baixo se $x > 0$.



$$f(x) = \frac{-x^3}{(x-1)^2(x+2)} + 2$$

■

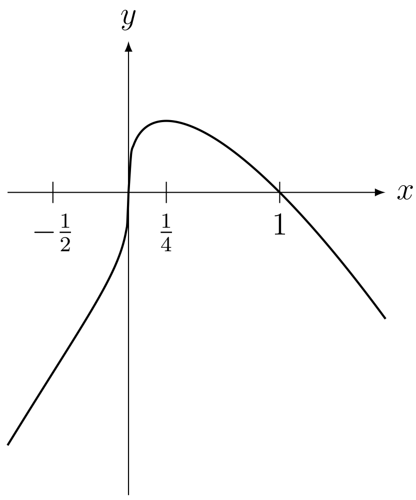
Exemplo 4.34 *Esboce o gráfico de* $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^4}$

Dica: $f'(x) = \dfrac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{4\,x^{\frac{1}{3}}}{3}$ *e* $f''(x) = -\dfrac{4}{9\,x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{2}{9\,x^{\frac{5}{3}}}$

Solução: Note que $f(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 1$. Colocando $\sqrt[3]{x^4}$ em evidência obtemos que $f(x) = \sqrt[3]{x^4}(1/\sqrt[3]{x^2} - 1)$. Assim quando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to -\infty$.

Note que f' **não** existe em $x = 0$ e vale zero em $x = 1/4$. Quanto ao sinal, $\dfrac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}}$ é sempre positivo pois aparece x^2. Para $x < 0$ o termo $-4x^{1/3}$ é sempre positivo. Assim $f'(x) > 0$ para $x < 0$. Para $0 < x < 1/4$ $f'(x) > 0$ para $x > 1/4$ $f'(x) < 0$. Assim, $x = 1/4$ é máximo local.

Note que f'' **não** existe em $x = 0$ e vale zero em $x = -1/2$. Quanto ao sinal, $-\dfrac{4}{9\,x^{\frac{2}{3}}}$ é sempre negativo. Assim se $x > 0$ o termo $-\dfrac{2}{9\,x^{\frac{5}{3}}}$ também será sempre negativo. Assim, se $x > 0$, $f''(x) < 0$. Agora para $-1/2 > x > 0$, $f''(x) > 0$ e para $x < -1/2$, $f''(x) < 0$.



$f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^4}$

■

4.6 Problemas de Otimização

Nesta Seção não apresentamos nenhuma teoria nova. A dificuldade para o aluno é aprender a modelar os problemas matematicamente. Separamos a fase de **Modelagem** e de **Resolução**. Na fase de **Modelagem**, as respostas devem ser do tipo "maximize (ou minimize) a função $f(x) = \cdots$ em $\mathbb{R}$ ou no intervalo $[a, b]$ ou (a, b) ou $(0, \infty)$, etc. A parte de **Resolução** recai na Seção anterior, que ensinou a determinar o máximo/mínimo de uma função num intervalo.

O roteiro básico de **Modelagem** é:

(a) atribuir variáveis (x, y, r, h, etc.) para as quantidades desconhecidas;

(b) escrever a função que deve ser otimizada e as restrições que envolvem as variáveis;

(c) caso a função que deva ser otimizada seja de mais de uma variável, eliminar as variáveis com as restrições;

(d) determinar o intervalo onde a função deve ser otimizada.

Começamos com problemas onde a modelagem é por equação do segundo grau.

Exemplo 4.35 *Modele os seguintes problemas e depois resolva-os. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

Um arame de comprimento $L > 0$ deve ser cortado em dois pedaços. Uma parte será dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra na forma de um círculo. Como deve ser cortado o fio de forma que a soma das áreas do quadrado e do círculo total englobada seja um máximo? Como deve ser cortado para que seja um mínimo?

Solução: Modelagem: Cortamos o arame num pedaço de tamanho x para fazer o quadrado e $L-x$ para o círculo. Note que x é o perímetro do quadrado e $L-x$ o perímetro do círculo. Assim o lado do quadrado é $x/4$ e o raio do círculo é $r = (L-x)/(2\pi)$. Assim a área total é $a(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$. Note que x pode variar somente entre 0 e L, o tamanho do arame. Assim queremos o máximo e mínimo de $a(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(L-x)^2}{4\pi}$ para $x \in [0, L]$

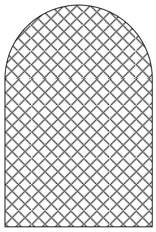
Resolução: Como $a'(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{x-L}{2\pi}$. Assim o único ponto crítico é $x_0 = \dfrac{4L}{4+\pi}$. Como a é uma parábola com concavidade para cima, x_0 é ponto do mínimo local. Além disso, como

$\dfrac{4}{4+\pi} < 1$, $0 < x_0 < L$. Assim o mínimo será utilizar x_0 para o quadrado e $L - x_0$ para o círculo. O máximo estará nos extremos. Como $a(0) = \dfrac{L^2}{4\pi} \approx \dfrac{L^2}{12} > a(L) = \dfrac{L^2}{16}$, o máximo é em $x = 0$, quando todo o arame é utilizado no círculo. ■

Exemplo 4.36 *Modele os seguintes problemas e depois resolva-os. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

(a) Uma janela tem a forma de um retângulo encimado por um semicírculo. Se o perímetro da janela é P, determine as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

(b) Repita o problema supondo que a parte retangular da janela receberá um tipo de vidro que deixe passar o dobro de luz que a parte semicircular.



Solução: (a) **Modelagem**: Se o semicírculo tem raio r, o retângulo possuirá lados $2r$ e x. Como a quantidade de luz é proporcional a área da janela, queremos maximizar a área da janela $a = 2rx + \pi r^2/2$ (área retângulo mais semicírculo). Esta é uma função de duas variáveis. Utilizando a restrição que o perímetro da janela $P = 2x + 2r + \pi r = 2x + r(2+\pi)$, obtemos que $x = \dfrac{P - r(2+\pi)}{2}$. Assim $a(r) = r(P - r(2+\pi)) + \pi r^2/2 = r(P - r(2+\pi/2))$. Olhando para o perímetro $P = 2x + r(2+\pi)$, vemos que os casos extremos são $r = 0$ ($x = P/2$) e $r = P/(2+\pi)$ ($x = 0$). Assim queremos o máximo de $a(r) = r(P - r(2+\pi/2))$ para $r \in [0,\ P/(2+\pi)]$.

Resolução: Como $a'(r) = P - 2r(2+\pi/2)$, $r_0 = \dfrac{P}{4+\pi}$ é o único ponto crítico. Nos extremos do intervalo, $a(0) = a(P/(2+\pi)) = 0$. Como é polinômio do segundo grau com concavidade para baixo, r_0 é ponto de máximo. Alem disso $r_0 = \dfrac{P}{4+\pi} < \dfrac{P}{2+\pi}$, e portanto pertence ao intervalo.

(b) **Modelagem**: Neste caso a quantidade de luz na parte retangular será proporcional ao dobro: $4rx$ e na parte semicircular igual: $\pi r^2/2$. Assim, $a = 4rx + \pi r^2/2$. Utilizando a restrição do perímetro obtemos que queremos o máximo de $a(r) = r(2P - r(4 + 3\pi/2))$ para $r \in [0,\ P/(2+\pi)]$.

Resolução: De forma análoga obtemos que o mínimo é em $r_0 = \dfrac{2P}{8+3\pi}$ que pertence ao intervalo. ■

Apresentamos problemas que somente podem ser resolvidos com Cálculo.

Exemplo 4.37 *Modele o seguinte problema e depois resolva-o.*

Determine as dimensões do retângulo com área $A > 0$ que possui o menor perímetro.

Solução: Modelagem: É similar ao primeiro da sequência de exemplos. Considere x e y como as dimensões do retângulo. Então queremos minimizar o perímetro $p = 2x + 2y$. Como são duas variáveis, utilizamos a restrição $A = xy$ para eliminar uma delas. Assim $y = A/x$.

Logo queremos o mínimo de $p(x) = 2x + 2A/x$. Note que x pode variar entre 0 e ∞ mas **não** pode ser zero. Assim queremos o mínimo de $p(x) = 2x + 2A/x$ para $x \in (0,\ \infty)$.

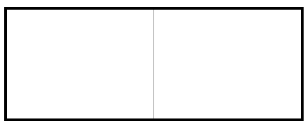
Resolução: Como $p'(x) = 2 - 2A/x^2$, $x_0 = \sqrt{A}$. Como $\lim_{x \to 0^+} p(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} p(x) = \infty$, este ponto é de mínimo em $(0,\ \infty)$. Se $x_0 = \sqrt{A}$, como $A = x_0 y_0 = \sqrt{A} y_0$, $y_0 = \sqrt{A}$. Como $x_0 = y_0 = \sqrt{A}$, concluímos que o retângulo com menor perímetro é o quadrado. ■

Observação 4.11 *Embora bem mais difícil de se provar, o quadrilátero com área A com menor perímetro é o quadrado e, generalizando, o polígono de n lados com área A com menor perímetro é o polígono regular de n lados. Os resultados são idênticos se fixarmos o perímetro $P > 0$ e quisermos maximizar a área.*
A generalização é o chamado **Problema Isoperimétrico** *(Wikipédia isoperimetric inequality): qual a região plana com perímetro P com maior área? É o círculo mas a solução utiliza técnicas do Cálculo das variações. Kepler[5] utilizou na discussão da morfologia do sistema solar. Foi resolvido completamente em 1902 por Hurwitz[6] usando série de Fourier.*

Exemplo 4.38 *Modele os seguintes problemas e depois resolva-os. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

(a) Um fazendeiro quer cercar uma área de 1500 m^2 num campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isto de forma a minimizar o custo da cerca?

(b) Resolva este problema se o custo por comprimento da cerca que divide ao meio é três vezes mais cara do que o da cerca em volta do terreno.



Solução: (a) **Modelagem**: Faça um desenho onde x é um dos lados e y o outro. O lado de tamanho x será dividido ao meio por uma cerca de tamanho y. Assim, o tamanho da cerca é $c = 2x + 2y + y$ (perímetro do retângulo mais a cerca do meio do terreno). Esta função é de **duas** variáveis. Utilizando a restrição que o terreno possui 1500 m^2, $xy = 1500$. Assim eliminamos $y = 1500/x$ do custo e obtemos $c(x) = 2x + 3(1500)/x = 2x + 4500/x$. Note que x pode variar entre 0 e ∞. Assim queremos o mínimo de $c(x) = 2x + 4500/x$ para $x \in (0, \infty)$ (note que x não pode ser 0).

Resolução: Calculando o mínimo de $c(x) = 2x + 4500/x$ em $I = (0, \infty)$. Como $c'(x) = 2 - 4500/x^2$, o único ponto crítico é $x_0 = \sqrt{2250}$. Nos extremos do intervalo I: $\lim_{x \to 0^+} c(x) = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} c(x) = \infty$. Assim x_0 é mínimo e como $xy = 1500$, $y = 1500/\sqrt{2250}$.

(b) **Modelagem**: Se a cerca em torno do terreno custa K, a cerca do meio custa $3K$. Portanto $c = 2xK + 2yK + y3K = K(2x + 5y)$. Outra possibilidade é fixar o custo/comprimento em torno de 1 e para cerca do meio 3. Obtemos (verifique) que $c = 2x + 5y$ e a mesma resposta. Utilizando a restrição $xy = 1500$, queremos o mínimo de $c(x) = K(2x + 5 \cdot 1500/x$ para $x \in (0, \infty)$.

Resolução: Similar ao item (b). Obteremos $x_0 = \sqrt{5 \cdot 1500/2}$. ■

Exemplo 4.39 *Sejam $M, N > 0$ números dados. Se $x, y \geq 0$ são números tais que sua soma é igual a uma constante $S > 0$, determine o mínimo e o máximo do produto $P = x^M y^N$.*

[6] Johannes Kepler: ⋆1571 Württemberg, Alemanha — †1630 Regensburg, Alemanha.
[6] Adolf Hurwitz: ⋆1859 Hildesheim, Alemanha — †1919 Zurich, Suiça.

Solução: Modelagem: Como $x + y = S$, $y = S - x$. Como $y \geq 0$, $0 \leq x \leq S$. Assim queremos o máximo e o mínimo de $P(x) = x^M(S-x)^N$ para $x \in [0, S]$.

Resolução: Como $P'(x) = Mx^{M-1}(x-S)^N - Nx^M(S-x)^{N-1}$. Logo os pontos críticos são $x_0 = \dfrac{MS}{M+N}$ e, $x = 0$ (caso $M - 1 \neq 0$) e $x = S$ ($N - 1 \neq 0$). De todo modo checamos o valor da função em 0 e S pois são os extremos do intervalo. Como $0 < M < M + N$, $\frac{M}{M+N} < 1$. Portanto $x_0 = \dfrac{MS}{M+N} < S$. Assim $x_0 \in (0, S)$. Mas $P(0) = P(S) = 0$ e $P(x) > 0$ para $x \in (0, S)$. Assim x_0 é o máximo. O mínimo é em $x = 0$ ou $x = S$. ■

Exemplo 4.40 *Qual ponto do gráfico de $y = x^2 + 2$ está mais perto de $(0, 5) \in \mathbb{R}^2$?*

Solução: Modelagem: A distância de um ponto até uma curva é igual a menor distância entre todos pontos da curva até a reta. A distância de um ponto (x, y) na curva até $(0, 1)$ é $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2}$. Como $y = x^2 + 2$, $d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 + 2 - 5)^2}$. Queremos o mínimo para $x \in \mathbb{R}$ desta função $d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 3)^2}$.

Resolução: Existe um truque: ao invés de minimizar $d(x)$, minimizamos $d^2(x)$ pois dá na mesma (porque?) mas a álgebra é mais fácil. Assim queremos minimizar $f(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2$. Como $f'(x) = 2x + 2(x^2 - 3)(2x)$, os pontos críticos são $0, \pm\sqrt{5/2}$. Quando $x \to \pm\infty$ vemos que $f(x) \to \infty$. Assim o mínimo é atingido em um dos pontos críticos. Agora comparamos $f(0) = 9$, $f(\pm\sqrt{5/2}) = 11/4$. Como $11/4 < 9$, o mínimo é atingido em $x = \pm\sqrt{5/2}$. ■

Exemplo 4.41 *Modele o seguinte problema e depois resolva-o. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

Uma lata cilíndrica aberta no topo deve conter $500\mathrm{cm}^3$ de líquido. O custo do material utilizado na base é de R\$2,00/cm^2 e o material utilizado nos lados é de R\$3,00/cm^2. Determine o raio que minimiza o custo de fabricação da lata.

Solução: Modelagem: Seja r o raio da lata e h a altura. A área lateral é $2\pi rh$ e a área da base πr^2. Levando em conta o custo do material, o custo de fabricação é $c = 6\pi rh + 2\pi r^2$. Utilizando a restrição que o volume $V = \pi r^2 h = 500$, eliminamos umas das variáveis do custo.

Eliminamos h. Como $\pi rh = 500/r$, minimizamos $c(r) = \dfrac{3000}{r} + 2\pi r^2$ para $r \in (0, \infty)$.

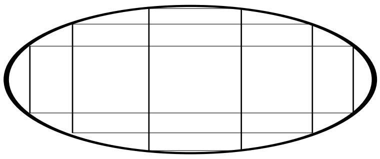
Outra possibilidade de modelagem é eliminar r. Como $\pi r^2 = 500/h$ e $r = \sqrt{500/(h\pi)} = 10\sqrt{5/(h\pi)}$, minimizamos $c(h) = 60\sqrt{5\pi h} + \dfrac{1000}{h}$ para $h \in (0, \infty)$.

Resolução do modelo minimize $c(r) = \dfrac{3000}{r} + 2\pi r^2$ para $r \in (0, \infty)$: Note que $c(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ ou $r \to \infty$. Assim existirá um mínimo poi $c(r) > 0$ para todo $r > 0$. Como $c'(r) = -\dfrac{3000}{r^2} + 4\pi r$, o único ponto crítico é $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{750}{\pi}}$, o ponto de mínimo. Agora podemos obter h_0, a altura que minimiza custo utilizando a relação $V = \pi r_0^2 h_0 = 500$. Obtemos $h_0 = 20/\sqrt[3]{36\pi} = 10\sqrt[3]{\dfrac{2}{9\pi}}$.

Resolução do modelo minimize $c(h) = 60\sqrt{5\pi h} + \dfrac{1000}{h}$ para $h \in (0, \infty)$. Como $c'(h) = \dfrac{30\sqrt{5\pi}}{\sqrt{h}} - \dfrac{1000}{h^2}$, o ponto crítico é $h_0 = 10\sqrt[3]{\dfrac{2}{9\pi}}$. O primeiro modelo torna as contas mais fáceis. ■

Exemplo 4.42 *Modele o seguinte problema e depois resolva-o. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

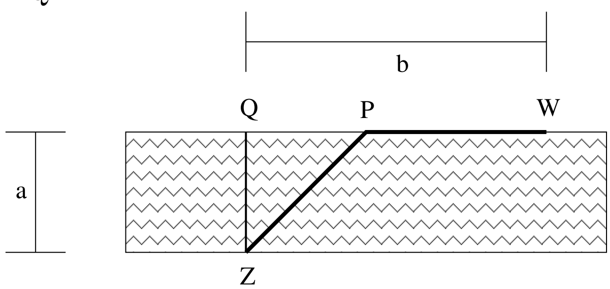
Determine a área do maior retângulo (com lados paralelos aos eixos x e y) que pode ser inscrito na elipse $(a, b > 0)$ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.



Solução: Modelagem: Resolvendo a equação da elipse para y pode-se obter que fixado um x, $y(x) = \pm b\sqrt{1-(x/a)^2}$. Para cada $x \in [0, a]$ obtemos um retângulo inscrito na elipse com com lados $2x$ e $2y = 2b\sqrt{1-(x/a)^2}$. Assim queremos maximizar a área $g(x) = 4bx\sqrt{1-(x/a)^2}$ para $x \in [0, a]$.

Resolução: Note que $g(0) = g(a) = 0$ e que $g(x) > 0$ para $x > 0$. Assim o ponto crítico, se existir, será de mínimo. Como $f'(x) = 4b\sqrt{1-(x/a)^2} - \frac{4bx^2}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2}}$. Igualando a zero, cancelando $4b$ dos dois lados, obtemos que $x_0^2 = a^2(1-(x_0/a)^2) = a^2 - x_0^2$. Assim, $2x_0^2 = a^2$ e $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Substituindo obtemos que a área $g(a/\sqrt{2}) = 2ab$ (confira pois $\sqrt{1-(x_0/a)^2} = \sqrt{1/2}$!). ■

Exemplo 4.43 *Duas cidades, Z e W, estão na beira de um rio reto de largura a em margens opostas. Seja Q o ponto na margem oposta do rio diretamente em frente a Z. Sabe-se que que W dista b do ponto Q.*



As cidades serão ligadas por um sistema viário composto por uma ponte partindo de Z até um ponto P na outra margem do rio e uma estrada por terra ligando P a W. O custo por quilômetro para construção da ponte é A por Km e o custo para construção da estrada por terra é T por Km.

Qual deve ser a localização do ponto P para que o custo total do sistema viário seja o menor possível?

PS: Problema similar: Você participará de uma prova de corrida e natação entre as duas cidades, sendo que você corre com velocidade V_c e nada com velocidade V_n. Partindo de Z, você deverá nadar (em linha reta, é claro!) até um ponto P na na outra margem e depois correr (em linha reta) até W. Como minimizar o tempo de prova?

Solução: Modelagem: Introduzimos a coordenada x que localiza o ponto P com a convenção que $x = 0$ se $P = W$ e $x = b$ se $P = Q$. Assim $x \in [0, b]$. Dada a localização x do ponto P, a estrada de terra terá comprimento x e a ponte terá comprimento, por Pitágoras, $\sqrt{(b-x)^2 + a^2}$. Logo o custo total do sistema viário é $c(x) = Tx + A\sqrt{(b-x)^2 + a^2}$ e queremos minimizar para $x \in [0, b]$.

Resolução: Calculamos os pontos críticos. $c'(x) = T - A\frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + a^2}}$. Resolvendo $c'(x_0) = 0$ obtemos que $(A^2 - T^2)(b - x_0)^2 = T^2a^2$. Assim para que tenha solução real precisamos que $A^2 - T^2 \geq 0$, isto é, como $A, T > 0$, precisamos que $A \geq T$, o custo na água maior que na terra. Separamos em dois casos:

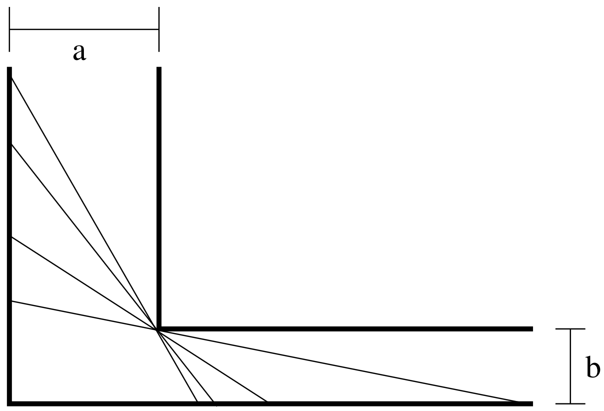
(a) Se $A > T$, a única raiz da derivada menor que b é $x_0 = b - \dfrac{aT}{\sqrt{A^2 - T^2}}$. Note que $c'(b) = T > 0$. Como $c'(x_0) = 0$, e $x_0 < b$, a derivada será positiva neste intervalo e negativa para $x < x_0$. Assim se $x_0 \in [0, b]$, este ponto será de mínimo. Assim precisamos que $x_0 > 0$, isto é, que $b > \dfrac{aT}{\sqrt{A^2 - T^2}}$. Se isto ocorrer o mínimo será em $x_0 = b - \dfrac{aT}{\sqrt{A^2 - T^2}}$. Caso contrário, isto é, se $b \leq \dfrac{aT}{\sqrt{A^2 - T^2}}$, a função será crescente em $[0, b]$ e o mínimo será em $x = 0$ (ligar ponte diretamente entre as cidades).

(b) Se $A \leq T$ a derivada nunca será zero e portanto possuirá o mesmo sinal que em qualquer ponto, como por exemplo em $x = b$ onde $c'(b) = T > 0$. Logo ela será sempre crescente, e o mínimo será em $x = 0$ (ligar ponte diretamente entre as cidades).

PS: Basta tomar $A = 1/V_n$ e $T = 1/V_c$ neste problema. ■

Exemplo 4.44 *Modele o seguinte problema e depois resolva-o. Não basta calcular o máximo e o mínimo: deve-se justificar porque.*

Um pintor esta pintando um prédio que possui um corredor longo de largura a que termina num corredor perpendicular a este de largura b. Qual a maior escada que o pintor pode utilizar que possa fazer a curva no fim do corredor ?



Solução: Modelagem: Considere o segmento de reta que encosta na quina interna do corredor. Calculamos seu comprimento para cada ângulo θ que este segmento faz com o corredor. Obtemos que o comprimento é dado por $f(\theta) = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$. Se a escada for maior que $f(\theta)$ para algum θ ela ficará travada no corredor. Assim queremos o mínimo de $f(\theta) = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{b}{\cos\theta}$ para $\theta \in (0,\ \pi/2)$.

Resolução: Note que $f(\theta) \to \infty$ nos extremos do intervalo $(0,\ \pi/2)$. Assim o mínimo está no interior do intervalo. Calculando $f'(\theta) = -a\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + b\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$. Agora $f'(\theta_0) = 0$ se $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta_0}{\cos^3\theta_0} = \dfrac{a}{b} = \tan^3\theta_0$. Logo $\theta_0 = \arctan\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}\right)$. ■

4.7 Exercícios de Aplicações da Derivada

4.7.1 Exercícios de Fixação

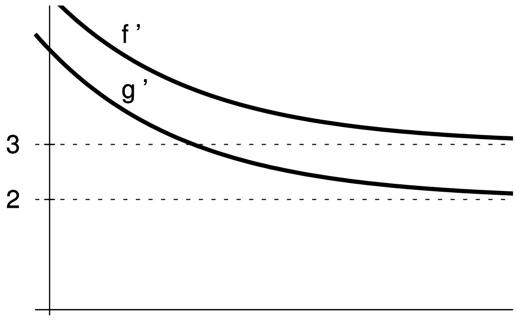
Fix 4.1: Suponha que $f(0) = 0$, f' é contínua e que $f'(0) = 5$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.

Fix 4.2: Vamos calcular o limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{e^x - e}$ aplicando L'Hospital duas vezes. Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{e^x - e} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^2}.$$

Na realidade o limite é zero. Qual o erro?

Fix 4.3: Determine $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sabendo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ e que os gráficos de f' e g' são dados na figura abaixo.



Fix 4.4: Sabe-se que $f'(2) = 4$ e que $f(2) = 5$. Aproxime: (a) $f(2.1)$; (b) $f(1.95)$.

Fix 4.5: Sabe-se que $p(x)$ é o polinômio do segundo grau que melhor aproxima $f(x) = \cos(x)$ perto do ponto $x = \pi$. Determine: (a) $p(\pi)$; (b) $p'(\pi)$; (c) $p''(\pi)$.

Fix 4.6: Determine se $x_0 = 0$ é (ou não é) máximo ou mínimo local das seguintes funções:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1/10, & x = 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 100, & x = 0. \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ -1, & x = 0, \end{cases}$ (ver gráfico no Exemplo 1.9 da p.10).

Fix 4.7: Esboce o gráfico de uma função contínua para cada item abaixo que:

(a) tenha um máximo local em $x = -2$ e um mínimo local em $x = 1$;

(b) seja sempre crescente, mas até $x = -2$ com concavidade para cima e depois deste ponto com concavidade para baixo.

Fix 4.8: Considere uma $f : [-3, 3] :\to \mathbb{R}$ cujo quadro de sinais da função e das derivadas seja:

		-2		-1		0		1		2	
f	$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
f'	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$
f''	$+$		$+$		$-$		$-$		$+$		$+$

Esboce o gráfico de $y = f(x)$.

Fix 4.9: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.

(a) se $f''(x) > 0$ para todo $x \in [1, 2]$ então f' é crescente em $[1, 2]$.

(b) se $f''(x) > 0$ para todo $x \in [1, 2]$ então f é possui concavidade para cima em $[1, 2]$

(c) se $h(x) = C$ para todo $x \in [1, 2]$ então h não possui nenhum ponto do máximo nem mínimo local.

Fix 4.10: Estude o Teorema 4.10 da p.105, o TVE (Teorema do Valor Extremo de Weierstrass). Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.

(a) Pelo TVE toda função contínua em $I = (-7, 100)$ possui um máximo em I.

(b) Pelo TVE toda função contínua em $I = [0, \infty)$ possui um mínimo em I.

(c) Pelo TVE toda função em $I = [2, 3]$ possui um mínimo em I.

(d) Pelo TVE toda função descontínua em $I = [2, 4]$ **não** possui máximo neste intervalo.

(e) Pelo TVE toda função contínua em intervalo **ilimitado** I **não** possui máximo em I.

Fix 4.11: Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$ e que f' se anula somente em 3 e 7.

(a) É verdade que existe $a \in [1, 10]$ tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in [1, 10]$? Porque?

(b) Explique como podemos determinar a.

(c) É verdade que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$? Porque?

Fix 4.12: Sabendo f é contínua em $\mathbb{R}$ e que $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e $f'(x) < 0$, para $x > 0$, determine (se for possível) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

(a) $\min\limits_{x \in [-5,-1]} f(x) = f(a)$; (b) $\max\limits_{x \in [-2,3]} f(x) = f(b)$;

(c) $\min\limits_{x \in [-1,2]} f(x) = f(c)$; (d) $\max\limits_{x \in [2,5]} f(x) = f(d)$.

Fix 4.13: Considere $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine, caso existam, para cada intervalo I abaixo, $\max\limits_{x \in I} f(x)$, $\min\limits_{x \in I} f(x)$ e os pontos x_{max} e x_{min} onde são atingidos o máximo e o mínimo.

(a) $I = [2, 3]$; (b) $I = (0, 1]$; (c) $I = [-1, -4]$; (d) $I = [1, \infty)$; (e) $I = (-\infty, 0)$.

Fix 4.14: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija. Suponha que todas as funções possuem derivadas em todos os pontos.

(a) Se $x = 4$ é mínimo local de h então $h'(4) = 0$.

(b) Se $x = 2$ é o máximo de f no intervalo $[1, 4]$ então $f'(2) = 0$.

(c) Se $x = 1$ é o mínimo de f no intervalo $[1, 4]$ então $f'(1) = 0$.

(d) Se $g'(3) = 0$ então $x = 3$ é o mínimo ou máximo local de g.

Fix 4.15: Determine se é Verdadeiro ou Falso. Se for falso dê um contraexemplo ou corrija.

Sabendo que f e f' é derivável em I e $a, b, c \in I$:

(a) $f'(b) = 0$ e $f''(b) = -1$ então b é ponto de máximo local.

(b) $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$ então c é **não** é ponto de máximo nem mínimo de f em I.

(c) se a é máximo local de f então a é máximo de f em I.

Fix 4.16: Considere a função f esboçada na figura abaixo.

(a) Determine os pontos de máximo e mínimo local de f.

Determine os pontos de máximo e mínimo de f em:

(b) $[2, 4]$; (c) $[-3, 1]$; (d) $[-1, 4]$.

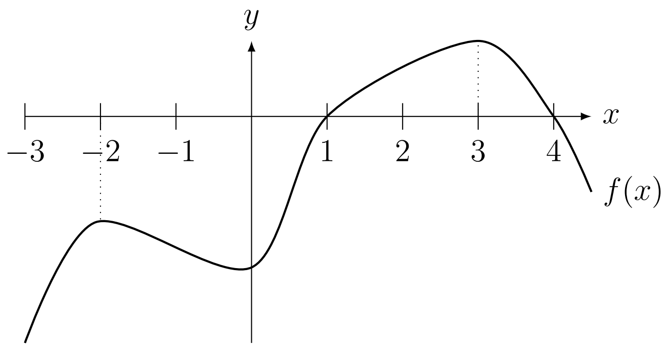
Determine o sinal de f'' em:

(e) $x = -1.8$; (f) $x = 0$; (g) $x = 4$.

(h) Dentre os inteiros $-3, -2, \dots, 4$, determine os que estão próximos de pontos de inflexão (troca de concavidade) de f.

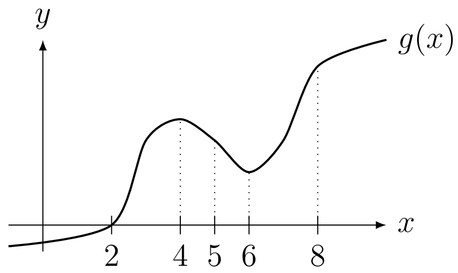
Considere $g'(x) = f(x)$. Determine os pontos de:

(i) máximo e mínimo local de g; (j) inflexão de g.



Fix 4.17: Considere $f(x) = x^4 - x^3$. Determine **todos** os pontos de máximo/mínimo:
(a) locais de f. (b) de f no intervalo $[-1, 2]$. (c) de f no intervalo $[-1, 0]$.
(d) de f em $\mathbb{R}$. (e) de f em $(-\infty,\ -1]$.

Fix 4.18: Considere a função $y = g(x)$ cujo gráfico está representado na figura abaixo.



Coloque em ordem crescente os seguintes números:
(a) $g'(0)$, $g'(2)$, $g'(4)$, e $g'(5)$. (b) $g''(2)$, $g''(5)$, e $g''(8)$.

4.7.2 Problemas

Prob 4.1: Calcule os limites abaixo:
(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{e^{2x} - 1}$. (b) $\lim_{x\to 0^+} (e^x + 3x)^{1/x}$. (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(5x)}$. (d) $\lim_{n\to\infty} n(e^{a/n} - 1)$.

Prob 4.2: Estime, através de uma aproximação linear local:
(a) $\sqrt{65}$; (b) $\log(e^2 - 0.1)$; (c) $\arctan(1.2)$.

Prob 4.3: Considere a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ onde $a > 0$.

(a) Mostre que f admite nenhum ou dois extremos locais. Sob que condições cada um desses casos ocorre?

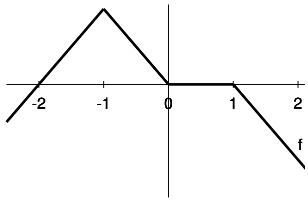
(b) No caso em que f não admite extremos locais, quantas raízes reais f pode ter?

(c) No caso em que f admite dois extremos locais, quantas raízes reais f pode ter?

(d) Baseado nos itens anteriores, descreva um procedimento para determinar o número de raízes reais de f.

Prob 4.4: (gráficos triviais) Esboce o gráfico de f e de uma função g tal que:
(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$; (b) $g'(x) = x^3 - 4x$.

Prob 4.5: Esboce o gráfico de uma função $y = f(x)$ tal que $f(0) = 2$ e f' é dado pelo gráfico abaixo.



Prob 4.6: Esboce o gráfico de uma função contínua f nos maiores intervalos possíveis que verifique **todas** as condições indicadas simultaneamente.

(a)

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $f(0) = -1$,
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$,
- $f'(x) > 0$ para $x < -1$, $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x > 0$.

(b)

- $f(0) = 2$, $f(-2) = 1$ e $f'(0) = 0$.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.
- $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$.
- $f''(x) < 0$ se $|x| < 2$ e $f''(x) > 0$ se $|x| > 2$.

Prob 4.7:

Para as questões de **esboço de gráfico**, antes do esboço deverá ser determinado:
(a) **todos** os pontos de interseção com os eixos x e y;
(b) os limites de no infinito e **todas** as assíntotas;
(c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
(d) **todos** os pontos de máximo e mínimo locais;
(e) os intervalos com concavidade para cima e para baixo;

Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)}$. Dica: $f'(x) = \dfrac{4\,(1-2x)}{(x-2)^2\,(x+1)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{24\,(x^2 - x + 1)}{(x-2)^3\,(x+1)^3}$.

(b) $g(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. Dica: $g'(x) = 4\,\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ e $g''(x) = 4\,\dfrac{1+3\,x^2}{(1-x^2)^3}$.

(c) $h(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Dica: $h'(x) = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ e $h''(x) = \dfrac{2\,(x+2)}{(x-1)^4}$.

Prob 4.8: Esboce o gráfico da função:

(a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Dica: $f'(x) = \dfrac{(x-1)\,e^x}{x^2}$ e $f''(x) = \dfrac{(x^2 - 2\,x + 2)\,e^x}{x^3}$.

(b) $f(x) = \log(1 - x^2) + 1$. Dica: $f'(x) = \dfrac{2\,x}{x^2 - 1}$ e $f''(x) = -\dfrac{2\,x^2 + 2}{(x^2-1)^2}$, $\sqrt{1 - e^{-1}} \approx 0.79$.

(c) $f(x) = e^{(2-x)(x-1)} + 1$. Dica: $f'(x) = (3 - 2x)\,e^{(2-x)(x-1)}$ e $f''(x) = (4x^2 - 12x + 7)\,e^{(2-x)(x-1)}$, $3/2 - \sqrt{2}/2 \approx 0.79$ e $3/2 + \sqrt{2}/2 \approx 2.20$.

(d) $f(x) = x^3\, e^x$. Dica: $f'(x) = (x^3 + 3\,x^2)\; e^x$ e $f''(x) = (x^3 + 6\,x^2 + 6\,x)\; e^x$, $-3 - \sqrt{3} \approx -4.7$ e $-3 + \sqrt{3} \approx 1.26$.

Prob 4.9: Para cada função f e cada intervalo I abaixo, determine $\max\limits_{x\in I} f(x)$ e $\min\limits_{x\in I} f(x)$ e, se for possível, os pontos x_{max} e x_{min} onde o máximo/mínimo é atingidos.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} + \dfrac{1}{\cos(x)}$, $\quad I = (0, \pi/2)$.

Dica: $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\cos^2 x\, \operatorname{sen}^2 x}$

(b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\quad I = (0,\ \infty)$, $I = (0, 3]$, $I = [3, 4]$.

Dica: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.

(c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2$, $\quad I = [-1, 1]$ e $[1, 2]$.

Dica: $f'(x) = 12x(x^2 - x + 2)$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ em $I = (-1, 1]$, $I = [0, 1]$.

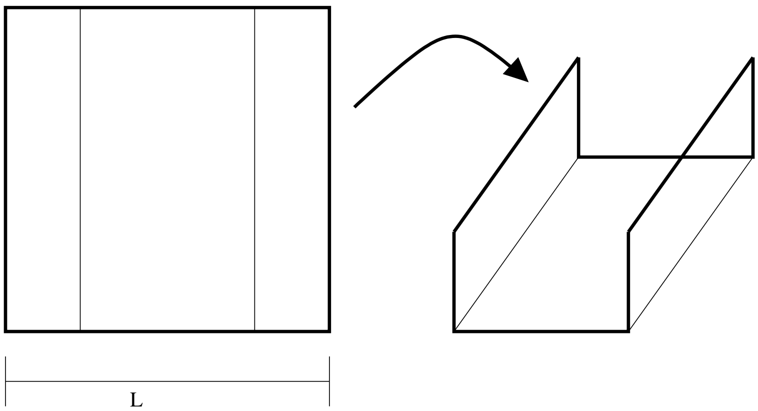
Dica: $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Prob 4.10: Determine todos $K \in \mathbb{R}$ tais que a equação $\dfrac{x}{x^4+3} = K$ tenha pelo menos uma solução.

Prob 4.11: Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja um mínimo.

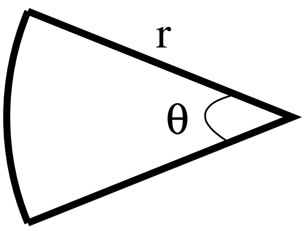
Prob 4.12: Uma chapa de metal de largura L deve ter duas bandas, de igual largura, dobradas ao longo do comprimento de maneira a formar uma calha retangular.

Como devem ser feitas as dobras de tal forma que a calha comporte o maior volume possível?



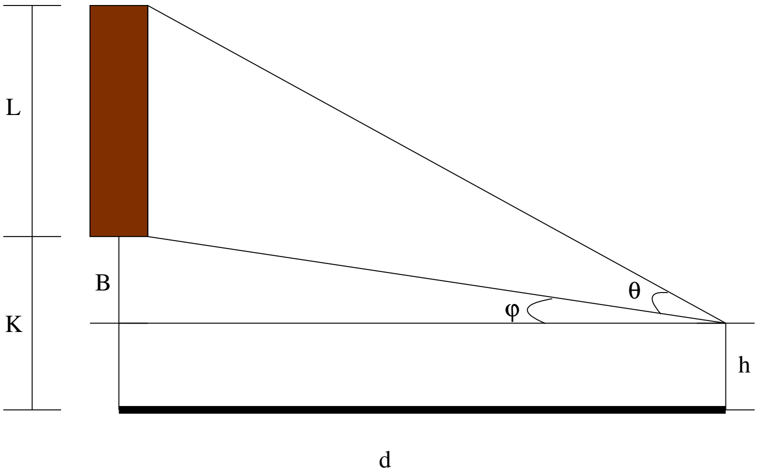
Prob 4.13: Dispõe-se de 40m de fio de arame para cercar um canteiro em um jardim cuja forma é a de um setor circular ("fatia de pizza"). Qual deve ser o raio do círculo para que o canteiro tenha a maior área possível ?

Obs: A área de um setor circular é $\theta r^2/2$, onde r é o raio do círculo e θ é o ângulo do setor circular.

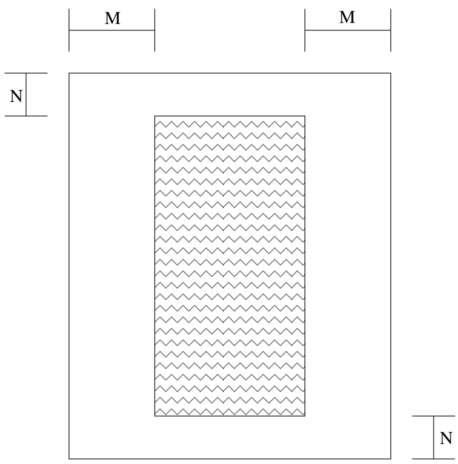


Prob 4.14: A tela do cinema CABRALPLEX está a uma distância K do chão e possui altura L. Um espectador vai se sentar nesta sala, que é plana (não possui inclinação), de modo

que sentado em qualquer assento a distância entre seus olhos e o solo é h. A que distância d da tela ele deve ficar sentado para que perceba a maior imagem possível da tela? Note que a imagem é proporcional ao ângulo subentendido por seu olho e os extremos da tela. Assumimos que a altura $K > h$, caso contrário o melhor seria $d = 0$.



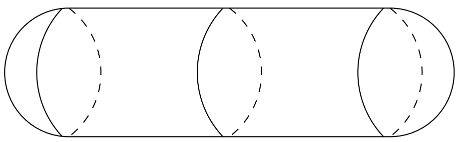
Prob 4.15: A página de um cartaz deve ser retangular e ter uma área de A cm^2 com margens laterais iguais a M cm, e margens superior e inferior de N cm. Determine as dimensões do cartaz que permitirão a maior área impressa.



Prob 4.16: Um tanque cilíndrico tem a forma de um cilindro com duas semiesferas em cada extremidade. Determine a forma do cilindro que:

(a) maximizará o seu volume, sabendo que sua área de superfície é A,

(b) minimizará o seu custo de fabricação sabendo que seu volume é V.

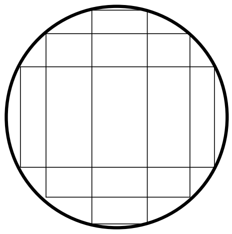


Prob 4.17:

(a) Sejam $f(x) = 2 + \sqrt{6x - 2x^2}$ e $P = (2, 2)$. Determine a maior e a menor distância de P aos pontos do gráfico de f.

(b) Qual a menor distância vertical entre as curvas $y = x^2$ e $y = -\dfrac{1}{x^2}$?

Prob 4.18: Determine as dimensões do retângulo inscrito num círculo de raio R que possui o menor e o maior perímetro;

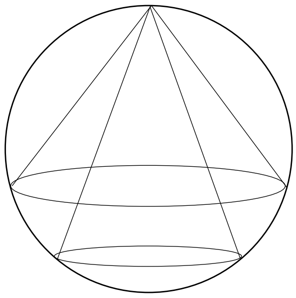


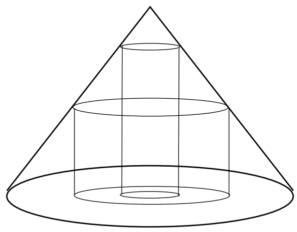
Prob 4.19: Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 27 - x^2$.

Prob 4.20: Maximize o volume do:

(a) cone reto inscrito numa esfera de raio R;

(b) cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de raio R e altura H.





4.7.3 Extras

Ext 4.1: Calcule: (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(4x-3)}{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\log x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2\cos(h)-2+h^2}{h^4}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

Ext 4.2: Estime, através de uma aproximação linear local: (a) $\tan(0.05)$. (b) $\sqrt[3]{28}$.

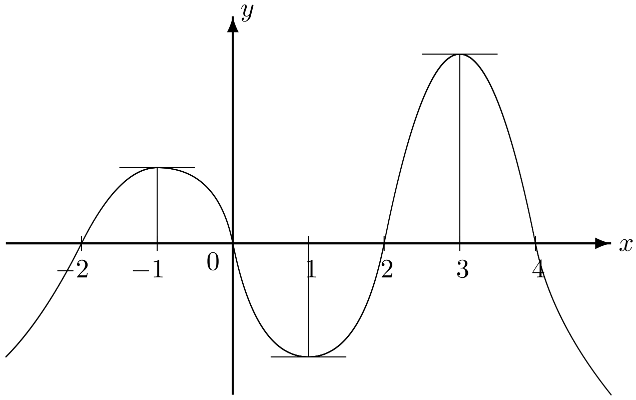
Ext 4.3: Determine a série de Taylor de: (a) $\operatorname{sen} x$ em $a = 0$; (b) $\log x$ em $a = 1$; (c) $\operatorname{senh} x$ em $a = 0$.

Ext 4.4: Suponha que $a > 0$. Prove que se b for pequeno o suficiente então vale a aproximação: $\sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \dfrac{b}{3a^2}$.

Ext 4.5: Esboce o gráfico de uma função f e de uma função g tal que:

(a) $g'(x) = x^2 - 5x + 6$ como derivada; (b) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

Ext 4.6: Esboce o gráfico de uma função $y = f(x)$ tal que $f(0) = -2$ e que tenha como derivada o seguinte gráfico:



Ext 4.7: Esboce o gráfico de uma função contínua f que verifique **todas** as condições indicadas simultaneamente.

(a) $f(0) = 3,\ f(2) = 1,\ f'(0) = f'(2) = 0$
$f'(x) > 0$ se $|x-1| > 1$ $\quad f'(x) < 0$ se $|x-1| < 1$
$f''(x) < 0$ se $x < 1$ $\quad f''(x) > 0$ se $x > 1$

(b) $f(2) = 4$; $f(4) = -1$.
$f'(2) = 0$; $\quad f'(x) > 0$ se $x < 2$; $\quad f'(x) < 0$ se $x > 2$;
$f''(4) = 0$; $\quad f''(x) < 0$ se $x < 4$; $\quad f''(x) > 0$ se $x > 4$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$.

Ext 4.8:

Para as questões de **esboço de gráfico**, antes do esboço deverá ser determinado:
(a) **todos** os pontos de interseção com os eixos x e y;
(b) os limites de no infinito e **todas** as assíntotas;
(c) os intervalos de crescimento e decrescimento;
(d) **todos** os pontos de máximo e mínimo locais;
(e) os intervalos com concavidade para cima e para baixo;

(função racional) Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:
PS: Ignore concavidade, não calcule f''.

(a) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-1)}$. $\qquad$ Dica: $f'(x) = -\dfrac{x^2+10\,x+13}{(x-1)^2\,(x+3)^2}$.

(b) $g(x) = \dfrac{x}{(x-3)(1-x)} + 3$. $\qquad$ Dica: $g'(x) = \dfrac{x^2-3}{(x-3)^2\,(x-1)^2}$.

Ext 4.9: (função racional) Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$. $\quad$ Dica: $f'(x) = 6\,\dfrac{x}{(x^2+3)^2}$ $\quad$ e $\quad f''(x) = 18\,\dfrac{1-x^2}{(x^2+3)^3}$.

(b) $g(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2} + 2$. $\quad$ Dica: $g'(x) = \dfrac{8\,x}{(x-2)^2\,(x+2)^2}$ $\quad$ e $\quad g''(x) = 8\,\dfrac{4+3\,x^2}{(4-x^2)^3}$.

Ext 4.10: (função não-racional) Esboce o gráfico da função:

(a) $f(x) = x\,\log x$. $\quad$ Dica: $f'(x) = \log x + 1$, $\quad f''(x) = \dfrac{1}{x}$.

(b) $f(x) = x\,e^{1-x^2}$. $\quad$ Dica: $f'(x) = (1-2x^2)\,e^{1-x^2}$, $\quad f''(x) = 2x(2x^2-3)\,e^{1-x^2}$,
$1/\sqrt{2} \approx 0.707$, $\quad \sqrt{3/2}) \approx 1.22$.

(c) $f(x) = x^2\,e^x$. $\quad$ Dica: $f'(x) = x(x+2)\,e^x$, $\quad f''(x) = (x^2+4\,x+2)\,e^x$,
$-2-\sqrt{2} \approx -3.41$, $\quad -2+\sqrt{2} \approx -0.58$).

Ext 4.11: Para cada função f e cada intervalo I abaixo, determine $\max\limits_{x\in I} f(x)$ e $\min\limits_{x\in I} f(x)$ e, se for possível, os pontos x_{max} e x_{min} onde o máximo/mínimo é atingidos.

(a) $f(x) = 8x^2 - x^4$ em $I = \mathbb{R}$; $I = [-1, 1]$. $\quad$ Dica: $f'(x) = 4x(4-x^2)$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ em $I = [1, 2]$ e $I = [-1, \infty)$. $\quad$ Dica: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$ em $[0, 2\pi]$.

Ext 4.12: Suponha que uma janela tenha a forma de um retângulo com um triângulo equilátero no topo. Assumindo que o perímetro é de 12m, determine as dimensões da janela para que penetre o máximo de luz possível.

Dica: área do triângulo equilátero é $L^2\sqrt{3}/4$.

Ext 4.13: Modele os seguintes problemas e depois resolva-os.

(a) Determine as dimensões do retângulo com perímetro $P > 0$ que possui a maior área.

(b) Um campo retangular está limitado por uma cerca em três de seus lados e por um córrego reto no quarto lado. Determine as dimensões do campo com área máxima que pode ser cercado com uma cerca de comprimento total P.

(c) Um terreno retangular deve ser cercado com dois tipos de cerca. Dois lados opostos devem receber uma cerca reforçada que custa R$3,00 por metro, enquanto os outros dois lados uma cerca que custa R$2,00 por metro. Quais as dimensões do terreno de maior área que pode ser cercado com R$6.000,00?

Ext 4.14:

(a) Determine os números x e y, com soma igual a S, cuja soma dos quadrados seja o menor possível.

(b) Determine o número positivo tal que a diferença entre ele e o seu cubo seja a menor e a maior possível.

(c) Suponha que o produto de dois número reais positivos é igual a $P > 0$. Determine o mínimo e máximo da soma destes dois números.

Ext 4.15: Queremos fazer uma caixa em forma de paralelepípedo de base quadrada e aberta em cima, isto é, uma caixa sem tampa de base quadrada.

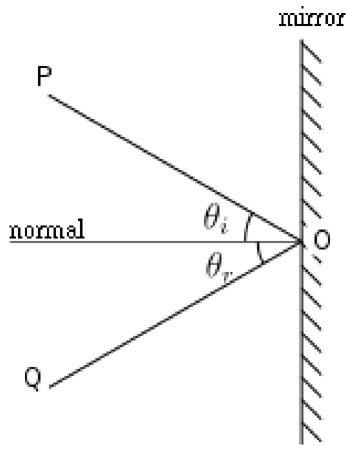
(a) Se o volume desta caixa é $V\ cm^3$, determine as dimensões que minimizam a quantidade de material.

(b) Se temos $A\ cm^2$ de material para fazer a caixa, determine o maior volume possível para esta caixa.

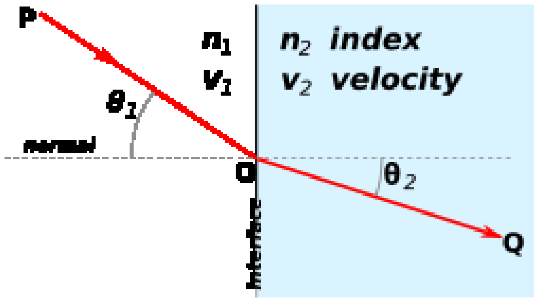
(c) Se o volume desta caixa é $V\ cm^3$ e o custo do material da base é duas vezes mais caro que o custo do material dos lados, determine as dimensões que minimizam o custo de fabricação.

Ext 4.16: (figuras e parte do texto retirados da Wikipédia) Em óptica, o princípio de Fermat ou princípio do menor tempo diz que o caminho de um raio de luz entre dois pontos deve ser o que pode ser feito no menor tempo possível. Deste princípio pode ser deduzido a lei de reflexão e a lei de refração de Snell. Vamos deduzir ambos neste exercício.

(a) Considere um raio de luz que parte de P e vai até Q depois de refletir no espelho em um ponto O. Determine a relação entre o ângulo de incidência θ_i e o ângulo de reflexão θ_r para que o tempo percorrido pelo raio seja o menor possível.



(b) Considere um raio de luz que parte de P e vai até Q passando de um meio onde a luz possui velocidade v_1 para um meio onde a velocidade é v_2. Determine a relação entre os ângulos θ_1 e θ_2 e as velocidades (a Lei de Snell) para que o tempo percorrido pelo raio seja o menor possível.



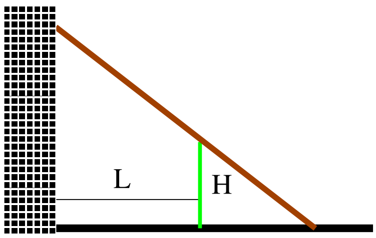
Ext 4.17: Determine o ponto da curva indicada mais próximo do ponto indicado.
(a) curva $x^2 - y^2 = 1$ e ponto $(0, 2)$; (b) curva $y = x^3$ e ponto $(4, 0)$;
(c) elipse $4x^2 + y^2 = 8$ e ponto $(1, 0)$; (d) curva $y = \sqrt{x}$ e ponto $(2, 0)$.

Ext 4.18: Determine as dimensões do retângulo inscrito em um semicírculo de raio R que possui a maior área.

Ext 4.19: Um cilindro é gerado ao se girar um retângulo de perímetro P em torno de um de seus lados. Qual deve ser a razão entre os lados do retângulo de tal forma que o cilindro tenha o maior volume possível?

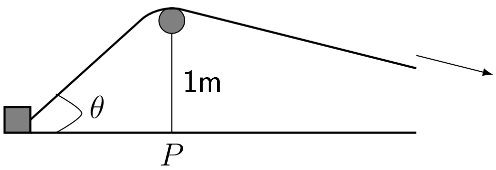
Ext 4.20: Maximize o volume do:
(a) cilindro circular reto inscrito numa esfera de raio R;
(b) cone reto inscrito, de cabeça para baixo, com vértice no centro da base de um cone circular reto de raio R e altura H.

Ext 4.21: Uma cerca de altura H fica em volta de um prédio bem alto. Se a cerca está a uma distância L do prédio, qual a menor escada que vai do chão por cima da cerca até a parede do prédio?



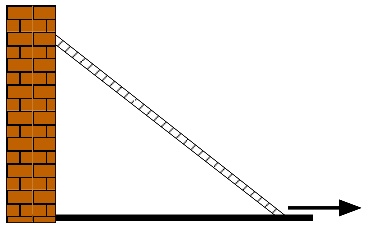
4.7.4 ⋆Problemas (Taxas Relacionadas)

Prob 4.1: Uma caixa está sendo puxada por uma corda que passa por uma roldana presa a 1m acima do solo. Determine a taxa de variação do ângulo θ, indicado na figura abaixo, no instante em que a caixa se encontra a 1m do ponto P, situado abaixo da roldana, sabendo que a caixa se desloca a 2m/min.

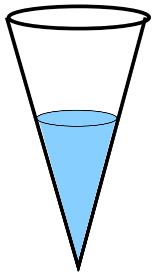


Prob 4.2: Quando o último vagão de um trem passa por baixo de um viaduto, um carro cruza o viaduto numa rodovia perpendicular aos trilhos e a 10m acima deles. O trem está a 20m/s e o carro a 40m/s. Com que velocidade se afastam um do outro após 2s?

Prob 4.3: Uma escada de tamanho L está apoiada numa parede. Se a base for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede com velocidade V, com que velocidade o topo da escada estará se movendo para baixo quando ele está a uma altura H do solo?

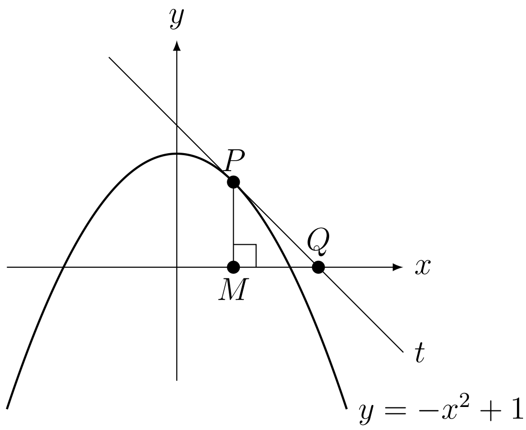


Prob 4.4: Um tanque cônico com água e vértice para baixo tem raio R metros no topo e altura H metros. Se a água fluir para dentro do tanque com taxa constante de $V\ m^3/s$, com que velocidade em m/s a profundidade da água vai crescer quando o tanque estiver com L metros de profundidade?

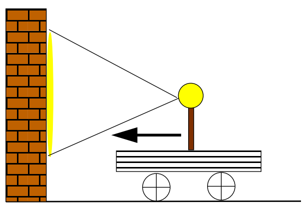


Prob 4.5: Um balão eleva-se verticalmente do solo com velocidade variável. Quando o balão está a 48m do solo, subindo com velocidade 3m/s, passa, exatamente sob ele um carro viajando a velocidade de 20m/s. Quatro segundos após este instante, com que velocidade varia a distância entre eles?

Prob 4.6: Considere a parábola $y = -x^2 + 1$ na figura abaixo, onde a reta t é tangente à parábola no primeiro quadrante em cada ponto $P(x, y)$. Sabendo que a taxa de variação da abscissa de P (coordenada x) é de 2cm/min, determine a taxa de variação do lado MQ do triângulo PMQ, quando o ponto de tangência é $P_0(1/\sqrt{2},\ 1/2)$.

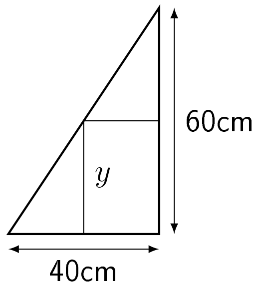


Prob 4.7: Uma fonte luminosa aproxima-se perpendicularmente de uma parede com velocidade constante de a metros/segundo, projetando uma imagem circular sobre esta. Sabe-se que a abertura do facho de luz (o ângulo entre os raios limites) é de 90^o. Calcule a velocidade com que a área iluminada sobre a parede está diminuindo quando a distância da fonte até a parede é de k metros.



Prob 4.8: Um retângulo possui lados que variam com o tempo e está inscrito numa região

triangular conforme a figura abaixo. Determine com que taxa a área do retângulo está variando no instante em que sua altura y mede 36 cm e está aumentando à taxa de 0,5 cm/s. Neste instante a área está aumentando ou diminuindo?

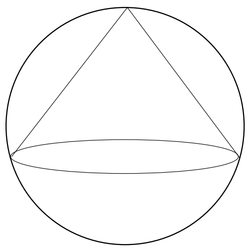


Prob 4.9: Um balão esférico está se esvaziando.

(a) Suponha que seu raio decresce a uma taxa constante de 15 cm/min. Com que taxa o ar (m^3/s) estará saindo do balão quando o raio for igual a 9 cm ?

(b) Suponha que no instante t_0, em que seu raio é R_0, se esvazia segundo uma taxa de $p_0\ m^3/s$. Determine a taxa de variação de sua área de superfície.

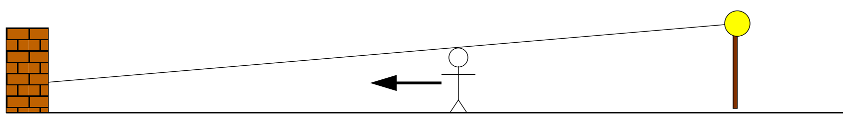
Prob 4.10: Um cone está inscrito em uma esfera conforme mostra figura abaixo. Se o raio da esfera está aumentando a uma taxa de 0,9 m/min e a altura do cone está aumentando a uma taxa de 0,8 m/min, com que taxa está aumentando o volume do cone no instante em que o raio da esfera mede 1m e a altura do cone mede 4/3m.



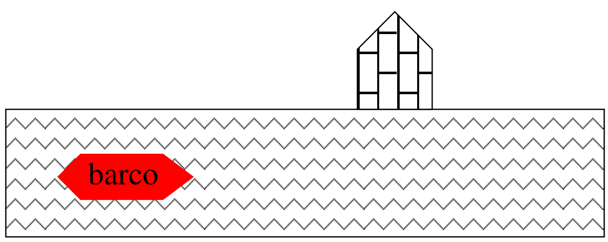
Prob 4.11: O perímetro de um quadrado cresce a uma taxa de 3m/s no instante $t = 4$. Neste momento sua área é de $100m^2$. Com qual velocidade sua área estará aumentando no instante $t = 4$.

Prob 4.12: Uma mulher de 1,80m de altura caminha em direção a um muro a uma razão de 4m/s. Diretamente atrás dela e a 40m do muro está um refletor 3m acima do nível do solo.

Quão rápido o comprimento da sombra da mulher estará variando no muro quando ela estiver a meio caminho entre o refletor e o muro? A sombra estará esticando-se ou encurtando-se?



Prob 4.13: Um certo trecho do rio Amazonas é praticamente reto. Neste trecho um barco desce o rio paralelamente a sua margem, a uma distância de $3m$ da margem, com velocidade constante de $10Km/h$. A casa de um pescador fica nesta mesma margem do Amazonas, na beira do rio.



Determine a velocidade com que o barco se aproxima (ou se afasta) da casa do pescador no instante em que ele está a $5m$ de distância da casa sabendo que ele:

(a) se aproxima da casa; (b) já passou, e se afasta da casa.

Prob 4.14: Mostre que:

(a) se o raio de um círculo cresce a uma taxa constante, então sua área cresce a uma taxa proporcional ao comprimento do raio.

(b) se a aresta de um cubo cresce a uma taxa constante, então seu volume cresce a uma taxa proporcional à área da superfície.

(c) se o volume de uma esfera está crescendo a uma taxa proporcional à área de sua superfície, então seu raio cresce a uma taxa constante.

Prob 4.15: Um triângulo retângulo variável ABC no plano xy tem um ângulo reto no vértice B, um vértice fixo A na origem, e o terceiro vértice C que varia na parábola $y = 1 + x^2$. O ponto B começa no ponto $(0, 1)$ no tempo $t = 0$ e se move para cima ao longo do eixo y com velocidade constante igual a 2cm/s. Quão rápido cresce a área do triângulo ABC quando $t = 8$? (adaptação de [Ap2] p. 181)

4.7.5 Desafios

Des 4.1: (formas indeterminadas) Vamos mostrar que 0^0, $(\infty)^0$ e 1^∞ podem dar qualquer número. Calcule os limites abaixo (use L'Hospital) assumindo que $k > 0$:

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(\log k)/(1+\log x)} [\text{“}=\text{''}\ 0^0]$; (b) $\lim_{x\to\infty} x^{(\log k)/(1+\log x)} [\text{“}=\text{''}\ (\infty)^0]$;

(c) $\lim_{x\to 0} (x+1)^{(\log k/x)} [\text{“}=\text{''}\ 1^\infty]$.

Des 4.2: Aproxime $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ perto de $x = 1$ por polinômio $p(h) = ah^2 + bh + c$.

Des 4.3: O objetivo deste exercício é obter uma fórmula fechada para π. Para isto vamos calcular a série de Taylor do $\arctan$.

(a) Verifique que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)$ (ver Desafio 5.14 da p.169).

(b) Determine $f^k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (k-ésima derivada).

(c) Determine a série de Taylor do $\arctan(x)$.

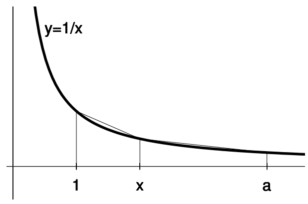
(d) Prove que $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} \cdots$.

Des 4.4: Sua casa possui um corredor longo de largura a que termina num corredor perpendicular a este de largura b. Você deseja mover um sofá de largura c (menor que a e b !). Desprezando a altura (considere o sofá como um retângulo), qual o comprimento máximo do sofá que pode fazer a curva ? (Somente monte o problema, as contas são complicadas, e podem ser resolvidos somente numericamente).

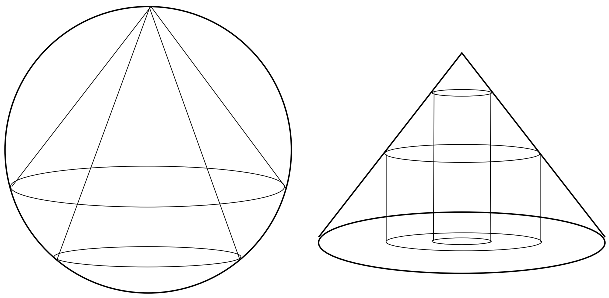
Des 4.5: Prove que a menor distância entre o ponto (a, b) até o gráfico de $y = f(x)$ é medido na reta normal ao gráfico de f.

Des 4.6: Prove que a distância entre (x_0, y_0) e a reta $ax + by + c = 0$ é $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Des 4.7: Podemos aproximar $\log a$ (onde $a > 1$) pela soma das áreas de dois trapézios, conforme a figura abaixo. Determine o ponto x de maneira que o erro da aproximação seja mínimo.



Des 4.8: Maximize a área:
(a) lateral do cone reto inscrito numa esfera de raio R;
(b) do cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de raio R e altura H.



Des 4.9: Deseja-se atravessar um lago circular até um ponto diametralmente oposto. Pode-se nadar e correr. A velocidade correndo é o dobro da velocidade nadando. Qual deve ser o percurso para se chegar mais rapidamente ao lado oposto?

Des 4.10: (curvatura) Dado uma curva $y = f(x)$ queremos determinar o raio do círculo que oscula esta curva no ponto $x = c$. Mais precisamente, queremos determinar o raio do círculo que passa por $(c, f(c))$ com mesma tangente e mesma derivada segunda que f.

Mostre que se $\eta_0 = f(c), \eta_1 = f'(c)$ e $\eta_2 = f''(c)$ então o raio do círculo é igual a $\dfrac{(1+\eta_1^2)^{3/2}}{|\eta_2|}$. O inverso do raio é chamado de curvatura da curva no ponto $x = c$.

Des 4.11: Se $a_1 < \cdots < a_n$, encontre o mínimo global de $g(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$.

Dica: Como a função é linear entre os intervalos, o mínimo ocorre em um dos a_i's. Considere como $g(x)$ se modifica quando se passa de um intervalo a outro. Tente fazer com $n = 2$ e depois com $n = 3$.

Des 4.12: Considere $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}; & x > 0; \\ 0; & x \leq 0. \end{cases}$. Prove que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (isto é, as derivadas de qualquer ordem vale 0 em $x = 0$).

Obs: Neste caso o polinômio de Taylor calculado em $x = 0$ será sempre $p(x) = 0$, e a aproximação **não** melhora com o aumento do grau do polinômio.

Des 4.13: Prove (desigualdade de Young[7]) que $xy \leq x^p + y^q$ para todo $x, y \geq 0$ e $p, q > 1$ com $1/p + 1/q = 1$.

Dica: Divida tudo por xy e defina $z = x^{p-1}/y$. Verifique que $pq = p + q$.

Des 4.14: Um objeto se desloca em uma semicircunferência de raio 5m com velocidade constante de $0,1$m/s. Em cada instante, h é a distância do objeto até o diâmetro. Durante o movimento da subida, qual será a taxa de variação da distância h no momento em que ela medir 4m?

[7]William Henry Young: ⋆1863 Londres, Inglaterra — †1942 Lausanne, Suiça.

Capítulo 5

Integral

Objetivos: Definir, informalmente, integral como área com sinal. Apresentar propriedades básicas que decorrem desta definição. Apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo. Definir integral de forma rigorosa e verificar dificuldade de integrar pela definição. Apresentar técnicas que permitem o cálculo da integral. As duas principais técnicas (substituição e por partes) são consequências de regras de derivação (produto e composta). As outras duas (trigonométrica e funções racionais) são truques algébricos.

5.1 Definição e Propriedades Básicas

5.1.1 Definição (informal) de Integral

Partindo da noção primitiva (intuitiva) de área da geometria, definimos a integral como a área com sinal.

Definição 5.1 (informal de integral) *Dada função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos sua integral $\int_a^b f(x)\, dx$ como a área com sinal entre o gráfico de f e o eixo x. Área acima do eixo x é positiva, abaixo é negativa.*

Observação 5.1 *Temos que escrever o símbolo dx, que indica qual variável da função está sendo integrada. Veja Exemplo 5.6 da p.137 para integrais com diversos dx's. Não tem sentido escrever $\int f(x)$. A "cobrinha", o símbolo da integral, representa um "s" bem grande de "soma" e sempre aparece com o dx (ou dt etc.). Veremos que este dx tem relação com a notação de Leibniz da derivada da Observação 3.4 da p.69.*

Exemplo 5.1 *Calcule as seguintes integrais:*

(a) $\int_2^8 7\, dx$; (b) $\int_0^3 x\, dx$; (c) $\int_{-5}^{-3} (x + 1)\, dx$; (d) $\int_{-4}^{2} x\, dx$; (e) $\int_{-4}^{2} t\, dx$.

Solução: Esboce o gráfico e determine a área com sinal.

(a) Calculando a área do retângulo de lados 7 e $8 - 2 = 6$ obtemos que $\int_2^8 7\, dx = 42$.

(b) Calculando a área do triângulo com base 3 e altura 3 obtemos que $\int_0^3 x\, dx = 9/2$.

(c) Calculando a área do trapézio de base $-3-(-5)=2$ e alturas 4 $(-5+1=-4)$ e 2 $(-3+1=-2)$ obtemos que sua área é $2(4+2)/2=6$. Como está abaixo do eixo é negativa. Assim, $\int_{-5}^{-3}(x+1)\,dx=-6$.

(d) Somando as áreas com sinal de dois triângulos obtemos $\int_{-4}^{2} x\,dx=-8+2=-6$.

(e) Calculando a área do retângulo de lados t e $2-(-4)=6$ obtemos $\int_{-4}^{2} t\,dx=6t$. ∎

Exemplo 5.2 *Calcule:* (a) $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$; (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$.

Solução: Esboce o gráfico. Pela simetria, mesmo não sabendo calcular a área para $x>0$ e $x<0$, elas são iguais com sinais opostos. Logo ambas integrais valem zero. ∎

Exemplo 5.3 *Calcule:*
(a) $\int_{1}^{6}|x-4|\,dx$; (b) $\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$; (c) $\int_{-4}^{2}-\sqrt{8-x^2-2x}\,dx$.

Solução: Esboce o gráfico e determine a área com sinal. (a) Somando a área de 2 triângulos, um com base 3 altura 3 e outro com base 2 e altura 2 obtemos $\int_{1}^{6}|x-4|\,dx=3(3)/2+2(2)/2=13/2$. (b) Observe que $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ é o gráfico da parte de cima do círculo de raio r centrado na origem. Assim a integral de 0 até r corresponde a $1/4$ da área do círculo. Logo, $\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi r^2$.

(c) **Completando o quadrado** obtemos que $8-x^2-2x=9-(x+1)^2$. Assim se $y=-\sqrt{8-(x+1)^2}$, $(x+1)^2+y^2=3^2$, a equação do círculo com raio 3 e centro $(-1,0)$. Assim $-1+3=2$ e $-1-3=-4$ sao os pontos dos diâmetro do círculo. Logo a integral é $\frac{1}{2}$ da área do círculo com sinal negativo. Logo, $\int_{-4}^{2}-\sqrt{8-x^2-2x}\,dx=-\frac{9\pi}{2}$. ∎

Por conveniência algébrica definimos a integral em um intervalo qualquer, incluindo, por exemplo $\int_{2}^{2}(\ldots)$ ou $\int_{7}^{5}(\ldots)$.

Definição 5.2 *Definimos* $\int_{a}^{a} f(x)\,dx=0$.

Se $b>a$, *definimos* $\int_{b}^{a} f(x)\,dx=-\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Assim, por definição, por exemplo: $\int_{2}^{2}(\ldots)=0$, $\int_{7}^{5}(\ldots)=-\int_{5}^{7}(\ldots)$.

5.1.2 Propriedades Básicas

Com definição informal de integral, podemos somente verificá-las. Recomendo voltar depois que aprender definição rigorosa de integral para prová-las com rigor.

Lema 5.3 (propriedades) *Dadas f, g funções integráveis são válidas:*

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + kg(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$ *(linearidade);*

(b) $f(x) \le g(x)$ *implica que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ *(monotonicidade);*

(c) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ *para todo* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(quebra do intervalo de integração).*

Prova: (a) e (b) decorrem da definição de integral (com ou sem rigor).

(c) Decorre da Definição 5.2. ■

Erro Comum: A integral do produto não é o produto das integrais.

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Considere o seguinte problema: Determine $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx$. Pela definição (informal) de integral como área, o valor desta integral é a área delimitada pelo intervalo $[-1, 1]$ no eixo x e pela parábola $y = 1 - x^2$. Como não sabemos calcular esta área, não sabemos calcular a integral. A criação do Cálculo (Newton e Leibniz) é marcada pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) que permite calcular esta e muitas outras integrais, embora não todas (Leia Observação 5.2 da p.137).

Teorema 5.4 (TFC: derivada da integral) *Se f é contínua em $[a, b]$, então $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

é derivável em (a, b) e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Prova: Aplicando o Lema 5.3 (c),

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(s)ds - \int_a^x f(s)ds\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)ds.$$

Aproximando $\displaystyle\int_x^{x+h} f(s)ds$ pela área do retângulo de base h e altura $f(x)$ obtemos que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx \frac{1}{h} hf(x) = f(x).$$

Assim, $F'(x) = f(x)$.

De forma rigorosa: Suponha $h > 0$. Pela Lema 5.3 (b) (monotonicidade),

$$h \min_{s\in[x,x+h]} f(s) \le F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(s)\,ds \le h \max_{s\in[x,x+h]} f(s).$$

Logo, dividindo por h (que é positivo e mantém desigualdade):

$$\min_{s\in[x,x+h]} f(s) \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le \max_{s\in[x,x+h]} f(s).$$

Como f é contínua, $\max\limits_{s\in[x,x+h]} f(s) \to f(x)$ quando $h \to 0$ e o mesmo ocorre com $\min$. Assim, pelo Teorema 1.16 da p.31 (Sanduíche),

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Se $h < 0$, como $x + h < x$,

$$-h \min_{s\in[x,x+h]} f(s) \le F(x) - F(x+h) = \int_{x+h}^{x} f(s)\,ds \le -h \max_{s\in[x,x+h]} f(s).$$

Dividindo por $-h$ (que é positivo) e aplicando o Teorema 1.16 novamente,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(x)-F(x+h)}{-h} = f(x).$$

■

Exemplo 5.4 *Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \int_\pi^x \operatorname{sen}(\sqrt{s^2+4})\,ds$ *no ponto* $x = \pi$.

Solução: Pelo TFC, $f'(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x^2+4})$. Note que $f(\pi) = \int_\pi^\pi (\cdots) = 0$ e $f'(\pi) = \operatorname{sen}(\sqrt{\pi^2+4})$. Assim, a equação da reta tangente é $y = \operatorname{sen}(\sqrt{\pi^2+4})(x-\pi)$. ■

Exemplo 5.5 *Calcule a derivada de* $f(x) = \int_{x^2}^{e} \log(4+\operatorname{sen} s)\,ds$.

Solução: Antes de aplicar o TFC temos que trocar os limites de integração para adequá-lo ao teorema. Assim, $f(x) = -\int_e^{x^2} \log(4+\operatorname{sen} s)\,ds$. Alem disso definimos $g(x) = x^2$ e $h(y) = \int_e^y \log(4+\operatorname{sen} s)\,ds$. Assim, $f(x) = -h(g(x))$. Pela derivada da composta, $f'(x) = -h'(g(x))g'(x)$. Pelo TFC, $h'(y) = \log(4+\operatorname{sen} y)$ e $g'(x) = 2x$. Assim, $f'(x) = -\log(4+\operatorname{sen}(x^2))2x$. ■

Corolário 5.5 (TFC: integral da derivada) *Se f é contínua em $[c,d]$ e se existe uma F tal que $f(x) = F'(x)$ em para todo $x \in (c,d)$, então, para todo $a, b \in (c,d)$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Defina $h(x) = F(x) - F(a) - \int_a^x f(s)\,ds$. para cada $x \in [c,d]$. Pelo Teorema 5.4 (TFC), $h'(x) = F'(x) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$ para todo $x \in [c,d]$. Logo h é constante. Como $h(a) = F(a) - F(a) - \int_a^a f(s)\,ds = 0$, $h(x) = 0$ para todo $x \in [c,d]$. Assim, $h(b) = 0 = F(b) - F(a) - \int_a^b f(s)\,ds$. ■

Devido a este resultado é comum a notação $F|_a^b = F(b) - F(a)$. Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \quad F\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplo 5.6 *Calcule: (a)* $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx$; *(b)* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y)\,dy$; *(c)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{s}\,ds$; *(d)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{s}\,dt$.

Solução: (a) Como $(x^5/5)' = x^4$, aplicando o TFC obtemos:

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{2}{5}.$$

(b) Como $(\operatorname{sen} y)' = \cos y$, aplicando o TFC obtemos:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(y)\,dy = \operatorname{sen} y|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(-\pi/2) = 1 - (-1) = 2.$$

(c) Aqui t é constante. Como $(t \log s)' = t/s$ (para $s > 0$), aplicando o TFC obtemos:

$$\int_1^2 \frac{t}{s}\,ds = t\,\log s|_1^2 = t(\log 2 - \log 1) = t\log 2.$$

(d) Aqui s é constante. Como $(t^2/(2s))' = t/s$, aplicando o TFC obtemos:

$$\int_1^2 \frac{t}{s}\,dt = \frac{t^2}{2s}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2s} - \frac{1^2}{2s} = \frac{3}{2s}.$$

■

Erro Comum: Aplicar o TFC sem tomar cuidado. Por exemplo, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1/1 - (-1/(-1)) = -2$. (a função $1/x^2 > 0$!). O erro é que $\dfrac{1}{x^2}$ não é contínua em $[-1, 1]$ (releia hipóteses do Teorema 5.4 da p.135 (TFC)). Veja como integrar corretamente no Exemplo 5.9 da p.139.

Definição 5.6 *Se F é derivável com $F' = f$, então dizemos que F é uma* **primitiva**, **antiderivada** *ou* **integral indefinida** *de f em $[a, b]$. Escrevemos, sem colocar limites de integração, que* $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$.

Observação 5.2 *Embora a integral de função contínua sempre exista,* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(-s^2)\,ds$ *não pode ser expresso por meio de funções elementares* ($\operatorname{sen}, \cos$, *etc.) (relacionada com função erro de Gauss da Observação 5.4 da p.140). Outros exemplos são:* $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^4}\,dx$, $\displaystyle\int \log(\log x)\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{\log x}\,dx$. *Existe uma teoria (Teorema de Liouville*[1] *de 1835: veja na Wikipedia em* `Liouville's theorem (differential algebra)`*) que determina quando uma função possui primitiva expressa por meio de funções elementares. Veja Desafio 5.4 da p.167 e Exemplo 6.15 da p.183.*

[1] Joseph Liouville: ⋆1809 França — †1882 França.

Com o TFC e sabendo derivar podemos integrar um conjunto de funções: Leia a tabela abaixo da direita para esquerda (a derivada) e da esquerda para direita (a integral).

Quadro de integrais básicas.

$F'(x)$	$F(x)$	
x^r	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$r \neq -1$
x^{-1}	$\log\lvert x\rvert$	
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	
e^x	e^x	
$\sec^2 x$	$\tan x$	
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x$	
$f(x)$	$\displaystyle\int f(x)\,dx$	

Exemplo 5.7 *Calcule:* *(a)* $\displaystyle\int (9\sqrt[4]{x^5} - 3x^\pi)\,dx$; *(b)* $\displaystyle\int \left(Ke^x + 3\cos x + \frac{5}{x}\right) dx$

Solução:

(a) $\displaystyle\int (9\sqrt[4]{x^5} - 3x^\pi)\,dx = \int (9x^{5/4} - 3x^\pi)\,dx = 9\frac{x^{5/4+1}}{5/4+1} - 3\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} = 4x^{9/4} - 3\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}$.

(b) $\displaystyle\int \left(Ke^x + 3\cos x + \frac{5}{x}\right) dx = Ke^x + 3\operatorname{sen} x + 5\log\lvert x\rvert$. ■

Utilizando a linearidade da integral do Lema 5.3 da p.135 concluímos que agora sabemos integrar qualquer polinômio. Observe que **não** sabemos integrar, por exemplo, um função racional qualquer (aprenderemos isto na Seção 5.7.1 da p.153).

Se F é uma primitiva ou integral indefinida de f então $F + C$, com $C \in \mathbb{R}$ qualquer, também será (pois $(F + C)' = F' = f$). Assim, sempre que dissermos que $\int f = F$ está subentendido que $\int f = F + C$. Por exemplo, quando dizemos que $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$, significa que $\operatorname{sen} x$ é uma primitiva de $\cos x$, isto é, que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, mas não é a única primitiva. De fato $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ para toda $C \in \mathbb{R}$. Por isso é comum os livros insistirem em colocar "$+C$" nas respostas das integrais indefinidas. Aqui neste livro vamos, em geral, omiti-lo.

Observação 5.3 *Em alguns exercícios colocamos a constante, mas a insistência no $+C$ é uma chateação: o aluno já tem que trabalhar duro para obter uma primitiva. Durante um exame, consulte seu professor ou, melhor ainda, coloque $+C$ sempre nas integrais indefinidas* $(\ddot\smile)$.

5.3 Integrais Impróprias

A Definição 5.11 da p.142 é para intervalos **limitados** e funções **limitadas**. Estendemos a definição da integral para intervalos ilimitados (infinitos) e quando o integrando é ilimitado (infinito) perto de um ponto. São chamadas de **integrais impróprias**. Todas são definidas de forma natural utilizando limite.

Definição 5.7 (intervalo ilimitado) *As integrais em intervalos ilimitados são definidas da seguinte forma:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx; \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx;$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definição 5.8 (integrando ilimitado) *Suponha que f é ilimitada somente próximo de $x = c \in (a, b)$, isto é, que $\lim_{x\to c}|f(x)| = \infty$. Definimos:*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{k\to c^-}\int_a^k f(x)\,dx; \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{k\to c^+}\int_k^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 5.8 *Calcule:* (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$.

Solução: (a) $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^a = -\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2(1^2)}$. Agora $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Embora a região seja infinita, sua área é finita.

(b) De forma análoga ao item anterior, $\displaystyle\int_a^2 \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2(2^2)} + \frac{1}{2a^2}$. Assim, $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2a^2}\right) = \infty$. Neste caso, a região é infinita e sua área é infinita.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^a) = 1 - 0 = 1$. Novamente, região infinita mas área finita.

(d) Note inicialmente (veja quadro de integrais da p.138) que $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(b) - \arctan(a)$. Note também que $\lim_{b\to\infty}\arctan(b) = \pi/2$ (porque?) e $\lim_{a\to-\infty}\arctan(a) = -\pi/2$ (porque?). Assim, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ será igual aos limites quando $a \to -\infty$ e $b \to \infty$ da integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(b) - \arctan(a)$. Logo o valor da integral é $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$. Novamente, região infinita mas área finita. ■

Exemplo 5.9 *Calcule* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solução: A primitiva de $1/x^2$ é $-1/x$. Assim poderia se pensar que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -1 - (-(-1)) = -1 - 1 = -2$. Mas isto é um absurdo pois a função $1/x^2$ é estritamente positiva. Não podemos aplicar o TFC aqui pois o integrando **não** é contínuo no domínio de integração. Temos que separar em duas integrais de -1 até 0 e de 0 até 1:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Como são integrais impróprias, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0^-} -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{b} = \lim_{b\to 0^-} -\frac{1}{b} - 1 = \infty.$

De forma análoga, $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty$. Então obtemos que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \infty$. ∎

Questão para pensar.
Como pode uma região **infinita** possuir uma área **finita**? Imagine um muro cercando esta região (por exemplo a região delimitada pelo eixo x e por $y = 1/(x^2+1)$ do Exemplo 5.8 (d)). O comprimento do muro é ∞. Podemos pintar o "chão" desta região com quantidade finita de tinta pois sua área é finita mas é é impossível pintar as paredes pois seu comprimento é infinito. Explique! (⌣̈)

Observação 5.4 (gaussiana) *Em estatística (e em Matemática) é **muito** importante a identidade abaixo, mas que somente em Cálculo III (integrais múltiplas) será demonstrado:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Pode-se prová-la com técnicas de Cálculo I ([Sp] p.329) mas é bem mais difícil. A função erf$(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, dt$ *é chamada de função erro de Gauss*[2]*. Veja Desafio 5.7 da p.167, Obervação 5.2 da p.137 e Wikipedia* `Error function`.

5.4 ⋆Definição (com rigor) de Integral[1]

O conceito de integral tem suas origens no **Método da Exaustão** devido, provavelmente, a Eudoxo[3] e que teve Arquimedes[4] como um dos seus grandes desenvolvedores. A motivação deste método foi o cálculo de áreas e volumes de figuras com fronteiras curvas.

Definimos no início deste capítulo (Definição 5.1 da p.133) a integral como "área com sinal". É uma definição informal (não-rigorosa) pois depende do conceito — até agora não definido — de área. Nesta seção definimos a integral com rigor de forma completamente analítica. É uma definição que não depende do conceito de área, embora inspirado por ele. Depois (na seção de Aplicações da Integral) invertemos o caminho e e definimos área utilizando a integral. De fato os conceitos geométricos de comprimento de curva, volume de sólidos e área de superfície são todos definidos utilizando integrais.

Apresentamos aqui a integral de Riemann[5] usando a definição devida a Darboux[6]. Começamos definindo partição (dividir um intervalo em pedaços) e soma superior e inferior.

[2]Carl Friedrich Gauss: ⋆1777 Brunswick, Alemanha — †1855 Göttingen, Alemanha.
[1]A leitura desta seção é opcional.
[3]Eudoxo: ⋆408 A.C. Cnidus, Turquia — †355 A.C. Cnidus, Turquia.
[4]Arquimedes: ⋆287 A.C. Siracusa, Itália — †212 A.C. Siracusa, Itália.
[5]Georg Friedrich Bernhard Riemann: ⋆1826 Breselenz, Alemanha — †1866 Selasca, Itália.
[6]Jean Gaston Darboux: ⋆1842 Nimes, França — †1917 Paris, França.

Definição 5.9 (partição) *Chamamos* **partição** *de* $[a, b]$ *um conjunto* $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ *com* $a = x_0 \le \cdots \le x_n = b$. *Desta forma o intervalo* $[a, b]$ *é particionado em intervalos* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. *Denotamos o tamanho do intervalo* I_i *por* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ *e (verifique!)* $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$. *Definimos o tamanho da partição* $|P| = \max(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$.

Definição 5.10 (soma superior e inferior) *Definimos a* ***soma superior e inferior*** *de uma função limitada* f *com relação à partição* P, *respectivamente, por*

$$I(f; P) = \sum_{i=1}^{n} \min_{x \in I_i}(f(x))\Delta x_i \quad e \quad S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in I_i}(f(x))\Delta x_i.$$

Observação 5.5 *O correto seria colocar* sup *e* inf *ao invés de máximo e mínimo. Veja Definição 5.26 da p.167. Se a função é contínua pode-se colocar* max *e* min.

A interpretação geométrica de $I(f; P)$ e $S(f; P)$ para uma função f contínua e positiva é dada na Figura 5.1. A área pintada de cinza (riscada ou não) corresponde a soma superior $S(f; P)$ enquanto que a área riscada corresponde a soma inferior $I(f; P)$.

Vemos então que $S(f; P)$ e $I(f; P)$ são aproximações por excesso e por falta, respectivamente, para a área da região delimitada pelo gráfico de f, o eixo x, a reta $x = a$ e a reta $x = b$. Observamos ainda que a área riscada está contida na área cinza, refletindo o fato que $I(f; P) \le S(f; P)$.

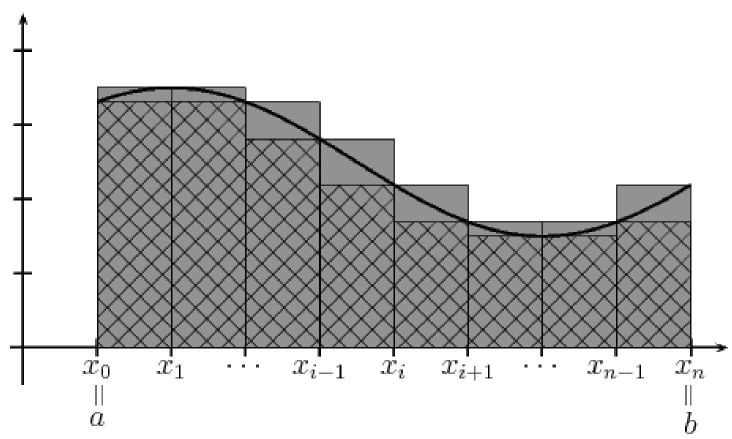


Figura 5.1: Interpretação geométrica de $S(f; P)$ e $I(f; P)$ para f contínua e positiva.

Definição 5.11 (rigorosa de integral) *Considere uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{|P|\to 0} S(f; P) = \lim_{|P|\to 0} I(f; P),$$

isto é, se a soma superior convergir para soma inferior quando o tamanho de cada intervalo da partição P vai para zero, dizemos que a integral (de Riemann) existe e representamos este valor por $\int_a^b f(x)\,dx$. Informalmente (mas utilizado em deduções não-rigorosas feitas na Física, na Engenharia e nos livros de Cálculo, inclusive neste)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Exemplo 5.10 *Considere $f(x) = \begin{cases} 0; & x \neq 1; \\ 3; & x = 1 \end{cases}$ (função vale zero em todos os pontos menos em $x = 1$, onde vale 3. Calcule $\int_0^4 f(x)\,dx$.*

Solução: Quando calcularmos $\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$ todos os termos serão zero menos o que contém o ponto $x = 1$. Assim obteremos $f(1)\Delta x_i = 3\Delta x_i$. Quando $\Delta x_i \to 0$ isto vai para zero, logo, $\int_0^4 f(x)\,dx = 0$. ∎

Neste exemplo observamos que o valor da função em um ponto não altera o valor da integral. E se mudarmos em dois pontos? Também não se altera. Logo podemos modificar em todos os pontos transformando a função f na função constante $g(x) = 3$ para todo x sem alterar a integral? A resposta é não: podemos modificar no máximo num conjunto infinito enumerável (Definição 2.13 da p.57). Mais detalhes num livro de Análise ([NC]).

Observação 5.6 *A fórmula da área do círculo inclui a circunferência ou não?*
(a) Se não estamos incluindo, a área é a mesma após a retirada de um círculo. Agora vamos retirando todas as circunferências do círculo, uma de cada vez. Ao final teremos retirado tudo e a área será 0!
(b) se estamos incluindo, qual a área da circunferência ***sem*** *o círculo?*
Pense um pouco sobre isso.

Exemplo 5.11 *Calcule $\int_0^4 I_{\mathbb{Q}}(x)\,dx$, onde $I_{\mathbb{Q}}$ é a função indicadora dos racionais.*

Solução: Aqui observe que o $\max(I_{\mathbb{Q}}) = 1$ e $\min(I_{\mathbb{Q}}) = 0$ em qualquer intervalo não-degenerado. Assim a soma inferior $I(I_{\mathbb{Q}}; P) = 0 \cdot 4 = 0$ e $S(I_{\mathbb{Q}}; P) = 1 \cdot 4 = 4$ independente da partição. Assim os limites quando $\Delta x_i \to 0$ são distintos e a integral não existe. Mas não se preocupe, não é um caso típico: de forma geral a integral existe (podemos não saber calcular seu valor . . .). ∎

Exemplo 5.12 *Considere $f(x) = \begin{cases} 2; & x \leq 3; \\ 5; & x > 3 \end{cases}$. Calcule $\int_0^7 f(x)\,dx$.*

Solução: Em quase todos intervalos a função será constante, com $\min_{x \in I_i}(f(x)) = \max_{x \in I_i}(f(x))$. O único onde isto não ocorre, digamos I_k, é o que contém o $x = 3$. Aqui o $\min_{x \in I_k} f(x) = 2$ e o $\max_{x \in I_k} f(x) = 5$. Assim o

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}(S(f;P) - I(f;P)) = (\max_{x \in I_k} f(x) - \min_{x \in I_k} f(x))\Delta x_k = (5-2)\Delta x_k = 3\Delta x_k.$$

Assim, quando $\Delta x_k \to 0$ obtemos que $S(f;P) \to I(f;P)$. Assim a integral existe e será igual a ignorar este ponto: $\int_0^7 f(x)\,dx = 2(3) + 4(5) = 26$. ■

Apresentamos sem prova um resultado teórico importante, caso particular do Teorema de Lebesgue que caracteriza as funções que são integráveis a Riemann.

Teorema 5.12 (Lebesgue) *Toda função contínua em $[a,b]$ ou cujo conjunto dos pontos de descontinuidade em $[a,b]$ é **enumerável** (finito ou infinito) é integrável em $[a,b]$.*

Observação 5.7 *Assim as funções contínuas ou com número finito de pontos de descontinuidade (saltos) são integráveis. O conjunto dos pontos de descontinuidade pode até ser infinito enumerável (ver Definição 2.13 da p.57), como por exemplo a função do item (b) do Desafio 2.2 da p.62, que continuará sendo integrável. A função $I_{\mathbb{Q}}$ não é integrável por ser descontínua em **todos** os pontos de $\mathbb{R}$ (não enumerável pelo Teorema 2.14 da p.57).*

Tiro da cartola a identidade: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Pode-se prová-la por indução.

Lema 5.13 *Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer,* (a) $\int_0^a x\,dx = a^2/2$ e (b) $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$.

Prova: (a) Suponha $a > 0$. Dividimos o intervalo $[0,a]$ em n partes iguais definindo $\Delta x_i = a/n$ e $x_i = ia/n$ (i vezes o tamanho de cada intervalo). Assim, $x_0 = 0$ e $x_n = a$. Agora, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i)(a/n) = \sum_{i=1}^{n}(ia/n)(a/n) = \frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$. Aplicando a fórmula (de Gauss) $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos que:

$$\int_0^a x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{2n^2}n(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2}{2}1(1+\frac{1}{n}) = \frac{a^2}{2}1(1) = \frac{a^2}{2}.$$

Se $a < 0$, $\int_0^a x\,dx = -\int_a^0 x\,dx$. Calculamos pela definição a segunda integral com $\Delta x_i = -a/n > 0$. Obteremos o mesmo resultado mas com sinal $-$ na frente.
Assim, $\int_a^0 x\,dx = -a^2/2$. Logo, $\int_0^a x\,dx = -\int_a^0 x\,dx = -(-a^2/2) = a^2/2$.

(b) Suponha $a > 0$ e notação do item (a) (para $a < 0$ veja argumento item (a)). Agora, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2(a/n) = \sum_{i=1}^{n}(ia/n)^2(a/n) = \frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$. Aplicando a fórmula para

$\sum_{i=1}^{n} i^2$ e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos que:

$$\int_0^a x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6n^3} n(n+1)(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6} 1(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{a^3}{6} 1(1)(2) = \frac{a^3}{3}.$$

■

Corolário 5.14 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, (a) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ e (b) $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.*

Prova: Basta utilizar as propriedades da integral. Assim, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$. ■

Exemplo 5.13 *Calcule pela definição $\int_0^a e^x\,dx$ para $a \in \mathbb{R}$.*

Solução: Suponha que $a > 0$. Utilizando notação do Lema 5.13, $\Delta x_i = a/n$, $x_i = ia/n$, e $f(x) = e^x$. Assim $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{ia/n}(a/n) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho^i$ com $\rho = e^{a/n}$. Pela fórmula da soma da PG, $\sum_{i=1}^{n} \rho^i = \frac{\rho^{n+1}-\rho}{\rho - 1} = \frac{e^{a(n+1)/n} - e^{a/n}}{e^{a/n}-1}$. Passando ao limite quando $n \to \infty$, o numerador converge para $e^a - 1$. Assim

$$\int_0^a e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\frac{e^{a(n+1)/n} - e^{a/n}}{e^{a/n}-1} = (e^a - 1)\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n(e^{a/n}-1)}.$$

Agora utilizando LH (ver Problema 4.1 da p.120), $\lim_{n\to\infty} n(e^{a/n}-1) = a$. Logo o limite vale 1 e concluímos (o que sabíamos pelo TFC): $\int_0^a e^x\,dx = e^a - 1$. Se $a < 0$ repita argumento da prova do Lema 5.13. ■

Observação 5.8 *É difícil integrar pela definição e fácil derivar. Para calcular $\int x^n\,dx$ para n inteiro precisamos de identidades $\sum_{i=1}^{n} i^3$, $\sum_{i=1}^{n} i^4$, etc. Pode-se calcular pela definição $\int \operatorname{sen}(x)\,dx$ (ver [Co], p.86). O TFC (Corolário 5.5 da p.136) permite calcular estas integrais facilmente e por esta razão é associado com a invenção do cálculo.*

5.5 Técnicas Básicas

Apresentamos duas técnicas básicas: por substituição e por partes. Elas são decorrência de regras de derivada da composta e do produto como mostra tabela abaixo:

Derivada da(o):	composta	produto.
Integral por:	substituição	partes.

Além de serem técnicas importantes para o cálculo de integrais, ambas são fundamentais do ponto de vista teórico também. Ambas são estendidas para o cálculo de integrais em várias variáveis. A integração por partes é fundamental para se estender o conceito de derivada de função (teoria das distribuições). As outras técnicas são truques, que podem ser substituídas por softwares algébricos (CAS: Computer Algebra System) como o `maxima`. Deixo a palavra com o Spivak:

> Substituição e integração por partes são as únicas técnicas fundamentais (de integração) que você deve aprender. Mesmo assim, como mostram alguns exemplos, o sucesso depende de alguns truques adicionais. [Sp, p. 315].

Truques adicionais são: utilizar identidades trigonométricas e a técnica de frações parciais.

5.5.1 Integração por Substituição

Esta técnica decorre da regra da derivada da composição de funções. Integrar por substituição é o mesmo que trocar variáveis na integração. Já tínhamos feito isto com limites no Lema 1.6 da p.35. Aqui o poder da notação de Leibniz $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ será apresentado. Por esta razão, a prova sem rigor do Lema abaixo é mais importante, pois será a ideia utilizada em todos os exemplos. Em cálculo de várias variáveis o g' será substituído pelo chamado jacobiano da função.

Lema 5.15 (integral por substituição) *Suponha que a derivada de g é integrável no intervalo $[a, b]$ e f é contínua (na imagem do intervalo $[a, b]$ por g), então*

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Prova: (sem rigor) Tome $u = g(x)$. Utilizando notação de Leibniz, $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$. Assim, $du = g'(x)\,dx$. Assim $\displaystyle\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ se transforma em $\displaystyle\int f(u)du$. Agora temos que trocar os limites de integração. Quando $x = a$, $u = g(a)$; quando $x = b$, $u = g(b)$. Assim obtemos o resultado. ■

Prova: [com rigor] Considere F uma primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$. (por exemplo, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\,ds$). Defina $h(x) = F(g(x))$. Pela Regra da Cadeia $h'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$. Este é exatamente o integrando do lado esquerdo. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a).$$

Por outro lado, também pelo TFC,

$$h(b) - h(a) = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\,du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Daí segue o resultado. ■

Na prática utilizamos a técnica da prova sem rigor: Chamamos parte do integrando de u, calculamos du e fazemos a substituição, esperando obter algo mais simples, diretamente integrável pelo quadro de integrais da p.138. No final **desfazemos** a substituição para obter a integral com relação à variável original.

Exemplo 5.14 *(integrais indefinidas) Considere constantes $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determine:*
(a) $\int \operatorname{sen}(b - a\theta)\, d\theta$; *(b)* $\int (t/a - b)^{100}\, dt$;

Solução: (a) Tome $u = b - a\theta$. Então, $du = -a\, d\theta$. Logo, $d\theta = -du/a$. Assim, $\int \operatorname{sen}(b - a\theta)\, d\theta = \int -\operatorname{sen}(u)\, du/a = (-1/a)\int \operatorname{sen} u\, du = (-1/a)(-\cos u) = \cos(u)/a$. Desfazendo a substituição obtemos $\cos(b - a\theta)/a$.

(b) Tome $u = t/a - b$. Então $du = (1/a)\, dt$. Logo, $dt = a\, du$. Assim, $\int (t/a - b)^{100}\, dt = \int u^{100} a\, du = a\dfrac{u^{101}}{101}$; Desfazendo a substituição obtemos $a\dfrac{(at - b)^{101}}{101}$. ■

Exemplo 5.15 *(integrais definidas) Determine: (a)* $\int_{-1}^{3} e^{-2x}\, dx$; *(b)* $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\, dx$.

Solução: (a) Tome $u = -2x$. Então, $du = -2\, dx$. Logo, $dx = -du/2$. Quando $x = -1$, $u = 2$; quando $x = 3$, $u = -6$. Logo, trocando integrando, dx e limites de integração, $\int_{-1}^{3} e^{-2x}\, dx = \int_2^{-6} e^u(-1/2)\, du = -\dfrac{e^u}{2}\Big|_2^{-6} = -\dfrac{e^{-6}}{2} - (-\dfrac{e^2}{2}) = \dfrac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$.

Outro modo é primeiro encontrar a primitiva: $\int e^{-2x}\, dx = \int e^u(-1/2)\, du = -\dfrac{e^u}{2} = -\dfrac{e^{-2x}}{2}$. Agora basta calcular $\int_{-1}^{3} e^{-2x}\, dx = -\dfrac{e^{-2x}}{2}\Big|_{-1}^{3} = \dfrac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$.

(b) Tome $u = 3x^2$. Então $du = 6x\, dx$. Logo, $x\, dx = du/6$. Quando $x = 0$, $u = 0$; quando $x = \sqrt{2}$, $u = 6$. Logo, trocando integrando, dx e limites de integração, $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\, dx = \int_0^6 e^u\, du/6 = \dfrac{e^u}{6}\Big|_0^6 = \dfrac{e^6}{6} - \dfrac{1}{6}$.

Outro modo é primeiro encontrar a primitiva: $\int xe^{3x^2}\, dx = \int e^u\, du/6 = \dfrac{e^u}{6} = \dfrac{e^{3x^2}}{6}$.

Agora basta calcular $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\, dx = \dfrac{e^{3x^2}}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{e^6}{6} - \dfrac{1}{6}$. ■

Observação 5.9 *Na integral* ***definida*** *(com limites de integração) temos duas opções:*
(a) Calcular primeiro a integral ***indefinida*** *e depois substituir nos limites de integração;*
(b) Trocar os limites de integração (o que faremos normalmente).

Exemplo 5.16 *Determine:*
(a) $\int \dfrac{x\, dx}{(2 - 3x^2)^5}$; *(b)* $\int \tan x\, dx$; *(c)* $\int \cos x \operatorname{sen}^6 x\, dx$; *(d)* $\int \sec^2 x \tan^6 x\, dx$.

Solução: (a) A escolha que vai funcionar direto é tomar $u = 2 - 3x^2$ pois $du = -6x\, dx$, que vai substituir bem o termo $x\, dx$. Assim obtemos

$$\int -\frac{du}{6u^5} = \frac{1}{24u^4} = \frac{1}{24(2 - 3x^2)^4}.$$

Outra solução, que não é tão direta, é tomar $u = x^2$ pois $du = 2x\,dx$. Obtemos que $\displaystyle\int \frac{du}{2(2-3u)^5}$. Assim precisaríamos fazer nova substituição $v = 2 - 3u$, $dv = -3\,du$:

$$\int \frac{-dv/3}{2v^5} = -\frac{1}{6}\int v^{-5}\,dv = -\frac{1}{6}\cdot\frac{v^{-4}}{-4} = \frac{v^{-4}}{24} = \frac{1}{24(2-3x^2)^4}.$$

(b) Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, tome $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Assim $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{du}{u} = -\log|u| = -\log|\cos x| = \log|(\cos x)^{-1}| = \log|\sec x|$.
Caso tome-se $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$ e não será possível fazer a substituição (verifique!).

(c) Tome $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$. Assim, $\displaystyle\int \cos x \operatorname{sen}^6 x\,dx = \int u^6\,du = \frac{u^7}{7} = \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}$.
Caso tome-se $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ e não será possível fazer a substituição (verifique!).

(d) Tome $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$. Assim $\displaystyle\int \sec^2 x \tan^6 x\,dx = \int u^6\,du = u^7/7 = \frac{\tan^7 x}{7}$. ∎

Observação 5.10 *O ponto crucial nos exemplos é escolher quem vai fazer o papel de u. Algumas escolhas de u vão dar mais trabalho, outras vão dar em nada ...*

Erro Comum: Não fazer a substituição completa na integral e fazer coisas sem sentido, misturando nova variável e antiga. Por exemplo, no cálculo de $\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$, substituir $u = x^2$, e escrever que:

$$\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int x\operatorname{sen}(u)\,dx = \operatorname{sen}(u)\int x\,dx = \operatorname{sen}(u)\frac{x^2}{2}\ \textbf{(errado)}.$$

O correto é determinar que $du = 2x\,dx$ e :

$$\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\,du/2 = -\frac{\cos(u)}{2} = -\frac{\cos(x^2)}{2}\textbf{(correto)}.$$

Observação 5.11 *Suponha que você calculou $\int f(x)\,dx = F(x)$. Depois de integrar verifique se está certo checando se $F'(x) = f(x)$. Esta verificação é fácil pois derivar é **muito** mais fácil do que integrar.*

5.5.2 Integração por Partes

Lema 5.16 (integração por partes) *Sejam f e g funções deriváveis em $[a, b]$ com f' e g' integráveis. Então $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.*

Prova: (sem rigor) Como $(uv)' = vu' + uv'$, $\int (uv)'\,dx = uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$. Pela notação de Leibniz, $\dfrac{du}{dx} = u'$. Assim, $du = u'\,dx$ e de forma análoga $dv = v'\,dx$. Podemos escrever então que $uv = \int v\,du + \int u\,dv$.

Tome $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$. Assim obtemos que $du = f'(x)\,dx$ e (integrando $\int dv = v = \int g'(x)\,dx = g(x)$) $v = g(x)$.

Obtemos o resultado substituindo os limites de integração. ■

Prova: (com rigor) Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Pela regra da derivada do produto, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Assim, integrando os dois lados de $x = a$ até $x = b$ e utilizando o TFC temos que:

$$\int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Rearrumando os termos obtemos o resultado. ■

Exemplo 5.17 *Determine:* (a) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^x\,x\,dx$; (b) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$.

Solução: (a) Tome $u = x$ e $dv = e^x\,dx$. Assim, $du = dx$ e $v = e^x$. Logo, $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$. Agora utilizamos os limites de integração: $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^x\,x\,dx = xe^x - e^x\Big|_0^{\log 2} = 2\log(2) - 1$.

Caso tivesse tomado $u = e^x$ e $dv = x\,dx$, teríamos $du = e^x\,dx$ e $v = x^2/2$. Assim, $\displaystyle\int e^x\,x\,dx = \frac{x^2e^x}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$, uma integral ainda mais complicada! Reflita sobre isso...

(b) Tome $u = x$ e $dv = \cos x\,dx$. Assim $du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Logo,
$\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x$. ■

Observação 5.12 *Esta técnica é útil quando a função que deve ser integrada é um produto fg e a derivada de f é mais simples do que f (por exemplo, $f = \log, \arctan, \operatorname{arcsen}$, constante ou polinômio) e g uma função tal que $\int g$ não é mais complicada do que g (por exemplo, g é exponencial, seno, cosseno mas g **não** é um polinômio, que aumenta de grau a cada integração). Veja os exemplos acima novamente. No final veremos o que fazer se tanto f quanto g não possui derivada mais simples que a função (por exemplo, $f = \operatorname{sen}$, $g = \exp$).*

Se f' é mais simples do que f podemos usar o truque de tomar $u = f$ e $dv = 1 \cdot dx$ na integração por partes. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 5.18 *Determine:*
(a) $\displaystyle\int \log x\,dx$; (b) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(7x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int \sec^2 x\log(\tan x)\,dx$.

Solução: (a) Tome $u = \log x$, $dv = dx$. Assim, $du = dx/x$ e $v = x$. Logo, $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - \int x(dx/x) = x\log x - \int dx = x\log x - x$.

(b) Tome $u = \operatorname{arcsen}(7x)$, $dv = dx$. Assim, (cuidado com a regra da cadeia) $du = \dfrac{7}{\sqrt{1-49x^2}}\,dx$ e $v = x$. Logo, $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(7x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(7x) - \int \frac{7x}{\sqrt{1-49x^2}}\,dx$. Agora resolvemos a integral tomando $z = 1 - 49x^2$, $dz = -(2)49x\,dx$. Logo,

$$-\int \frac{7x}{\sqrt{1-49x^2}}\,dx = \int \frac{dz}{14\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{z}}{7} = \frac{\sqrt{1-49x^2}}{7}.$$

Juntando tudo obtemos, $\int \operatorname{arcsen}(7x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(7x) + \dfrac{\sqrt{1-49x^2}}{7}$.

(c) Tome $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\,dx$. Assim $\int \sec^2 x \log(\tan x)\,dx = \int \log u\,du =$ (pelo item (a)) $u\log u - u = \tan x \log(\tan x) - \tan x$. ■

Um outro truque é integrar por partes duas vezes para obter a mesma função novamente.

Exemplo 5.19 *Determine:* *(a)* $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$; *(b)* $\int (1/x)\log x\,dx$.

Solução: (a) Tome $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ (poderia ser o contrário, experimente ...). Assim, $du = e^x\,dx$ e $v = -\cos x$. Logo, $K = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x\cos x - \int(-\cos x)e^x\,dx = -e^x\cos x + \int \cos x e^x\,dx$. De forma análoga, tomando $u = e^x$ e $dv = \cos x\,dx$, Assim, $du = e^x\,dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Logo, $\int \cos x e^x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x e^x\,dx = e^x\operatorname{sen} x - K$.

Assim, $K = -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - K$ ou $2K = -e^x\cos x + e^x \operatorname{sen} x$. Logo, $K = \int e^x\operatorname{sen} x\,dx = \dfrac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Ver generalização no Desafio 5.5 da p.167.

(b) Tome $u = \log x$ e $dv = dx/x$. Assim, $du = dx/x$, $v = \log x$. Assim, $K = \int (1/x)\log x\,dx = \log^2 x - \int (1/x)\log x\,dx = \log^2 x - K$.

Portanto, $2K = \log^2 x$. Logo, $K = \int (1/x)\log x\,dx = \dfrac{\log^2 x}{2}$. ■

Integrar utilizando estas técnicas é trabalhoso, mas com prática vira um jogo divertido. No entanto saber aplicar técnicas **não** significa entender o conceito de integração.

> Algumas integrais requerem pouco mais que manipulações algébricas, e consequentemente testam sua habilidade de descobrir truques algébricos ao invés de testar seu entendimento do processo de integração. [Sp, p.320].

5.6 Técnicas Trigonométricas

5.6.1 Integração Trigonométrica

Chamamos de integrais trigonométricas aquelas que envolvem produtos de funções trigonométricas. Uma aplicação importante é na série de Fourier (veja Seção 6.7 da p.186).

O principal tipo de integral trigonométrica é: $\boxed{\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx, \quad \text{com } n, m \in \mathbb{N}.}$

Pode-se calcular esta integral com um truque simples (Problema 5.4 da p.165) ou com fórmulas de redução (exercício Extra 5.13 da p.164). Vamos, entretanto, tomar outro caminho e apresentar um teorema que permite calcular, além deste caso clássico, integrais como $\int \cos^2(3x)\operatorname{sen}^7(8x)\,\cos^5(4x)\,dx$.

Começamos com identidades trigonométricas, apresentadas como um lema, que transformam produtos de senos/cossenos em somas.

Lema 5.17 *Considere* $m, n \in \mathbb{R}$. *Então:*

$$
\begin{aligned}
2\,\mathrm{sen}(m)\cos(n) &= \mathrm{sen}(m+n) + \mathrm{sen}(m-n);\\
2\cos(m)\cos(n) &= \cos(m+n) + \cos(m-n);\\
2\,\mathrm{sen}(m)\,\mathrm{sen}(n) &= \cos(m-n) - \cos(m+n).
\end{aligned}
$$

Prova: Das fórmulas de seno e cosseno de soma de ângulos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{sen}(m+n) &= \mathrm{sen}(m)\cos(n) + \cos(m)\,\mathrm{sen}(n);\\
\mathrm{sen}(m-n) &= \mathrm{sen}(m)\cos(n) - \cos(m)\,\mathrm{sen}(n);\\
\cos(m+n) &= \cos(m)\cos(n) - \mathrm{sen}(m)\,\mathrm{sen}(n);\\
\cos(m-n) &= \cos(m)\cos(n) + \mathrm{sen}(m)\,\mathrm{sen}(n).
\end{aligned}
$$

Somando as duas primeiras obtemos que $2\,\mathrm{sen}(m)\cos(n) = \mathrm{sen}(m+n) + \mathrm{sen}(m-n)$. De forma similar obtemos as outras identidades. ■

Teorema 5.18 (Integral Trigonométrica) *Considere* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, \ldots, N$ *e* $j = 1, \ldots M$. *Então existem* $J \in \mathbb{N}$ *e* $A_i, B_i, C_i, D_i \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, \ldots, J$ *tais que*

$$
\int \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{sen}(a_i x) \right) \left(\prod_{j=1}^{M} \cos(b_j x) \right) dx = \sum_{i=1}^{J} (C_i\,\mathrm{sen}(A_i x) + D_i \cos(B_i x)).
$$

Prova: A prova é por indução. Aplicações sucessivas do Lema 5.17 permitem transformar o produto de senos e cossenos em soma, que pode ser integrado termo a termo pela linearidade da integral.

De forma mais precisa, se num estágio qualquer temos que calcular

$$
\int \mathrm{sen}(a_i x)\cos(b_j x) f(x)\,dx, \qquad \text{onde } f(x) \text{ é um produto de senos e cossenos,}
$$

pelo Lema 5.17,

$$
\int \mathrm{sen}(a_i x)\cos(b_j x) f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}((a_i + b_j)x) f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}((a_i - b_j)x) f(x)\,dx.
$$

De forma análoga podemos tratar de

$$
\int \mathrm{sen}(a_i x)\,\mathrm{sen}(a_j x) f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int \cos(b_i x)\cos(b_j x) f(x)\,dx.
$$

Por indução terminamos com soma de integrais de senos e cossenos. ■

Exemplo 5.20 *Determine* $\displaystyle\int \cos^2(2x)\,\mathrm{sen}(7x)\,dx$.

Solução: Aplicando o Lema 5.17,
$\cos(2x)\cos(2x) = 1/2(\cos(4x) + \cos(0x)) = 1/2(\cos(4x) + 1)$. Logo, $\cos^2(2x)\,\mathrm{sen}(7x) = 1/2(\cos(4x) + 1)\,\mathrm{sen}(7x)$. Agora, aplicando novamente o Lema 5.17, $\cos(4x)\,\mathrm{sen}(7x) = 1/2(\mathrm{sen}(11x) + \mathrm{sen}(3x))$. Assim,

$$
\cos^2(2x)\,\mathrm{sen}(7x) = \frac{1}{4}(\mathrm{sen}(11x) + \mathrm{sen}(3x)) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(7x).
$$

Verifique isto no Maxima com `trigrat(cos(2*x)^2*sin(7*x));`

Podemos integrar termo a termo para obter que

$$\int \cos^2(2x)\operatorname{sen}(7x)\,dx = -\frac{1}{44}\cos(11x) - \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{1}{14}\cos(7x) + C.$$

■

Exemplo 5.21 *Calcule:*

(a) $\int \operatorname{sen} 5x \cos 2x\, dx$; *(b)* $\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \operatorname{sen} 5x\, dx$; *(c)* $\int (\operatorname{sen} 7x)^2 \cos x\, dx$.

Solução: (a) Aplicando o Lema 5.17, $\operatorname{sen} 5x \cos 2x = 1/2(\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x)$.

Assim, $\displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \cos 2x\, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$.

Convido o leitor a fazer isto integrando por partes para ver como é mais complicado. Defina $L = \displaystyle\int \operatorname{sen} 5x \cos 2x\, dx$. Tomando $u = \operatorname{sen} 5x$, $dv = \cos 2x\, dx$, $du = 5\cos 5x\, dx$, $v = 1/2 \operatorname{sen} 2x$. Assim $L = 1/2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x - 5/2 \displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x\, dx$. Tomando $u = \cos 5x$, $dv = \operatorname{sen} 2x\, dx$ (experimente fazer $u = \operatorname{sen} 2x$, $dv = \cos 5x\, dx$ e ver o que ocorre!) e integrando por partes, $L = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x + \dfrac{5}{4}\cos 5x \cos 2x + \dfrac{25}{4}L$. Resolvendo para L obtemos: $L = \dfrac{-2\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x - 5\cos 5x \cos 2x}{21}$. É fácil ver que $\left(\ddot{\smile}\right)$é igual a $-\dfrac{1}{14}\cos 7x - \dfrac{1}{6}\cos 3x$.

(b) Aplicando o Lema 5.17, $\operatorname{sen} 3x \cos 2x = 1/2(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x)$. Aplicando novamente o Lema: $\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 5x = 1/2(1 - \cos 10x)$ e $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x = 1/2(\cos 4x - \cos 6x)$. Logo $\operatorname{sen} 3x \cos 2x \operatorname{sen} 5x = 1/4(1 - \cos 10x + \cos 4x - \cos 6x)$.

Assim, $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \operatorname{sen} 5x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{40}\operatorname{sen} 10x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{24}\operatorname{sen} 6x + C$

(c) Aplicando o Lema 5.17, $(\operatorname{sen} 7x)^2 = 1/2(1 - \cos 14x)$. Aplicando novamente o Lema, $\cos 14x \cos x = 1/2(\cos 15x + \cos 13x)$. Logo, $(\operatorname{sen} 7x)^2 \cos x = 1/2(\cos x - 1/2(\cos 15x + \cos 13x))$.

Assim, $\displaystyle\int (\operatorname{sen} 7x)^2 \cos x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{60}\operatorname{sen} 15x - \frac{1}{52}\operatorname{sen} 13x + C$. ■

Observação 5.13 *Em alguns casos é possível integrar (veja Problema 5.4 da p.165), de forma bem mais fácil, por substituição: Por exemplo: Fazendo a substituição* $u = \cos x$ *em* $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^9 x\, dx$ *obtemos* $\displaystyle\int -u^9\, du = -u^{10}/10 = -\cos^{10}(x)/10$.

Como calcular $\boxed{\displaystyle\int \tan^n x \sec^m x\, dx, \text{ com } m, n \in \mathbb{N}?}$

Pode-se calcular esta integral com um truque (Problema 5.5 da p.165), ou com fórmulas de redução (exercício Extra 5.14 da p.164).

No Exemplo 5.16 da p.146 obtemos que $\boxed{\displaystyle\int \tan x\, dx = \log|\sec x|.}$ Para calcular $\displaystyle\int \sec x\, dx$, tiramos da cartola um truque (está em todos os livros). Multiplique em cima e embaixo por $\sec x + \tan x$ e faça a substituição $u = \sec x + \tan x$ e $du = (\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx$.

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log|\sec x + \tan x|.$$

Assim $\boxed{\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x|.}$

5.6.2 ⋆Substituição Trigonométrica[1]

Esta técnica é utilizada, por exemplo, para calcular o comprimento/área do círculo, área de superfície da esfera e outros.

A ideia é simplificar integrandos que contenham termos do tipo (suponha $a > 0$) $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, utilizando, respectivamente, as substituições $x = a \operatorname{sen}\theta$, $x = a\tan\theta$, $x = a\sec\theta$. As expressões vão simplificar devidos à relação trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ e sua consequência (divida tudo por $\cos^2\theta$): $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Frequentemente recaímos em integrais trigonométricas, exploradas na seção anterior. Apresentamos somente exemplos pois o assunto envolve somente a técnica da substituição. A dificuldade dos alunos é desfazer a substituição trigonométrica.

Exemplo 5.22 *Calcule a área:*
(a) do círculo de raio $R > 0$; *(b) da elipse cujos semieixos são $a, b > 0$.*

Solução: (a) A equação do círculo é $x^2+y^2 = R^2$. Podemos calcular $1/4$ da área integrando a função $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ para $x \in [0, R]$. Assim determinamos $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Definindo $x = R\operatorname{sen}\theta$, $\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = R|\cos\theta|$. Além disso, $dx = R\cos\theta\, d\theta$. Para que $x \in [0, R]$ tome $\theta \in [0, \pi/2]$. Neste intervalo $|\cos\theta| = \cos\theta$. Logo, $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} R\cos\theta(R\cos\theta)\, d\theta = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta =$

Da Seção anterior (integrais trigonométricas), $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \frac{\cos x \operatorname{sen} x + x}{2}$. Logo, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\pi/2) + (\pi/2)}{2} - \frac{\cos 0 \operatorname{sen} 0 + 0}{2} = \pi/4$. Portanto a área do círculo é 4 vezes a integral $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R^2\pi/4$. Concluímos que a área é πR^2.

(b) A equação da elipse com semieixos a e b é $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Podemos calcular $1/4$ da área integrando a função $y(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ para $x \in [0, a]$. Assim determinamos $\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2}\, dx$. Ao invés de fazer tudo de novo, tome $z = x/a$ e $dz = dx/a$. Logo $dx = a\, dz$. Além disso como $x \in [0, a]$, $z \in [0, 1]$. Assim, $\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2}\, dx$. $\displaystyle ab\int_0^1 \sqrt{1 - z^2}\, dz$. Esta integral é um quarto da área do círculo de raio 1, que pelo item (a) vale $\pi/4$. Logo $\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2}\, dx = ab\pi/4$. A área da elipse é 4 vezes isto: πab. ■

Exemplo 5.23 *Determine:* $(a) \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^{3/2}}$; $(b) \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$.

Solução: (a) Tome $x = 3\tan\theta$. Como $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$, temos que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^{3/2}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{27\sec^3\theta} = \frac{1}{9}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{9}\sin\theta.$$

[1] A leitura desta seção é opcional.

A resposta está em θ. Para voltar para x precisamos relacioná-las. Como $x = 3\tan\theta$, $\tan\theta = x/3$. Construindo um triângulo com ângulo θ e com catetos x e 3, sua hipotenusa será $\sqrt{x^2+9}$. Assim $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. Logo

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^{3/2}} = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + C.$$

(b) Tome $x = 4\sec\theta$. Como $dx = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, temos que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}dx = \int \frac{4\tan\theta}{16\sec^2\theta}4\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta.$$

Como $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, a integral se transformará em: $\displaystyle\int(\sec\theta - \cos\theta)\,d\theta$. Como (veja problema Extra 5.14 da p.164) $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta = \log(\sec\theta + \tan\theta)$, obtemos que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}dx = \log(\sec\theta + \tan\theta) - \operatorname{sen}\theta.$$

A resposta está em θ. Para voltar para x precisamos relacioná-las. Como $x = 4\sec\theta$, $\sec\theta = x/4$ ou $\cos\theta = 4/x$. Construindo um triângulo com ângulo θ e com cateto adjacente 4, e hipotenusa x, seu cateto oposto será $\sqrt{x^2-16}$. Assim, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{x^2-16}/x$ e $\tan\theta = \sqrt{x^2-16}/4$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}dx = \log\left(\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right) - \frac{\sqrt{x^2-16}}{x} + C.$$

■

Erro Comum: Não saber voltar à variável x após substituições trigonométricas.

Observação 5.14 *Outra forma de simplificar integrandos que contenham termos do tipo* $\sqrt{a^2+x^2}$ *e* $\sqrt{x^2-a^2}$ *é utilizando a chamada substituição hiperbólica:* $x = a\cosh\theta$ *e* $x = a\operatorname{senh}\theta$*, respectivamente. Veja Exemplo 6.14 da p.182.*

5.7 ⋆Técnica para Funções Racionais[1]

5.7.1 Integração de Funções Racionais

Apresentamos nesta seção a técnica de integração de funções racionais (funções que são o quociente de dois polinômios), também conhecida como técnica das Frações Parciais. É baseada em teorias da Álgebra, e não de Cálculo.

Algumas Aplicações de Integração de Funções Racionais:

• Um modelo de crescimento populacional com limitação devido a escassez de recursos do meio (equação logística de Verhulst[7]: veja `Wikipédia` *Logistic function*) resulta numa equação diferencial cuja solução é obtida integrando-se uma função racional.
• Quando resolvemos equações diferenciais utilizando a Transformada de Laplace (ver Seção 6.6 da p.184), necessitamos integrar quocientes de polinômios.

[1] A leitura desta seção é opcional.

:

Como calcular $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ (Parte 1)

1. Assumimos que p e q são polinômios com coeficientes reais e que o grau de q é maior que o grau de p pois caso contrário basta fazer a divisão de polinômios para obter $p(x) = q(x)k(x) + r(x)$, com grau de r menor (estritamente) que o grau de q e assim
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int k(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx.$$
Como $k(x)$ é um polinômio, sabemos calcular $\displaystyle\int k(x)\,dx$.

2. O polinômio $q(x)$ pode ser decomposto como o produto de polinômios de grau um ou grau dois com raízes complexas não-reais (Teorema Fundamental da Álgebra). Mais precisamente,
$$q(x) = C(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_J)^{m_J}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_Kx+c_K)^{n_K},$$
com $m_j, n_k \in \mathbb{N}$, $a_j, b_k, c_k, C \in \mathbb{R}$ e $\Delta_k = (b_k)^2 - 4c_k < 0$ (o polinômio do segundo grau não possui raízes reais).

3. Pela Teoria da decomposição por frações parciais (ver Seção 5.7.2, p.158), podemos escrever $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como a soma de fatores do tipo $\dfrac{B_1}{(x-a_k)}, \dfrac{B_2}{(x-a_k)^2}, \ldots, \dfrac{B_{m_k}}{(x-a_k)^{m_k}}$ ou $\dfrac{C_1x+D_1}{(x^2+b_lx+c_l)}, \dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+b_lx+c_l)^2}, \ldots, \dfrac{C_{n_l}x+D_{n_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}}$.

Exemplo 5.24 *Determine a decomposição em frações parciais de:*
(a) $\dfrac{12-36x}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; *(b)* $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}$; *(c)* $\dfrac{27(x^2-5)}{(x^2+2)^2(x-1)^3}$.

Solução: (a) Pela teoria existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:
$$\frac{12-36x}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}.$$
Agora colocando o mesmo denominador no lado direito obtemos que $12-36x = a(x+2)(x+3) + b(x-1)(x+3) + c(x-1)(x+2)$. Agora o lado direito será um polinômio do segundo grau: $(a+b+c)x^2 + (5a+2b+c)x + 6a - 3b - 2c$. Igualando com os coeficientes de $12-36x$ obtemos um sistema de 3 incógnitas e três equações: $a+b+c = 0$, $5a+2b+c = -36$, $6a-3b-2c = 12$. Resolvendo obtemos $a = -2, b = -28, c = 30$. Assim:
$$\frac{12-36x}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{-28}{x+2} + \frac{30}{x+3}.$$

(b) Pela teoria existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:
$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

[7] Pierre François Verhulst: ⋆1804 Bruxelas, Bélgica — †1849 Bruxelas, Bélgica.

De forma similar ao (a) obtemos que:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)} = -\frac{7}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x-1}$$

(c) Seguindo (a) e (b) obtemos:

$$\frac{27(x^2-5)}{(x^2+2)^2(x-1)^3} = \frac{13x-9}{(x^2+2)} + \frac{7x-35}{(x^2+2)^2} - \frac{13}{(x-1)} + \frac{22}{(x-1)^2} - \frac{12}{(x-1)^3}.$$

Pode-se calcular com o comando `partfrac` do Maxima (fiz assim ⌣̈). ■

Resumo da Decomposição por Frações Parciais (casos mais comuns)

Assuma que o grau de p é menor que o do denominador, $a \neq b$ e $c > 0$.

- $\dfrac{p(x)}{(x-a)(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b}$;
- $\dfrac{p(x)}{(x-a)^2} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2}$;
- $\dfrac{p(x)}{(x-a)^2(x-b)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{(x-a)^2} + \dfrac{C}{x-b}$;
- $\dfrac{p(x)}{x^2+c} = \dfrac{Ax+B}{x^2+c}$;
- $\dfrac{p(x)}{(x^2+c)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+c} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+c)^2}$.

Observação 5.15 *A técnica de frações parciais pode ser generalizada para outras estruturas algébricas. Por exemplo os fatores do primeiro ou segundo grau podem ser os números primos. Assim,*

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{2\cdot 3^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}.$$

Veja na `Wikipédia` o tópico Partial fraction.

Como calcular $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ (Parte 2)

1. Pela linearidade da integral, reduzimos o problema de integrar $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ a calcular, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, com $b^2-4c<0$, cada uma das integrais abaixo:

$$\text{(I)} \int \frac{dx}{(x-a)^m}; \quad \text{(II)} \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}; \quad \text{(III)} \int \frac{x\,dx}{(x^2+bx+c)^m}.$$

2. Quanto a (I), sabemos calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^m}$ (qual a resposta?).

3. Quanto a (II) e (III), completamos o quadrado de forma que $x^2+bx+c=(x+d)^2+e$ com $d=b/2$ e $e=c-b^2/4>0$. Com isto reduzimos as integrais de $\dfrac{1}{((x+d)^2+e)^m}$ e $\dfrac{x}{((x+d)^2+e)^m}$ (tomando $y=(x+d)/\sqrt{e}$ e colocando e^m em evidência) às integrais $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)^m}$ e $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)^m}$.

   (a) $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)^m}\,dy$ pode ser calculada definindo $z=y^2+1$ (qual a resposta?).

   (b) $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)^m}$ é mais complicada mas pode-se obter (veja Desafio 5.5 da p.166) a relação de recorrência:

$$I_m=\int \frac{dy}{(y^2+1)^m}=\frac{y}{2(m-1)(y^2+1)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)}I_{m-1}.$$

   Nesta recorrência temos que $I_1=\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)}=\arctan y$.

Exemplo 5.25 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}\,dx$.

Solução: Queremos $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x-1}$. Para calcular a,b,c colocamos o lado direito com o mesmo denominador:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}=\frac{ax(x-1)+b(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}.$$

Igualando os coeficientes ($a+c=1,\ b-a=2,\ -b=5$) obtemos que:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}=-\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x-1}.$$

Basta integrar cada um dos termos da direita para obter que:

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}\,dx=-7\log|x|+\frac{5}{x}+8\log|x-1|.$$

■

Observação 5.16 *Existe o chamado método de Heaviside*[8] *(cover-up method) para se descobrir os fatores da decomposição. Veja na* `Wikipédia` *o tópico Partial fraction e Partial fractions in integration. Um exemplo é para se obter A,B em*

$$\frac{3x+1}{(x+3)(x+1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}.$$

Multiplique os dois lados por $(x+3)(x+1)$:

$$3x+1=A(x+1)+B(x+3).$$

Tome $x=-1$ para obter $-2=2B$ *e portanto $B=-1$.*
Tome $x=-3$ para obter $-8=(-2)A$ *e portanto $A=4$.*

[8] Oliver Heaviside: ⋆1850 Londres, Inglaterra — †1925 Devon, Inglaterra.

Exemplo 5.26 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-5}{x(x^2+x+1)^2}dx.$

Solução: Queremos $\dfrac{x-5}{x(x^2+x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1} + \dfrac{dx+e}{(x^2+x+1)^2}$. Colocando o lado direito com o mesmo denominador (agradeço ao Maxima novamente)

$$\frac{x-5}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{5\,x+5}{x^2+x+1} + \frac{5\,x+6}{(x^2+x+1)^2} - \frac{5}{x}.$$

O último termo é facilmente integrável: $-5\log|x|$. Quanto aos dois primeiros, observe que $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4 = 3/4((x/\sqrt{3/4}+1/2/\sqrt{3/4})^2+1$. Assim tome $y = (x+1/2)/\sqrt{3/4} = (2x+1)/\sqrt{3}$ e substitua nas duas primeiras integrais. A menos de constante teremos que resolver cada uma das quatro integrais:

$$\int \frac{dy}{y^2+1},\quad \int \frac{y\,dy}{y^2+1},\quad \int \frac{dy}{(y^2+1)^2},\quad \int \frac{y\,dy}{(y^2+1)^2}.$$

A primeira é $\arctan y$. Para a segunda e a quarta tome $z = y^2+1$, $dz = 2dy$ e obtenha:

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+1}dy = \int \frac{dz}{2z} = \frac{\log|z|}{2} = \frac{\log|y^2+1|}{2},$$

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)^2} = \int \frac{dz}{2z^2} = -\frac{1}{2z} = -\frac{1}{2(y^2+1)}.$$

Finalmente para o terceiro termo, utilizando a recorrência para I_m temos que

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^2} = I_2 = \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{I_1}{2} = \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{\arctan y}{2}.$$

Juntando todos os pedaços (ou melhor ainda, utilizando o Maxima):

$$\int \frac{(x-5)dx}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{5\log|x^2+x+1|}{2} + \frac{29\,\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right)}{3^{3/2}} - 5\log|x| + \frac{7\,x-4}{3\,x^2+3\,x+3}.$$

■

Sobre exemplos complicados como este, veja a opinião do Spivak:

> Este exemplo [um exemplo complicado de integração por frações parciais] provavelmente convenceu você que a integração de funções racionais (por frações parciais) é uma curiosidade técnica somente (...) Isto é somente **parcialmente** (grifo nosso) verdadeiro. [Sp, p.319].

Resumo da Integração de Funções Racionais

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

por frações parciais e linearidade da integral

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} \qquad \int \frac{x\,dx}{(x^2+bx+c)^m} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}$$

integral fácil

mudança de variável $y = (x+d)/\sqrt{e}$

$$\int \frac{y\,dy}{(y^2+1)^m} \qquad \int \frac{dy}{(y^2+1)^m} = I_m$$

mudança $z = y^2 + 1$

integral difícil

$$\int \frac{dz}{2z^m}$$

integral fácil

5.7.2 Teoria da Decomposição por Frações Parciais

Apresentamos a teoria da decomposição por frações parciais de forma elementar, baseada somente no Teorema de D'Alembert, assunto do ensino médio. Em livros de Álgebra a teoria de frações parciais aparece com roupagem bem mais complicada (ideais gerados). Esperamos que esta apresentação seja útil pois é difícil de ser encontrada.

Definição 5.19 *Denotamos por $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e por $\mathbb{C}[x]$ com coeficientes complexos.*

Teorema 5.20 (D'Alembert) *Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ e $c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tal que $p(c) = 0$. Então existe um $q \in \mathbb{R}[x]$ (ou $\mathbb{C}[x]$) tal que $p(x) = (x-c)q(x)$.*

Prova: Pelo algoritmo da divisão de polinômios, a divisão de p por $x-c$ terá como resto um polinômio de grau 0, isto é, $p(x) = q(x)(x-c)+R$. Como $p(c) = 0 = q(c)(c-c)+R = R = 0$, $p(x) = q(x)(x-c)$. ■

Teorema 5.21 (frações parciais: raízes reais) *Sejam $p, r \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $r(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que*

$$\frac{p(x)}{r(x)(x-a)^n} = \frac{q(x)}{r(x)(x-a)^{n-1}} + \frac{B}{(x-a)^n}.$$

Prova: Colocando os dois lados com o mesmo denominador do lado esquerdo, queremos r e B tais que $p(x) = q(x)(x-a) + Br(x)$. Como $p(a) = Br(a)$, e $r(a) \neq 0$, defina $B = p(a)/r(a)$. Defina, $h(x) = p(x) - Br(x)$. Pela definição de B, é claro que $h(a) = 0$. Pelo Teorema 5.20 (D'Alembert), existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $h(x) = q(x)(x-a) = p(x) - Br(x)$. Logo, $p(x) = q(x)(x-a) + Br(x)$. ■

Reaplicando o Teorema acima, obtemos o Corolário abaixo.

Corolário 5.22 *Sejam $p, r \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $r(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que*

$$\frac{p(x)}{r(x)(x-a)^n} = \frac{q(x)}{r(x)} + \frac{B_1}{(x-a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-a)^n}.$$

Observação 5.17 *Agora se $b \in \mathbb{R}$ é raiz de $r(x)$ do Corolário acima, podemos aplicar o próprio Corolário em $\dfrac{q(x)}{r(x)}$ e prosseguir na expansão em frações parciais.*

Precisamos de alguns fatos sobre números complexos, seus conjugados, e polinômios reais.

Lema 5.23 *Seja $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (complexo não-real) e $p \in \mathbb{R}[x]$. Então:*

(a) $p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)}$.

(b) $p(\alpha) = 0$ se, e somente se, $p(\bar{\alpha}) = 0$.

(c) se α é raiz de $x^2 + bx + c$, então $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$.

Prova: (a) É fácil ver que $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ e $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ para todo $a, b \in \mathbb{C}$ e que se $c \in \mathbb{R}$, $\bar{c} = c$. Agora considere um $p(x) = \sum a_i x^i$ e faça a conta termo a termo.

(b) $p(\alpha) = 0$, se, e somente se, $\overline{p(\alpha)} = 0$. Por (a), isto ocorre, se e somente se, $p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = 0$.

(c) Por (b) é claro que $\bar{\alpha}$ também é raiz. Pelo Teorema de D'Alembert, $x^2 + bx + c = q(x)(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$. Comparando os graus dos polinômios dos dois lados, concluímos que q tem grau 0, isto é, $q(x) = C$. Comparando o coeficiente do x^2 dos dois lados, concluímos que $q(x) = 1$. ■

A conclusão do item (b) do Lema é que raízes complexas não-reais de polinômios reais aparecem **sempre** aos pares conjugados.

Teorema 5.24 (frações parciais: raízes complexas) *Sejam $p, r \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (complexo não-real), raiz de $x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$ com $r(\alpha) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B, C \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que*

$$\frac{p(x)}{r(x)(x^2+bx+c)^n} = \frac{q(x)}{r(x)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Prova: Colocando os dois lados com o mesmo denominador do lado esquerdo, queremos r e B, C tais que $p(x) = q(x)(x^2 + bx + c) + (Bx + C)r(x)$. Como α é raiz de $x^2 + bx + c$, pelo Lema 5.23 (b), $\bar{\alpha}$ também é raiz. Agora temos que $p(\alpha) = (B\alpha + C)r(\alpha)$ e $p(\bar{\alpha}) = (B\bar{\alpha} + C)r(\bar{\alpha})$. Como por hipótese $r(\alpha)$ não se anula, pelo Lema 5.23 (a), $r(\bar{\alpha})$ também não se anula. Assim introduzimos $P = p(\alpha)/r(\alpha)$. Pela propriedade do conjugado, e pelo Lema 5.23 (a), $\bar{P} = p(\bar{\alpha})/r(\bar{\alpha})$. Para determinar B e C precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} B\alpha + C &= P, \\ B\bar{\alpha} + C &= \bar{P}. \end{cases}$$

Ele possui solução única pois seu determinante é $\alpha - \bar{\alpha}$, que é não nulo pois por hipótese α é complexo não-real. Agora, conjugando todos elementos do sistema, obtemos um sistema para $\bar{B}, \bar{C}$:

$$\begin{cases} \bar{B}\alpha + \bar{C} &= \bar{P}, \\ \bar{B}\bar{\alpha} + \bar{C} &= P, \end{cases}$$

que é idêntico ao anterior mas com outras incógnitas. Pela unicidade de solução temos que $B = \bar{B}$ e $C = \bar{C}$, isto é, $B, C \in \mathbb{R}$.

Defina, $h(x) = p(x) - (Bx + C)r(x)$. Pela definição de B e C, é claro que $h(\alpha) = h(\bar{\alpha}) = 0$. Pelo Teorema 5.20, aplicado duas vezes, existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $h(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})q(x) = p(x) - (Bx + C)r(x)$. Pelo Lema 5.23 (c), $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 + bx + c$. Assim, $h(x) = (x^2 + bx + c)q(x) = p(x) - (Bx + C)r(x)$. Como os polinômios do lado direito estão em $\mathbb{R}[x]$ e o primeiro termo do esquerdo também, concluímos que $q \in \mathbb{R}[x]$. É necessário provar isto pois por D'Alembert, como a raiz é complexa, $q \in \mathbb{C}[x]$ de forma geral. Logo $p(x) = q(x)(x^2 + bx + c) + (Bx + C)r(x)$. ■

Reaplicando o Teorema acima, obtemos o Corolário abaixo.

Corolário 5.25 *Sejam $p, r \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (complexo não-real), raiz de $x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$ com $r(\alpha) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que*

$$\frac{p(x)}{r(x)(x^2 + bx + c)^n} = \frac{q(x)}{r(x)} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + bx + c)^n}.$$

5.8 Exercícios de Integral

5.8.1 Exercícios de Fixação

Fix 5.1: Determine se é Verdadeiro (provando a afirmativa) ou Falso (dando contraexemplo):

(a) Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\; dx \leq 0$.

(c) Se $\displaystyle\int_0^3 h(x)\,dx = 9$ e mudarmos o valor da função em $x = 1$ e em $x = 2$, a integral vai mudar de valor.

Fix 5.2: Estude a Definição 5.2 da p.134 e o Lema 5.3 da p.135 e resolva.

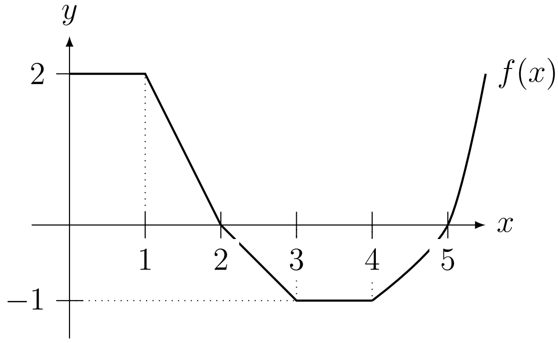
Sabendo que $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\; dx = 5$, $\displaystyle\int_{-1}^2 g(x)\; dx = -3$ e $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\; dx = 7$, calcule:

(a) $\displaystyle\int_2^{-1} f(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \big(f(x) + 2g(x)\big)\; dx$; (c) $\displaystyle\int_1^1 g(\operatorname{sen}(x^2))\; dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\int_{-1}^0 f(s)g(t)\,ds\right)\; dt$.

(f) $\displaystyle\int_{-1}^2 h(x)\; dx$ se $h(x) = \begin{cases} f(x); & x \neq 1; \\ 5; & x = 1. \end{cases}$

Fix 5.3: Considere a função $f(x)$ representada na figura abaixo.



Defina $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$. Usando a ideia de que a integral é área com sinal responda aos seguintes itens.

(a) Determine $F(0), F(1), F(2), F(3)$.

(b) Determine os intervalos onde F cresce e decresce.

(c) Determine os pontos de máximo e mínimo local de F.

Fix 5.4: O aluno X escreveu que:

"Como a primitiva de $\dfrac{1}{x^2}$ é $-\dfrac{1}{x}$, temos que $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-2}^{2} = -(\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 0.$"

O aluno Y escreveu que: "Como $\dfrac{1}{x^2} > 0$ para todo x, $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} > 0$".
Resolva o conflito entre os alunos X e Y.

Fix 5.5: Estude o Teorema 5.4 da p.135 (TFC). Considere $h(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{(5-t)^5}{t^4+6}\,dt$. Determine:

(a) $h(2)$; (b) intervalos onde h cresce e decresce; (c) máximo e/ou mínimo local.

Fix 5.6: Estude o Corolário 5.5 da p.136 (TFC). Sabendo que $h(s) = g'(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e que $g(x) = Ke^{x^3} + Bx - C$, determine $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(s)\,ds$.

Fix 5.7: Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 5)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 |y^2 - 1|\,dy$; (c) $\displaystyle\int (3x + e^t - 7x \operatorname{sen} t)\,dt$.

Fix 5.8: Os três melhores alunos da sala integraram a mesma função e encontraram as seguintes respostas: $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$, $\dfrac{-\cos^2 x}{2} + C$ e $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$. Como você explica isso? Será que algum (ou todos) erraram a integração?

Fix 5.9: Estude a Seção 5.3 da p.139 (Integrais Impróprias). Sem calcular as integrais abaixo, escreva cada uma como o limite de uma integral própria:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} e^{-s^2}\,ds$; (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\log(5-x^2)}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^4}$; (d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^{10}-1}$.

Fix 5.10: Faça mudança de variáveis para provar que:

(a) $\displaystyle\int_{ac}^{bc} f(t)\,dt = c\int_a^b f(x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$.

Fix 5.11: Calcule as seguintes integrais (por substituição):

(a) $\displaystyle\int \sqrt[4]{K-3x}\,dx$; (b) $\displaystyle\int 3x^2\cos(x^3)\,dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{\log^2(t)}{t}\,dt$;

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{3-2x^2}\,dx$; (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta)}}\,d\theta$; (f) $\displaystyle\int \cos x\; e^{5\operatorname{sen} x}\,dx$.

Fix 5.12: Integre por partes: (a) $\displaystyle\int x \log x \, dx$; (b) $\displaystyle\int \arctan x \, dx$.

Fix 5.13: Existe algum erro no argumento abaixo?
Seja $a = \int \frac{1}{x} \, dx$. Então, integrando por partes:

$$a = \int \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{x} \cdot x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 1 + \int \frac{1}{x} \, dx = 1 + a.$$

Logo $a = 1 + a$ e portanto $a - a = 0 = 1$.

Fix 5.14: Calcule as seguintes integrais definidas: (a) $\displaystyle\int_1^2 (3 - 2x)^4 \, dx$;
(b) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\infty} e^{-x/4} \, dx$; (c) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen}(2\theta) \, d\theta$; (d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{s^3} \, ds$.

5.8.2 Problemas

Prob 5.1: Considere $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x \leq 2, \\ -1, & \text{se } 2 < x \leq 4, \\ 5 - x, & \text{se } 4 < x \leq 5. \end{cases}$ Determine:
(a) $\displaystyle\int_0^3 f(x) \, dx$; (b) $\displaystyle\int_2^4 f(x) \, dx$; (c) $\displaystyle\int_1^5 f(x) \, dx$.

Prob 5.2: Estude o Lema 5.3 da p.135 e prove que:
(a) se $f(x) \leq M$, então $\displaystyle\int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$;
(b) $\displaystyle\int_e^{6e} 4 \operatorname{sen}(e^x + 5x^2 + x) \log x \, dx \geq -20e$.

Prob 5.3: Considere $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \, dt$. Determine:
(a) intervalos onde F é crescente e onde é decrescente;
(b) intervalos onde o gráfico de F possui concavidade para baixo e onde é para cima;
(c) o valor de x onde F atinge um mínimo local e o valor onde atinge um máximo local.

Prob 5.4: Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de
$y(x) = \log(2 + \operatorname{sen}(x^2 - \pi)) + \displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^x \cos(s^2) \, ds$ no ponto $(\sqrt{\pi}, \ \log 2)$.

Prob 5.5: Calcule: (a) $f'(1)$ se $f(y) = \displaystyle\int_4^{\int_1^y e^{t^3} dt} \cos(1 + s^2) \, ds$;
(b) $g'(8)$ se $g(y) = \displaystyle\int_y^5 \left(\int_8^x \log(t^3 + 1) \, dt \right) dx$.

Prob 5.6: Determine para quais $p > 0$ são **finitas**: (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Prob 5.7: (integral indefinida)
(a) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \, dk$; (b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1 - 3\,x^2}} \, dx$; (c) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}(3x + 1) \, dx$;
(d) $\displaystyle\int \sec^2 x \, \log(\tan x) \, dx$; (e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{t}) \, dt$; (f) $\displaystyle\int e^{2x} \cos x \, dx$;
(g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x) \, dx$; (h) $\displaystyle\int e^{3\sqrt{s}} \, ds$; (i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$.

Prob 5.8: (integral definida)

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 se^{-3s}\,ds$; (c) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dt}{t(\log t)^3}\,dt$; (d) $\displaystyle\int_0^\infty se^{-s/2}\,ds$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\log 3} e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$; (g) $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx$.

Prob 5.9: (integral com módulo)

(a) $\displaystyle\int_0^4 x^2|x-2|\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{1/2}^2 |\log s|\,ds$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 |e^{s-1}-1|\,ds$.

Prob 5.10: Determine $y(x)$ se:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}$ e $y(1)=0$; (b) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2+1}$ e $y(1)=e^2$.

Prob 5.11: (Integrais Impróprias)

(a) $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. (b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\log^3 x}$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{3-2e^x}dx$;

Prob 5.12: Determine: (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x \log(t^9+3)\,dt$;

(b) função f tal que $f(0)=1$ e $\displaystyle\int_{-\pi}^x e^{-s}f'(s)\,ds = 3x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Prob 5.13: Prove que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen}(3x)|}{x^7+1}\,dx$ é **finita**.

5.8.3 Extras

Ext 5.1: Se f é contínua e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=K$, determine $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ ([Sp] p.239 no.34).

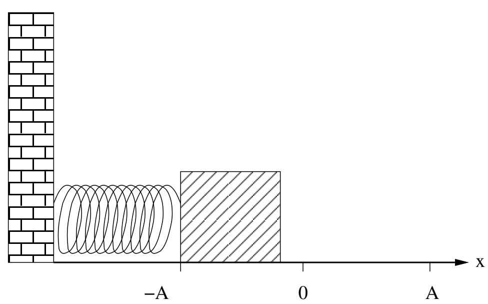
Ext 5.2: Determine **todos** $x\in\mathbb{R}$ onde a função $\operatorname{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ possui pontos de máximo local.

Ext 5.3: Determine a equação da reta tangente ao gráfico de cada função no ponto indicado:

(a) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \log(e^t+t-1)e^{t^2}\,dx$ no no ponto $x=1$;

(b) $h(x) = 7 - \displaystyle\int_2^x \frac{e^s}{s^2+1}\,ds$ no ponto $x=2$.

Ext 5.4: Considere um móvel preso a uma mola e deslizando sobre uma superfície sem atrito (veja figura abaixo). Sua aceleração é dada por $a(t) = A\omega^2\cos(\omega t)$ $\forall t\geq 0$ (onde A e ω são constantes). No instante $t=0$ o móvel está na posição $x(0)=0$ e tem velocidade $v(0)=0$. Determine a função $x(t)$ que determina a posição do corpo ao longo do tempo.



Ext 5.5: Determine f' se: (a) $f(s) = \displaystyle\int_s^{s^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\, dt$. (b) $f(x) = \displaystyle\int_0^{e^{2x}} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$.

Ext 5.6: Sabendo que $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(s)\, ds = 7$ e $\displaystyle\int_{1}^{3} f(s)\, ds = 3$ determine $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(2x+1)\, dx$.

Ext 5.7: Determine a função $y(\theta)$ sabendo que:

(a) $\dfrac{dy}{d\theta} = \cos(5\theta) + 3$ e $y(\pi) = 5\pi$; (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x+1}$ e $y(0) = 3$.

Ext 5.8: Suponha que um ponto move-se ao longo de uma curva $y = f(x)$ no plano xy de tal forma que a cada ponto (x, y) da curva a reta tangente tem inclinação $\sqrt{x+1}$. Determine a equação da curva sabendo que ela passa pelo ponto $(0, 1)$.

Ext 5.9: (integral com módulo)

(a) $\displaystyle\int_0^4 |x^2 - 3x + 2|\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{1 + |x|}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\left|x^2 - 2x\right|\, dx$.

Ext 5.10: (integral indefinida) (a) $\displaystyle\int x^2 \log x\, dx$; (b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x\, dx$;

(c) $\displaystyle\int x(\log x)^2\, dx$; (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}\, dx$;

(f) $\displaystyle\int e^{3\operatorname{sen}(x)+4}\cos(x)\, dx$; (g) $\displaystyle\int e^x \cos(e^x + 3)\, dx$; (h) $\displaystyle\int a^x\, dx$ com $a > 0$.

Ext 5.11: (integral definida) (a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{\log 2}} x^3 e^{x^2}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$; (d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$; (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y}}\, dy$;

(f) $\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$; (g) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx$; (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$.

Ext 5.12: (Integrais Impróprias) (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$;

(b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^p} dx$ $(p > 1)$; (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}$; (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-x}}}\, dx$.

Ext 5.13: Use integração por partes para provar as fórmula de redução de integral:

(a) Se $I_m = \displaystyle\int \operatorname{sen}^m x\, dx$, então $I_m = -\dfrac{1}{m}\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x + \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$.

(b) Se $I_m = \displaystyle\int x^m e^x\, dx$, então $I_m = x^m e^x - m I_{m-1}$.

(c) Se $S_m = \displaystyle\int x^m \operatorname{sen} x\, dx$ e $C_m = \displaystyle\int x^m \cos x\, dx$, então $S_m = -x^m \cos x + m C_{m-1}$ e $C_m = x^m \operatorname{sen} x - m S_{m-1}$.

(d) Se $L_n = \displaystyle\int (\log x)^n\, dx$, então $L_n = x(\log x)^n - n L_{n-1}$.

(e) Prove que $L_3 = x(\log^3 x - 3\log^2 x + 6\log x - 6)$.

Ext 5.14: Use integração por partes para provar as fórmula de redução de integral:

(a) Se $T_n = \displaystyle\int \tan^n x\, dx$, então $T_n = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - T_{n-2}$;

(b) Se $S_n = \displaystyle\int \sec^n x\, dx$ $(n \geq 2)$, então $S_n = \dfrac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} - \dfrac{n-2}{n-1} S_{n-2}$;

Verifique, usando o TFC, que (c) $S_1 = \int \sec x \, dx = \log|\sec x + \tan x|$.

Ext 5.15: (fórmulas para as funções hiperbólicas análogas aos do seno e cosseno)

(a) Integre por partes e determine uma fórmula de recorrência para $Sh_n = \int \operatorname{senh}^n dx$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) Desenvolva uma teoria análoga ao do Teorema 5.18 da p.150 para calcular

$$\int \left(\prod_{i=1}^{N} \operatorname{senh}(a_i x)\right)\left(\prod_{j=1}^{M} \cosh(b_j x)\right) dx$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots M$.

Dica: Use identidades trigonométricas hiperbólicas da p.56.

5.8.4 ⋆Problemas (Integração e Substituição Trigonométrica)

Prob 5.1: Determine: (a) $\int \cos^3 x \, dx$; (b) $\int \cos^2 3x \cos 5x \, dx$;

(c) $\int \cos x \operatorname{sen} x \; dx$; (d) $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$; (e) $\int \cos 4x \operatorname{sen} 3x \, dx$.

Prob 5.2: Calcule:

(a) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$; (b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$; (c) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^{3/2}}$;

(d) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx$; (e) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; (f) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$.

Prob 5.3: Determine: (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; (b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$;

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; (d) $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{3/2}} \, dx$; (e) $\int_{2\sqrt{2}}^{4} \sqrt{16-x^2} \, dx$.

Prob 5.4: Como determinar $I_{m,n} = \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, com $m, n \in \mathbb{N}$?

(a) Calcule $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x \, dx$. Dica: $u = \cos x$, $\operatorname{sen}^2 x = 1 - u^2$.

(b) Prove que se m é impar, então existe um polinômio P tal que $I_{m,n} = P(\cos x)$.

(c) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$ e $\int \cos^5 x \, dx$. Dica: $u = \operatorname{sen} x$, $\cos^2 x = 1 - u^2$.

(d) Prove que se n é impar, então existe um polinômio Q tal que $I_{m,n} = Q(\operatorname{sen} x)$.

(e) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$. Dica: $u = \operatorname{sen} x$ ou $u = \cos x$.

(f) Prove que se n é par então existe um polinômio Q tal que $I_{m,n} = \int P(\operatorname{sen} x) \, dx$. Para resolvê-la aplicamos a fórmula de redução do problema Extra 5.13 da p.164.

Prob 5.5: Como determinar $I_{m,n} = \int \tan^m x \sec^n x \, dx$, com $m, n \in \mathbb{N}$?

(a) Calcule $\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$. Dica: $u = \sec x$, $du = \sec x \tan x \, dx$, $\tan^2 x = u^2 - 1$.

(b) Prove que se m é impar e $n \geq 1$, então existe um polinômio P tal que $I_{m,n} = P(\sec x)$.

(c) Calcule $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$. Dica: $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$, $\sec^2 x = 1 - u^2$.

(d) Prove que se $n \geq 2$ é par então existe um polinômio P tal que $I_{m,n} = P(\tan x)$.

(e) Prove que se m é par então existe um polinômio Q tal que $I_{m,n} = \int Q(\sec x)\, dx$.
Para resolvê-la aplicamos a fórmula de redução do problema Extra 5.14 da p.164.

5.8.5 ⋆Problemas (Integração de Funções Racionais)

Prob 5.1: Calcule: (a) $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{2}{x^2-1}\, dx$. (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+bx+c}$ se $b^2-4c<0$.

Prob 5.2: Calcule: (a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-8x+7}\, dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^3-x^2}\, dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3+4x}\, dx$;
(d) $\displaystyle\int \frac{6\, dx}{x^2+8x+7}$; (e) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x-2}{x^4-4x^2}\, dx$; (f) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+2}{(x-1)(x^2+4)}\, dx$.

Prob 5.3: Se $a \neq b$ e $a \neq 0$, calcule: (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-a)}$.

Prob 5.4: [Ha, p.252] Determine $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\, dx$ se:
(a) $\Delta = b^2 - ac > 0$; (b) $\Delta < 0$; (c) $\Delta = 0$.

Prob 5.5: Prove a fórmula de redução de integral: Se $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$, então
$I_m = \dfrac{x}{2(m-1)(x^2+1)^{m-1}} + \dfrac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$;

Dica: Note que $\dfrac{1}{(x^2+1)^m} = \dfrac{1}{(x^2+1)^{m-1}} - \dfrac{x^2}{(x^2+1)^m}$. O segundo termo da direita pode ser integrado por partes colocando $f(x) = x$ e $g'(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^m}$.

Prob 5.6: Como integrar uma função racional qualquer de senos e cossenos ([Co] p. 290)? Isto inclui, entre outros: $\displaystyle\int \tan^m x \sec^n x\, dx$, com $m, n \in \mathbb{N}$ (feita nos exercícios anteriores com outra técnica).

Defina $t(x) = \tan(x/2)$.

(a) Prove que $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. (b) Prove que $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1+t^2}{2}$.

(c) Seja $R(c, s) = \dfrac{f(c,s)}{g(c,s)}$, f e g polinômios em 2 variáveis. Então

$$\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Ou seja, transformamos numa integral de função racional.

Use (c) para calcular: (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$; (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$; (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

Use (c) para escrever como integral de função racional:
(g) $\displaystyle\int \sec x \tan^2 x\, dx$; (h) $\displaystyle\int \sec 2x\, \tan 3x\, dx$.

5.8.6 Desafios

Des 5.1:

Definição 5.26 (sup) *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $c = \sup A$ se $c \in \mathbb{R}$ é a **menor cota superior** de A no seguinte sentido:*
(i) $a \leq c$ para todo $a \in A$ (c é uma cota superior de A);
(ii) Se h é cota superior de A, $c \leq h$ (c é a menor cota superior).

É uma propriedade (leia p.58) de $\mathbb{R}$ que todo $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui $\sup$ em $\mathbb{R}$: dizemos que $\mathbb{R}$ é **completo**.

(a) Defina $\inf A$ como a maior das cotas inferiores;

Determine $\sup A$ e $\inf A$ de: (b) $A = \{1/x;\ x > 1\}$; (c) $A = \{x;\ x^2 < 7\}$;

(d) $A = (2, 3)$ (intervalo aberto); (e) $A = \{\operatorname{sen}(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$.

Des 5.2: Suponha que f é uma função contínua e estritamente positiva num intervalo I e $c \in I$. Defina $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(s)\, ds$. Prove que F é contínua e crescente em I. Conclua que $\log$ e $\arctan$ são contínuas e crescentes.

Des 5.3: Suponha que f é uma bijeção em $[a, b]$. Defina $g(y) = f^{-1}(y)$.

(a) Prove que para todo $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f(s)\, ds = xf(x) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} g(y)\, dy.$$

(b) Determine a primitiva do $\operatorname{arcsen} x$ e $\log x$ utilizando (a).

Des 5.4: (a) Determine polinômio $p(x)$ tal que $\displaystyle\int x^3\, e^x\, dx = p(x)\, e^x$.

Prove que dado $n \in \mathbb{N}$ existem polinômios $p(x)$ e $q(x)$ tais que:

(b) $\displaystyle\int x^n\, e^x\, dx = p(x)\, e^x$; (c) $\displaystyle\int (\log x)^n\, dx = x\, q(\log x)$.

(d) Prove que **não** existe um polinômio $p(x)$ tal que $\displaystyle\int e^{x^2}\, dx = p(x) e^{x^2}$.

Dica: TFC.

Des 5.5: Prove que dados $a, b \in \mathbb{R}$, existem $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx = e^{ax}(A \operatorname{sen}(bx) + B\cos(bx)).$$

Use este resultado para provar que:

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{e^x}{5}(\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)) + C.$$

$$\int e^{3x} \operatorname{sen}(2x)\, dx = \frac{e^x}{13}(3\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)) + C.$$

Dica: aplique o TFC e resolva um sistema do segundo grau.

Obs: Existe resultado análogo para o cosseno.

Des 5.6: Prove que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

Dica: Escreva x^x usando exponencial; expanda utilizando a série de Taylor da exponencial; integre termo a termo por partes. Somente por curiosidade: o valor da integral é aproximadamente 1.29128.

Des 5.7: Prove que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-y^2}\, dy$ é finita.

Dica: Não tente calcular a integral, utilizada na definição da função erro de Gauss (Observaao 5.4 da p.140). Faça uma estimativa utilizando ye^{-y^2}.

Des 5.8: Prove que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é finita através do seguinte roteiro:

(a) Integre por partes e mostre que

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} + \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

(b) Use o lado esquerdo para investigar $\displaystyle\int_0^1$ e o lado direito para investigar $\displaystyle\int_1^\infty$.

Des 5.9: Suponha que f é contínua e satisfaça $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)\,ds$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Des 5.10: Defina $f(y) = \displaystyle\int_a^b t^y\,dt$. para $0 < a < b$ fixos. Prove que f é contínua em -1.

Des 5.11: Determine, utilizando a definição rigorosa: (a) $\displaystyle\int_0^a x^3\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^a \operatorname{sen}(x)\,dx$

Dica: Ver [Co].

Des 5.12: (Lema de du Bois-Reymond[9]) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $\displaystyle\int_x^y f(s)\,ds = 0$ para todo $x, y \in [a,b]$ então $f(x) = 0$ para todo $x, y \in [a,b]$.

Des 5.13: (Função gama de Euler[10], generalização de fatorial para não-inteiros e complexos) Defina $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$. Prove que:

(a) a integral converge para $z > 0$; (b) $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$.

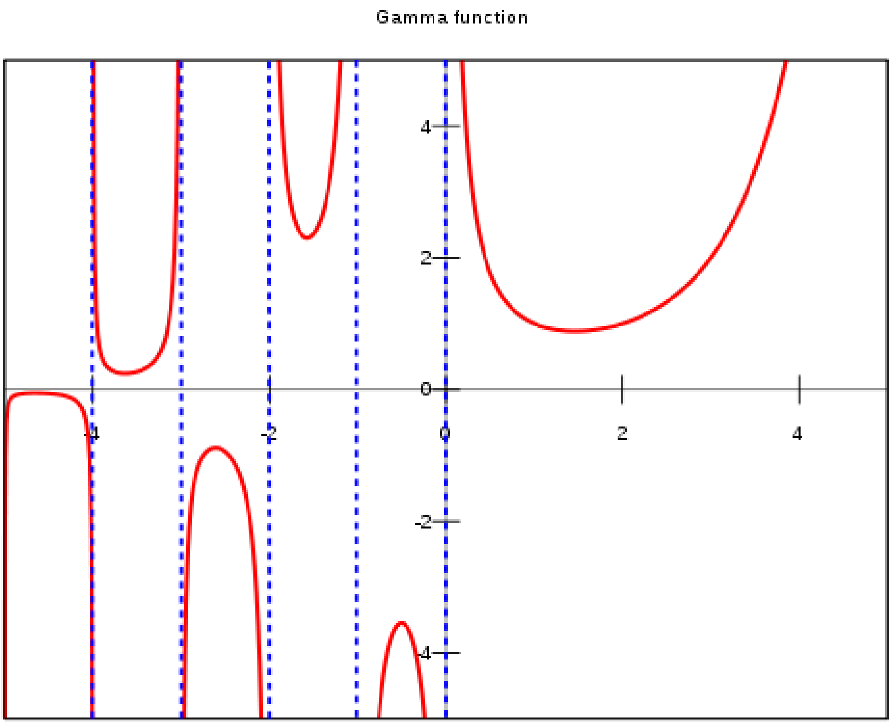
Dica: Para (b) integre por partes e prove que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(c) Use a substituição $u = t^{1/2}$ e mostre que $\Gamma(1/2) = 2\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Esta integral é importante em estatística e pode-se mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}/2$. Assim, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(3/2) = (1/2)! = 1/2\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. ([Sp] p.327 no.25)

Observação 1: Ver na Wikipedia o tópico `Bohr Mollerup_theorem`, que mostra uma caracterização da função gama.

Observação 2: Observe na figura abaixo o gráfico da função gama de Euler:

[9] Paul David Gustav du Bois-Reymond: ⋆1831 Berlim, Alemanha — †1889 Freiburg, Alemanha.
[10] Leonhard Euler: ⋆1707 Basel, Suíça — †1783 São Petesburgo, Rússia.



Des 5.14: Prove que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$ utilizando frações parciais complexas, seguindo o roteiro abaixo:

(a) Determine $A, B \in \mathbb{C}$ tais que $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{A}{x+i} + \dfrac{B}{x-i}$. Conclua que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\log\left[\frac{x-i}{x+i}\right]$.

(b) Prove que $|(x-i)/(x+i)| = 1$ e conclua que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $(x-i)/(x+i) = e^{i\varphi}$.

(c) Defina $x = \tan\theta$ e prove que $\tan(\varphi) = \tan(2\theta)$. Conclua que $\varphi = 2\theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dica: $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

(d) Prove que $\dfrac{1}{2i}\log\left[\dfrac{x-i}{x+i}\right] = \theta + C = \arctan x + C$.
Obs: Pelo Desafio 3.8 da p.90, $C = \pi/2$.

Des 5.15: Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b \operatorname{sen} x}$, com $a^2+b^2 \neq 0$.
Dica: Prove que existem r, θ tais que $a = r\operatorname{sen}\theta, b = r\cos\theta$.

Capítulo 6

Aplicações da Integral

Objetivos: Calcular área de regiões do plano e volume por fatiamento (Princípio de Cavalieri) de sólidos, incluindo sólidos de revolução. Definir o valor médio de uma função, uma ideia importante em probabilidade. Além disso apresentar comprimento de curvas, área de superfície de sólidos de revolução, transformada de Laplace, série de Fourier (com aplicação ao padrão MP3 para música). Omitimos outras aplicações interessantes: centro de massa (veja Wikipedia `Centroid`), trabalho realizado por força (veja Wikipedia `Work (physics)`).

6.1 Área no Plano

Introduzimos no capítulo anterior o conceito de integral como área com sinal. Aqui invertemos e **definimos área** através da integral. Em Matemática fazemos isto em detalhes na teoria da Medida e Integração. Leia Wikipedia `area` e `Measure (mathematics)`.

Nesta seção resolvemos diversos problemas onde a dificuldade está em:

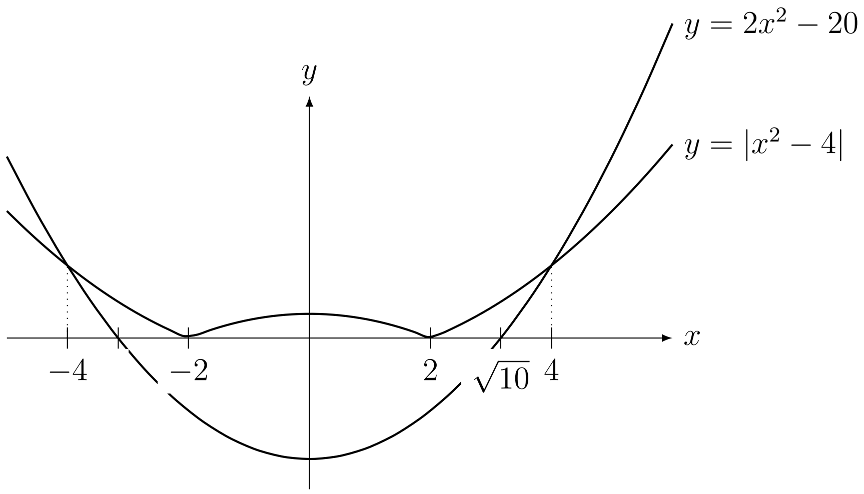
(a) determinar o intervalo (ou os intervalos) apropriados de integração, de qual (quais) integrando(s);

(b) determinar se é melhor integrar em x ou em y. Tipicamente podemos escolher, mas uma das opções resultará numa única integral, ao invés de duas.

Para isto o esboço do gráfico e determinação das interseções é fundamental.

Exemplo 6.1 *Determine a área da região delimitada por* $y = |x^2 - 4|$ *e* $y = 2x^2 - 20$.

Solução: Primeiro esboçamos os gráficos.



Calculando os pontos de interseção: Para $x > 2$ e $x < 2$, as interseções ocorrem quando $|x^2 - 4| = x^2 - 4 = 2x^2 - 20$. Resolvendo obtemos $x = \pm 4$. Para $x \in (-2, 2)$ temos que resolver $-x^2 + 4 = 2x^2 - 20$. Obtemos as raízes falsas $x = \pm\sqrt{8}$, que não pertencem a este intervalo.

Assim a área é igual a soma de 3 integrais:

$$\int_{-4}^{-2}((x^2-4)-(2x^2-20))\,dx+\int_{-2}^{2}((4-x^2)-(2x^2-20))\,dx+\int_{2}^{4}((x^2-4)-(2x^2-20))\,dx.$$

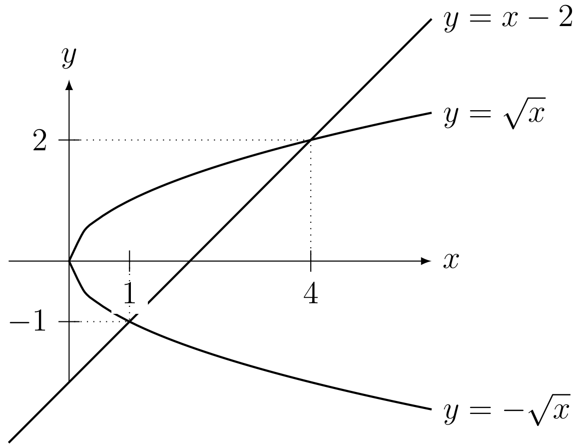
Assim a área é $\displaystyle\int_{-4}^{-2}(-x^2+16)\,dx+\int_{-2}^{2}(24-3x^2)\,dx+\int_{2}^{4}(-x^2+16)\,dx.$

Como $\displaystyle\int(-x^2+16)\,dx = 16x - \frac{x^3}{3}$ e $\displaystyle\int(-x^2+16)\,dx = 24x - x^3$, colocando os limites de integração obtemos que a área é igual a $40/3 + 80 + 40/3 = 320/3$.

Por simetria poderíamos calcular somente a área área para $x > 0$ e multiplicá-la por 2: $\displaystyle 2\int_{0}^{2}((4-x^2)-(2x^2-20))\,dx+\int_{2}^{4}((x^2-4)-(2x^2-20))\,dx.$ ■

Exemplo 6.2 *Determine a área da região delimitada por* $x = y^2$ e $x - y = 2$.

Solução: Começamos pelo esboço, notando que $y = \pm\sqrt{x}$.



Para calcular a interseção das curvas devemos determinar a solução de $x = y^2 = y + 2$, que é $y = 2$ e $y = -1$. Como $x = y + 2$, os pontos de interseção são $(4, 2)$ e $(1, -1)$.

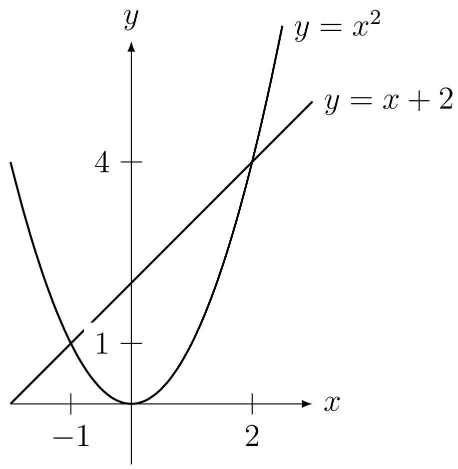
Assim, integrando em x a área será a soma de 2 integrais

$$\int_0^1(\sqrt{x}-(-\sqrt{x}))\,dx+\int_1^4(\sqrt{x}-(x-2))\,dx=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^4(\sqrt{x}-x+2))\,dx=$$
$$=\left.\frac{4x^{3/2}}{3}\right|_0^1+\left.\left(\frac{4x^{3/2}}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_1^4=$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{9}{2}.$$

Por outro lado, podemos integrar em y, de $y = -1$ até $y = 2$ a diferença das funções $x = y + 2$ e $x = y^2$ (qual função está "acima" da outra?):

$$\int_{-1}^{2}((y+2)-y^2)\,dy = \left.\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

Outra possibilidade equivalente é trocar x por y e fazer o problema novamente: "Determine a área da região delimitada por $y = x^2$ e $y - x = 2$". Obtemos o gráfico:



Sua área será dada por $\displaystyle\int_{-1}^{2} ((x+2) - x^2)\, dx = \left.\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$ ■

Em avaliações (provas, testes, etc.) é suficiente pedir a modelagem, isto é, pedir que se esboce a região e escreva a **integral definida** (ou soma de integrais definidas) que fornece a área (ou, mais adiante, volume). Estas integrais são simples mas envolvem muitas trocas de sinais, sendo fácil errar a aritmética.

Erro Comum: Não saber esboçar gráfico de funções por translação horizontal/vertical, obtendo região errada. Não saber esboçar função módulo.

Calculamos áreas de regiões infinitas utilizando integrais impróprias.

Exemplo 6.3 *Determine a área da região delimitada por* $y = \dfrac{1}{x^3}$ *e* $y = \dfrac{1}{x^2}$ *com* $x > 1$.

Solução: A interseção das curvas determinada pela equação $y = \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$, isto é, $\dfrac{x^3}{x^2} = x = 1$. Por outro lado, $\dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{x^3}$ para $x > 1$. Assim a área é
$\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx = \left. -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{2}.$ ■

Exemplo 6.4 *Determine a área da elipse definida implicitamente pela equação*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1 \quad \text{com} \quad 4ac - b^2 > 0 \text{ e } c > 0.$$

Solução: Esta equação representa uma elipse cujos eixos de simetria podem não ser paralelos aos eixos x ou y.

Podemos determinar y como função de x, a, b, c vendo a equação implícita como uma equação do segundo grau em y:

$$(c)y^2 + (bx)y + (ax^2 - 1) = 0,$$

cujo Δ (que depende de x) é dado por

$$\Delta(x) = (bx)^2 - 4(c)(ax^2 - 1) = -x^2(4ac - b^2) + 4c.$$

Como $4ac-b^2>0$ e $c>0$, podemos definir $D=4ac-b^2>0$ e $K=\sqrt{\dfrac{4c}{D}}\in\mathbb{R}$. Portanto $\Delta(x)=4c-Dx^2$ é uma parábola com concavidade para baixo com raízes reais

$$\pm\sqrt{\frac{4c}{D}}=\pm K.$$

Assim, $\Delta(x)\geq 0$ se, e somente se, $x\in[-K,\,K]$.

Finalmente, aplicando a fórmula da resolução da equação do segundo grau, $y(x)=\dfrac{-bx\pm\sqrt{\Delta(x)}}{2c}$. Assim, a área da elipse será igual a integral, no intervalo $[-K,\,K]$ da função

$$\frac{-bx+\sqrt{\Delta(x)}}{2c}-\frac{-bx-\sqrt{\Delta(x)}}{2c}=\frac{\sqrt{\Delta(x)}}{c}.$$

Ou seja, a área da elipse é igual a

$$\int_{-K}^{K}\frac{\sqrt{-x^2(4ac-b^2)+4c}}{c}\,dx=\int_{-K}^{K}\frac{\sqrt{4c-Dx^2}}{c}\,dx.$$

Precisamos portanto integrar $\displaystyle\int_{-K}^{K}\sqrt{4c-Dx^2}\,dx$.

Vou resolver de duas formas esta integral:

(a) Podemos utilizar a substituição trigonométrica (veja Seção 5.6.2, p.152) para obter que

$$\int\sqrt{4c-Dx^2}\,dx=\frac{x\sqrt{4c-Dx^2}}{2}+\frac{2c}{\sqrt{D}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x\sqrt{D}}{2\sqrt{c}}\right).$$

Substituindo os limites de integração, o primeiro termo se anula e

$$\int_{-K}^{K}\sqrt{4c-Dx^2}\,dx=\frac{2\pi c}{\sqrt{D}}=\frac{2\pi c}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

(b) Note que $K^2=\dfrac{4c}{D}$. Colocando D em evidência obtemos que

$$\int_{-K}^{K}\sqrt{4c-Dx^2}\,dx=\int_{-K}^{K}\sqrt{D\left(\frac{4c}{D}-x^2\right)}\,dx=\sqrt{D}\int_{-K}^{K}\sqrt{K^2-x^2}\,dx.$$

Esta integral representa a área do semicírculo de raio K. Assim ela vale $\dfrac{\pi K^2}{2}=\dfrac{2\pi c}{D}$. Logo,

$$\int_{-K}^{K}\sqrt{4c-Dx^2}\,dx=\sqrt{D}\frac{2\pi c}{D}=\frac{2\pi c}{\sqrt{D}}=\frac{2\pi c}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Nos dois casos, retornando a fórmula da área, basta dividir isto por c. Obtemos então que a área da elipse é $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$. ■

6.2 Volume de Sólidos

A determinação de volumes no Cálculo de uma variável é baseado no **Princípio de Cavalieri**. Podemos chamá-lo, de forma mais sugestiva, no método do fatiamento ou do salame para o cálculo do volume. Como ilustração da ideia básica observe as pilhas de moedas da figura abaixo. Claro que as duas pilhas de moedas possuem o mesmo volume. Isto ocorre pois o volume de cada moeda (fatia) é igual, não importando sua posição.

O Princípio de Cavalieri é um caso particular do Teorema de Fubini[1], que aparece em cursos de Cálculo Avançado e de Medida e Integração. Vamos enunciá-lo como um teorema.

Teorema 6.1 (Princípio de Cavalieri[2]) *Suponha que duas regiões A e B do espaço (dois sólidos) estão contidos entre dois planos paralelos. Se para todo plano Π paralelo a estes planos, a interseção de Π com A possui área igual a interseção de Π com B, então o volume de A é igual ao volume de B.*

No exemplo das pilhas de moedas acima, embora uma pilha tenha forma diferente da outra, as interseção com planos paralelos à mesa onde elas estão apoiadas serão círculos de mesmo raio (igual ao raio da moeda), e portanto com mesma área.

Partindo do princípio de Cavalieri podemos deduzir uma fórmula para o cálculo de volumes.

Teorema 6.2 *Considere um sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ contido entre os planos $x = a$ e $x = b$. Seja $A(s)$ a área da interseção do plano $x = s$ com S. Então o volume de S é igual a $\int_a^b A(s)\, ds$.*

Prova: Podemos aproximar o volume de S utilizando o princípio de Cavalieri. Para isto, considere uma partição de $[a, b]$ em intervalos $I_i = [s_{i-1}, s_i]$ com $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$. Suponha que $A(s)$ é constante igual a $A(s_i)$ em cada intervalo I_i. Então o volume de cada fatia é igual a $A(s_i)\,\Delta s_i$, a área da base vezes a altura. Assim o volume total é aproximadamente

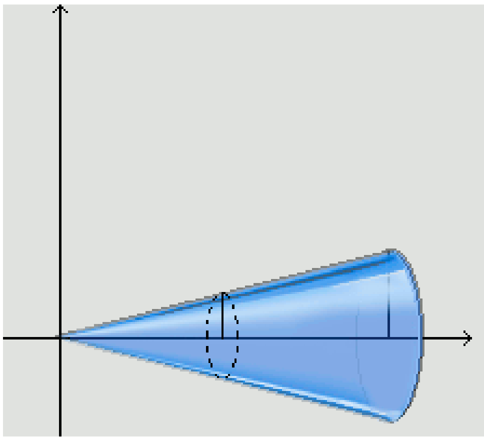
$$\sum_{i=1}^{n} A(s_i)\,\Delta s_i.$$

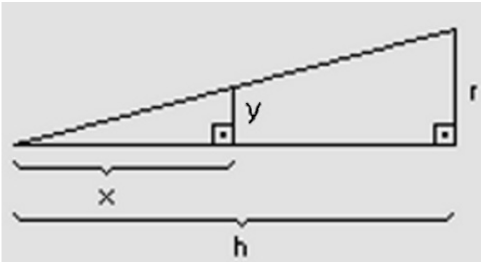
Quando passamos ao limite com $\Delta s_i \to 0$ obtemos a fórmula do volume. Note que $\sum$ vira $\int$ (o somatório "vira cobrinha" $(\ddot{\smile})$) e Δs_i vira ds. ■

Exemplo 6.5 *Deduza a fórmula do volume do cone reto de raio r e altura h.*

[1]Guido Fubini: ⋆1879 Veneza, Itália — †1943 Nova Iorque, EUA.
[2]Bonaventura Francesco Cavalieri: ⋆1598 Milão, Itália — †1647 Bologna, Itália.

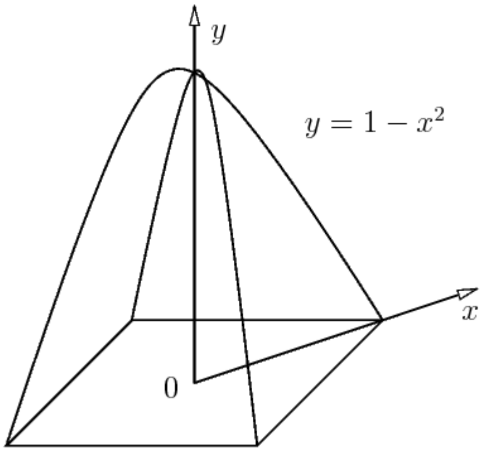
Solução: Colocando o sistema de eixos de modo que a origem do sistema esteja no vértice do cone e o eixo x seja perpendicular à base do cone, temos:





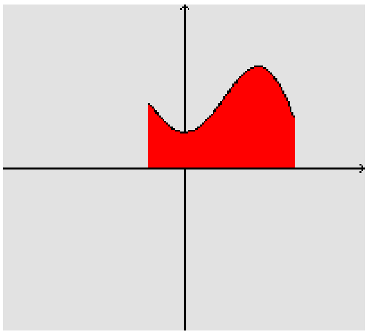
Para cada corte com o plano x constante, temos que $A(x)$ é um círculo cuja área é πy^2. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{r}{h} = \dfrac{y}{x}$. Logo $y = \dfrac{rx}{h}$. Assim, o volume é $\displaystyle\int_0^h \pi \frac{(rx)^2}{h^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{h} = \frac{\pi r^2}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$. ∎

Exemplo 6.6 *Uma barraca de camping é construída sobre uma base quadrada com duas varetas idênticas conforme a figura abaixo. No sistema de coordenadas mostrado na figura, uma das varetas tem forma dada pela equação $y = 1 - x^2$. Calcule o volume da barraca.*

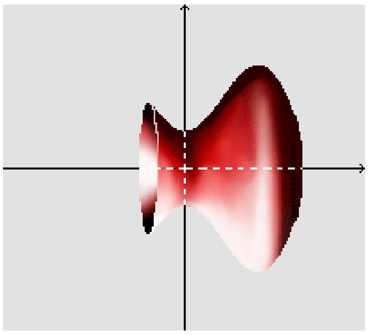


Solução: Cortando com planos $y = s$, com $s \in [0,1]$ obtemos quadrados. Fixado $y = s$, a **diagonal** (não é o lado) do quadrado $A(s)$ terá comprimento $x(s) = 2\sqrt{1-s}$. Se L é o lado de um quadrado e D sua diagonal, por Pitágoras, $2L^2 = D^2$. Assim, a área do quadrado é $L^2 = \dfrac{D^2}{2}$. Logo a área de $A(s) = \dfrac{(2\sqrt{1-s})^2}{2} = 2(1-s)$. Assim o volume é
$\displaystyle\int_0^1 2(1-s)\,ds = 2s - s^2\Big|_{s=0}^{1} = 1$. Resposta: 1. ∎

Um caso particular é o cálculo do volume de sólidos de revolução. Considere uma função $y = f(x)$ contínua e positiva, cuja área delimitada pelo seu gráfico e o eixo x está indicada na figura abaixo.



Rodando em torno do eixo x a região delimitada pelo gráfico da função e o eixo x obtemos um sólido, chamado sólido de revolução gerado por $y = f(x)$, como indicado na figura abaixo. Os corte para $x = s$ serão círculos, cuja área $A(s) = \pi(f(s))^2$. Podemos calcular seu volume aplicando a fórmula do Teorema 6.2 da p.175.

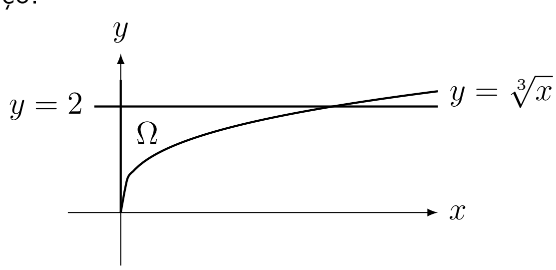


Exemplo 6.7 *Deduza a fórmula do volume da esfera de raio R.*

Solução: Uma esfera pode ser obtida através de revolução da região delimitada pela função $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ para $x \in [-R, R]$ em torno do eixo x. Assim o volume é $\displaystyle\int_{-R}^{R} \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$ ■

Exemplo 6.8 *Considere a região Ω do plano xy delimitada pelo eixo y, $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = 2$. Determine o volume do sólido de revolução ao girarmos Ω em torno do eixo y.*

Solução: Primeiro o esboço:



Olhando os cortes $y = s$ constante para $s \in [0, 2]$, observamos que as áreas são $\pi x^2(s)$. Como $\sqrt[3]{x} = s$, $x(s) = s^3$. Assim a área $A(s) = \pi s^6$. Logo o volume é $\displaystyle\int_0^2 \pi s^6\,ds = \frac{\pi s^7}{7}\Big|_0^2 = \frac{128\pi}{7}$. Outra forma de se resolver, que pode ser feita **sempre** que rodamos em torno do eixo y, é trocar x com y. Assim o problema se transforma no problema equivalente:

> Considere a região Ω delimitada pelo eixo x, $x = \sqrt[3]{y}$ e $x = 2$. Determine o volume do sólido de revolução ao girarmos Ω em torno do eixo x.

Como $y = x^3$, e $A(s) = \pi(s^3)^2 = \pi s^6$, volume é $\displaystyle\int_0^2 \pi s^6\, ds = \frac{128\pi}{7}$. ■

Quando se pede o volume rotacionado em torno de y basta trocar as variáveis x e y entre si. Embora seja indiferente o nome das variáveis, nossa experiência é que os alunos se sentem de algum modo psicologicamente mais seguros integrando em x … (◡̈)

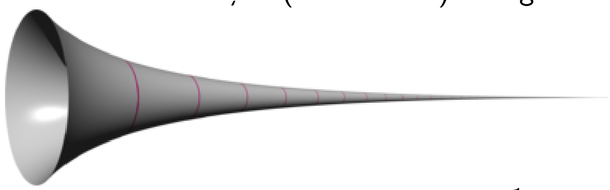
Podemos calcular o volume de regiões infinitas do espaço passando ao limite nas regiões finitas, tal qual fizemos com áreas.

Observação 6.1 (método das cascas cilíndricas) *Em alguns casos é **bem** mais fácil utilizar o chamado método das cascas cilíndricas. Veja o Problema 6.12 da p.191.*

Exemplo 6.9 *(trombeta de Gabriel) Considere a região infinita Ω do plano xy delimitada por $x = 1$, $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{x}$.*

Determine o volume do sólido de revolução ao girarmos Ω em torno do eixo x.

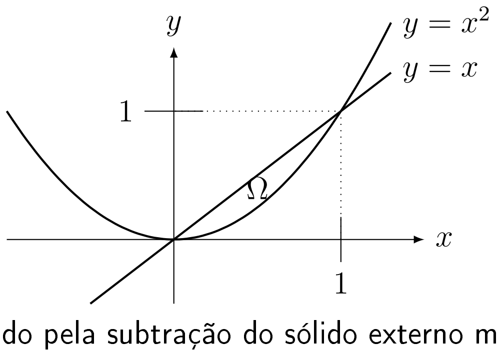
Solução: Mostramos o sólido de revolução (a trombeta) na figura abaixo.



Cada corte para x constante obtemos um círculo de raio $\dfrac{1}{x}$. Assim a área $A(x) = \pi\dfrac{1}{x^2}$. Logo o volume é $\displaystyle\int_1^\infty \pi\frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x}\bigg|_1^\infty = \pi\left(1 - \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\right) = \pi$. ■

Exemplo 6.10 *Considere a região Ω do plano xy delimitada por $y = x^2$ e $y = x$. Determine o volume do sólido de revolução ao girarmos Ω em torno do: (a) eixo x; (b) eixo y.*

Solução: Primeiro devemos esboçar a região. As curvas se intersectam em $(0,0)$ e $(1,1)$.



O volume será determinado pela subtração do sólido externo menos o do interno.

(a) Neste caso subtraimos do volume do cone obtido ao girar $y = x$ em torno do eixo x menos o volume da região obtida ao girar $y = x^2$ (em torno do eixo x, com $x \in [0,1]$). Assim, o volume é

$$\int_0^1 \pi x^2\, dx - \int_0^1 \pi x^4\, dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\, dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1\right) = \frac{2\pi}{15}.$$

(b) Como $x = \sqrt{y}$, obtemos o volume subtraindo o volume o volume da região obtida ao girar $x = \sqrt{y}$ (em torno do eixo y, com $y \in [0,1]$) menos o volume do cone obtido ao girar

$x = y$ (em torno do eixo x). Assim, o volume é
$\displaystyle\int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2\,dy - \int_0^1 \pi y^2\,dy = \int_0^1 \pi(y-y^2)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{6}.$ ■

Erro Comum: Confundir técnica do cálculo de uma área Ω delimitada por duas curvas com volume de sólido de revolução obtido girando a área Ω.
Por exemplo, suponha que Ω é delimitado por cima por $y = f(x)$ e por baixo por $y = g(x)$ e nas laterais por $x = a$ e $x = b$. Embora a área de Ω seja calculada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx,$$

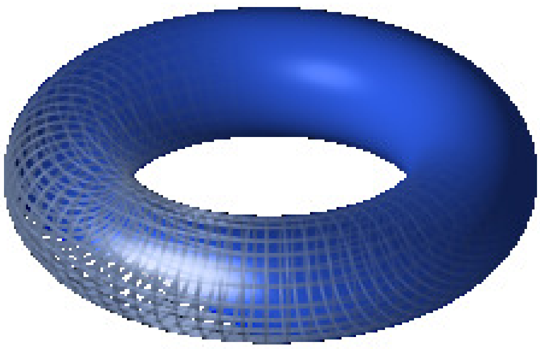
o volume do sólido de revolução obtido girando Ω em torno do eixo x é

$$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx - \int \pi g^2(x)\,dx \neq \int_a^b \pi(f(x) - g(x))^2\,dx.$$

Assim Exemplo 6.10 (a) seria errado calcular o volume por

$$\int_0^1 \pi(x - x^2)^2\,dx \neq \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx.$$

Exemplo 6.11 *Ao girarmos um círculo em torno de um eixo obtemos um sólido chamado de toro (sinônimos em linguagem não-matemática: rosquinha, pneu, doughnut). Deduza a fórmula do volume do toro obtido ao girarmos o círculo $x^2 + (y-R)^2 = r^2$ em torno do eixo x. É um círculo de raio r centrado em $(0, R)$.*



Solução: A região é delimitada superiormente por $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ com $x \in [-r, r]$. Assim, definindo $K = \sqrt{r^2 - x^2}$, o volume do toro é

$$\int_{-r}^{r} \pi[(R+K)^2 - (R-K)^2]\,dx = \int_{-r}^{r} 4\pi RK\,dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

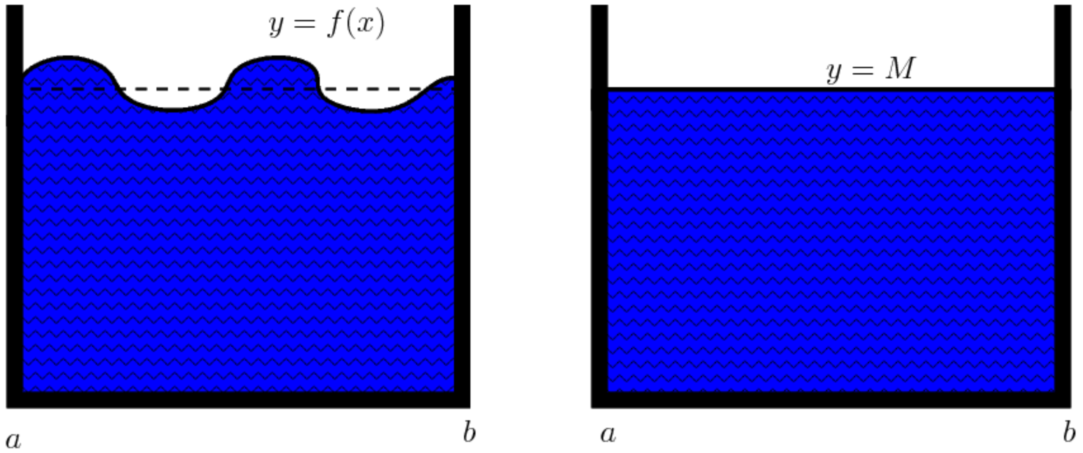
Como $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ é metade da área do círculo de raio r, esta integral vale $\dfrac{\pi r^2}{2}$. Assim o volume do toro é $4\pi R\dfrac{\pi r^2}{2} = (2\pi R)(\pi r^2)$. ■

Observação 6.2 *O volume do toro é igual ao produto do comprimento do círculo de raio R pela área do círculo de raio r. É caso particular do Teorema de Papus*[3] *(Wikipedia Pappus's centroid theorem). O volume do sólido gerado pela rotação de uma elipse de semieixos a e b en torno do seu centro é $(2\pi R)(\pi ab)$ pelo Teorema de Pappus.*

6.3 Valor Médio de Função

O valor médio de uma função é um conceito importante em diversas aplicações. Trata-se também de ideia básica de probabilidade em espaços contínuos.

Considere o tanque de água representado na figura abaixo. Do lado esquerdo o nível de água é dado pela função $y = f(x)$. Se deixarmos a gravidade entrar em ação, a altura da água ficará nivelada em um nível M como indicado na figura do lado direito. A questão é como determinar M.



Como o volume de água é o mesmo nas duas figuras, e ele é proporcional as áreas, basta igualar as áreas: $\int_a^b f(x)\,dx$ (área do lado esquerdo) **é igual a** área do retângulo de base $b-a$ e altura M (área do lado direito). Assim, queremos determinar $M \in \mathbb{R}$ (o chamado valor médio da função f) tal que $\int_a^b f(x)\,dx = M(b-a)$.

Definição 6.3 (valor médio) *Definimos o* ***valor médio*** *da função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no intervalo $[a,b]$ através da equação:*

$$M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Uma forma de justificar esta definição é a seguinte. Considere uma partição de $[a,b]$ em intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Suponha que f é constante igual a $f(x_i)$ em cada intervalo I_i. Então podemos calcular a média ponderada de f usando como peso Δx_i que é o tamanho de cada intervalo I_i. A soma dos pesos $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$, o tamanho total do intervalo. Assim, a média ponderada é de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

[3]Pappus of Alexandria: ⋆290 Alexandria, Egito — †350 Alexandria, Egito.

Quando passamos ao limite com $\Delta x_i \to 0$ obtemos a fórmula da definição de média. Note que $\sum$ vira $\int$ e Δs_i vira ds.

Exemplo 6.12 *(potência média em circuitos de corrente alternada) A potência instantânea de um circuito de corrente alternada é dado por*

$$P(t) = VI\operatorname{sen}^2(\omega t)$$

onde V e I são constantes representando a voltagem e corrente e $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ é a frequência (tipicamente 60 Hz). Determine a potência média durante um ciclo $t \in [0, T]$.

Solução: Calculando a integral $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T VI\operatorname{sen}^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{T}VI\left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{4\omega}\Bigg|_0^T\right) = \frac{VI}{2}.$ A Potência média é conhecida como potência RMS (ou efetiva), e vale a metade da potência nominal VI em circuitos de corrente alternada. ■

6.4 ⋆Comprimento de Curvas no Plano[1]

Determinamos o comprimento de curvas aproximando-a por uma poligonal. O comprimento de uma poligonal é igual a soma dos seus segmentos de reta. Passando ao limite no número de segmentos que aproximam uma curva obtemos a fórmula do comprimento de curva.

Teorema 6.4 *Considere o gráfico da função $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$. O comprimento desta curva é dado pela fórmula* $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$

Prova: Considere uma partição de $[a, b]$ em intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Suponha que f é um segmento de reta em cada intervalo I_i. O comprimento d_i deste segmento satisfaz, por Pitágoras, $d_i^2 = (\Delta x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2$. Colocando $(\Delta x_i)^2$ em evidência e denotando $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ obtemos que

$$d_i^2 = (\Delta x_i)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right).$$

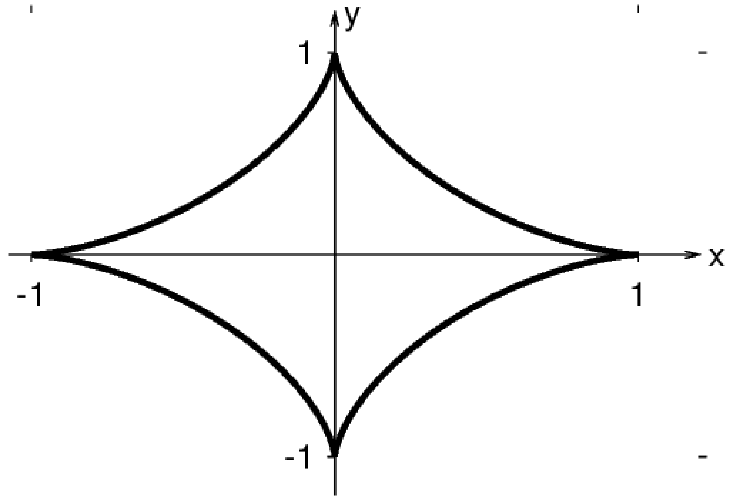
Note também que como $\Delta x_i > 0$, $\sqrt{(\Delta x_i)^2} = \Delta x_i$. Assim o comprimento da poligonal é

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}.$$

Quando passamos ao limite com $\Delta x_i \to 0$, o termo $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \to \dfrac{dy}{dx}$, o termo $\Delta x_i \to dx$ e $\sum$ vira $\int$. Obtemos assim a fórmula. ■

[1] A leitura desta seção é opcional.

Exemplo 6.13 *Calcule o comprimento total do perímetro da astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ representada na figura abaixo.*



Solução: Como $y=f(x)=(1-x^{2/3})^{3/2}$, $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{1-x^{2/3}}}{x^{1/3}}$. Logo, $1+[f'(x)]^2=x^{-2/3}$. Calculamos $1/4$ do comprimento integrando de $x=0$ até 1. Assim, o comprimento total é:

$$4\int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{x^{-2/3}}\,dx = 4\int_0^1 x^{-1/3}\,dx = 4\left.\frac{3x^{2/3}}{2}\right|_0^1 = 6 \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.14 *Calcule o comprimento dos gráficos abaixo nos intervalos indicados:*

(a) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$ *de* $x=0$ *até* $x=1$;

(b) $y=x^2$ *para* $x\in[0,b]$ *com* $b>0$ *(arco de parábola).*

Solução: Precisamos aqui recordar relações entre funções hiperbólicas: $(\cosh x)'=\operatorname{senh} x$, $(\operatorname{senh} x)'=\cosh x$ e $1+(\operatorname{senh} x)^2=(\cosh x)^2$. Note ainda que $\operatorname{senh} 0=0$ e $\cosh 0=1$. Veja detalhes na Seção 2.3.4 da p.56.

(a) Como $(\cosh x)'=\operatorname{senh} x$ e $1+(\operatorname{senh} x)^2=(\cosh x)^2$, o comprimento é

$$\int_0^1 \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x\big|_0^1 = \operatorname{senh}(1)-\operatorname{senh}(0) = \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

(b) Como $y'=2x$, devemos integrar $\displaystyle\int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx$. Esta é um integral difícil. Um método é utilizar substituição trigonométrica (veja Seção 5.6.2, p.152). Colocando $2x=\tan t$, $1+4x^2=1+\tan^2 t=\sec^2 t$. Assim, $2\,dx=\sec^2 t\,dt$. Assim, substituindo,

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sec^3 t\,dt.$$

Integrando por partes (ou usando fórmulas de redução que aparecem no problema Extra 5.14 da p.164) obtemos

$$\frac{1}{2}\int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{4}\left[\sec t\tan t + \log|\sec t+\tan t|\right].$$

Re-substituindo obtemos a fórmula

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+4x^2}+\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\right]$$

Assim o comprimento será igual a $\frac{1}{4}\left[2b\sqrt{1+4b^2}+\log\left|2b+\sqrt{1+4b^2}\right|\right]$.

Outro método (mais fácil) é usando a **substituição hiperbólica**. Colocando $2x = \operatorname{senh} t$, $1+4x^2 = 1+\operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$. Assim, $2\,dx = \cosh t\,dt$. Assim, substituindo,

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cosh^2 t\,dt.$$

Integrando por partes duas vezes (ou usando identidade $\cosh^2 t = 1/2(\cosh(2t)+1)$), de forma análoga a integral de $\cos^2$ obtemos que

$$\frac{1}{2}\int \cosh^2 t\,dt = \frac{1}{4}[\cosh(t)\operatorname{senh}(t)+t].$$

Substituindo $t = \operatorname{arcsenh}(2x)$ e $\cosh t = \sqrt{1+4x^2}$ obtemos que

$$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2}+\frac{\operatorname{arcsenh}(2x)}{4}.$$

Assim o comprimento será igual a $\frac{b\sqrt{1+4b^2}}{2}+\frac{\operatorname{arcsenh}(2b)}{4}$.

Destas duas formas de calcular o comprimento do arco da parábola, é fácil ver que $\left(\ddot\smile\right)$:

$$\frac{b\sqrt{1+4b^2}}{2}+\frac{\operatorname{arcsenh}(2b)}{4} = \frac{1}{4}\left[2b\sqrt{1+4b^2}+\log\left|2b+\sqrt{1+4b^2}\right|\right].$$

Logo, $\operatorname{arcsenh}(x) = \log|x+\sqrt{1+x^2}|$. ■

Observação 6.3 *A dedução do comprimento de uma curva é a parte mais interessante pois as integrais são complicadas e muitas vezes insolúveis. Veja como é complicado o comprimento do arco de parábola do exemplo anterior. Observe que nos livros de cálculo aparecem sempre os mesmo exemplos — esses que apresentamos aqui* $\left(\ddot\smile\right)$.

Integrais insolúveis por funções elementares.

Exemplo 6.15 *(a) Determine o comprimento de arco da elipse de semieixos a e b com $a \neq b$;*

(b) Determine o comprimento do gráfico de $y = \operatorname{sen}(x)$ para $x \in [0, \pi]$.

Solução: Os dois exemplos resultam em integrais que não podem ser expressas por meio de funções elementares. Leia Observação 5.2 da p.137.

(a) Resulta na chamada integral elítica. Consulte a Wikipedia `Ellipse (circunference)`.

(b) Resulta na integral $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx$. ■

Observação 6.4 *Existe uma incoerência entre as deduções do valor médio de uma função e do comprimento do gráfico.*
Na dedução da média assumimos que f é constante no intervalo; na dedução do comprimento assumimos que f é um segmento de reta (possivelmente inclinado).
Se assumirmos, na dedução da fórmula do comprimento de gráfico, que a função é constante no intervalo, quando passamos ao limite obtemos o comprimento do intervalo $[a, b]$ (a projeção no eixo x do gráfico), isto é, $b - a$. Pense sobre isto...

6.5 ⋆Área de Superfície de Sólido de Revolução[1]

Teorema 6.5 *Considere a superfície gerada pela rotação do gráfico da função $y = f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ em torno do eixo x. A área da superfície gerada é dada pela fórmula* $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$

Prova: A área da lateral do tronco de cone é dado por $2\pi \frac{R + r}{2} L$, onde R, r são os raios da base e topo do tronco de cone e L o comprimento da lateral.

Considere uma partição de $[a, b]$ em intervalos $I_i = [x_{i-1}, s_i]$ com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Fazendo dedução análoga ao do comprimento de curva, podemos aproximar $r_i = f(x_i), R_i = f(x_{i+1})$ e $L_i = \Delta x_i \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}$. Assim a área lateral total é a soma das áreas laterais:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)}.$$

Quando passamos ao limite com $\Delta x_i \to 0$, o termo $\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \to f(x)$, o termo $\Delta x_i \to dx$, o termo $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \to \frac{dy}{dx}$, e $\sum$ vira $\int$. Obtemos assim a fórmula. ∎

Observação 6.5 *Se aproximarmos a área de superfície por cilindros, tal qual fizemos na dedução do volume, a área lateral seria aproximada por $2\pi f(x)\Delta x$ e a fórmula do volume obtida seria $2\pi \int_a^b f(x)\, dx$, que está errada.*

Este tópico costuma ser omitido pois acaba se tornando somente mais uma fórmula decorada. De todo modo, o assunto é retomado em toda generalidade (cálculo de área de superfície qualquer) em Cálculo Integral de Várias Variáveis (usualmente Cálculo III).

6.6 ⋆Transformada de Laplace[1]

Em várias aplicações de equações diferenciais é importante a chamada transformada de Laplace, que transforma uma função em outra. Mais precisamente, a transformada de Laplace é uma função que leva uma função em outra. Para soar melhor utilizamos a palavra **transformada**, que é sinônimo de função. Assim ao invés de dizermos "é uma função que leva uma função em outra" dizemos "é uma transformada que leva uma função em outra". A ideia de função de função já apareceu na Observação 3.4 da p.69, quando denotamos por $\mathcal{I}$ o espaço das funções e definimos o operador derivada $D : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$, que leva uma função em outra, sua derivada. Assim, $D(\text{sen}) = \cos$ por exemplo.

O principal uso da Transformada de Laplace (útil em diversas áreas da Engenharia) é resolver equação diferencias de segunda ordem com coeficientes constantes.

[1]A leitura desta seção é opcional.
[1]A leitura desta seção é opcional.

Definição 6.6 (transformada de Laplace[4]) *Seja $\mathcal{I}$ o espaço das funções integráveis. Definimos $\mathcal{L} : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ por*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx.$$

A integral é em relação a x. Assim, na integração, a variável s é uma constante.

Exemplo 6.16 *Determine a transformada de Laplace de:*
(a) $f(x) = 1$; *(b)* $g(x) = x$. *(c)* $f(x) = e^{bx}$; *(d)* $g(x) = \operatorname{sen}(bx)$.

Solução: (a) Como $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1\, dx = \left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}$. Logo, $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s}$.

(b) Integrando por partes obtemos que $\displaystyle\int e^{-sx} x\, dx = -\frac{e^{-sx}}{s^2}(sx+1)$. Assim, substituindo limites de integração obtemos que, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx} x\, dx = \frac{1}{s^2}$. Logo, $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

(c) Como $\int e^{-sx} e^{bx}\, dx = \int e^{x(b-s)}\, dx = \dfrac{e^{x(b-s)}}{b-s}$, temos que $\int_0^\infty e^{-sx} e^{bx}\, dx = \dfrac{1}{s-b}$. Logo, $\mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{1}{s-b}$.

(d) Integrando por partes (veja Exemplo 5.19 da p.149) obtemos que $\int e^{-sx} \operatorname{sen}(bx)\, dx = e^{-sx} \dfrac{-s \operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)}{s^2+b^2}$. Logo $\int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen}(bx)\, dx = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ e $\mathcal{L}(g)(s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$. ∎

Teorema 6.7 (propriedades básicas da Transformada de Laplace) *Seja $\mathcal{L} : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ a Transformada de Laplace, $f, g \in \mathcal{I}$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:*
(a) $\mathcal{L}(f + kg) = \mathcal{L}(f) + k\mathcal{L}(g)$ (linearidade);
(b) se f é derivável então $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.

Prova: Deixamos como exercícios para o leitor pois são fáceis. ∎

Corolário 6.8 *Se f' é derivável então $\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$.*

Prova: Pelo Teorema, $\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0)$. Aplicando-o novamente em $\mathcal{L}(f')$ obtemos que $\mathcal{L}(f'')(s) = s(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$. ∎

Observação 6.6 *Utilizando a notação de operador D para derivadas, provamos que:*

$$\mathcal{L}(D^n f)(s) = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots sD^{n-2}f(0) - D^{n-1}f(0).$$

Esta propriedade diz que a transformada de Laplace converte uma derivada em um produto. Ela transforma a resolução de uma equação diferencial em um problema algébrico.

Exemplo 6.17 *Determine a função $y(x)$ que satisfaz $y' - 2y = e^{3x}$ com $y(0) = 5$.*

Solução: Definimos $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. Assim, aplicando a transformada de Laplace em todos os termos da equação e utilizando as propriedades acima, obtemos $sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \dfrac{1}{s-3}$. Substituindo a condição inicial $y(0) = 5$ e colocando $Y(s)$ em evidência, obtemos

[4]Pierre-Simon Laplace: ⋆1749 Beaumont-en-Auge, França — †1827 Paris, França.

que $Y(s)(s-2)-5=\dfrac{1}{s-3}$. Portanto $Y(s)=\dfrac{5}{s-2}+\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}$. Desenvolvendo o segundo termo em frações parciais (ver Seção 5.7.1 da p.153), obtemos que

$$Y(s)=\frac{5}{s-2}-\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-3}=\frac{4}{s-2}+\frac{1}{s-3}.$$

Como $\mathcal{L}(e^{bx})=\dfrac{1}{s-b}$, obtemos que $y(x)=4e^{2x}+e^{3x}$ (verifique que satisfaz a condição inicial e a equação). ■

6.7 ⋆Série de Fourier e MP3[1]

A série de Fourier[5] é uma das aplicações mais importantes do Cálculo. É utilizada para determinar solução da equação de difusão do calor, em eletrônica na teoria de filtros e no formato de compactação de música MP3 e ogg.

De forma sucinta, utilizando a série de Fourier podemos transformar uma função qualquer em uma série de coeficientes e vice-versa. Para somente aproximar a função, podemos tomar um número finito de coeficientes.

Teorema 6.9 (série de Fourier) *Seja $\mathcal{I}$ o espaço das funções integráveis e $\mathcal{C}=\{(a_0,a_1,\ldots,b_1,b_2,\ldots);\quad a_k,b_k\in\mathbb{R}\}$ o espaço dos coeficientes. Então, dado $f\in\mathcal{I}$ tal que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx<\infty$, existem coeficientes $a_k,b_k\in\mathbb{R}$ (os coeficientes de Fourier de f) com $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2<\infty$ e tais que*

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\operatorname{sen}(kx)\right).$$

Esta equação define $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{I}$: dados coeficientes em $\mathcal{C}$ obtemos uma função $f\in\mathcal{I}$. Estes coeficientes são determinados, para $k\geq 1$, por

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)\,dx.$$

Estas equações definem $\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$: dada função $f\in\mathcal{I}$ obtemos os coeficientes em $\mathcal{C}$.

Prova: Este é um teorema bastante sofisticado. Provamos o que é possível no contexto de Cálculo.

[1] A leitura desta seção é opcional.

[5] Jean Baptiste Joseph Fourier: ⋆1768 Bourgogne, França — †1830 Paris, França.

Utilizando Lema 5.17 da p.150, podemos calcular que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N};$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{para } n \neq m;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(mx)\,dx = \pi \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)^2\,dx = \pi \quad \text{para todo } m \geq 1;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 0 \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim se escrevermos que $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$, quando calcularmos a integral dos dois lados, do lado direito todos os termos serão zero menos o do a_0. De fato, pela linearidade da integral,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx\right)\\ &= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot 0 + b_n \cdot 0)\\ &= 2\pi a_0.\end{aligned}$$

Assim obtemos a fórmula do a_0. Para obter a fórmula de a_k multiplicamos por $\cos(kx)$ antes de integrar. Quase todos os termos vão se anular, com exceção do termo $k = n$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(kx)\,dx +\\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(kx)\,dx\right)\\ &= a_0 \cdot 0 + a_k\pi + \sum_{n\neq k}^{\infty}(a_n \cdot 0) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n \cdot 0)\\ &= a_k\pi.\end{aligned}$$

De forma análoga se obtém a fórmula do b_k. Os detalhes de convergência fazem parte de um curso sobre a série de Fourier. Veja Wikipedia `Fourier series`. ∎

Exemplo 6.18 *Determine os coeficientes de Fourier de função $f(x) = x$.*

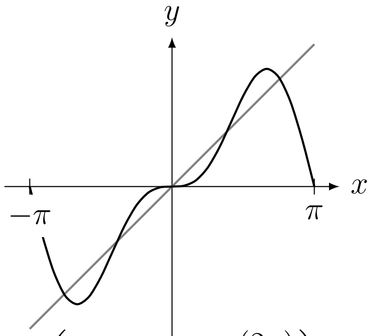
Solução: Como $f(-x) = -f(x)$ (dizemos que a função é impar), os coeficientes $a_k = 0$. Obtemos b_k integrando por partes:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx)\,dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

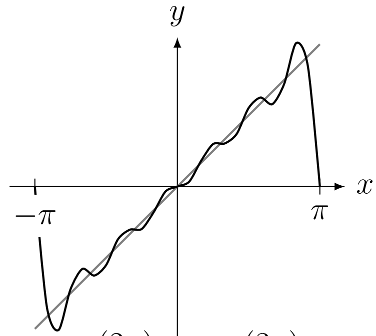
Assim podemos aproximar, no intervalo $[-\pi, \pi]$ a função $f(x) = x$ por:

$$f(x) = x \approx 2\left(\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + \cdots\right)$$

Na figura abaixo mostramos duas aproximações de $f(x) = x$ por série de Fourier.



$$2\left(\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right)$$



$$2\left(\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right)$$

■

Em termos de música, os coeficientes representam as frequências. Quando aproximamos f por um número finito de coeficientes estamos ignorando as frequências mais altas. Esta ideia é a base da compactação MP3 e ogg, aproveitando que o ouvido humano não percebe frequências altas. Assim uma música, que pode ser representada por uma função, é aproximada por alguns de seus coeficientes na série de Fourier. Outra ideia explorada pelo formato é utilizar a forte correlação entre o canal esquerdo e direito de música. Para mais detalhes, remeto para `Wikipedia` em *Audio compression (data)*

6.8 Exercícios de Aplicações da Integral

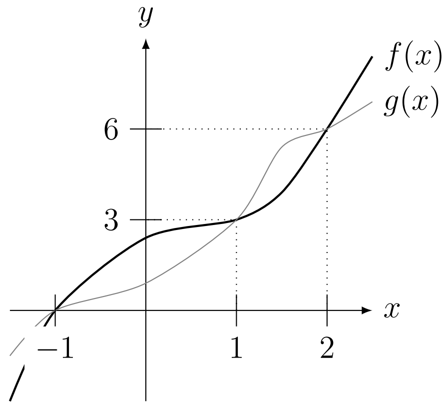
6.8.1 Exercícios de Fixação

Fix 6.1: Esboce o gráfico e calcule a área da região delimitada por:

(a) $y = e^x + 2, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 5.$

(b) $y = 0, \quad y = \cos(x), \quad x = -\pi/2, \quad x = \pi/2.$

Fix 6.2: Considere os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ representadas na figura abaixo.



Escreva uma (ou a soma de) integral(is) definida(s) que calcule a área delimitada por:

(a) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $x \in [1, 2]$; (b) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $x \in [-1, 2]$.

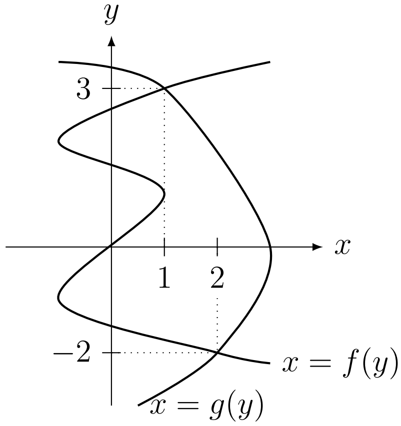
Fix 6.3: Considere os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ do exercício anterior. Escreva uma (ou a soma de) integral(is) definida(s) que calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do:

(a) eixo x da região delimitada por $y = 0$ e $y = f(x)$ para $x \in [-1, 1]$;

(b) eixo x da região delimitada por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ para $x \in [1, 2]$;

(c) eixo y da região do item (b).

Fix 6.4: Considere a região do plano delimitada por $x = f(y)$ e $x = g(y)$ indicada na figura abaixo. Escreva uma integral que determine a área da região.

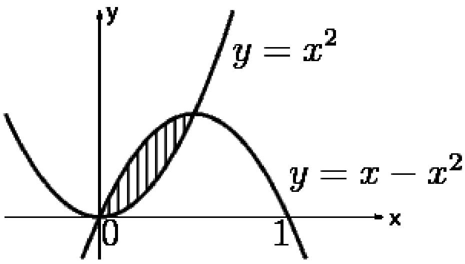


Fix 6.5: Suponha que $\Pi(s)$ é o plano $y = s$ em $\mathbb{R}^3$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um sólido contido entre os planos $y = -2$ e $y = 4$. Seja $A(s)$ a área da interseção de $\Pi(s)$ com Ω. Escreva uma integral que determine o volume de Ω.

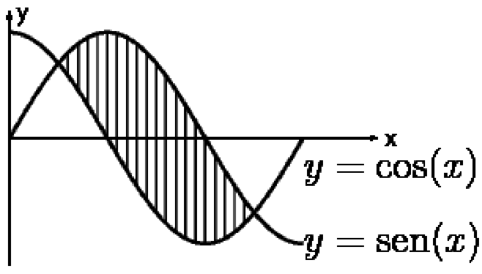
Fix 6.6: Considere $g : [1, 7] \to \mathbb{R}$ tal que $-4 \le g(x) \le 5$ para todo $x \in [1, 7]$. Sabendo que o valor médio de g no intervalo $[1, 7]$ igual a K, prove que $-4 \le K \le 5$.

6.8.2 Problemas

Prob 6.1: Calcule as áreas hachuradas das figuras (a) e (b) abaixo.



(a)



(b)

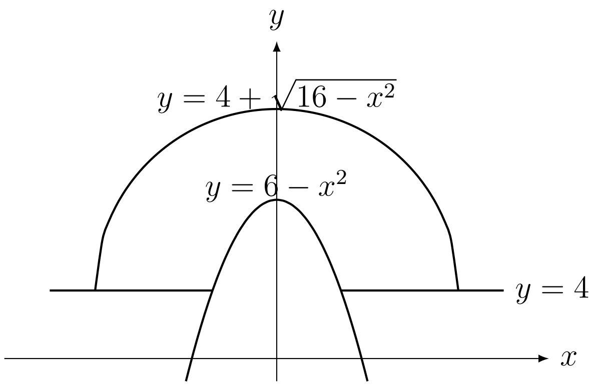
Prob 6.2: Esboce e calcule a área da região limitada:

(a) $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$. Dica: $x = 2$ é raiz de $x^3 = x + 6$.

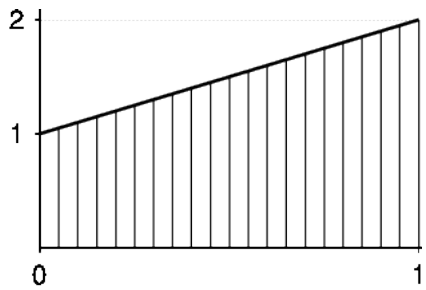
(b) por $y^2 = 2x + 4$ e por $y = x - 2$.

(c) inferiormente por $y = \sqrt{x}$, superiormente por $y = 1$ e lateralmente por $x = 0$.

Prob 6.3: Considere a região do plano limitada superiormente por $y = 4 + \sqrt{16 - x^2}$ e inferiormente por $y = 4$ e $y = 6 - x^2$, conforme indicada na figura abaixo. Determine sua área.



Prob 6.4: Calcule o volume do sólido de revolução gerado quando a região hachurada na figura abaixo é girada em torno do eixo x e do eixo y.



Prob 6.5: Esboce a região do plano, determine sua área e calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano delimitada:

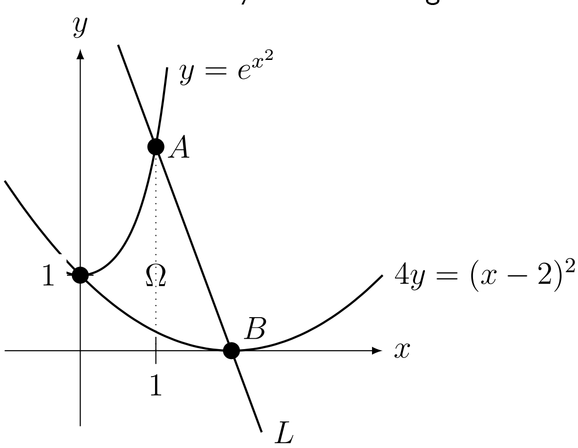
(a) por $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad y = 2 \quad$ e $\quad x = 0$;

(b) acima por $y = e^{-x}$, abaixo pelo eixo x e a esquerda pela reta $x = 1$ (uma região infinita).

Prob 6.6: (sólido de revolução girado em torno de outros eixos) Determine o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada por $x = y^2$ e $x = y$ é girada em torno da reta:

(a) $y = -1$; $\qquad$ (b) $x = -1$.

Prob 6.7: Na figura abaixo, seja A o ponto de interseção da curva $y = e^{x^2}$ com a reta L, e seja B o vértice da parábola $4y = (x-2)^2$. Suponha que a reta L passe por A e B. A reta L, a parábola e o gráfico de $y = e^{x^2}$ delimitam uma região Ω. Escreva uma soma de integrais que determine o volume do sólido de revolução obtido ao girar Ω em torno do eixo y.



Prob 6.8: Um buraco cilíndrico de raio a é feito passando pelo centro de uma esfera de raio r. Determine o volume do sólido (esfera com buraco no meio) remanescente.

Prob 6.9: Determine o volume do sólido cuja base é o círculo (no plano xy) $x^2 + y^2 = r^2$ e cujas seções perpendiculares ao eixo x são quadrados com um lado na base (no plano xy).

Prob 6.10: Determine o volume do sólido cuja base é limitada por $y = x$ e $y = x^2$ e cujas seções perpendiculares ao eixo x são quadrados com um lado na base (no plano xy).

Prob 6.11: Determine o valor médio das funções abaixo nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = x^2$ em $[0, K]$; (b) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ em $[0, \pi]$.

Prob 6.12: (método das cascas cilíndricas) Considere o seguinte problema: Determine o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada por $y = \operatorname{sen}(x)$ e o eixo x é girada em torno do eixo y.

(a) Pelo método usual teríamos que integrar arcsen. Uma alternativa é usar o **método das cascas cilíndricas** (*cylindrical shells* em inglês). Pesquise este método e calcule o volume deste sólido. Ele é útil quando temos que inverter uma função complicada.

(b) Outro exemplo (caso contrário teríamos que inverter a equação do terceiro grau): Determine o volume do sólido de revolução obtido quando a região limitada por $y = x - x^3$ e o eixo x é girada em torno do eixo y.

6.8.3 Extras

Ext 6.1: Esboce e calcule a área da região limitada por:

(a) $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = -2$, $x = -1$ e $x = 2$.

(b) $y = 6\pi x - 3x^2$, $y = \cos(x) - 1$. (c) $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$.

Ext 6.2: Esboce e escreva integrais que calculem a área da região limitada por:

(a) $y = x^3 - x$ e $y = \operatorname{sen}(\pi x)$ com $x \in [-1, 1]$.

(b) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ e $y = 3x - x^2 - 2$ (interseção em $x = -1,\ 1,\ 2$).

Ext 6.3: Para cada $n > 0$, seja Ω_n a região limitada pelo gráfico de $y = x^n$, o eixo x e a reta $x = 1$. Se W_n é o volume do sólido obtido girando Ω_n em torno do eixo x, e V_n é o volume do sólido obtido girando-se Ω_n em torno do eixo y, determine $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{W_n}$.

Ext 6.4: Neste exercício vamos mostrar como definir $\log$ para depois definir a exponencial. Defina $f(x) = \displaystyle\int_1^x dx/x$. Fingindo que você não sabe a primitiva de $1/x$, somente mudando variável, prove que $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Ext 6.5: Seja R a região do plano delimitada pelas curvas $y = c - x^2$ e $2x^2 - 2c$ para $c > 0$.

(a) Esboce R; (b) Determine $c > 0$ tal que a área de R seja igual a 32.

Ext 6.6: Esboce a região do plano e calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano delimitada:

(a) acima pelo gráfico de $f(x) = \dfrac{\sqrt{\log(x) - 1}}{x}$, abaixo pelo eixo x e a esquerda por $x = e$ (região infinita).

(b) por $y = \log(x)$, por $y = 0$ e para $x \in [1, e^2]$.

Ext 6.7: Esboce a região do plano e escreva integrais que calculem o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo x e em torno do eixo y da região do plano delimitada por:

(a) $y = 1/(x^2 + 5)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

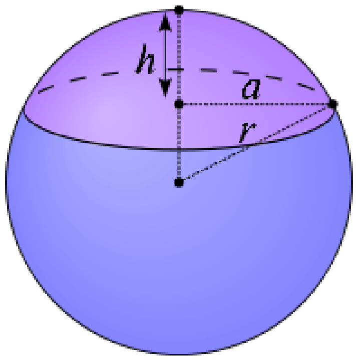
(b) $y = x/2$ e $y = \sqrt{x}$. (c) $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ e $y = 0$.

Ext 6.8: A base de um sólido é a região (do plano xy) limitada por $y^2 = 4x$ e a reta $x = 9$. Cada plano perpendicular ao eixo x intersepta o sólido num quadrado com um lado na base (no plano xy). Calcule seu volume.

Ext 6.9: Prove, utilizando somente o Princípio de Cavalieri, que o volume da esfera de raio R mais o volume do cone duplo com raio da base R e altura R é igual ao volume do cilindro de raio R e altura $2R$.

Observação: Questão clássica do Ensino Médio: não precisamos de cálculo!

Ext 6.10: Uma calota esférica é uma porção da esfera obtida através de um corte por um plano de uma esfera (veja figura abaixo) . Se o raio da esfera é r, a altura da calota é h e o raio da calota é a, determine o volume desta calota.



Ext 6.11: Considere o sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ em torno do eixo x. Determine o valor de a tal que o plano $x = a$ corta este sólido em duas partes de mesmo volume.

Ext 6.12: Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Determine o volume do elipsoide obtido quando se gira esta elipse em torno do eixo x.

Ext 6.13: Considere a região delimitada pelo eixo x e pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}}$. Calcule o volume do sólido de revolução obtido ao girarmos esta região em torno do eixo x para $x \geq 1$.

6.8.4 ⋆Problemas (Comprimento de Curvas no Plano)

Prob 6.1: Determine o comprimento do gráfico da função:

(a) $y = f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ para $x \in [1, 2]$.
(b) $y = f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ para $x \in [0, 4]$;
(c) $y = f(x) = \log x$ para $x \in [1, 2]$;
(d) $y = g(x) = -\log(\sqrt{2}\cos x)$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Prob 6.2: Prove que o comprimento de uma poligonal dada pela fórmula com integral é igual a soma dos tamanhos dos segmentos, cada um calculado utilizando Pitágoras.

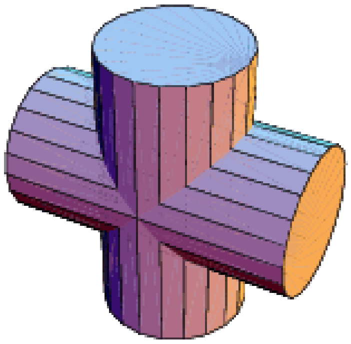
6.8.5 ⋆Problemas (Área de Superfície de Sólido de Revolução)

Prob 6.1: Calcule a **área da superfície** de revolução gerada pela rotação em torno do eixo x da curva:

(a) $y = x^3$ para $x \in [0, 1]$. (b) $y = x^2$ para $x \in [0, 1]$. (c) $y = e^{-x}$ para $x \geq 0$.

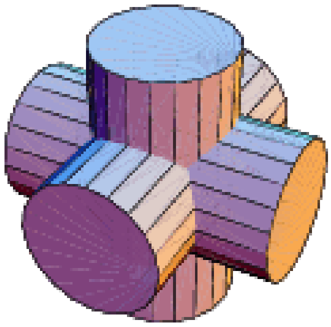
6.8.6 Desafios

Des 6.1: Os eixos de dois cilindros, cada um com raio r se interceptam fazendo um ângulo reto (veja figura abaixo). Determine o volume da região comum aos dois cilindros.



Este é conhecido como sólido de Steinmetz[6] Dica: Considere planos paralelos ao plano que contem os eixos. Veja o solido na Wikipedia: `Steinmetz_solid`.

Uma generalização é dada na figura abaixo.



Des 6.2: Calcule a área da lúnula (interseção de dois círculos), um de raio r e outro R, cujos centros estão afastados uma distância L. Assumimos que $L, R, r > 0$. Veja nas figuras abaixo ilustrações de lúnulas em cinza:

Des 6.3: Aproxime a área do gráfico de $y = f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ utilizando a soma da área de trapézios. Mostre que obtemos a mesma fórmula: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Des 6.4: Seja f uma função par, isto é $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que os coeficientes de Fourier $b_k = 0$. E se f for impar, isto é $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O que pode-se concluir sobre coeficientes a_k?

[6] Charles Proteus Steinmetz: ⋆1865 Breslau, Prussia — †1923 Schenectady, EUA.

Apêndice A

Respostas dos Exercícios

A.1 Limite

A.1.1 Exer. de Fixação p.38

Fix 1.1: (a) 3; (b) o limite não existe. Calculando os laterais: $\lim_{x \to b^-} f(x) = 6$; $\lim_{x \to b^+} f(x) = 1$.

(c) 5.

não existe limite em c: o gráfico possui uma "quebra".

Fix 1.2: (a) Verdadeiro. (b) Falso: é intervalo centrado $(x - (-2) = x + 2)$ em -2 com raio 1: $(-4, -1)$. (c) Falso para $x < 0$. Correto é $\sqrt{x^2} = |x|$. (d) Falso: o limite é 4. "O valor da função no ponto não importa para o cálculo do limite". (e) Falso: $c = 0$, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = -\operatorname{sen}(1/x)$.

Fix 1.3: (a) Falso. Tome $f(x) = \begin{cases} 4; & x \le 3; \\ 5; & x > 3 \end{cases}$, então quando $x \to 3^-$ o limite é 4. Assim, neste caso o limite não existe.

(b) Falso. O limite quando $x \to 2^-$ é 4 pois a existência do limite implica na existência dos limites laterais (com o mesmo valor).

(c) Falso. Tome $f(x) = \begin{cases} 4; & x \ne 2; \\ 5; & x = 2 \end{cases}$, então o limite quando $x \to 2$ é 4 mas $f(2) = 5$.

(d) Falso. Se o limite quando $x \to 3$ existe, os laterais existem e assumem o mesmo valor.

Fix 1.4: (a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ não existe.

(b) todos limites são 5.

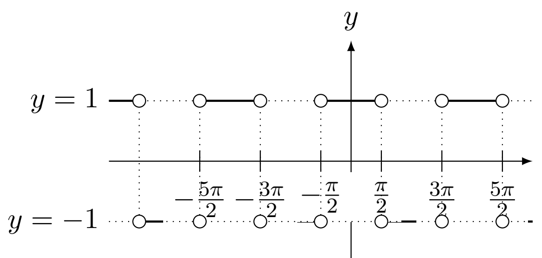
(c) todos limites são 7.

(d) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 9$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ não existe.

(e) todos limites são 7.

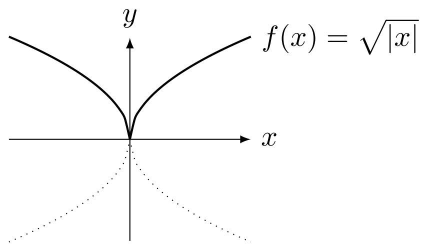
(f) todos limites são 9.

Fix 1.5: (a) a função alterna entre 1, quando $\cos(x) > 0$, e -1, quando $\cos(x) < 0$. Nos pontos onde $\cos(x) = 0$ ela não está definida.



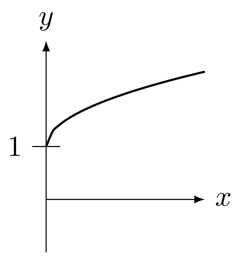
$$f(x) = \frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}$$

(b)



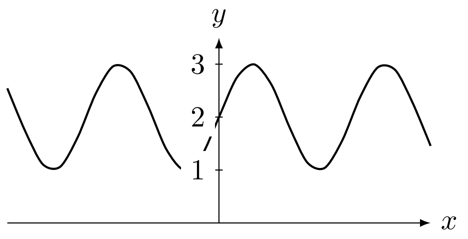
Fix 1.6:

(a) Translação vertical de uma unidade do gráfico de $\sqrt{x}$.



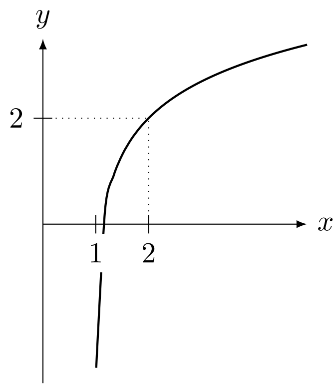
(a) $y = 1 + \sqrt{x}$

(b) Translação vertical de duas unidades do gráfico de $\operatorname{sen}(x)$.



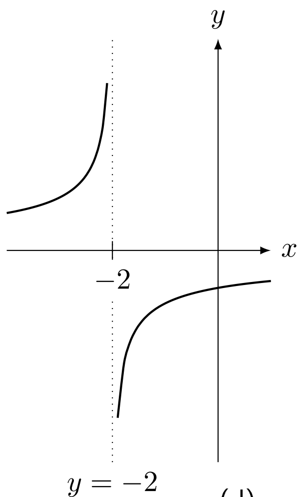
(b) $y = 2 + \operatorname{sen} x$

(c) translação horizontal do $\log$ por uma unidade seguido por translação vertical de duas unidades (faça duas figuras antes de obter a resposta abaixo).



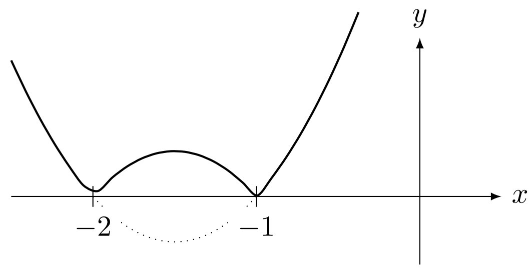
(c) $y = \log(x-1) + 2$

(d) Translação horizontal do gráfico de $-1/x^3$, que é parecido com o gráfico de $-1/x$.



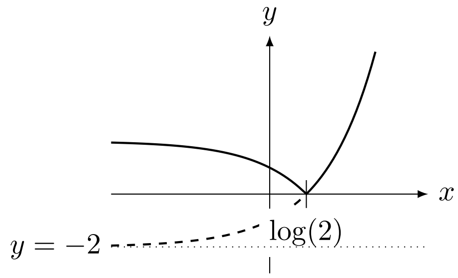
(d) $y = \dfrac{-1}{(x+2)^3}$

(e) Raízes do polinômio: $-1, -2$. Esboce o gráfico da parábola $(x+1)(x+2)$ e depois reflita em torno do eixo x (efeito do módulo).



(e) $y = |(x+1)(x+2)|$

(f) Esboce o gráfico da parábola e^x, translade verticalmente em 2 unidades e depois reflita em torno do eixo x (efeito do módulo). Achamos o ponto de reflexão resolvendo $e^x - 2 = 0$, o que implica que $x = \log(2)$.



(f) $y = |e^x - 2|$

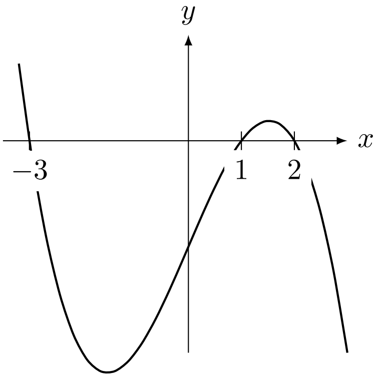
Fix 1.7: (a) -1 (cancele termos iguais). (b) $1/2$ (cancele x no numerador e denominador). (c) 0 (somente numerador se anula).

Fix 1.8: Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a ∞ é ∞ se $f(x)$ fica tão grande e positivo quanto quisermos para todo x grande o suficiente.

Fix 1.9: (a) Análise de dois termos quadráticos. Será positiva em $[-\sqrt{3}, -1)$ e em $(1, \sqrt{3}]$. (b) O termo $x^3 - 1$ possui a raiz 1. Pelo Teorema D'Alembert pode ser fatorado por $x - 1$. Fazendo divisão de polinômios obtemos que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Calculando Delta, vemos que o segundo polinômio possui 2 raízes complexas. Como $a > 0$, o termo $x^2 + x + 1 \geq 0$. Fazendo quadro de sinais com $x - 1$, x e $x^2 - 4$ (podemos ignorar o termo sempre positivo $x^2 + x + 1$) obtemos que será negativa em $(-2, 0)$ e $[1, 2)$.

Fix 1.10: (a) Raízes são $-3, 1, 2$.

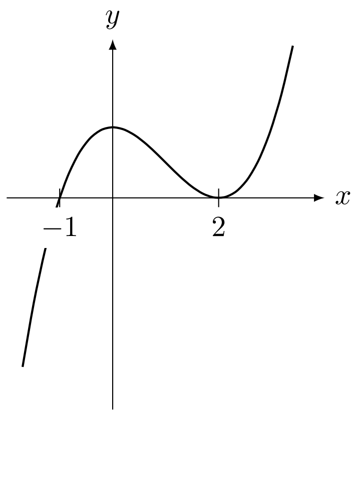
		-3		1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+3$	$-$		$+$		$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$		$-$		$-$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



(a) $p(x) = (x-2)(x+3)(1-x)$

(b) Raízes são $-1, 2$.

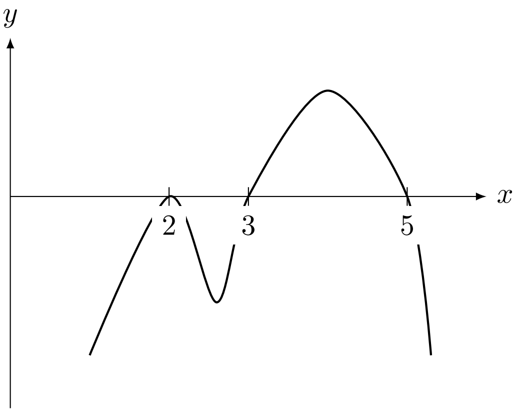
		-1		2	
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$
		0		0	
$q(x)$	$-$		$+$		$+$



(b) $q(x) = (x-2)^2(x+1)$

(c) Raízes são $2, 3, 5$.

		2		3		5	
$3-x$	$+$		$+$		$-$		$-$
$(x-2)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$		$+$
		0		0		0	
$r(x)$	$-$		$-$		$+$		$-$



(c) $r(x) = (3-x)(x-2)^2(x-5)$;

Fix 1.11: (a) $-\infty$. (b) ∞. (c) -1. (d) (a função vale x^2 para $x > 0$ e $-x^2$ para $x < 0$) 0. (e) não existe pois depende de qual lado se aproxima. (f) $-\infty$ $(0 + 1/0^- = 0 - \infty = -\infty)$. (g) ∞.

Fix 1.12: (a) 1. (b) ∞. (c) 6. (d) ∞. (e) ∞. (f) ∞. (g) 3. (h) $5/4$. (i) ∞.

Fix 1.13: (a) não pode; (b) pode.

Fix 1.14: (a) Falso. Se $q(x) = x - 1$ o limite não existe; se $q(x) = -(x-1)^2$ o limite é $-\infty$.

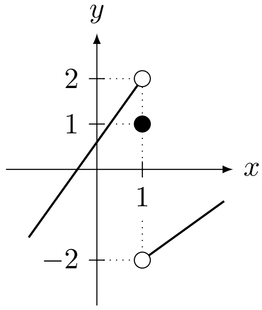
(b) Falso. Se $f(x) = q(x)$ então o limite será 1.

(c) Verdadeiro. O denominador vai para -1. Assim, $0/(-1) = 0$ (não é indeterminação).

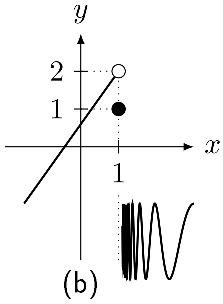
Fix 1.15: Ser indeterminado significa que não podemos usar propriedades usuais (soma, produto, divisão) por ter resultado em uma indeterminação. Temos que aplicar outras técnicas para tentar calcular. Pode ser que não exista o limite (veja Exemplo 1.32 da p.28) ou que exista. Quando não existe nada mais podemos fazer.

Fix 1.16: A condição (i) exclui a letra (b). Tanto (iii) quanto (iv) exclui letra (d). Finalmente a letra (c) não representa uma função: qual valor de $f(0.99999)$? São três possibilidades: logo não é função. Resposta: (a).

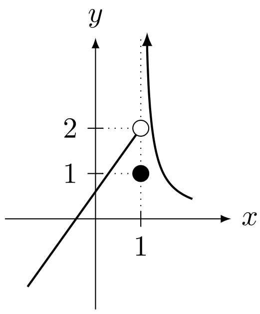
Fix 1.17:



(a)



(b)



(c)

Fix 1.18: (a) como seno é limitado por ± 1, temos que $-\sqrt{|x|} \leq \sqrt{|x|}\,\mathrm{sen}(1/x) \leq \sqrt{|x|}$. Aplicando o Teorema do Sanduíche, concluímos que o limite é 0.

(b) substituindo variável, o limite é 3. (c) substituindo variável, o limite é e^5. (d) $-\infty$. (e) e^{-2} (fazendo $y = -2x$).

Fix 1.19: (a) É falso. O limite pode não existir. Por exemplo g descontínua em $x = 3/2$: $g(x) = 1$ para $x \leq 3/2$ e $g(x) = 2$ caso contrário.

(b) Como $-1 \leq \cos(y) \leq 1$,

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

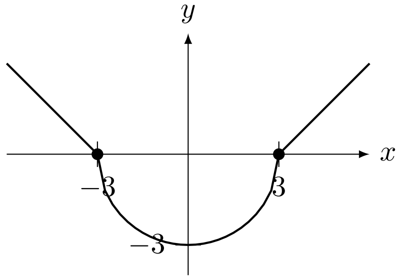
Assim, pelo Teorema do Sanduíche, como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

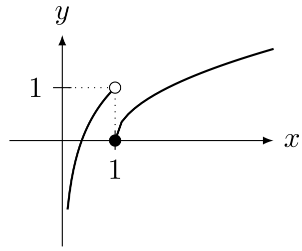
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{x^2} = 0.$$

A.1.2 Problemas p.40

Prob 1.1:



(a) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{9-x^2}; & |x| \leq 3 \\ |x|-3; & |x| > 3. \end{cases}$



(b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}; & x \geq 1; \\ \log(x)+1; & x < 1. \end{cases}$

Prob 1.2: (a) e (b) o limite é 0. Em (c) o limite não existe pois oscila entre 0 e 1.

Prob 1.3: (a) 1 (racionalize o numerador). (b) 4 (note que para x próximo de 4, $|x| = x$ e racionalize). (c) $-1/2$ (racionalize).

Prob 1.4: (a) não existe pois o valor oscila entre 1 e -1. (b) $-\infty$. (c) para $x > 2$, como $|x-2| = x-2$, cancelamos os termos e a função é $x+1$. para $x < 2$, como $|x-2| = 2-x$ obtemos que a função é $-(x+1)$. Assim para $x \to 2^+$ o limite é $2+1 = 3$; para $x \to 2^-$ o limite é $-(2+1) = -3$. Logo o limite não existe. (d) Para x próximo de -5 o numerador é sempre negativo (cerca de -2). Assim para $x \to -5^+$ o limite é $-\infty$; para $x \to -5^-$ o é ∞. Logo o limite não existe. (e) Note que $x^2 - 5x + 6 = (x-3)*(x-2)$. Para $x \to 2^-$, $|x-2| = 2-x$. Logo a função é $(x-3)*(-1) = 3-x$. Assim quando $x \to 2^-$ o limite é 1. Para $x \to 2^+$, $|x-2| = x-2$. Logo a função é $(x-3)$. Assim quando $x \to 2^+$ o limite é -1.

Prob 1.5: (a) $-\infty$. (b) 3 ($x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$). (c) -1 (para $x \to -2$, $|x| = -x$). (note que 2 é raiz dupla: $a^3 - 5a^2 + 8a - 4 = (a-1)(a-2)^2$). (d) Divida por $x-1$ o numerador e o denominador para obter $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2+3*x+2}$. R: $-1/2$. (e) 4 (f) $-\infty$ ($\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$). (g) 0 (o limite é $0/3 = 0$). (h) $-\infty$. (i) 3 (rearrumando o numerador obtemos $(x^2+x-2)/x$). (j) 0.

Prob 1.6: (a) -1 (para x pequeno, numerador vale $\sqrt{x^2} = -x$). (b) $-2/3$. (c) $\sqrt{10}/5$; (d) ∞. (e) ∞ (para x pequeno, vale $-3y^3/(\sqrt{10}y^2)$). (f) $\mathrm{sen}(-2)$ (para x pequeno, numerador vale $4\sqrt{x^6} = -4x^3$).

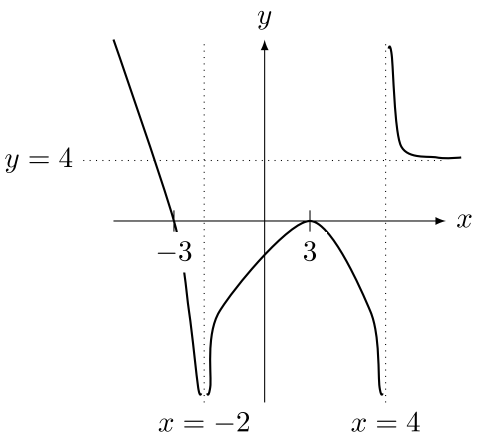
Prob 1.7: (a) e^{ab} (mude variável para $y = ax$). (b) 0. (c) se $b < 0$ obtemos ∞ ($\infty\infty$). O caso interessante é se $b > 0$ ($\infty - \infty$). Nesta caso, se $c > b^2$ o limite é ∞, se $c < b^2$ o limite é $-\infty$, se $c = b^2$ o limite é $a/(2b)$. (d) $\frac{a-b}{2\sqrt{c}}$ (racionalizando). (e) $\frac{b-a}{2\sqrt{c}}$ (racionalizando: cuidado que aqui $\sqrt{x^2} = -x!$).

Prob 1.8: (a) 0. (b) b/a. (c) ∞ se $c > 0$, (note que $2m > m + 2$ se $m > 10$) . (d) a/c. (e) $\sqrt{c}/a$. (f) 0.

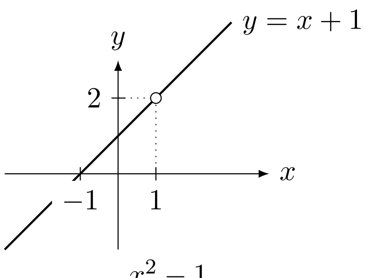
Prob 1.9: (a) quando $x \to 0^-$ é 1, quando $x \to 0^+$ é 0.

(b) para $x > 0$ a função vale $1/x - 1/x = 0$, para $x < 0$ vale $1/x - (-1/x) = 2/x$. Assim quando $x \to 0^+$ é 0, quando $x \to 0^-$ é $-\infty$.

Prob 1.10: Assintotas verticais: $x = -2$ e $x = 4$. Assintota horizontal: $y = 4$.

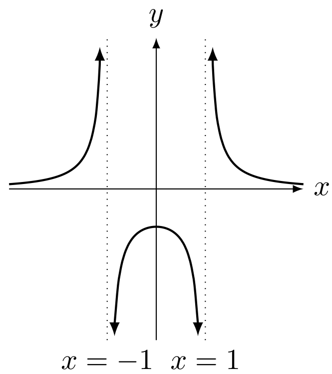


Prob 1.11: (a) É uma pegadinha, pois podemos simplificar a função para $(x+1)(x-1)/(x-1) = x+1$ para $x \neq 1$ (função não esta definida no 1). Assim a função é a reta $y = x + 1$ mas sem estar definida em $x = 1$.



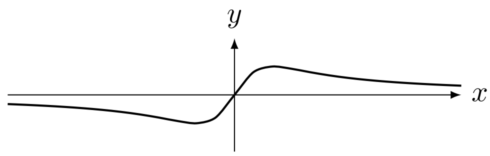
(a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) O sinal da função é dado pelo denominador, já que o numerador é sempre positivo (igual a 1). O sinal é: $|x| > 1$ a função é positiva, $|x| < 1$ é negativa. Assintotas verticais (quando denominador se anula): $x = \pm 1$. A assíntota horizontal é $y = 0$ (o eixo x) pois o no $\pm\infty$ é 0.



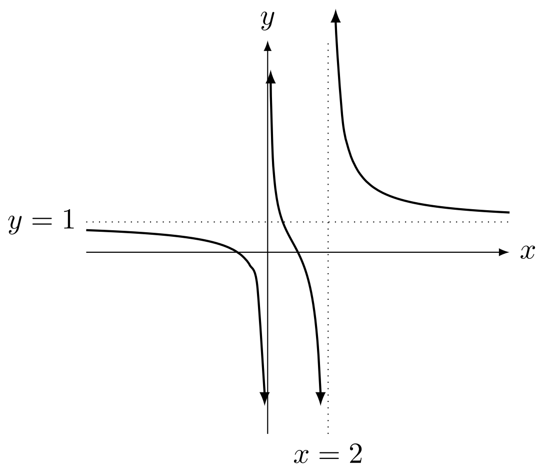
(b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) Como o denominador é sempre positivo ($x^2 + 1 > 0$ para todo x), o sinal da função é o mesmo do numerador: positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$. Como o denominador nunca se anula, não possui assintotas verticais. Como o limite no $\pm\infty$ é 0, possui assintota horizontal $y = 0$ (eixo x). A função passa no $(0, 0)$. Note que ela tem que ser positiva para $x > 0$ e convergir para 0 no ∞. Com estas informações fizemos o esboço mais simples possível.



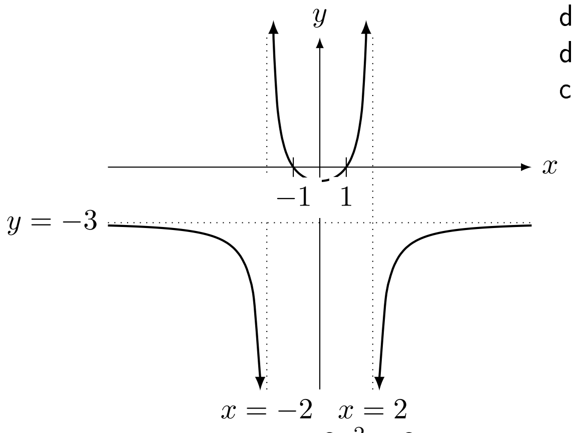
(c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(d) Assintotas verticais (denominador se anula): $x = 0$ e $x = 2$. Assíntotas horizontais (limite no $\pm\infty$): $y = 1$. Fazendo o quadro de sinais obtemos o comportamento perto das assintotas.



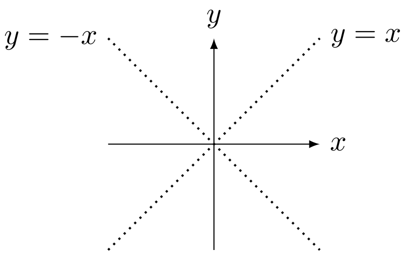
(d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x(x - 2)}$

(e) Assintotas verticais (denominador se anula): $x = 2$ e $x = -2$. Assíntotas horizontais (limite no $\pm\infty$): $y = -3$. Fazendo o quadro de sinais obtemos o comportamento perto das assintotas.



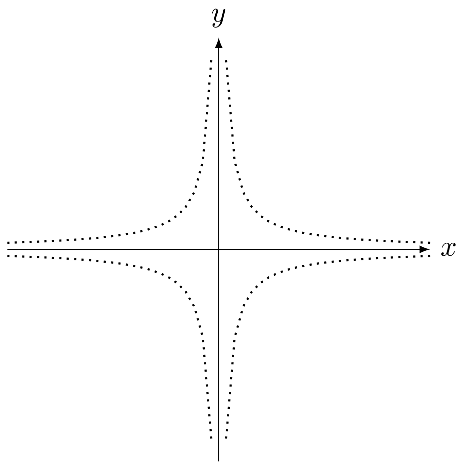
(e) $y = \dfrac{3x^2 - 3}{4 - x^2}$

Prob 1.12: Para (a) e (b). O gráfico de $h(x)$ é formado por duas "retas" pontilhadas: uma em $y = x$, acima dos racionais e outra no $y = -x$, acima dos irracionais (vide figura abaixo). Logo em (a) e (b) o limite não existe.



$h(x)$

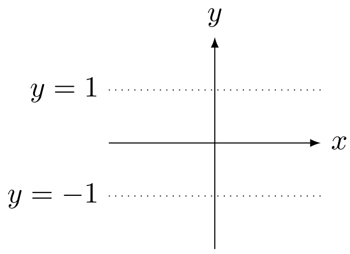
Para (c) e (d): O gráfico de $h(x)/x^2$ é formado por duas "retas" pontilhadas: uma em $y = 1/x$, acima dos racionais e outra no $y = -1/x$, acima dos irracionais



$\dfrac{h(x)}{x^2}$

Logo em (c) o limite não existe: nos racionais vai para ∞, nos irracionais para $-\infty$. Em (d) o limite é 0.

Em (e): O gráfico de $h(x)/x$ é formado por duas "retas" pontilhadas: uma em $y = 1$, acima dos racionais e outra no $y = -1$, acima dos irracionais



$\dfrac{h(x)}{x}$

Logo em (e) o limite não existe.

Prob 1.13: (a) Pelo Teorema do Sanduíche o limite é 0.

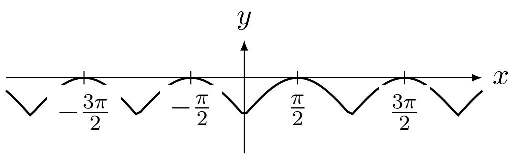
(b) quando $x \to 5$, $|f(x) - 3| \to 0$. Logo $f(x) \to 3$.

Prob 1.14: (a) 4. (b) 3 (troque variável para $y = 1/x^2$). (c) $1/3$ (coloque o $\cos$ em evidência). (d) $2/5$. (e) 0 (use Teorema do sanduíche e limite o seno complicado por ± 1). (f) e^{-10}; (g) Troque variável para $y = x - \pi$. Assim, $x = \pi + y$. Assim $\operatorname{sen}(\pi + y) = \operatorname{sen}\pi\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos\pi = -\operatorname{sen} y$. Pelo limite fundamental, $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} y}{y} = -1$. (h) Pelo limite fundamental e pela definição de módulo, dará 1 se $x \to 0^+$ e -1 se $x \to 0^-$.

A.1.3 Extras p.42

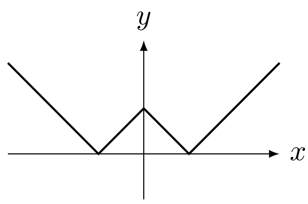
Ext 1.1:

(a) Comece com o gráfico de sen e faça reflexão em torno do eixo x obtendo gráfico de $|\operatorname{sen}|$. Depois faça translação vertical por uma unidade.



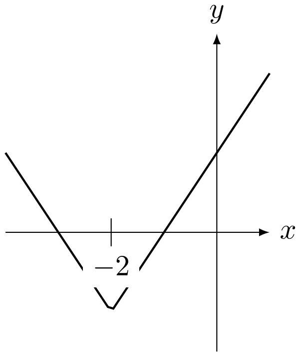
(a) $y = |\operatorname{sen}(x)| - 1$

(b) Comece com $y = |x|$. Faça translação vertical de uma unidade. Reflita o gráfico no eixo x novamente.



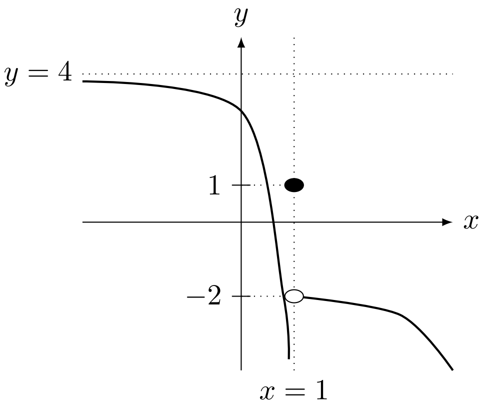
(b) $y = ||x| - 1|$

(c) Comece transladando horizontalmente o gráfico de módulo por duas unidades. Depois translade verticalmente por uma unidade.



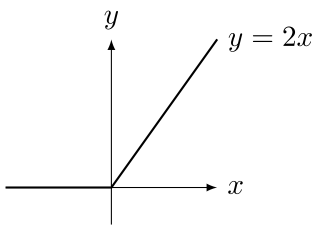
(c) $y = |x + 2| - 1$

Ext 1.2:



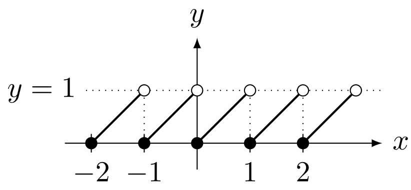
Ext 1.3: Como $\operatorname{sengr}(x) = \operatorname{sen}(\pi x/180)$ (assim $\operatorname{sengr}(90) = \operatorname{sen}(\pi 90/180) = \operatorname{sen}(\pi/2)$, substituindo variável obtemos que o limite vale $\pi/180$.

Ext 1.4: (a) Para $x > 0$, $y = x + |x| = x + x = 2x$, para $x < 0$, $y = x + |x| = x + (-x) = 0$. Assim o gráfico é:



(a) $y = x + |x|$

(b) Por definição, $x \geq \lfloor x \rfloor$. Além disso a diferença $0 \leq f(x) = x - \lfloor x \rfloor < 1$. Por exemplo, para x no intervalo $[0, 1)$, $\lfloor x \rfloor = 0$ e portanto $f(x) = x - 0 = x$. Para x no intervalo $[1, 2)$, $\lfloor x \rfloor = 1$ e portanto $f(x) = x - 1$. Para x no intervalo $[-1, 0)$, $\lfloor x \rfloor = -1$ e portanto $f(x) = x - (-1) = x + 1$. Assim o gráfico é:



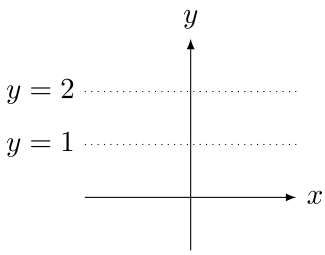
(b) $y = x - \lfloor x \rfloor$

Ext 1.5: (a) Não existe pois quando $x \to 1^+$ vale 1, $x \to 1^-$ vale -1. (b) ∞. (c) $8/6 = 4/3$. (d) -2. (e) 0 (aplique Teorema do Sanduíche e use que seno é limitado por 1 e -1). (f) $9/7$ (trivial). (g) $3/2$.

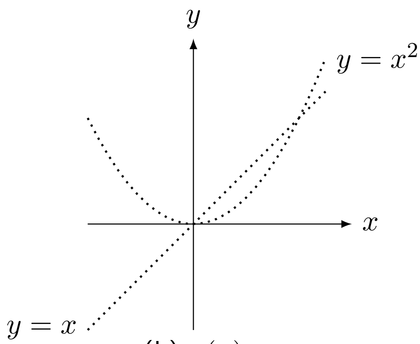
Ext 1.6: (a) 0; (b) 3 (para x grande, $2x + |x| = 2x + x = 3x$). (c) 1 (para x pequeno, $2x + |x| = 2x - x = x$). (d) $-\infty$ (para x pequeno, $x + |x| + 1 = x - x + 1 = 1$).

Ext 1.7: (a) 0. (b) 0.

Ext 1.8:



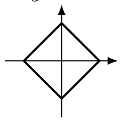
(a) $f(x)$



(b) $g(x)$

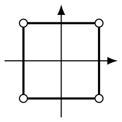
A.1.4 Desafios p.43

Des 1.1: (a) É o círculo de raio 1: $x^2 + y^2 = 1$. (b) É um quadrado em forma de "diamante". No 1o quadrante é limitado por $x + y = 1$, no 2o



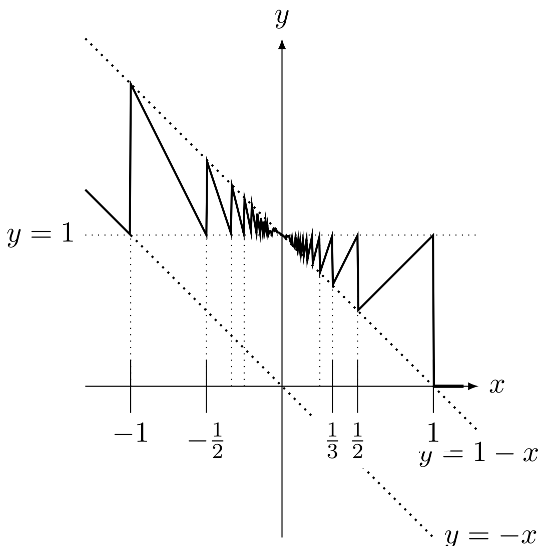
quadrante por $-x + y = 1$, etc. (c) Se $|x| > 1$ ou $|y| > 1$, então o limite será infinito. Se $|x| < 1$ e $|y| < 1$, então limite será zero. Assim $(x, y) \in C_\infty$ se, e somente se, $|x| = 1$ e

$|y| < 1$ ou $|y| = 1$ e $|x| < 1$. Será um quadrado com centro em $(0,0)$ e lados paralelos aos eixos com lado igual a 2. Note que $(\pm 1, \pm 1), \notin C_\infty$.



Des 1.2: (a) Para x grande (basta que $x > 1$) temos que $0 < \frac{1}{x} < 1$. Assim para $x > 1$, $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$. Logo o limite vale zero pois a função vale zero para $x > 1$.

(b) Para x pequeno (basta que $x < -1$) temos que $-1 < \frac{1}{x} < 0$. Assim para $x < -1$, $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = -1$. Como a função vale $-x$ para $x < -1$, o limite vale $\infty = -(-\infty)$.



(c) $y = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

(d) Vamos utilizar o Teorema do Sanduíche. Para $x > 0$, observe que $\lfloor 1/x \rfloor$ vale no máximo $1/x$ e, no mínimo $1/x - 1$. Logo,

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x}.$$

Multiplicando ambos os lados por x (que é positivo e não altera as desigualdades) obtemos que $1 - x \le x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le 1$. Passando ao limite $x \to 0^+$ e aplicando o Teorema do Sanduíche obtemos a convergência para 1.

Para $x < 0$ fazemos um raciocínio similar para concluir que $1 \le x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \le 1 - x$. Passando ao limite $x \to 0^-$ e aplicando o Teorema do Sanduíche obtemos a convergência para 1. Como os limites laterais são iguais, o limite existe e é igual a 1.

Des 1.3: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\phi = \arctan(B/A)$.

Des 1.4: (a) Note que trata-se de uma indeterminação do tipo ∞^0. Em uma linha: e^x cresce muito mais rápido do que x. Assim para x grande, $(e^x + x)^{1/x} \approx (e^x)^{1/x} = e$. Com rigor, coloque e^x em evidência: $(e^x(1 + x/e^x))^{1/x} = e(1 + x/e^x)^{1/x}$. Agora o termo $(1 + x/e^x) \to 1$ e $1/x \to 0$. Assim $(1 + x/e^x)^{1/x} \to 1^0 = 1$.

(b) Note que trata-se de uma indeterminação do tipo ∞^0. Em uma linha: Como em (a), para x grande $(1 + x) \approx x$. Assim temos que calcular o limite $x^{\alpha/\log x}$. Troque variável para $y = \log(x)$ (assim $x = e^y$): calcule o limite $(e^y)^{\alpha/y} \to e^\alpha$.

Des 1.6: Embora o denominador se anule no limite, o sinal dele alterna sempre. Assim o no limite a função oscila entre ∞ e $-\infty$. Perto do zero teremos um infinidade de pontos onde a função se aproxima de $\pm\infty$.

Des 1.9: Como $|f(x)| \le M$, $-M \le f(x) \le M$. Logo, $-M|g(x)| \le f(x)g(x) \le M|g(x)|$. Como $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$, $\lim_{x \to 1} |g(x)| = 0$. Aplique o Teorema do Sanduíche depois de verificar que $\lim_{x \to 1} -M|g(x)| = \lim_{x \to 1} M|g(x)| = 0$.

Des 1.10: (a) ∞; (b) ∞; (c) ∞; (d) ∞; (e) 0

Des 1.11: Detalhando (c):

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Des 1.12: Aplicando a dica obtemos $F_{n+2}/F_n = 1 + F_{n+1}/F_n$. O primeiro termo é igual a $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Mudando indice do limite, é claro que o limite de $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ é igual ao limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Supondo que exista obtemos a equação do 2o grau: $\phi^2 = 1 + \phi$. A única solução positiva desta equação é a razão áurea (a outra solução é negativa e é descartada).

A.2 Continuidade

A.2.1 Exer. de Fixação p.60

Fix 2.1: (a) Falso. O limite deve ser igual ao valor da função no ponto. Exemplo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}; & x \ne 0; \\ 2; & x = 0; \end{cases}$ O limite no zero é 1 mas $f(0) = 2$.

(b) Verdade. Se f é contínua o limite existe. Se o limite existe, ambos limites laterais existem.

(c) Falso. O limite pode ser igual, como no contraexemplo do item (a) deste exercício.

Fix 2.2: (a) Somente é contínua em A.

(b) Em B e D, embora o limite exista, ele difere do valor da função no ponto: o gráfico possui um "salto". Em C, os limites laterais existem mas diferem entre si. Assim **não** existe limite em C: o gráfico possui uma "quebra".

(c) A descontinuidade é removível somente em B e D, pois o limite existe e basta redefinir a função no ponto; em C, para qualquer valor que se coloque na função em $x = C$ a função continuará sendo descontínua.

Fix 2.3: (a) somente (I). Note que (II) e (III) são descontínuas em 0 e -2 respectivamente. (b) (I), (II) e (III). (c) (I) e (III).

Fix 2.4: (a) $f(x) = \begin{cases} 1; & x \leq 1; \\ 2; & 1 < x < 2; \\ 3; & 2 \leq x. \end{cases}$

(b) A função parte inteira (veja Figura na p. 201) para $x > 0$: $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0; \\ \lfloor x \rfloor; & x > 0. \end{cases}$

Fix 2.5: (a) não existe valor possível pois os limites laterais são distintos: a descontinuidade não é removível.

(b) Como o limite é ∞, que não é um número, não existe k. Se pudéssemos colocar valor infinito, colocaríamos $k = \infty$.

(c) Pelo Teorema do Sanduíche o limite quando $x \to 0$ é zero. Assim coloque $k = 0$ para tornar a função contínua.

Fix 2.6: (a) Falso. Pode ter. Basta oscilar entre estes pontos.

(b) Verdadeiro: pelo menos uma em $[2, 3]$ e pelo menos uma e, $[3, 4]$, onde a função troca de sinal.

(c) Falso. O TVI garante pelo menos uma, mais pode ter mais de uma.

Fix 2.7: (a) Falso. Quando nasce uma criança a função dá um salto de uma unidade instantaneamente: não existe $1/5$ de habitante etc.

(b) Verdadeiro. Nos crescemos diariamente uma quantidade infinitamente pequena. Nossa altura não dá saltos.

Fix 2.8: (a) Falso. Se $f(1/2) = -10$ teríamos vários pontos com valor negativo. (b) Falso. Se g for descontínua pode não ter raiz. (c) Verdadeiro. (d) Falso. Pode existir, basta a função decrescer no intervalo $(2, 3)$ e crescer em $(3, 4)$.

Fix 2.9: (a) Errado. O correto é se $K \in [2, 5]$, então existe $c \in [-3, -1]$ tal que $f(c) = K$;

(b) Correto pois se $K \in [3, 4]$ então $K \in [2, 5]$. Logo, pelo TVI, existe $c \in [-3, -1]$ tal que $f(c) = K$.

(c) Errado. O intervalo $[0, 3]$ **não** está contido em $[2, 5]$.

Fix 2.10: Como f é contínua, pelo Teorema 2.4 da p.48, $f \cdot f = f^2$ (produto de funções contínuas) é contínua. Assim, pelo Teorema 2.4 novamente, $f \cdot (f^2) = f^3$ (produto de funções contínuas) é contínua. Também pelo Teorema 2.4, $5f^3$ (constante vezes função contínua) é contínua. Pelo Lema 2.3, x é contínua. Pelo Teorema 2.4 $x \cdot x = x^2$ (produto de funções contínuas) é contínua. Pelo Lema 2.3 (função constante) é contínua. Pelo Teorema 2.4, x^2+1 (soma de funções contínuas) é contínua. Finalmente, pelo Teorema 2.4, é o quociente de funções contínuas, é contínua.

A.2.2 Problemas p.61

Prob 2.1: (a) Nos pontos onde o denominador se anula $f(x) \to \pm\infty$. Nestes pontos a função é descontínua. Nos outros pontos, como se trata da divisão de funções contínuas (1 e $\operatorname{sen}(x)$), ela é contínua. R: $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \}$.

(b) O denominador nunca se anula pois $\cos(x)$ vale no mínimo -1: assim $2 - 1 = 1 \leq 2 + \cos(x) \leq 2 + 1 = 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, como g é quociente de funções contínuas com denominador que nunca se anula, g é contínua em $\mathbb{R}$ e o conjunto dos pontos de descontinuidade é $\emptyset$ (vazio).

(c) Veja o gráfico na Figura da p. 201. O conjunto dos pontos de descontinuidade é $\mathbb{Z}$.

(d) Esboce o gráfico: uma cúbica pontilhada e uma reta pontilhada. É contínua onde elas se cruzam (porque?) nos pontos onde $x^3 = x$, isto é, em $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. É descontínua em $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.

Prob 2.2: Calculando os limites no 0:
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = |0+2| = 2$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3-0 = 3$.
Como eles diferem no 0, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e portanto a função é descontínua no 0. Nos outros pontos é contínua.

Para x grande e negativo, $f(x) = |x - 2|$. Assim $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} |x - 2| = \infty$.

Prob 2.3: (a) Note que $f(0) = 0 < 10$ e que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (veja Exemplo 2.5 da p.51). Logo existe $M > 0$ tal que $f(M) > 10$. Pelo TVI existe $c \in [0, M]$ tal que $f(c) = 10$.

(b) Defina $h(x) = \log(x) - e^{-x}$. Queremos encontrar $b > 0$ tal que $h(b) = 0$. Quando $x \to 0^+$, $\log(x) \to -\infty$ e $e^{-x} \to 1$. Logo, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$. Quando $x \to \infty$, $\log(x) \to \infty$ e $e^{-x} \to 0$. Logo, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$. Assim existem M, N com $0 < M < N$ e tais que $h(M) < 0$ e $h(N) > 0$. Como h é contínua, pelo TVI existe $d \in [M, N]$ tal que $h(b) = 0$.

(c) Defina $g(x) = f(x) - x$. Se $g(c) = 0$, então $f(c) = c$. Note que $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Se em um dos extremos g se anular nos teremos obtido o c. Caso contrário, $g(1) < 0 < g(0)$. Pelo TVI (g é contínua pois é a subtração de duas funções contínuas), existe $c \in [0, 1]$ com $g(c) = 0$. Este resultado é uma versão simplificado do Teorema do Ponto Fixo de Brower.

(d) Suponha, por contradição, que não é verdade que $f(x) < 0$. Assim, existiria um $t \in [0, 2]$ com $f(t) \geq 0$. Como f não se anula em $[0, 2]$, na verdade $f(t) > 0$. Como $f(-1) = -3$, aplicando o TVI em $[1, t]$ (f é negativa em 1 e positiva em t) concluímos que existe um $c \in [1, 2]$ tal que $f(c) = 0$. Como isto é um absurdo, concluímos que $f(x) < 2$ no intervalo $[0, 2]$.

Prob 2.4: (a) Simplifique o $(x-2)^2$ no numerador e denominador. $a = 5$.

(b) Impossível. Teríamos que ter $a = 3$ e -2 ao mesmo tempo.

(c) $a = 1$.

(d) Impossível pois o limite em $x = 0$ não existe.

(e) Impossível pois teríamos que ter $a = \infty$, que **não** é um número real.

(f) $a = 3/4$.

Prob 2.5: Temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} 2a + b &= |2-1| = 1, \\ -2a + b &= |-2-1| = 3. \end{cases}$$

Obtemos $a = -1/2, b = 2$.

Prob 2.6: Suponha que não e que existam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, tais que $f(a) \neq f(b)$. Como os irracionais estão em todo lugar em $\mathbb{R}$ (são densos em $\mathbb{R}$), existe um irracional k entre $f(a)$ e $f(b)$. Como f é contínua, pelo TVI existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = k$ é irracional. Contradição pois assumimos que $f(x)$ é racional para todo x.

A.2.3 Extras p.62

Ext 2.1: Ela somente é contínua em $x = 0$ pois se x está próximo de 0 e $x \in \mathbb{Q}$ então $f(x) = 1$ e se $x \notin \mathbb{Q}$ então $f(x) \approx 1 + |0| = 1$. Logo o limite quando $x \to 0$ é 1, que é igual ao valor da função. Logo é contínua em $x = 0$.

Em qualquer $x \neq 0$ o limite não existe pois se está próximo de $x \neq 0$ e $x \in \mathbb{Q}$ então $f(x) = 1$ e se $x \notin \mathbb{Q}$ então $f(x) \approx 1 + |x| \neq 1$. Logo o conjunto dos pontos de descontinuidade é $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ext 2.2: (a) Dividindo-se por $(x-1)$ duas vezes o numerador e o denominador, vamos obter o limite. Logo $a = -1$. (b) $a = 2$. (c) Impossível. (d) $a = 0$. (e) $a = -1 + \sqrt{2}$ ou $a = -1 - \sqrt{2}$. (f) Impossível. Geometricamente, um reta saindo da origem não temo como completar de forma contínua uma função que valia 1 para $x < 0$.

Ext 2.3: (a) Falso. Pode ter raiz no meio (pense em algo do tipo seno, que oscila).

(b) Não. O TVI garante **pelo menos** duas raízes, mas não **exatamente** duas.

Ext 2.4: (a) Defina $f(x) = x + 2\operatorname{sen}(x) - 1$. Como $f(0) = -1$ e $f(\pi) = \pi - 1 > 0$, pelo TVI f possui raiz.

(b) Se o polinômio p é de grau impar com termo de maior grau ax^k então, se $k > 0$, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$. Assim existem M, N tais que $p(M) < 0$ e $p(N) > 0$. Como p é contínua, pelo TVI existe $c \in [M, N] \subset \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0 \in [p(M), p(N)]$. Se $k < 0$ então (os limites se invertem) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e o resto é análogo.

(c) Defina $h(x) = \operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen}(x)) - \operatorname{sen}(x)$. Como $h(\pi/6) = 1/2$ e $h(\pi/2) = -1$ (sinais opostos), pelo TVI existe $c \in [\pi/6, \pi/2]$ tal que $h(c) = 0$, isto é, tal que $\operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen}(c)) = \operatorname{sen}(c)$.

(d) Como $h(0) = 1$, $h(\pi) = h(-\pi) = 1 - 2 = -1$, aplicando o TVI nos intervalos $[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$ vamos obter duas raízes distintas para h.

Ext 2.5: Temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} a + b &= 1, \\ 4a + b &= -8. \end{cases}$$

Obtemos $a = -3, b = 4$.

Ext 2.6: Use a definição utilizando exponencial da p.56 e explore propriedades da exponencial.

A.2.4 Desafios p.62

Des 2.1: Esboce dois gráficos colocando no eixo x a hora e no eixo y os pontos do percurso. No primeiro dia a função começa do início do percurso e termina no fim. No dia seguinte, começa no fim do percurso e termina no início. Como os percursos são funções contínuas, os gráficos se cruzam em pelo menos um ponto, o que significa passar na mesma hora (em dias distintos) no mesmo ponto do percurso.

Des 2.2: (a) $\mathbb{Z} + k10^{-2}$ para $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. (b) $\mathbb{Q}$. (c) e (d): Ver [Sp] p.70 no.17.

Des 2.3: Ver [Sp] p.98 no.6.

Des 2.4: Pelas propriedades do logaritmo, colocando a em evidência,

$$\log(a+h) = \log(a(1+\frac{h}{a})) = \log(a)+\log(1+\frac{h}{a}).$$

Quando $h \to 0$, trocando variável vemos que $\log(1 + h/a) \to \log(1) = 0$. Assim obtemos a continuidade de $\log$.

Des 2.5: Basta aplicar as expansões em série da exponencial, seno e cosseno. Depois basta agrupar os termos com e sem i e utilizar as identidades: $i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = 1$, $i^1 = i^5 = i^9 = \cdots = i$, $i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots = -1$, $i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots = -i$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \cdots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Des 2.6: Basta fazer contas cancelando a parte real ou a imaginária.

Des 2.7: Defina $J = f(I)$. Dados $x, y \in J$, com $x < y$ sem perda de generalidade, vamos mostrar que dado $z \in (x, y)$, $z \in J$ (imagem). De fato, como $x, y \in J = f(I)$, existem $u, v \in I$ tais que $f(u) = x, f(v) = y$. Pelo TVI, como $z \in (x, y)$, existe $w \in [u, v]$ (ou $[v, u]$) tal que $f(w) = z$. Note que $w \in I$ pois I é um intervalo. Portanto $f(w) \in f(I) = J$ é um intervalo.

Des 2.8: (a) $\forall M < 0, \exists \delta > 0$ tal que se $0 < x - c < \delta$, então $f(x) < M$. (b) $\forall M > 0, \exists N < 0$ tal que se $x < N$, então $f(x) > M$. (c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $0 < c - x < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Des 2.10: Se $g(x) \to M$ quando $x \to c$ então dado $\varepsilon = 1$ existe δ_1 tal que $|g(x) - M| < 1$ para tod $|x - c| < \delta_1$. Assim $M - 1 < g(x) < M + 1$, ou seja, $|g(x)| < C = max(|M - 1|, |M + 1|)$ (se $M = -0.5$ veja quem é o maior!). Assim g é limitada perto de $x = c$. Agora dado ε' qualquer, tome $\varepsilon = \varepsilon'/(C + |L|)$. Existem δ_2 e δ_3 tais que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - M| < \varepsilon$ se $|x - c| < \min(\delta_2, \delta_3)$. Finalmente tomando $|x - c| < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $|f(x)g(x) - LM| < C|f(x) - L| + |L||g(x) - M| < (C + |L|)\varepsilon = \varepsilon'$.

Des 2.11: Fixado $\varepsilon' > 0$, seja $\varepsilon = \varepsilon'/2$. Pela continuidade da f existe δ_1 e pela continuidade da g δ_2 tais que $|x - c| < \min(\delta_1, \delta_2)$ então $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ e $|g(x) - g(c)| < \varepsilon$. Assim $|(f + g)(x) - (f + g)(c)| < 2\varepsilon = \varepsilon'$. Logo dado ε' tome $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

A.3 Derivada

A.3.1 Exer. de Fixação p.85

Fix 3.1: $y - 3 = (x - (-2)) \cdot 3 = 3(x + 2)$. Assim a reta tangente é $y = 3x + 9$.

Fix 3.2: (a) Falso. $f(x) = |x - 3|$ possui um "bico"em $x = 3$.

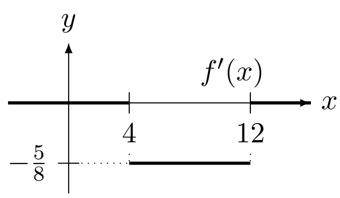
(b) Falso. $f(x) = 0$ e $g(x) = x - 2$. Então $f(2) = g(2) = 0$ mas $f'(2) = 0$ e $g'(2) = 1$.

(c) Falso. $f(x) = x - 10$. $f'(1) = 1$ e $f(1) = -9$.

Fix 3.3: (a) Como no intervalo $[x_1, x_3]$ a função é um segmento de reta, $f'(x_1) = 2 = f'(x_2)$. Note que $f'(x_3)$ não existe pois gráfico possui um "bico".

(b) Note que $f'(x_5) = 0$ ou algo próximo e que $f'(x_6) > f'(x_2)$ pois a inclinação da reta tangente é maior em x_6. Também $f'(x_4) < 0$ pois a função decresce ai. Assim, $f'(x_4) < f'(x_5) < f'(x_2) < f'(x_6)$.

Fix 3.4:



Fix 3.5: (a) $h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = -1(-5) + 3(2) = 11$.

(b) $h'(2) = \dfrac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{g(2)^2}$.
Logo $h'(2) = \dfrac{-1(-5) - 3(2)}{(-5)^2} = \dfrac{-1}{25}$.

Fix 3.6: Calculando o coeficiente angular da reta tangente, $f'(1) = 1$ e $g'(1) = 0$ (reta tangente horizontal). Assim:
(a) $f'(1)g(1)+g'(1)f(1) = 1(3/2)+0(1) = 3/2$.
(b) $5f'(1) - 3g'(1) = 5(1) - 3(0) = 5$.

Fix 3.7: (a) Velocidade é $h'(t) = -32t$. Assim $h'(2) = -64$.

(b) Quando $h(t) = 0$? Para $t = \sqrt{125}/2$. Velocidade $h'(\sqrt{125}/2) = -16\sqrt{125}$. Aceleração $h''(t) = (-32t)' = -32$. Assim a aceleração é -32 para todo t.

Fix 3.8: (a) $e^x \log x + \frac{e^x}{x}$. (b) $\frac{-\operatorname{sen} x(x+5)-\cos x}{(x+5)^2}$. (c) $-\operatorname{sen}(x^3 + 1)(3x^2)$. (d) 0 (a função é constante em relação a x). (e) $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$. (f) Para $x > 2$ a derivada é 1, para $x < 2$ a derivada é -1. Em $x = 2$ a derivada não existe.

Fix 3.9: (a) $4\pi r^2$. (b) $6k + \dfrac{1}{k^2}$. (c) $\log t + 1$. (d) $\pi s^{\pi-1}$. (e) $\sqrt{3} = e^{\log\sqrt{3}}$. Logo $(\sqrt{3})^x = e^{x\log\sqrt{3}}$. Assim a derivada é $\log(\sqrt{3})e^{x\log\sqrt{3}} = (\log\sqrt{3})(\sqrt{3})^x$. (f) 0.

Fix 3.10: (a) Pelo TVM, existe $c \in [1, 5]$ tal que $f(5) - f(1) = f'(c)4$. Multiplicando por 4 a desigualdade $-4 \le f'(x) \le 3$ obtemos o resultado.

(c) Pelo TVM, para todo h existe $c \in [0, h]$ tal que $f(h)-f(0) = f'(c)h$. Como $h > 0$ podemos multiplicar a desigualdade $-4 \le f'(x) \le 3$ sem alterar os sinais das desigualdades.

Fix 3.11: Seja $S(t)$ a altura do objeto em função do tempo. Então $S(0) = 100, S(5) = 0$. Assim, $\dfrac{S(5) - S(0)}{5 - 0} = \dfrac{-100}{5} = -20$. Pelo TVM existe um instante $t \in (0, 5)$ tal que $S'(t) = -20$, a velocidade do objeto.

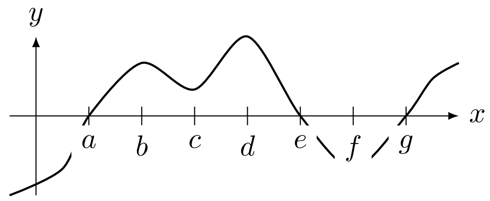
Fix 3.12: Como $(f'(x))' = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$ constante. Como $f'(-3) = 0$, a constante é zero. Assim concluímos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f(x) =$ constante. Como $f(5) = \pi$, a constante é π. Assim concluímos que $f(x) = \pi$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fix 3.13:

(a) $h'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(3)g'(2)$. Como $g'(2)$ é o coeficiente angular da tangente, $g'(2) = (3-2)/(2-0) = 1/2$. Do mesmo modo, $f'(3) = (0-2)/(3-0) = -2/3$. Assim, $h'(2) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

(b) Como $g(2) = 3$, $g^{-1}(3) = k(3) = 2$. Como k é a inversa de g, $k(g(x)) = x$. Logo, $k'(g(x))g'(x) = 1$. Assim, $k'(g(2))g'(2) = 1$ ou $k'(3)g'(2) = 1$. Como $g'(2) = \frac{1}{2}$ pelo item (a), $k'(3) = 1/g'(2) = 2$.

Fix 3.14: Marcamos no gráfico os pontos onde ele cruza o zero e onde a reta tangente é horizontal.



(a) f' é positiva em $(-\infty, b)$, (c, d) e (f, ∞). f' é negativa em (b, c) e (d, f).

(b) f é injetiva em $(-\infty, b)$, ou (b, c), ou (c, d), ou (d, f), ou (f, ∞).

(c) f é crescente em (a, e) e (g, ∞). f é decrescente em $(-\infty, a)$ e (e, g).

(d) f é injetiva em $(-\infty, a)$ ou (a, e) ou (e, g) ou (g, ∞).

Fix 3.15: Defina $A = \cos(\operatorname{arcsen}(x/a))$. Como $\operatorname{sen}^(y)+\cos^2(y) = 1$, tomando $y = \operatorname{arcsen}(x/a))$, $\operatorname{sen}(y) = x/a$ e assim $x^2/a^2 + A^2 = 1$, ou seja, $A = \sqrt{1 - x^2/a^2} = 1/a\sqrt{a^2 - x^2}$.

A.3.2 Problemas p.87

Prob 3.1: (a) $f(x + h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2xh+h^2}{x^2(x+h)^2}$. Dividindo por h obtemos $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2x+h}{x^2(x+h)^2}$. Fazendo $h \to 0$ obtemos, $f'(x) = \frac{-2x}{x^2(x)^2} = -\frac{2}{x^3}$.

(b) $f(x+h)-f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}$. Multiplicando por $\sqrt{x} + \sqrt{x + h}$ obtemos: $\frac{x-(x+h)}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \frac{-h}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$.
Dividindo por h obtemos:
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$.
Quando $h \to 0$ obtemos:
$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

(c) Para $x > 0$ temos que $f(x) = x^2 - x$, cuja derivada pela definição, é

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2 - h}{h} = 2x+h-1.$$

Assim, com $h \to 0$, a derivada é $2x - 1$. De forma análoga, como para $x < 0$ $f(x) = x - x^2$, a derivada pela definição é $1 - 2x$. Finalmente, para $x = 0$ temos que calcular pela definição: $f(0 + h) - f(0) = |h|(h - 1)$. Dividindo por h

obtemos que $f'(0) = \lim_{h\to 0} |h|/h(h-1)$ não existe, pois pela direita o limite será -1 e pela esquerda, 1.

(d) Fazendo de forma análoga ao item (c), para $x > 0$ a derivada é $2x$, para $x < 0$ é $-2x$ e para $x = 0$ o limite $(f(0+h) - f(0))/h$ é zero. Assim, $f'(0) = 0$.

Prob 3.2: Para garantir continuidade em $x = 1$ devemos ter: $(1)^2 = a(1) + b$, ou $a + b = 1$. Para que as derivadas "laterais" sejam iguais em $x = 1$ devemos ter $2x = a$ em $x = 1$, ou $a = 2$. Assim $b = 1 - a = -1$.

Prob 3.3: Primeiro note que $0 \le |f(0)| \le |0|^k = 0$. Assim $|f(0)| = 0$, isto é, $f(0) = 0$. Agora pela definição, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$.

Observe que $0 \le \frac{|f(h)|}{|h|} \le \frac{|h|^k}{h} = |h|^{k-1}$. Como $k > 1$, $k - 1 > 0$. Assim, $\lim\limits_{h\to 0} |h|^{k-1} = 0$. Logo, pelo teorema do Sanduíche, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|f(h)|}{|h|} = 0$. Logo $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 0$.

Prob 3.4: (a) Possui derivada em todos os pontos $x \ne 2$ igual a zero pois é constante. Em $x = 2$ é descontínua e portanto também não é derivável em $x = 2$.

(b) $f(x) = e^x - 1$ se $e^x - 1 > 0$, isto é, se $e^x > 1$. Tomando $\log$ dos dois lados, se $x > 0$. Assim, $f(x) = e^x - 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = e^x$. Por outro lado, $f(x) = -(e^x - 1) = 1 - e^x$ se $x < 0$. Assim $f'(x) = -e^x$ se $x < 0$. Em $x = 0$ o gráfico possui um "bico" e a função não é derivável.

(c) Fazendo análise de sinal do polinômio do segundo grau $(3-x)(x+1)$ (parábola com raízes 3 e -1 com concavidade para baixo), concluímos que $h(x) = (3-x)(x+1)$ se $-1 < x < 3$ e $h(x) = -(3-x)(x+1)$ caso contrário. Assim, $h'(x) = -2x + 2$ se $-1 < x < 3$ e $h'(x) = 2x - 2$ se $x < -1$ ou $x > 3$. Em $x = -1$ e $x = 3$ o gráfico possui um "bico" e a função não é derivável.

Prob 3.5: (a) A velocidade é $s'(t) = \dfrac{4t}{(t^2+1)^2}$. A aceleração é $s''(t) = \dfrac{4(t^2+1)^2 - 16t^2(t^2+1)}{(t^2+1)^4}$. Logo $s'(0) = 0$ e $s''(0) = 4$. Ela vai parar quando a velocidade $s'(t) = 0$, ou seja, quando $t = 0$.

(b) A velocidade é $s'(t) = \cos t$. A aceleração é $s''(t) = -\operatorname{sen} t$. Logo $s'(0) = 1$ e $s''(0) = 0$. Ela vai parar quando a velocidade $s'(t) = \cos t = 0$, ou seja, quando $t = 2k\pi \pm \pi/2$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Prob 3.6: (a) Nos pontos onde $f'(x) = 6x^2 - 4x = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2/3$.

(b) Reescrevendo a reta $2y - 20x - 50 = 0$ como $y = 10x + 25$, observamos que o coeficiente angular é 10. Assim queremos saber quando $f'(x) = 6x^2 - 4x = 10$, isto é, $x = -1, x = 5/3$.

(c) o coeficiente angular da reta $4y + 2x - 10 = 0$ é $-1/2$. Para que seja perpendicular, a reta deverá ter coeficiente $= -1/(-1/2) = 2$. Assim queremos saber quando $f'(x) = 6x^2 - 4x = 2$, isto é, $x = 1, x = -1/3$.

Prob 3.7: Deve-se analisar separadamente dois casos. Se $x^2 - 1 > 0$, isto é $x > 1$ ou $x < -1$, a função é $(x^2-1)(x+1)$, cuja derivada é $3x^2+2x-1$, cujas raízes $1/3$ e -1 não pertencem ao domínio. Se $x^2 - 1 < 0$, então $-1 < x < 1$ e a função é $(1-x^2)(x+1)$, cuja derivada é $-3x^2 - 2x + 1$, cujas raízes são novamente $1/3$ e -1. Assim em $x = 1/3$ a derivada é zero e a reta tangente é paralelo ao eixo x. Em $x = -1$ temos que aplicar a definição. Calculando $(f(-1) = 0)$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = |x^2 - 1|.$$

Quando $x \to -1$ o limite tende a zero. Assim $f'(-1) = 0$ e $x = -1$ é ponto onde a reta tangente é paralela ao eixo x.

Prob 3.8: (a) $y' = 3ax^2+2bx+c$. Para que tenha uma única tangente horizontal, queremos que a equação $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ tenha solução única. Para isto basta que $\Delta = (2b)^2 - 4(3a)c = 0$, isto é, que $b^2 = 3ac$.

(b) $y'(x) = 3ax + b$. O coeficiente angular de $x + y = 1$ é $1 = y'(-1) = b - 3a$. O coeficiente angular de $y = -1$ é $0 = y'(1) = 3a + b$. Resolvendo o sistema obtemos que $b = 1/2$ e $a = -1/6$. Assim c pode ter qualquer valor.

Prob 3.9:

(a) $300(5x^2 - 3x + 4)^{299}(10x - 3)$.

(b) Primeiro reescreva $\sqrt[7]{\cdot} = (\cdot)^{1/7}$. Depois aplicando a regra da cadeia,

$$\cos\left(\left(\cos(x^2) + 4\right)^{1/7}\right) \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{7}\left(\cos(x^2) + 4\right)^{-6/7}(-\operatorname{sen}(x^2))(2x).$$

(c) $\dfrac{2\,xe^{-x} + 2\,x + e^{-x}x^2 + e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$.

(d) $\dfrac{1/3(x+t)^{-2/3}(x^2+k) - (x+t)^{1/3}(2x)}{(x^2+k)^2}$.

(e) $5\,\dfrac{\cos(5\,e^x)e^x x^4}{\operatorname{sen}(5\,e^x)} + 4\,\log(\operatorname{sen}(5\,e^x))x^3$.

(f) $\dfrac{6\,x}{((\log(3x^2+1))^2+1)(3x^2+1)}$.

(g) $-\dfrac{5e^{\operatorname{arcsen}(4-5x)}}{\sqrt{1-(4-5x)^2}}$.

Prob 3.10: $g'(x) = \dfrac{3}{f(x)+x}(f'(x)+1)$. Assim, $g'(4) = \dfrac{3}{f(4)+4}(f'(4)+1) = -\dfrac{12}{7}$.

Prob 3.11: (a) $f'(t) = 2\dfrac{(ax+b)(ad-bc)}{(cx+d)^3}$.

(b) $f'(t) = Ke^{Kt}\cos(at) - ae^{Kt}\operatorname{sen}(at)$.

(c) $f'(\theta) = 3aK\theta^2\cos(a\theta^3+b)$.

(d) $f'''(t) = -\frac{m_0}{K^3}e^{(T_0-t)/K}$.

Prob 3.12: (a) $y' = \dfrac{\cos(x^2)\cdot 2x^2 - \operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$.
Logo $y'(\sqrt{\pi/2}) = -2/\pi$ e $y(\sqrt{\pi/2}) = \sqrt{2/\pi}$. Assim a equação da reta tangente é: $y-\sqrt{2/\pi} = -2/\pi(x-\sqrt{\pi/2})$. Da reta perpendicular é $y-\sqrt{2/\pi} = \pi/2(x-\sqrt{\pi/2})$.

(b) $y' = e^{\operatorname{sen}(-2x)}\cos(-2x)(-2)$.
Logo $y'(\pi) = -2$ e $y(\pi) = 1$. Assim a equação da reta tangente é: $y-1 = -2(x-\pi)$. Da reta perpendicular é $y-1 = 1/2(x-\pi)$.

Prob 3.13: (a) Considere $f(x) = e^x - (1+x)$. Derivando $f'(x) = e^x - 1$ é positiva para $x > 0$. Logo f é crescente para $x > 0$. Como $f(0) = 0$, a função é positiva para $x > 0$.

(b) Considere $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 60x + 4$. Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, existem pontos onde a função é positiva e negativa. Pelo TVI existe pelo menos uma raiz. Note que $g'(x) = 6x^2 - 30x + 60$ é sempre positivo (para todo $x \in \mathbb{R}$) pois é um polinômio do segundo grau com raízes complexas ($\Delta < 0$ e $a = 6 > 0$). Assim, g é crescente para todo $\mathbb{R}$ e portanto injetiva. Assim a raiz é única pois a função é injetiva.

Prob 3.14: (a) Suponha que f e g representam a posição dos corredores em função do tempo. Por hipóteses $f(0) = g(0)$ (começam no mesmo instante). Suponha que eles terminaram a corrida no instante T. Assim, $f(T) = g(T)$ (terminaram empatados). Se $h = f - g$, $h(0) = h(T) = 0$. Pelo TVM (ou Teorema de Rolle), existe $c \in (0,T)$ tal que $h'(c) = 0 = f'(c) - g - (c)$, isto é, $f'(c) = g'(c)$.

(b) Pelo TVM, $f(x) - f(0) = f'(c)x$. Como $x > 0$ e $f'(c) \le 1$ para todo $c > 0$ e $f(0) = 0$, $f(x) = f(x) - f(0) \le x$.

(c) Seguindo a dica, como $h_i' = h_i$ para $i = 1, 2$,

$$f'(x) = \frac{h_1'h_2 - h_1h_2'}{(h_2)^2} = \frac{h_1h_2 - h_1h_2}{(h_2)^2} = 0.$$

Logo f é constante. Como $f(0) = \dfrac{h_1(0)}{h_2(0)} = 1$, $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $1 = \dfrac{h_1(x)}{h_2(x)}$, isto é, $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Seja $h = f - g$. Como $h(0) = h(1) = 0$, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (0,1)$ tal que $h'(c) = 0 = f'(c) - g'(c)$. Logo $f'(c) = g'(c)$ e portanto as tangentes são paralelas.

(e) Seja $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. Como $f'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x - 2\cos x\operatorname{sen} x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 0+1 = 1$, pelo TVM f é constante igual a 1.

Prob 3.15: Observe que $f'(x) = 3x^2 + 6x - 3$. As raízes são $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Fazendo a análise de sinal obtemos que:

(a) $f'(x) < 0$ se $-1 < -\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$. Assim f decresce nestes intervalos.

(b) $f'(x) > 0$ se $x > -1+\sqrt{2}$ ou $x < -1-\sqrt{2}$. Assim f cresce nestes intervalos.

A função f será injetiva, separadamente, em cada intervalo onde ela somente cresce ou somente decresce. Assim será injetiva em $(-\infty, -1-\sqrt{2})$, $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$, e em $(-1+\sqrt{2}, \infty)$.

Prob 3.16:

(a) $h'(x) = f'(g(-x/2))g'(-x/2)(-1/2)$. Assim, $h'(2) = f'(g(-1))g'(-1)(-1/2) =$
$= f'(2)(6)(-1/2) = -1(6)(-1/2) = 3$.

(b) Como $h(g(x)) = x$, $h'(g(x))g'(x) = 1$. Como $g(-1) = 2$, $h(g(-1)) = -1 = h(2)$. Assim $h'(2) = h'(g(-1)) = 1/g'(-1) = 1/6$.

Prob 3.17: O coeficiente angular da reta tangente é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-6}{-1-0} = 3$. Logo, $f'(-1) = 3$. Note que $f(-1) = 3$ ou $f^{-1}(3) = -1$. Logo $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \dfrac{1}{f'(-1)} = \dfrac{1}{3}$.

A.3.3 Extras p.88

Ext 3.1: (a) $w' = 4\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$. Logo $w'(2) = 4\dfrac{(-1)(-5) - 3(2)}{(-5)^2} = -\dfrac{4}{25}$.

(b) $m'(x) = 5e^{5x}g(3x+2) + e^{5x}g'(3x+2)3$. Logo $m'(0) = 5g(2) + 3g'(2) = (5) - 5 + 3(2) = -19$.

Ext 3.2: (a) $\cos(x\, e^x \log x)(e^x \log x + xe^x \log x + e^x)$.

(b) $\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\cos(\operatorname{sen} x)\cos x$.

(c) $3^{\arctan x} = e^{\log 3 \arctan x}$. Logo a derivada é $3^{\arctan x}\dfrac{\log 3}{1+x^2}$.

(d) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(e) $\cos(\cos x \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$.

(f) Esta função vale $\operatorname{sen}(1-x^2)$ se $-1 < x < 1$. Logo a derivada neste intervalo é $-2x\cos(1-x^2)$. Fora deste intervalo (em $x < -1$ ou $x > 1$) a função vale $\operatorname{sen}(x^2-1)$, cuja derivada é $2x\cos(x^2-1)$. Nos pontos $x = \pm 1$ a função possui um "bico", e não possui derivada.

(g) Primeiro escrevemos em forma de função: $\exp(\exp(x^4))$. A derivada é:
$\exp(\exp(x^4))\exp(x^4)4x^3$ ou $4x^3 e^{e^{x^4}} e^{x^4}$.

(h) $2\,\dfrac{\cos(2\,x)\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{sen}(2\,x)} + \dfrac{\log(\operatorname{sen}(2\,x))x}{\sqrt{x^2+1}}$

Ext 3.3: (a) Nos pontos onde $y'(x) = 3x^2+4x-4 = 0$, isto é, $x = -2$ ou $x = 2/3$.

(b) Reescrevendo a reta $2y + 8x - 5 = 0$ como $y = -4x + 5/2$, observamos que o coeficiente angular é -4. Assim queremos saber quando $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = -4$, isto é, $x = 0, x = -4/3$.

Ext 3.4: Para garantir continuidade em $x = 1$ devemos ter: $a(1) + b = \frac{1}{1}$, ou $a + b = 1$. Para que as derivadas "laterais" sejam iguais em $x = 1$ devemos ter $2ax = -\dfrac{1}{x^2}$ em $x = 1$, ou $a = -\frac{1}{2}$. Assim $b = 1 - a = \frac{3}{2}$.

Ext 3.5: Uma solução é: $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$. Como $f'(a) = g(a) + (a-a)g'(a) = g(a)$. O problema desta solução é que não sabemos se g pode ser derivada.

A solução correta é: Note que $f(a) = (a-a)g(a) = 0$ e $f(a+h) = (a+h-a)g(a+h) = hg(a+h)$. Assim, $f(a+h) - f(a) = hg(a+h)$. Logo, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = g(a+h)$. Assim, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} g(a+h)$. Este limite é igual a $g(a)$ pois g é contínua em a. Assim, $f'(a) = g(a)$.

Ext 3.6: (a) $y' = 2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x$. Logo, $y'(\pi) = -\pi^2$. Assim a reta tangente é $y = -\pi^2(x-\pi)$.

(b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Logo, $y'((e+2)^2) = \dfrac{1}{2e(e+2)}$. Assim a reta tangente é $y - 1 = \dfrac{1}{2e(e+2)}(x-(e+2)^2)$.

Ext 3.7: (a) $y' = -\frac{1}{x^2}$. Para que duas retas sejam paralelas, basta que possua o mesmo coeficiente angular. Como o coeficiente angular de $2x+3y = 0$ é $-\frac{2}{3}$, queremos determinar $x\mathbb{R}$ tal que $y' = -\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3}$. Logo $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

(b) $y' = 2e^{2x}$. A reta tangente no ponto c, e^{2c} é $y - e^{2c} = 2e^{2c}(x-c)$. Para que passe em $(x,y) = (5/2,\ 0)$ temos que resolver: $0 - e^{2c} = 2e^{2c}(5/2 - c)$. Vamos obter que $c = 3$.

Ext 3.8: (a) Considere $f(x) = x - \log x$. Note que $f(1) = 1-0 = 1 > 0$ e que $f'(x) = 1-\frac{1}{x} > 0$ para $x > 1$. Assim a função é crescente para $x > 1$ e é positiva em 1. Logo $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou $x - \log(x) > 0$, o que implica que $x \geq \log x$.

(b) Considere $g(x) = -2x^{13} - 6x^5 - x + 10$. Como $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, existem pontos onde a função é positiva e negativa. Pelo TVI existe pelo menos uma raiz. Como $g'(x) = -26x^{12} - 30x^4 - 1$ é sempre negativa (para todo $x \in \mathbb{R}$), g é decrescente para todo $\mathbb{R}$ e portanto injetiva. Assim a raiz é única pois a função é injetiva.

Ext 3.9: (a) Por hipótese existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $f(a) = f(b) = 0$. Pelo TVM (ou pelo Teorema de Rolle) existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. Logo f' possui uma raiz real.

(b) Pelo TVM existe um $c \in (2,5)$ tal que $\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = f'(c)$. Logo, $f(5) - f(2) = 3f'(c)$. Como por hipótese $f'(x) \leq 4$, $f(5) - f(2) \leq 12$.

(c) Como $f''(x) = g_1'' - g_2'' = \cos(2x + \log(x^4+1)) - \cos(2x + \log(x^4+1)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que $f'(x)$ é constante. Note que $f'(2) = g_1'(2) - g_2'(2) = -1 - (-1) = 0$. Logo $f'(x) = 0$ para todo x. Assim f é constante. Note que $f(3) = g_1(3) - g_2(3) = 5 - 5 = 0$. Logo $f(x) = 0$ para todo x. Concluímos que $g_1(x) = g_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ext 3.10: Pela definição, como $f(0) = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}.$$

Agora $f(h) = 0$ ou $f(h) = |h|^k$, dependendo se $h \in \mathbb{Q}$ ou não. Nos dois casos, $|f(h)| \leq h^k$.

Assim, usando a continuidade da função módulo,

$$|f'(0)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq$$
$$\leq \lim_{h\to 0}\left|\frac{h^k}{h}\right| = \lim_{h\to 0}|h|^{k-1} = 0.$$

Portanto, $0 \leq |f'(0)| \leq 0$, ou seja, $|f'(0)| = 0$ e portanto $f'(0) = 0$.

Ext 3.11: Note a beleza na simetria da resposta: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

Ext 3.12: $f'(x) = -\operatorname{sen}(x^5+2x+\pi/2)(5x^4+2)$. Logo $f'(0) = -2$. Como $g(f(0)) = 0 = g(0)$, $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = -\dfrac{1}{2}$

Ext 3.13: (a) A derivada é $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Verifique que $f'(x) = 0$ para todo x se $f(x) = \operatorname{arcsenh}(x) - \log(x + \sqrt{1+x^2})$ e que $f(0) = 0$. Assim, pelo TVM $f(x) = 0$ para todo x.

Ext 3.14: Seja $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Então $g(x^n) = x$, $g'(x^n)nx^{n-1} = 1$. Logo $g'(x^n) = 1/nx^{1-n}$. Colocando $y = x^n$, $g'(y) = 1/ny^{(1-n)/n}$.

A.3.4 ⋆Problemas (Derivação Implícita) p.89

Prob 3.1: (a) $y'(1) = -5/38$ e a reta tangente é $y = 5 - 5/38(x-1)$.

(b) $y'(1) = -1$ e a reta tangente é $y = 2 - x$.

Prob 3.2: Derivando implicitamente obtemos que $y' = \dfrac{y-x^2}{y^2-x}$. Assim a reta tangente será horizontal quando $y' = 0$, isto é, quando $y = x^2$. Substituindo em $x^3+y^3 = 3xy$, obtemos que $x^6 = 2x^3$, cujas raízes reais são $x = 0$ e $x = \sqrt[3]{2}$. Obtemos o y correspondente substituindo na equação $x^3 + y^3 = 3xy$: $(0,0), (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

A reta será vertical quando $y' = \pm\infty$. Assim basta que o denominador $y^2 - x$ se anule, isto é, $x = y^2$. Substituindo em $x^3 + y^3 = 3xy$, obtemos, de forma análoga, $y^6 = 2y^2$, cujas raízes reais são $y = 0$ e $y = \sqrt[3]{2}$. Obtemos o y correspondente substituindo na equação $x^3+y^3 = 3xy$: $(0,0), (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

Prob 3.3: A derivada implícita é $2x - 2yy' + \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = 0$.

(a) Queremos $y'(2) = f'(2)$. Substituindo $x = 2$ e $y = 2$, obtemos que $4 - 4y'(2) + \dfrac{1}{4}(2 + 2y'(2)) = 0$. Logo, $y'(2) = f'(2) = \dfrac{9}{7}$.

(b) $y - 2 = \dfrac{9}{7}(x-2)$.

(c) $g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$. Logo $g'(1) = \dfrac{18/7 - 2}{4} = \dfrac{1}{7}$.

Prob 3.4: (a) Decrescente, $f'(1) = -1$, $f''(1) = -19/3$.

(b) Decrescente, $f'(1) = -\pi/2$, $f''(1) = \pi$.

Prob 3.5: Derivando implicitamente, obtemos que $4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0$. Os pontos candidatos ao max/min são pontos onde $y' = 0$. Assim obtemos que $y = 4x^3$. Substituindo na equação $x^4 - xy + y^4 = 253$ obtemos a equação $256x^{12} - 3x^4 = 253$. Por inspeção obtemos as raízes $x = \pm 1$. As outras raízes são complexas (graças ao Maxima!). Assim em $x = 1$, $y = 4x^3 = 4$ e em $x = -1$, $y = 4x^3 = -4$.

Para determinar se os pontos são de máximo ou mínimo vamos calcular a derivada segunda. Agora derivando implicitamente novamente obtemos: $12x^2 - 2y' - xy'' + 12y(y')^2 + 4y^3y'' = 0$. Nos pontos onde $y' = 0$: $12x^2 + (4y^3 - x)y'' = 0$. Em $x = 1, y = 4$, $y'' = -12/255 < 0$: é máximo. Em $x = -1, y = -4$, $y'' = 12/257 > 0$: é mínimo. Use um software para plotar a função implícita e verificar esta resposta. Este método funciona pois a curva definida pela equação é limitada.

Prob 3.6: Como $(1,1)$ pertence a curva, $1 + a = b$. A derivada implícita é: $2xy + x^2y' + 2ayy' = 0$. Logo em $x = 1$, $y = 1$, $2 + y'(1) + 2ay'(1) = 0$ ou $(2a+1)y'(1) = -2$. Logo $y'(1) = \dfrac{-2}{2a+1}$. Queremos que seja igual ao coeficiente angular de $4x + 3y = 7$, que é $-4/3$. Assim $y'(1) = \dfrac{-2}{2a+1} = -4/3$. Logo, $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = 1 + a = \dfrac{5}{4}$.

Prob 3.7: Primeiro reescrevemos a curva como $\exp(y\log x) = \exp(x\log y)$. Derivando implicitamente, $x^y(y'\log x + y/x) = y^x(\log y + xy'/y)$. Substituindo $x = y = k_0$ obtemos que $y'\log k_0 + 1 = \log k_0 + y'$. Portanto $y' = 1$ e a reta tangente é $y = x$.

A.3.5 Desafios p.90

Des 3.1: (a) Esta função não é derivável no zero pois

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\operatorname{sen}(1/h)}{h} = \operatorname{sen}(1/h).$$

Quando $h \to 0$ o limite não existe.

(b) Como,

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{h^2\operatorname{sen}(1/h)}{h} = h\operatorname{sen}(1/h),$$

pelo Teorema do Sanduíche o limite quando $h \to 0$ é zero. Assim, $g'(0) = 0$.

Des 3.2: Pelo binômio de Newton:

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i h^{n-i} = \\ = x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n.$$

Assim,

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \cdots + h^n.$$

Aqui temos termos com $h, h^2, \ldots, h^n$. Dividindo por h, somente o primeiro termo não terá h: $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} +$ (termos com h) $+ h^{n-1}$.

Se fizermos $h \to 0$, sobrará apenas o termo nx^{n-1}.

Des 3.3: O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x é $f'(x) = -x$. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g no ponto x é $g'(x)$. Queremos que $g'(x) = -1/f'(x)$, isto é, que $g'(x) = 1/x$. Logo $g(x) = \log x$ ou, de forma geral, $g(x) = C + \log x$.

Des 3.4: Como a equação da reta tangente é $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, para que a reta tangente $y = f(b) + f'(b)(x-b)$ seja igual igualamos os coeficientes angulares ($f'(a) = f'(b)$, $4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b$) e e lineares ($f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b)$).

Coeficientes angulares iguais: É claro que $4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b$ implica que $b^3 - a^3 = b - a$. Supondo $b - a \neq 0$ — ou seja, $a \neq b$ —dividimos por $b - a$ e obtemos $a^2 + ab + b^2 = 1$.

Coeficientes lineares iguais: Note que $f(a) - af'(a) = -3a^4 + 2a^2 + 1$. É claro que $-3a^4 + 2a^2 + 1 = -3b^4 + 2b^2 + 1$ implica que $3(b^4 - a^4) = 2(b^2 - a^2)$. Supondo que $a + b \neq 0$ (veremos que isto implica na inexistência de solução), como $b - a \neq 0$, $b^2 - a^2 \neq 0$. Assim dividindo ambos lados por $b^2 - a^2$ obtemos que $a^2 + b^2 = 2/3$. Utilizando a equação $a^2 + ab + b^2 = 1$ concluímos que $ab = 1/3$. Assim $a = 1/(3b)$. Substituindo obtemos que $a = b = 1/\sqrt{3}$ ou $a = b = -1/\sqrt{3}$, o que não é permitido pois supomos que $a \neq b$.

Assim a única possibilidade é que $a + b = 0$ ($a = -b$). Substituindo em $a^2 + ab + b^2 = 1$ obtemos que $a^2 = 1$, ou seja, $a = \pm 1$. Assim a solução é $a = 1$ e $b = -1$. Como $f(1) = 1$ e $f'(1) = 1$, $y = 1 + (x-1) = x$, ou $y = x$ é a reta tangente que passa simultaneamente em $(1, f(1))$ e $(-1, f(-1))$.

Pelo desenvolvimento, esta é a única solução do problema.

Des 3.5: Considere $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, $f'(x) = 2ax + b$. A secante possui coeficiente angular: $\dfrac{ax_1^2 + bx_1 - ax_2^2 - bx_2}{x_1 - x_2} =$

$$= \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a(x_1 + x_2) + b.$$

A reta tangente no ponto médio possui coeficiente angular $f'((x_1 + x_2)/2) = a(x_1 + x_2) + b$

Des 3.6: Pelo lema f não pode ser contínua. Um exemplo: $f(x) = x$ para $x \leq 0$, $f(x) = 1/x$ para $x > 0$.

Des 3.7: Como $f'(\theta) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, pelo TVM f é constante. Como $f(0) = 1$, $f(\theta) = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Assim, $\dfrac{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}{e^{i\theta}} = 1$ e obtemos o resultado.

Des 3.8: Se $f(x) = \log\left[\dfrac{x+i}{x-i}\right] - 2i\arctan x$. Derivando obtemos que $f'(x) = 0$ para todo x. Como $f(0) = i\pi$ obtemos que $f(x) = i\pi$ para todo x pelo TVM.

Des 3.9: Note que conhecemos uma solução: $s = \operatorname{sen}$ e $c = \cos$. A questão aqui é a **unicidade**.

Des 3.10: (a) Como $g'(y) = 1 - \varepsilon\cos y$, tomando $\varepsilon_0 = 1/2$ (ou qualquer valor positivo estritamente menor que 1), $g'(y) > 0$ para todo y. Assim g será estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e portanto uma função injetiva. Portanto g possui inversa.

(b) Pelo teorema da função inversa, como $g(0) = 0$, $f'(0) = 1/g'(0) = 1/(1-\varepsilon)$.

Des 3.12: (a) Soma e subtraia $f(a)$: $f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)$. Dividindo por h e passando ao limite obteremos $2f'(a)$. Dividindo por 2 obtemos o resultado.

(b) Deixo como desafio.

Des 3.13: A derivada de p é: $p'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Para que a derivada seja sempre positiva, e portante p sempre crescente, devemos ter $\Delta \leq 4a^2 - 12b < 0$, isto é, $a^2 - 3b \leq 0$.

Des 3.14: (a) basta passar ao limite dos dois lados. (b) Divida os dois lados por $|x - y|$. Faça $x \to y$. Note que a derivada será zero em todos os pontos. Portanto, f será constante.

A.4 Aplicações da Derivada

A.4.1 Exer. de Fixação p.117

Fix 4.1: O limite é 5 por L'Hospital.

Fix 4.2: Não podemos aplicar L'Hospital duas vezes, somente uma vez obtendo $\lim_{x\to 1} \dfrac{2(x-1)}{e^x} = \dfrac{2(1-1)}{e} = 0$.

Fix 4.3: Aplicando L'Hospital,
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Pela figura,
$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 3$ e $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 2$, assim
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3/2$.

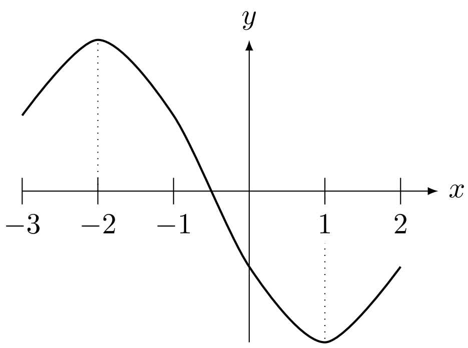
Fix 4.4: (a) $f(2.1) \approx f(2) + f'(2)(2.1 - 2) = 5 + 4(0.1) = 5.4$.

(b) $f(1.95) \approx f(2) + f'(2)(1.95 - 2) = 5 + 4(-0.05) = 4.8$.

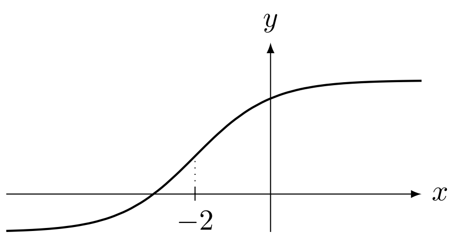
Fix 4.5: $p(\pi) = f(\pi) = -1$, $p'(\pi) = f'(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi) = 0$, $p''(\pi) = f''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$.

Fix 4.6: (a) é máximo local; (b) não é máximo nem mínimo local; (c) é mínimo local; (d) é mínimo local;

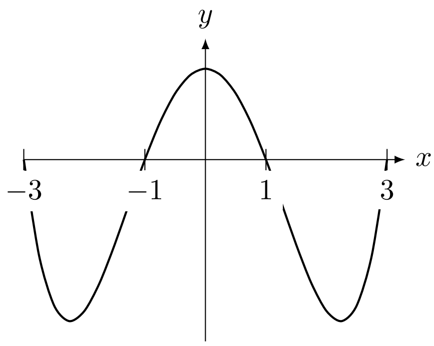
Fix 4.7: (a)



(b)



Fix 4.8:



Fix 4.9: (a) e (b) Ambas verdadeiras. (c) Falso. Todos os pontos em $[1, 2]$ são de máximo e de mínimo simultaneamente pela definição.

Fix 4.10: (a) Falso. I tem que ser um intervalo fechado como $I = [-6, 99]$. (b) Falso. I tem que ser limitado e fechado. (c) Falso. A função tem que ser contínua. (d) Falso. Mesmo descontínua pode ter máximo. (e) Falso. Considere $I = \mathbb{R}$ e a função contínua $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. O máximo é em $x = 0$.

Fix 4.11: (a) Como f é contínua em um intervalo fechado e limitado, podemos aplicar o TVE (Teorema do Valor Extremo de Weierstrass), Teorema 4.10 da p.105, que garante que existe a.

(b) Devemos comparar o valor da função nos extremos do intervalo com o valor da função nos pontos críticos. Assim comparando $f(1)$, $f(10)$, $f(3)$, $f(7)$, determinaremos o máximo. Ou seja, o máximo será um dos pontos: 1, 3, 7 ou 10.

(c) Não necessariamente. Note que **não** podemos aplicar o TVE pois o intervalo não é limitado. Um exemplo é tomar uma f que vai para $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

Fix 4.12: (a) $a = -5$. (b) $b = 0$. (c) pode ser em $c = -1$ ou $c = 2$. (d) $d = 2$.

Fix 4.13: (a) $\max_{x\in I} f(x) = 1/2$, $x_{\text{max}} = 2$, $\min_{x\in I} f(x) = 1/3$, $x_{\text{min}} = 3$.

(b) $\max_{x\in I} f(x) = \infty$, não existe x_{max}, $\min_{x\in I} f(x) = 1$, $x_{\text{min}} = 1$.

(c) $\max_{x\in I} f(x) = -4$, $x_{\text{max}} = -1/4$, $\min_{x\in I} f(x) = -1$, $x_{\text{min}} = -1$.

(d) $\max_{x\in I} f(x) = 1$, $x_{\text{max}} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, não existe x_{min}.

(e) $\max_{x\in I} f(x) = 0$, $\min_{x\in I} f(x) = -\infty$, não existem x_{max} nem x_{min}.

Fix 4.14: (a) Verdadeiro, pois se é mínimo local então a derivada é zero. (b) Verdadeiro, pois se é máximo no interior do intervalo, então é máximo local. (c) Falso, pois está no extremo do intervalo. Pode ser zero mas não necessariamente. (d) Falso. Um ponto com derivada zero pode não ser máximo nem mínimo, como por exemplo $g(x) = (x-3)^3$, que possui derivada nula em $x = 3$ mas não é máximo nem mínimo.

Fix 4.15: (a) Verdadeiro. (b) Falso, pode ser e pode não ser. Exemplo é $f(x) = 3$, onde **todo** ponto é de máximo local (e de mínimo local) embora $f' = f'' = 0$. (c) Falso, nem todo máximo local é máximo em um intervalo. O máximo pode ocorrer no extremo do intervalo e a derivada não precisa ser zero neste ponto.

Fix 4.16: (a) máximos locais: $x = -2$ e $x = 3$. mínimos locais: $x = 0$.

(b) Mínimo em $x = 4$, máximo em $x = 3$.

(c) Mínimo em $x = -3$, máximo em $x = 1$.

(d) Mínimo em $x = 0$, máximo em $x = 3$.

(e) $f''(-1.8) < 0$. (f) $f''(0) > 0$. (g) $f''(4) < 0$. (h) $x = -1$ e $x = 1$.

(i) mínimo local em $x = 1$. máximo local em $x = 4$. Olhe o sinal de g' antes e depois destes pontos.

(j) onde $g''(x) = f'(x) = 0$? pontos de inflexão de g: $x = -2$ e $x = 3$.

Fix 4.17: (a) Como $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$, os pontos críticos são $x = 0, x = 3/4$. Note que o sinal da derivada é: $f'(x) < 0$ para $x < 3/4$ e $f'(x) > 0$ para $x > 3/4$. Assim $x = 0$ **não** é extremos local. Somente $x = 3/4$ é mínimo local.

(b) Devemos comparar $f(-1) = 2$, $f(2) = 8$, $f(3/4) = -27/256$. Assim o máximo em I é em $x = 2$ e o mínimo em $x = 3/4$.

(c) Aqui basta comparar $f(-1) = 2$ com $f(0) = 0$. Assim o máximo é em $x = -1$ e o mínimo em $x = 0$.

(d) No extremo do intervalo $x \to \pm\infty$ a função $f(x) \to \infty$. Assim ela não tem máximo. O mínimo é no ponto crítico $x = 3/4$.

(e) No extremo $x \to -\infty$ a função $f(x) \to \infty$. No extremo $x = 1$, $f(-1) = 2$. Nenhum ponto crítico pertence ao intervalo. Assim ela não tem máximo e o mínimo é em $x = -1$.

Fix 4.18: (a) $g'(5) < g'(4) < g'(0) < g'(2)$. (b) $g''(8) < g''(5) < g''(2)$.

A.4.2 Problemas p.120

Prob 4.1: (a) 4. (b) Tomando o log obtemos que se $y = (e^x + 3x)^{1/x}$, $\log y = \dfrac{\log(e^x + 3x)}{x}$. Aplicando L.H. $\log(\lim_{x\to 0^+} y) = 4$. Logo $\lim_{x\to 0^+} y = e^4$. (c) $2/5$. (d) Aplicando LH em $\dfrac{e^{a/n} - 1}{1/n}$ obtemos $\lim_{n\to\infty} ae^{a/n} = a$.

Prob 4.2: (a) $\sqrt{65} \approx \sqrt{64} + \dfrac{1}{2\sqrt{64}}(65 - 64) = 8 + \dfrac{1}{16}$. (b) $\log(e^2 - 0.1) \approx \log(e^2) + \dfrac{1}{e^2}(-0.1) = 2 - \dfrac{1}{10e^2}$. (c) Recordando, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Assim, $\arctan'(1) = \frac{1}{2}$. Assim $\arctan(1.2) \approx \tan(1) + \frac{1}{2}(1.2 - 1) = \dfrac{\pi}{4} + 0.1$.

Prob 4.3: (a) Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, os extremos locais vão ocorrer (possivelmente) somente nos pontos onde $f'(x) = 0$. Se a equação possuir duas raízes reais distintas, o sinal de f' passará de positivo para negativo ou vice-versa em cada raiz: assim um ponto será de máximo e o outro de mínimo local. Se possuir uma raiz dupla, como $a > 0$, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim o ponto onde f' se anula não será de máximo nem mínimo. Finalmente se f' não possuir raiz real, como $a > 0$, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim a função será sempre crescente, sem extremos locais.

(b) Se f não possui extremos locais então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim f poderá possuir no máximo 1 raiz. Como é polinômio de grau impar, pelo TVI (porque?) possui no mínimo uma raiz. Concluímos que f possui exatamente 1 raiz.

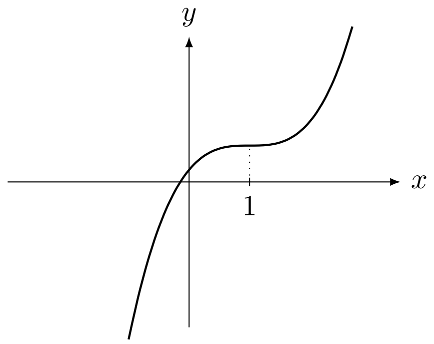
(c) Se f possui 2 extremos locais, temos que verificar se o mínimo local é menor que zero ou não e se o máximo local é menor que zero ou não (faça uma figura). Se ambos forem menor que zero ou ambos maiores que zero, f admite somente uma raiz real. Se o máximo local é maior que zero e o mínimo local menor que zero, f admite exatamente 3 raízes reais.

(d) Determine (caso existam) os dois pontos críticos distintos $x_0 < x_1$ de f, isto é, pontos tais que $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$. Caso não existam ou exista somente um, a função possui somente uma raiz real.

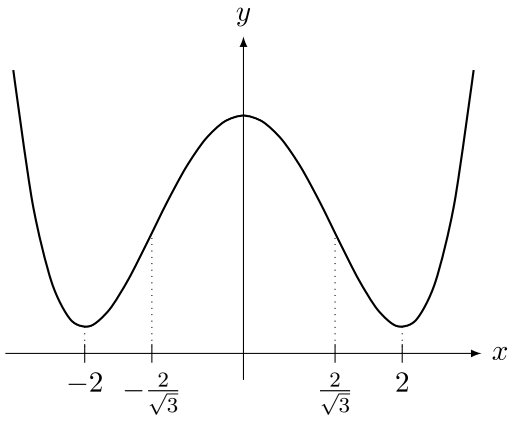
Como $a > 0$ necessariamente x_0 é máximo e x_1 é minimo (basta olhar sinal de f', que vem positivo até x_0, fica negativa em (x_0, x_1) e volta a ser positivo em x_1. Se $f(x_0) > 0 > f(x_1)$ possui 3 raízes reais, caso contrário somente uma raiz real.

Prob 4.4: (a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$, cuja única raiz é $x = 1$. Assim $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo esta função é sempre crescente. Como $f''(x) = 6x - 6$, ela troca de concavidade em $x = 1$. Quando $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$. Não possui assíntota vertical nem horizontal.

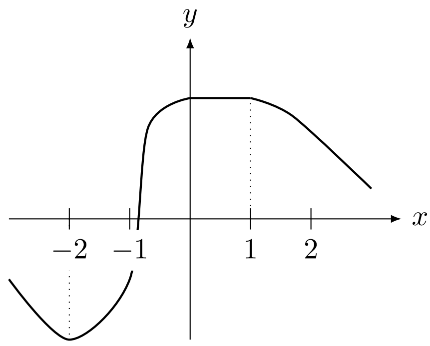
Embora $f'(1) = 0$, como $f' > 0$ perto de $x = 1$, este ponto não é de máximo nem mínimo.



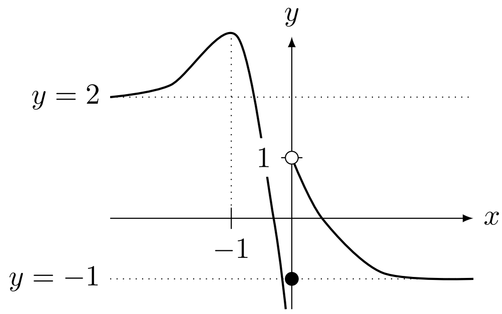
(b) Como $g'(x) = x(x^2 - 4)$, a derivada se anula em $0, \pm 2$. Analisando sinal de g' (quadro de sinais) concluímos que g decresce até -2, cresce em $(-2, 0)$, decresce em $(0, 2)$, e cresce de 2 em diante. Com isso vemos que os pontos $x = \pm 2$ são de mínimo local e $x = 0$ é de máximo local. Como $g''(x) = 3x^2 - 4$, a concavidade muda em $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, sendo para cima antes de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e depois de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e para baixo em $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. Assim um esboço para gráfico (não é único pois pode-se somar constante a g) é:



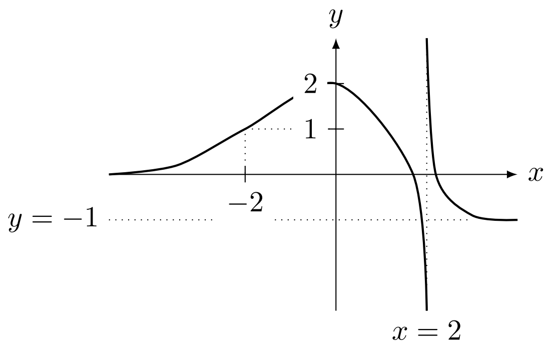
Prob 4.5: O esboço deverá ter uma $f(x) = 2$ para $x \in [0, 1]$ pois $f'(x) = 0$ neste intervalo. Ela deverá decrescer para $x > 1$ com concavidade para baixo pois $f'' < 0$. Entre -2 e 0 ela deverá crescer pois $f' > 0$ neste intervalo. No entanto a concavidade deve ser para cima até -1 e para baixo depois. Até o -2 ela deve deve decrescer com concavidade para cima e um mínimo local em $x = -2$ pois a derivada se anula em -2. Assim obtemos:



Prob 4.6: (a) Possui duas assintotas horizontais: $y = 2$ e $y = -1$. Possui assintota vertical em $x = 0$. Possui um máximo local em $x = -1$.

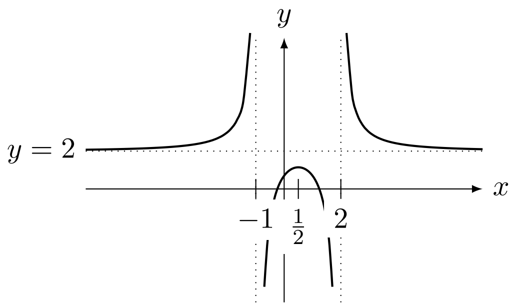


(b) Possui duas assintotas horizontais: $y = 0$ e $y = -1$. Possui assintota vertical em $x = 2$. Possui um máximo local em $x = 0$.



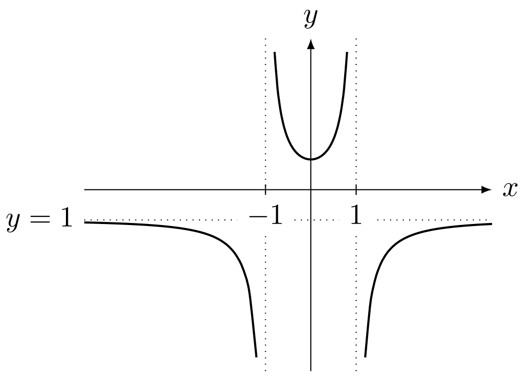
Prob 4.7: (a) Intersepta os eixos em $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Assintotas verticais em $x = 2$ e $x = -1$. Assintota horizontal: $y = 2$. Sinal de f' é igual ao sinal de $1 - 2x$: a função cresce até $x = 1/2$ e decresce depois. Em $x = 1/2$ a função tem um máximo local.

O sinal de g'' é igual ao sinal de $(x - 2)(x + 1)$ (note que $x^2 - x + 1 > 0$ pois as raízes são complexas): concavidade para cima até $x = -1$ e depois de $x = 2$. Concavidade para baixo em $(-1, 2)$.



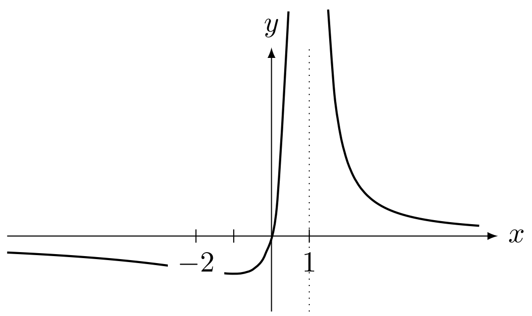
(b) Intersepta os eixos em $(0, 1)$. Assintotas verticais em $x = \pm 1$. Assintota horizontal: $y = -1$. Sinal de g' é igual ao sinal de x: a função decresce até $x = 0$ e cresce depois. Em $x = 0$ a função tem um mínimo local.

O sinal de g'' é igual ao sinal de $1 - x^2$: concavidade para baixo até $x = -1$ e depois de $x = 1$. Concavidade para cima em $(-1, 1)$.



(c) Intersepta os eixos em $(0, 0)$. Assintota vertical em $x = 1$. Assintota horizontal: $y = 0$. Sinal de h': a função decresce até $x = -1$, cresce em $(-1, 1)$, decresce depois de $x = 1$. Em $x = -1$ a função tem um mínimo local.

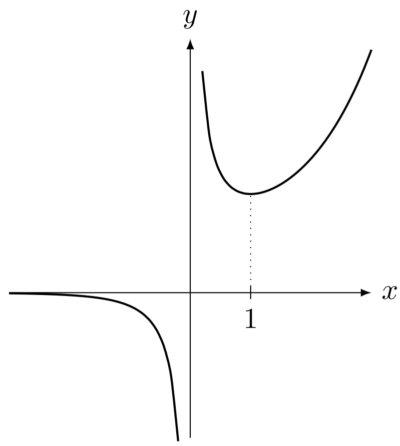
O sinal de h'' é igual ao sinal de $x + 2$: concavidade para baixo até $x = -2$, Concavidade para cima depois.



Prob 4.8: (a) Não intersepta os eixos (nunca vale zero e não está definida em $x = 0$). Assintota vertical em $x = 0$. Assintota horizontal: $y = 0$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $x - 1$ pois e^x e x^2 são sempre positivas: a função decresce até $x = 1$ e cresce depois de $x = 1$. Em $x = 1$ a função tem um mínimo local.

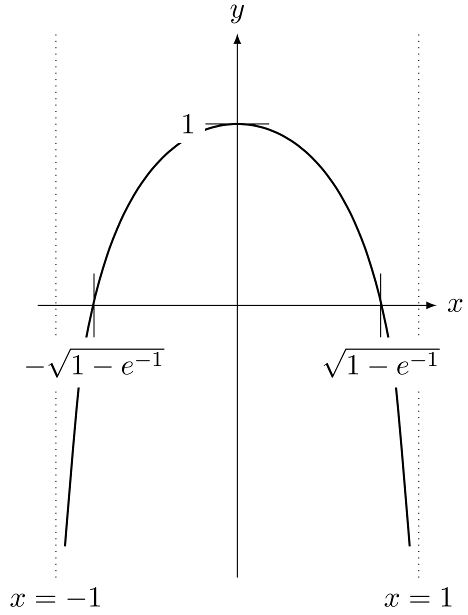
O sinal de f'' é igual ao sinal de x^3 pois o polinômio $x^2 - 2x + 2$ possui raízes complexas e como coeficiente de x^2 é positivo, $x^2 - 2x + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim f'' é negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$. Portanto concavidade para baixo para $x < 0$, Concavidade para cima para $x > 0$.



(b) Note que a função está definida somente onde $1 - x^2 > 0$, isto é, para $x \in (-1, 1)$. Intersepta os eixos em $(0, 1)$ e quando $\log(1 - x^2) = -1$, isto é, quando $1 - x^2 = e^{-1}$. Portanto quando $x^2 = 1 - e^{-1}$, isto é, $x = \pm\sqrt{1 - e^{-1}} \approx \pm 0.79$ (pelo software Maxima). Logo intercepta o eixo x em $(\pm 0.79,\ 0)$. Assintota vertical em $x = \pm 1$ (onde temos $\log 0 = -\infty$!). Assintota horizontal não existe (função nem esta definida para $x > 1$ nem $x < -1$).

Sinal de f' é igual a de $-2x$ para $x \in (-1, 1)$ pois $x^2 - 1 < 0$ neste intervalo. Assim a função cresce para $x < 0$ e decresce para $x > 0$. Em $x = 0$ a função tem um máximo local.

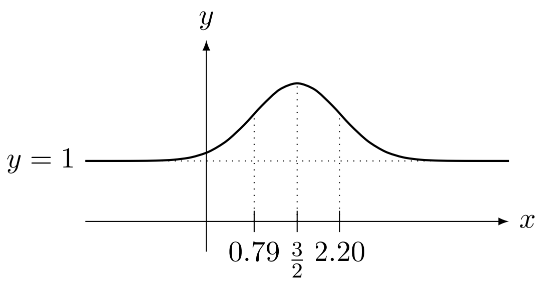
O sinal de f''. Note que o numerador $2x^2 + 2$ é sempre positivo e como o denominador é igual a $(x^2 - 1)^2$, que é sempre positivo, por ter sinal de menos na frente será sempre negativa. Assim $f'' < 0$ e a concavidade é sempre para baixo.



(c) Intersepta os eixos em $(0,\ 1+e^{-2})$. Não possui Assintota vertical. Assintota horizontal: $y=1$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $3-2x$ pois exponencial de qualquer coisa é sempre positiva. Portanto a função cresce até $x=3/2$ e decresce depois. Em $x=3/2$ a função tem um máximo local.

O sinal de f'' é igual ao sinal de $4x^2-12x+7$. As raízes são: $3/2\pm\sqrt{2}/2$. A concavidade para baixo em $3/2-\sqrt{2}/2,\ 3/2+\sqrt{2}/2)$, ou, aproximadamente, em $(0.79,\ 2.20)$. Concavidade para cima fora deste intervalo.



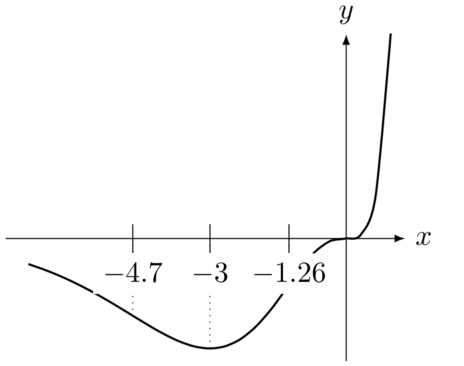
(d) Intersepta os eixos em $(0,0)$. Não tem Assintota vertical. Assintota horizontal: $y=0$ quando $x\to-\infty$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $x+3$, pois colocando em evidência x^2, que é sempre positivo, obtemos isto. Note que a derivada será zero em $x=-3$ e em $x=0$. Note que em zero a derivada **não** troca de sinal, continuando positiva. Assim a função decresce até $x=-3$ e cresce depois. Em $x=-3$ a função tem um mínimo local. O ponto $x=0$ possui derivada zero (é ponto crítico) mas não é máximo nem mínimo local pois a função cresce em torno de $x=0$ ($f'(x)>0$ para x próximo mas diferente de zero).

O sinal de f'' é igual ao sinal de $x(x^2+6x+6)$. As raízes são $0, -3\pm\sqrt{3}$.

$-3-\sqrt{3}\approx-4.7$ e $-3+\sqrt{3}\approx-1.26$.

Fazendo quadro de sinais vamos obter que: concavidade para baixo até $x=-3-\sqrt{3}\approx-4.7$ e também no intervalo $(-3+\sqrt{3},\ 0)\approx(-1.26,\ 0)$. A Concavidade será para cima em $(-3-\sqrt{3},\ -3+\sqrt{3})\approx(-4.7,\ -1.26)$ e também para $x>0$.



Prob 4.9: (a) O ponto crítico é a solução de $\operatorname{sen}^3(x)=\cos^3(x)$, e portanto se $\tan^3(x)=1$, ou seja, quando $\tan x=1$, o que ocorre se $x=\pi/4$. Quando $x\to0^+$ ou $x\to\pi/2^-$, $f(x)\to\infty$. Assim o mínimo é em $x=\pi/4$ com $f(\pi/4)=2\sqrt{2}$ e **não** existe máximo em I. Portanto $\max\limits_{x\in I}f(x)=\infty$, não existe x_{max}, $\min\limits_{x\in I}f(x)=2\sqrt{2}$, $x_{\text{min}}=\dfrac{\pi}{4}$.

(b) O único ponto crítico é em $x=2$ ($f'(2)=0$). Quando $x\to0^+$ ou $x\to\infty$, $f(x)\to\infty$. Assim em $I=(0,\ \infty)$ o mínimo é em $x=2$ e o máximo não existe. Portanto $\max\limits_{x\in I}f(x)=\infty$, não existe x_{max}, $\min\limits_{x\in I}f(x)=\dfrac{5}{2}$, $x_{\text{min}}=2$.

Em $I=(0,3]$, como $2\in I$, o mínimo é em $x=2$ e o máximo não existe pois próximo de 0 $f(x)\to\infty$. Portanto $\max\limits_{x\in I}f(x)=\infty$, não existe x_{max}, $\min\limits_{x\in I}f(x)=\dfrac{5}{2}$, $x_{\text{min}}=2$.

Em $I=[3,4]$ não tem ponto crítico. Logo o máximo e o mínimo estão nos extremos: $f(3)=3+1/3$ e $f(4)=4+1/4$. Logo o mínimo é em $x=3$ e o máximo em $x=4$. Portanto $\max\limits_{x\in I}f(x)=4+1/3$, $x_{\text{max}}=4$, $\min\limits_{x\in I}f(x)=3+1/3$, $x_{\text{min}}=3$.

(c) Note que o termo da derivada x^2-x+2 possui raízes complexas. Como o termo de maior grau é x^2, $x^-x+2>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Logo a única raiz é $x=0$, com sinal de f' igual ao sinal de x. Como f decresce até $x=0$ e cresce depois, $x = 0$ é mínimo local.

Assim em $[-1, 1]$ comparamos $f(-1) = 19$, $f(1) = 11$, $f(0) = 0$. Portanto $\max_{x\in I} f(x) = 19$, $x_{\text{max}} = -1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, $x_{\text{min}} = 0$.

Em $[1, 2]$, não tem ponto crítico, basta comparar $f(2) = 64$ e $f(1) = 11$. Logo $\max_{x\in I} f(x) = 64$, $x_{\text{max}} = 2$, $\min_{x\in I} f(x) = 11$, $x_{\text{min}} = 1$.

(d) Note que f' é sempre positiva. Logo f é sempre crescente. Note que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$

Em $I = (-1, 1]$ temos que $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Assim não possui mínimo. O máximo será em $x = 1$ com $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Portanto $\max_{x\in I} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $x_{\text{max}} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = -\infty$, não existe x_{min}.

Em $I = [0, 1]$, como $f(0) = 0$, $\max_{x\in I} f(x) = \dfrac{1}{2}$, $x_{\text{max}} = 1$, $\min_{x\in I} f(x) = 0$, $x_{\text{min}} = 0$.

Prob 4.10: Determine o máximo e o mínimo de $f(x) = \dfrac{x}{x^4 + 3}$ em $\mathbb{R}$. Conclua que $K \in [-1/4,\ 1/4]$.

Prob 4.11: Modelagem: Se x, y são os números, $y - x = 100$, $p = xy$ mínimo. Como $y = x+100$, $p(x) = (x+100)x$. Queremos minimizar $p(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $p(x) \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$, o mínimo é no ponto de derivada zero. Como $p'(x) = 2x+100$, $x = -50$ é o ponto de derivada zero, com $y = -50+100 = 50$. Logo os números são 50 e -50.

Prob 4.12: Modelagem: Suponha que a dobra tenha comprimento x. A calha terá a forma de um retângulo com lado x e $L - 2x$ (o que sobrou para base. Como o volume é proporcional a área deste retângulo, queremos o máximo de $f(x) = x(L - 2x)$ para $x \in [0, L/2]$.

Resolução: Como é equação do segundo grau com concavidade para baixo, o máximo é no ponto de derivada zero. Como $f'(x) = L - 2x - 2x = L - 4x$, $x_0 = L/4$. Assim a calha deverá ter a forma de um retângulo com dimensões $L/4$ e $L/2$.

Prob 4.13: Modelagem: Seja r o raio do círculo e θ o ângulo do setor circular. Queremos maximizar a área $a = \theta r^2/2$. O perímetro deste setor é $2r$ mais θr. Assim, $40 = 2r + \theta r$. Logo, $\theta = 40/r - 2$. Logo queremos o máximo de $a(r) = 20r - r^2$. Note que θ varia entre 0 e 2π. Como $40 = 2r + \theta r$, para $\theta = 0$, $r = 20$ e para $\theta = 2\pi$, $r = 20/(1 + \pi)$. Assim $r \in [20/(1 + \pi),\ 20]$.

Resolução: Trata-se de uma equação do segundo grau. $a'(r) = 20 - 2r$. Logo a derivada é zero em $r_0 = 10$. Como $20/(1 + \pi) < 20/4 = 5 < 10$ ($\pi > 3$), o máximo é em $r_0 = 10$.

Prob 4.14: Modelagem: Vamos modelar introduzindo θ para o ângulo e $B = K - h$ para a diferença entre a distância da tela ao chão e a altura dos olhos do espectador. Note que se $h \to 0$ ou $h \to \infty$ o ângulo $\theta \to 0$.

Por trigonometria, $\tan\varphi = \dfrac{B}{d}$ e $\tan(\theta + \varphi) = \dfrac{L + B}{d}$. Assim, $\varphi = \arctan(B/d)$ e $\theta + \varphi = \arctan((L + B)/d)$. Logo, o ângulo $\theta(d) = \arctan((L + B)/d) - \arctan(B/d)$.

Queremos maximizar $\theta(d)$ para $d \in (0, \infty)$.

Resolução: Derivando obtemos

$$\theta'(d) = \frac{L(BL + B^2 - d^2)}{(B^2 + d^2)((L + B)^2 + d^2)}.$$

Queremos determinar d_0 tal que $\theta'(d_0) = 0$. Como o denominador é sempre positivo e $L > 0$, a única raiz da derivada é d_0 tal que $BL + B^2 - d_0^2 = 0$, isto é (solução positiva) $d_0 = \sqrt{B^2 + BL}$.

Prob 4.15: Modelagem: Sejam x e y as dimensões do cartaz. Sua área $A = xy$. A área impressa será igual a $(x - 2M)(y - 2N)$. Eliminando $y = A/x$ obtemos que queremos maximizar a área impressa $f(x) = (x-2M)(A/x-2N)$ com $x \in [2M, A/(2N)]$.

Resolução: Dica: Resolva o problema com $A = 50, M = 2, N = 4$. Vou dar a solução geral. Como $f'(x) = A/x-2N-(x-2M)A/x^2$, os zeros da derivada são $\pm\sqrt{AM/N}$. Queremos somente a solução positiva $x_0 = \sqrt{AM/N}$. Note que nos extremos a área impressa f é zero. Assim o máximo é em x_0 se nos certificarmos que $x_0 \in [2M, A/(2N)]$.

Vamos provar que $x_0 \in [2M, A/(2N)]$. Para que o problema faça sentido a área A deve ser maior que a área das margens $(2M)(2N) = 4MN$. Assim, $4MN < A$. Logo, $4M^2 < AM/N$, e portanto $2M < \sqrt{AM/N} = x_0$. Por outro lado, $AM/N < A^2/(4N^2)$. Logo, $\sqrt{AM/N} = x_0 < A/(2N)$.

Prob 4.16: Modelagem (comum aos dois itens): Seja h a altura e r o raio das semiesferas. O volume é $V = 4/3\pi r^3 + \pi r^2 h$ e a área de superfície é $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$.

(a) **Modelagem**: Se fixarmos a área em A, tiramos que $\pi rh = (A - 4\pi r^2)/2$. Assim, $V(r) = 4/3\pi r^3 + r(A - 4\pi r^2)/2$. Queremos maximar $V(r)$ em $[0, \sqrt{A/(4\pi)}]$ (chegamos neste valor tomando $h = 0$ na relação $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$).

Resolução: Vamos calcular o ponto crítico. Como $V'(r) = \dfrac{A - 4\pi r^2}{2}$, $V'(r_0) = 0$ se $A = 4\pi r_0^2$. Assim a derivada é zero no extremo do intervalo $r_0 = \sqrt{A/(4\pi)}$. Note que $V(0) = 0$ e $V'(0) = A/2 > 0$. Alem disso $V'(x) > 0$ para todo $x \in [[0, \sqrt{A/(4\pi)}]$. Logo V cresce neste intervalo e portanto $r = \sqrt{A/(4\pi)}$ é o ponto onde $V(r)$ assume o máximo.

(b) **Modelagem**: O custo de fabricação é proporcional a área de superfície A. Como o volume V é fixo, tiramos que $\pi rh = (V - 4/3\pi r^3)/r$. Assim,

$$A(r) = 4\pi r^2 + 2(V - 4/3\pi r^3)/r = \frac{6V + 4\pi r^3}{3r}.$$

Queremos minimizar $A(r)$ para $r \in (0, \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}})$ (chegamos neste valor tomando $h = 0$ na relação $V = 4/3\pi r^3 + \pi r^2 h$).

Resolução: Note que $A(r) \to \infty$ quando $r \to 0^+$ ou $r \to \infty$. Assim o mínimo ocorrerá em um ponto crítico. Como $A'(r) = \dfrac{8\pi r^3 - 6V}{3r^2}$. Assim a derivada se anula somente em $r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$. Pode-se confirmar que o mínimo é em $r = r_0$ pois o sinal da derivada é sempre negativa.

Prob 4.17: (a) **Modelagem**: Queremos minimizar o quadrado da distância $g(x) = (x - 2)^2 + (f(x) - 2)^2 = (x - 2)^2 + |6x - 2x^2|$. Note que o domínio de f é onde $6x - 2x^2 > 0$, isto é em $[0, 3]$.

Resolução: Aplicando a definição de módulo observamos que $|6x - 2x^2| = 6x - 2x^2$ se $x \in [0, 3]$. Assim $g(x) = -x^2 + 2x + 4$ se $x \in [0, 3]$. Em $[0, 3]$, $g'(x) = -2x + 2$ e $g'(1) = 0$. Temos que comparar $g(0) = 4$, $g(1) = 5$ e $g(3) = 1$. Observamos que o mínimo é em $x = 3$ com $g(3) = 1$ e o máximo é em $x = 1$ com $g(1) = 5$.

(b) **Modelagem**: A distância vertical $f(x)$ é igual a diferença entre os y's. Assim, queremos o mínimo de $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Note que $f(x) \to \infty$ para $x \to \pm\infty$. Logo o mínimo será no ponto de derivada zero. Como $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$, os pontos críticos são 1 e -1. Como $f(1) = f(-1) = 2$, o mínimo é em $x = 1$ ou $x = -1$.

Prob 4.18: **Modelagem**: Sejam x, y os lados do retângulo. O perímetro $P = 2x + 2y$. Note que ligando-se o centro do círculo a um vértice do retângulo obtemos um triângulo retângulo com lados $x/2, y/2, R$. Assim, por Pitágoras, $x^2 + y^2 = 4R^2$. Logo, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$ para $x \in [0, 2R]$. Assim queremos o máximo e mínimo de $P(x) = 2x + 2\sqrt{4R^2 - x^2}$ para $x \in [0, 2R]$.

Resolução: Como $P'(x) = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Note que $P'(x) = 0$ se, e somente se, $2\sqrt{4R^2 - x^2} = 2x$. A raiz positiva será $x_0 = R\sqrt{2}$. Como $x_0^2 + y_0^2 = 4R^2$, $y_0 = R\sqrt{2}$. Comparando $P(0) = 4R = P(2R)$ e $P(R\sqrt{2}) = R3\sqrt{2}$. Assim, como $4 < 3\sqrt{2}$, o maior perímetro será $R3\sqrt{2}$ para o quadrado de lado $R\sqrt{2}$. O menor será para o retângulo degenerado de lados 0 e $2R$, com perímetro $4R$.

Prob 4.19: **Modelagem**: Vamos fixar x como sendo o ponto do eixo x que é um dos vértices do retângulo. Automaticamente os outros vértices vão ser $(x, y(x))$, $(-x, y(x))$ e $(-x, 0)$. Assim a área $A = (2x)y(x) = 2(27x - x^3)$. Note que como as raízes da parábola são $\pm\sqrt{27}$, $x \in [-\sqrt{27}, \sqrt{27}]$ e queremos maximizar $A(x) = 2(27x - x^3)$.

Resolução: Como $A'(x) = 2(27 - 3x^2)$, os pontos críticos são $x = \pm 3$, que pertencem ao intervalo. Note que $A(\pm\sqrt{27}) = 0$. Assim o máximo será em $x = 3$ onde $A(3) = 108$. Note que $y(x) = 18$. Assim as dimensões são $2x = 6$ por $y = 18$

Prob 4.20: (a) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cone inscrito na esfera. O volume do cone é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Note que como $\dfrac{1}{3}\pi$ é um constante, maximizar a função $f = r^2 h$ é um problema equivalente. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas.

Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cone observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h - R$. Logo, por Pitágoras, $(h - R)^2 + r^2 = R^2$, Assim, $r^2 = 2hR - h^2$. Logo $f(h) = h(2hR - h^2)$. Note que $h \in [0, 2R]$. Assim queremos o máximo de $f(h)$ para $h \in [0, 2R]$.

Resolução: Note que $f(0) = f(2R) = 0$. Como $f'(h) = 4hR - 3h^2 = h(4R - 3h)$, os pontos críticos são $h = 0$ e $h = 4R/3$. Como o ponto zero não é de máximo, o máximo é quando

$h = 4R/3$.

(b) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cilindro inscrito no cone. O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas. Note que cortando o cone temos uma semelhança de triângulos: a altura H do cone está para R assim como $H - h$ está para r. Assim, $\dfrac{H}{R} = \dfrac{H-h}{r}$. Logo, $r = \dfrac{R(H-h)}{H}$. Logo queremos maximizar $V(h) = \pi h \left(\dfrac{R(H-h)}{H}\right)^2$. Note que $h \in [0, H]$. Assim queremos o máximo de $V(h)$ para $h \in [0, H]$.

Resolução: Note que $V(0) = V(H) = 0$. Como $V'(h) = \dfrac{\pi R^2 (H-3h)(H-h)}{H^2}$ (vai obter-se equação do segundo grau com raízes H e $H/3$). Como $V(H) = 0$, o máximo é para $h = H/3$ (não precisa calcular $V(H/3) = \dfrac{4\pi H R^2}{27}$, que obtive com o Maxima).

A.4.3 Extras p.124

Ext 4.1: (a) 4. (b) ∞ (c) $5/4$. (d) Note que $\sqrt[x]{x} = x^{1/x} = (e^{\log x})^{1/x} = e^{\log x/x}$. Quando $x \to \infty$, $\log x/x \to 0$. logo o limite é $e^0 = 1$. (e) $1/12$ (LH mais de uma vez). (f) Note que $(a^x)' = (\log a)a^x$. Assim o limite é $\log a - \log b$.

Ext 4.2: (a) $\tan(0.05) \approx \tan(0) + \tan'(0)(0.05 - 0) = 0.05$. (b) $\sqrt[3]{28} \approx \sqrt[3]{27} + 1/(3\sqrt[3]{27^2})(28 - 27) = 3 + 1/(27)$.

Ext 4.3: (a) Veja na capa do livro $\left(\ddot\smile\right)$o ciclo da derivada do seno. No entanto somente é diferente de zero $\cos 0 = 1$ e $-\cos 0 = -1$. Assim, somente os termos com expoente impar são não-nulos, alternando sinal entre -1 e 1. Portanto, colocando os fatoriais, a série é:

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

(b) Veja (novamente) na capa do livro $\left(\ddot\smile\right)$o ciclo da derivada do log. Colocando $x = a = 1$ obtemos fatorial com o sinal alternando. Isto vai cancelar o fatorial do denominador. Portanto, a série é:

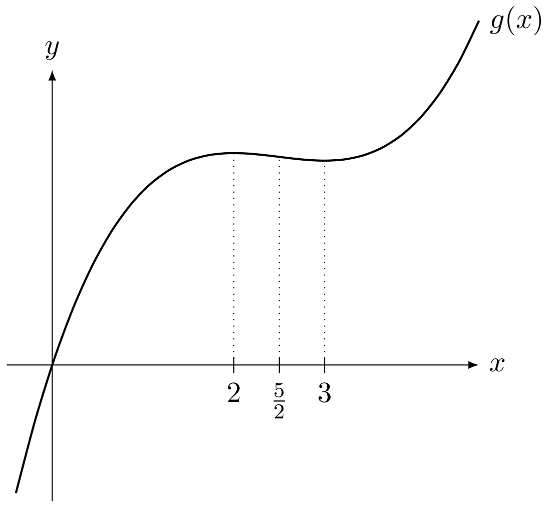
$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

(c) Veja (novamente) na capa do livro $\left(\ddot\smile\right)$o ciclo da derivada do sen e cosseno hiperbólico. Como $\operatorname{senh} 0 = 0$ e $\cosh 0 = 1$, a série de Taylor terá apenas os termos impares, sempre com sinal positivo:

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

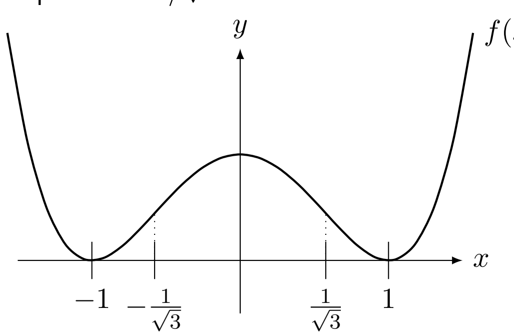
Ext 4.4: Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Como $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$, $f'(a^3) = \dfrac{1}{3a^2}$. Fazendo a série de Taylor perto de $x = a^3$, $f(a^3 + b) \approx f(a^3) + f'(a^3)b = a + \dfrac{b}{3a^2}$.

Ext 4.5: (a) $g'(x) = (x-3)(x-2)$. Assim a função cresce antes de $x = 2$, decresce em $(2, 3)$ e cresce depois de $x = 3$. Além disso, como $g''(x) = 2x - 5$, a concavidade é para baixo até $x = 5/2$ e para cima depois.



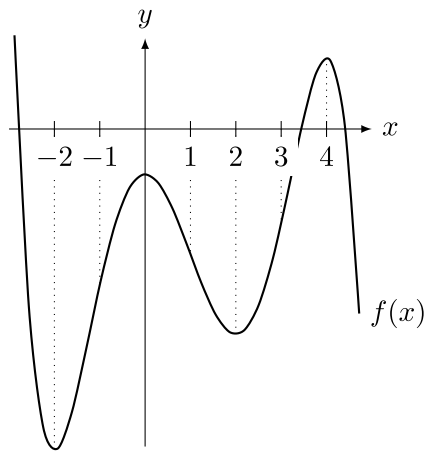
(b) $f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$ e $f''(x) = 12x^2 - 4$. Note que $f(x) \geq 0$ e é zero somente em $x = \pm 1$. Pela derivada, a função decresce até $x = -1$, cresce em $(-1, 0)$, decresce em $(0, 1)$ e cresce de 1 em diante. Os pontos $x = \pm 1$ são de mínimo local. O ponto $x = 0$ é de máximo local. Quando $x = 0$, $y = 1$.

Pela f'', a concavidade é para cima até $-1/\sqrt{3}$, para baixo em $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e para cima novamente para $x > 1/\sqrt{3}$.

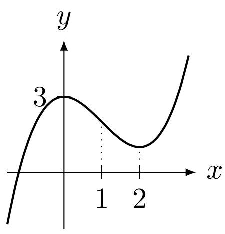


Ext 4.6: Extraímos do gráfico informação sobre crescimento e decrescimento. Basta olhar onde a função do gráfico é positiva e onde é negativa. Assim, $f(x)$ decresce ate $x = -2$, em $(0, 2)$ e depois de $x = 4$. Ela cresce em $(-2, 0)$, $(2, 4)$.

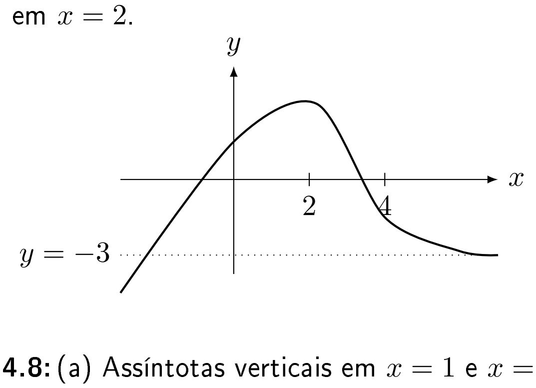
Agora se observarmos o gráfico podemos obter a informação sobre a derivada da função representada, isto é, sobre a derivada segunda de f. Assim, $f''(-1) = f''(1) = f''(3) = 0$. Observando o sinal de f'' concluímos que a concavidade de $f(x)$ é para cima até $x = -1$, em $(1, 3)$. A concavidade é para baixo em $(-1, 1)$ e depois do $x = 3$.



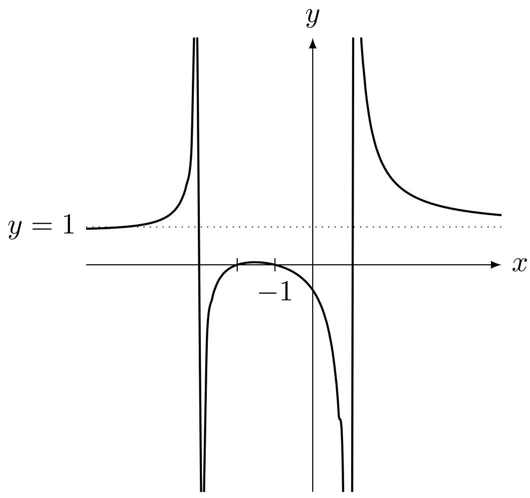
Ext 4.7: (a) Ponto de máximo local em $x = 0$ e mínimo local em $x = 2$.



(b) Assintota horizontal $y = -3$ e máximo local em $x = 2$.



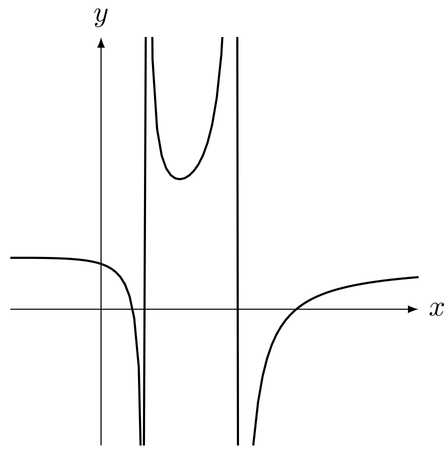
Ext 4.8: (a) Assíntotas verticais em $x = 1$ e $x = -3$, horizontal em $y = 1$. Intersepta o eixo x em $x = -1$ e $x = -2$. O sinal da derivada será dado pelo polinômio $-x^2 - 10\,x - 13$, cujas raízes são: $-5 \pm 2\sqrt{3}$, que são aproximadamente -8.4 e -1.5.



$$f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-1)}$$

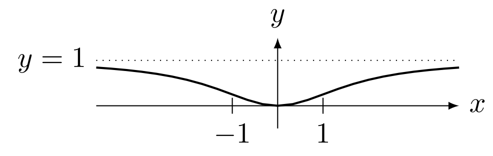
(b) Note que as assíntotas verticais são $x = 3$ e $x = 1$. A horizontal é $y = 0$. O sinal da derivada é igual ao de $x^2 - 3$: a função decresce em $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e cresce fora. Tem máximo local em $-\sqrt{3}$ e mínimo local em $\sqrt{3}$.

Ignoramos a derivada segunda pois ela vai dar $g''(x) = 2\dfrac{x^3 - 9x + 12}{(3-x)^3(x-1)^3}$. Note que o polinômio do denominador é do terceiro grau, e portanto não sabemos como calcular a raiz (com o Maxima obtemos que a única raiz real é $-3^{2/3} - 3^{1/3}$.).



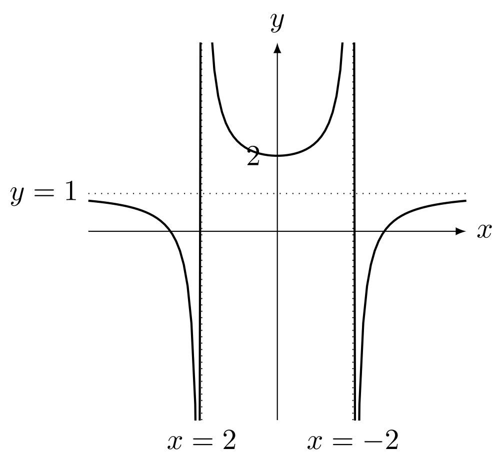
$$f(x) = \frac{x}{(x-3)(1-x)} + 3$$

Ext 4.9: (a) A função cresce para $x > 0$ e decresce para $x < 0$ pois o sinal de f' é determinado por x. A derivada se anula em $x = 0$, que é ponto de mínimo local. A assintota horizontal é $y = 1$, vertical não tem. Intersepta os eixos somente em $(0, 0)$. Concavidade p/ cima em $(-1, 1)$ para baixo fora.



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$$

(b) A função cresce para $x > 0$ e decresce para $x < 0$ pois o sinal de f' é determinado por x. A derivada se anula em $x = 0$, que é ponto de mínimo local. A assintota horizontal é $y = 1$, vertical $x = \pm 2$. A concavidade é determinada pelo sinal de $4 - x^2$ (pois o numerador é sempre positivo): concavidade p/ cima em $(-2, 2)$ para baixo fora.



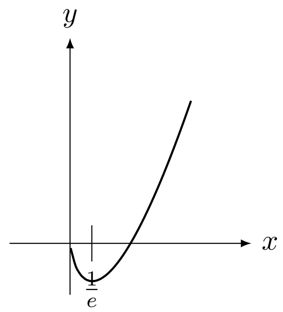
$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2} + 2$$

Ext 4.10: (a) Note que a função está definida somente para $x > 0$. Note que $\lim\limits_{x\to 0^+} x \log x = 0$ por L'Hospital. Intersepta os eixos em $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Não possui assíntota vertical nem horizontal.

Sinal de f'. Note que $\log x = -1$ quando $x = e^{-1} \approx 0.36$. A função decresce até $x = e^{-1}$, e cresce depois. Em $x = e^{-1}$ a função tem um mínimo local.

O sinal de f'' é sempre positivo para $x > 0$, o domínio da função. Assim a concavidade é sempre para cima.

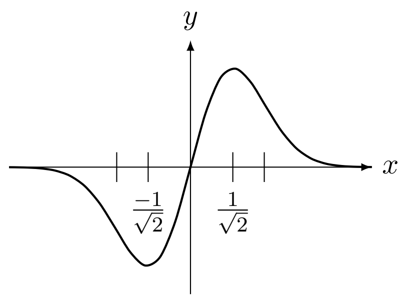


$$f(x) = x \log x$$

(b) Intersepta os eixos em $(0, 0)$. Não tem Assintota vertical. Assintota horizontal: $y = 0$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $1 - 2x^2$, cujas raízes são $\pm 1/\sqrt{2} \approx \pm 0.707$. Assim a função cresce em $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx (-0.7, 0.7)$. Ela decresce fora deste intervalo. Em $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a função tem um mínimo local e em $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a função tem um máximo local.

O sinal de f'' é igual ao sinal de $2x(2x^2 - 3)$. Assim a concavidade para cima em $(-\sqrt{3/2}, 0) \approx (-1.22,\ 0)$ e para $x > \sqrt{3/2}) \approx 1.22$, Concavidade para baixo em $(0,\ \sqrt{3/2}) \approx (0, 1.22)$ e para $x < -\sqrt{3/2} \approx -1.22$.

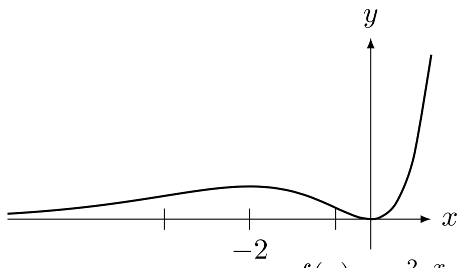


$$f(x) = xe^{1-x^2}$$

(c) Intersepta os eixos em $(0, 0)$. Não tem Assintota vertical. Assintota horizontal: $y = 0$.

Sinal de f' é igual ao sinal de $x(x+2)$. Assim a função decresce em $(-2, 0)$ e cresce fora deste intervalo. Em $x = -2$ a função tem um máximo local e em $x = 0$ tem um mínimo local.

O sinal de f'' é igual ao sinal de $x^2 + 4x + 2$. Assim a concavidade para baixo em $(-2 - \sqrt{2},\ -2 + \sqrt{2}) \approx (-3.41,\ -0.58)$ Concavidade para cima fora deste intervalo.



$f(x) = x^2 e^x$

Ext 4.11: (a) Pontos críticos são $x = 0$, $x = \pm 2$. Temos que comparar $f(0) = 0$ com $f(2) = f(-2) = 16$. Além disso, quando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to -\infty$.

Assim, em $I = \mathbb{R}$, $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 16$, $x_{\text{max}} = 2$ ou -2, $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\infty$, não existe $x_{\text{min}} =$.

Em $I = [-1, 1]$, devemos comparar $f(-1) = f(1) = 7$, $f(0) = 0$ (único ponto crítico no intervalo. Logo $\max\limits_{x \in I} f(x) = 7$, $x_{\text{max}} = 1$ ou -1, $\min\limits_{x \in I} f(x) = 0$, $x_{\text{min}} = 0$.

(b) Único ponto crítico é $x = 0$.

Em $I = [1, 2]$, que não contém o ponto crítico, devemos comparar $f(1) = \dfrac{1}{2}$ e $f(2) = \dfrac{1}{5}$. Assim $\max\limits_{x \in I} f(x) = 1/2$, $x_{\text{max}} = 1$, $\min\limits_{x \in I} f(x) = 1/5$, $x_{\text{min}} = 2$.

Em $I = [-1, \infty)$, como $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, $f(0) = 1$ e $f(-1) = 1/2$, $\max\limits_{x \in I} f(x) = 1$, $x_{\text{max}} = 0$, $\min\limits_{x \in I} f(x) = 0$, não existe x_{min}.

(c) Note que $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)\cos(\cos(x))$. Logo os pontos críticos vão ser onde $\operatorname{sen} x = 0$ ou onde $\cos(y) = 0$. Assim a derivada será nula em $x = 0, \pi$ pela equação $\operatorname{sen} x = 0$. Para a outra, $y = \pi/2 \approx 1.57$. Como $y = \cos x$, esta equação é impossível pois nunca $\cos x = 1.57 > 1$. O mesmo ocorrerá com outros valores.

Assim devemos comparar $f(0) = \operatorname{sen} 1$, $f(\pi) = \operatorname{sen}(-1) = -\operatorname{sen} 1$, $f(2\pi) = \operatorname{sen} 1$.

Assim $\max\limits_{x \in I} f(x) = \operatorname{sen} 1$, $x_{\text{max}} = 0$, $\min\limits_{x \in I} f(x) = -\operatorname{sen} 1$, $x_{\text{min}} = \pi$.

Ext 4.12: Modelagem Se o triângulo equilátero tem lado x, o retângulo possuirá lados x e y. Como a quantidade de luz é proporcional a área da janela, queremos maximizar a área da janela $a = xy + x^2\sqrt{3}/4$ (área retângulo mais semicírculo). Esta é uma função de duas variáveis. Utilizando a restrição que o perímetro da janela $12 = 3x + 2y$, obtemos que $y = 6 - 3/2x$. Assim $a(x) = x(6 - 3/2x) + x^2\sqrt{3}/4$. Olhando para o perímetro $12 = 3x + 2y$, vemos que os casos extremos são $x = 4$ $(y = 0)$ e $x = 0$. Assim queremos o máximo de $a(x)$ para $x \in [0, 4]$.

Resolução: Como $a'(x) = 6 - (3 - \sqrt{3}/2)x$, $x_0 = 6/(3 - \sqrt{3}/2) \approx 2.811 < 4$ é o único ponto crítico e pertence a $[0, 4]$. Nos extremos do intervalo, $a(0) = a(4) = 0$.

Ext 4.13: (a) **Modelagem**: Considere x e y como as dimensões do retângulo. Então queremos maximizar a área $a = xy$. Como são duas variáveis, utilizamos a restrição $P = 2x + 2y$ para eliminar uma delas. Assim $y = P/2 - x$. Logo queremos o máximo de $a(x) = xP/2 - x^2$. Note que x pode ser 0 no mínimo, mas como $P = 2x + 2y$ e y pode valer no mínimo 0, x pode valer no máximo $P/2$. Assim queremos o máximo de $a(x) = xP/2 - x^2$ para $x \in [0,\ P/2]$.

Resolução: Como $a'(x) = P/2 - 2x$, $x_0 = P/4$ é o único ponto crítico e pertence ao intervalo $[0,\ P/2]$. Como $a(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo, o máximo é em x_0. Neste caso, como $2x_0 + 2y_0 = P$, $2y_0 = P - 2P/4 = P/2$. Assim $x_0 = y_0 = P/4$ e portanto o retângulo é um quadrado.

(b) **Modelagem**: Considere x e y como as dimensões do campo, com y o lado oposto ao córrego. Então queremos maximizar a área $a = xy$. Como são duas variáveis, utilizamos a restrição $P = 2x + y$ para eliminar uma delas. Assim $y = P - 2x$. Logo queremos o máximo de $a(x) = xP - 2x^2$. Note que x pode ser 0 no mínimo, mas como $P = 2x + y$ e y pode valer no mínimo 0, x pode valer no máximo $P/2$. Assim queremos o máximo de $a(x) = xP - 2x^2$ para $x \in [0,\ P/2]$.

Resolução: Como $a'(x) = P - 4x$, $x_0 = P/4$ é o único ponto crítico e pertence ao intervalo $[0,\ P/2]$. Como $a(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo, o máximo é em $x_0 = P/4$. Neste caso, como $2x_0 + y_0 = P$, $y_0 = P - 2P/4 = P/2 > x_0 = P/4$.

(c) **Modelagem**: Considere x e y como as dimensões do terreno, onde x é da cerca reforçada. Então queremos maximizar a área $a = xy$. Como são duas variáveis, utilizamos a restrição do custo total da cerca $6000 = 3(2x) + 2(2y)$. Assim $6000 = 6x + 4y$ ou $3000 = 3x + 2y$. Logo, $y = 1500 - 3/2x$. Logo queremos o máximo de $a(x) = x(1500 - 3/2x)$. Note que x pode ser 0 no mínimo, mas como $3000 = 3x + 2y$ e y pode valer no mínimo 0, x pode valer no máximo 1000. Assim queremos o máximo de $a(x) = 1500x - 3/2x^2$ para $x \in [0, 1000]$.

Resolução: Como $a'(x) = 1500 - 3x$, $x_0 = 500$ é o único ponto crítico e pertence ao intervalo $[0, 1000]$. Como $a(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo, o máximo é em $x_0 = 500$. Neste caso, como $y_0 = 1500 - 3/2x_0 = 750$.

Ext 4.14: (a) **Modelagem**: Queremos o máximo de $x^2 + y^2$ mas com $x + y = S$. Logo queremos maximizar $f(x) = x^2 + (S - x)^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $f'(x) = 2x - 2(S - x) = 4x - 2S$, o ponto crítico é $x_0 = S/2$. Como a função decresce antes de x_0 ($f' < 0$) e cresce depois, este ponto é de mínimo local e global (na verdade $f(x) \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$). Neste caso $y_0 = S - x_0 = S/2 = x_0$.

(b) **Modelagem**: Queremos máximo e mínimo de $g(x) = x - x^3$ para $x \in [0, \infty]$.

Resolução: Como $g'(x) = 1-3x^2$, os pontos críticos são $\pm\sqrt{3}/3$. Mas somente $x_0 = \sqrt{3}/3 \in [0, \infty]$. Pelo sinal da derivada, x_0 é máximo local e positivo. Note que $g(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$. Logo o máximo é em x_0 e **não** existe mínimo.

(c) **Modelagem**: Queremos o máximo e o mínimo de $x + y$ com $xy = P > 0$. Assim queremos o mínimo de $h(x) = x + \dfrac{P}{x}$ com $x \in (0, \infty)$.

Resolução: Como $h'(x) = 1 - \dfrac{P}{x^2}$, os pontos críticos são $\pm\sqrt{P}$. Mas somente $\sqrt{P} \in (0, \infty)$ Note que $h(x) \to \infty$ quando $x \to 0$ ou $x \to \infty$. Assim o mínimo é em $x_0 = \sqrt{P}$, com $y_0 = x_0 = \sqrt{P}$ e a soma mínima igual a $2\sqrt{P}$. O máximo **não** existe.

Ext 4.15: (a) **Modelagem**: Seja x o lado do quadrado na base e h a altura. Logo $V = hx^2$. A quantidade de material é proporcional a soma das áreas dos lados $A = x^2 + 4xh$ (caixa aberta). Como $hx = \dfrac{V}{x}$, queremos minimizar $A(x) = x^2 + \dfrac{V}{x}$ para $x \in (0, \infty)$.

Resolução: Como $A'(x) = 2x - \dfrac{V}{x^2}$, o único ponto crítico é $x_0 = \sqrt[3]{V/2}$. Note que $A(x) \to \infty$ quando $x \to 0$ ou $x \to \infty$. Assim x_0 é um ponto de mínimo (pode-se ver também pelo sinal da derivada: função decresce até x_0 e cresce depois).

(b) **Modelagem**: Seja x o lado do quadrado na base e h a altura. Logo $V = hx^2$. A quantidade de material é proporcional a soma das áreas dos lados $A = x^2 + 4xh$ (caixa aberta). Como $hx = \dfrac{A - x^2}{4}$, queremos maximizar $V(x) = x\dfrac{A - x^2}{4}$. Note que se $h = 0$, $x = \sqrt{A}$. Assim $x \in [0, \sqrt{A}]$.

Resolução: Como $V'(x) = \dfrac{A - 3x^2}{4}$, os pontos críticos são $x = \pm\sqrt{A/3}$. Mas o único no intervalo $[0, \sqrt{A}]$ é $x_0 = \sqrt{A/3}$. Como $V(0) = V(\sqrt{A}) = 0$ e $V(x_0) > 0$ o máximo é em x_0.

(c) **Modelagem**: Seja x o lado do quadrado na base e h a altura. Logo $V = hx^2$. O custo é $C = 2(x^2) + 4xh$. Como $hx = \dfrac{V}{x}$, queremos minimizar $A(x) = 2x^2 + \dfrac{V}{x}$ para $x \in (0, \infty)$.

Resolução: Como $A'(x) = 4x - \dfrac{V}{x^2}$, o único ponto crítico é $x_0 = \sqrt[3]{V/4}$. Note que $A(x) \to \infty$ quando $x \to 0$ ou $x \to \infty$. Assim x_0 é um ponto de mínimo (pode-se ver também pelo sinal da derivada: função decresce até x_0 e cresce depois).

Ext 4.16: (a) **Modelagem**: Como a velocidade é a mesma, o minimizar tempo é o mesmo que minimizar caminho. Suponha que a distância de Q até o espelho é a e de P até o espelho é b. Coloque a origem no espelho no ponto que é a projeção ortogonal de Q no espelho. Introduza x como a localização do ponto O e seja c o ponto que é a projeção ortogonal de P no espelho. Por Pitágoras a distância total percorrida pelo raio em função de x é: $d(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b + (c - x)^2}$. Queremos o mínimo com $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Note que $d(x) \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$. Assim o mínimo é no ponto com derivada zero. Como

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b + (c - x)^2}}.$$

Se $d'(x_0) = 0$ então:

$$\frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{c - x_0}{\sqrt{b + (c - x_0)^2}}.$$

Note que isto implica que $\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r$. Como os ângulos são entre 0 e $\pi/2$, $\theta_i = \theta_r$.

(b) Como a velocidade é a mesma, o minimizar tempo é o mesmo que minimizar caminho. Suponha que a distância de Q até a interface entre os meios é a e de P até a interface é b. Coloque a origem na interface no ponto que é a projeção ortogonal de Q na interface. Introduza x como a localização do ponto O e seja c o ponto que é a projeção ortogonal de P no espelho. Por Pitágoras calculamos a distância em cada trecho:

$\sqrt{a^2+x^2}$ e $\sqrt{b+(c-x)^2}$. O tempo será obtido dividindo distância pela velocidade. Assim o tempo total percorrido pelo raio em função de x é $t(x) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_2} + \dfrac{\sqrt{b+(c-x)^2}}{v_1}$. Queremos o mínimo com $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Note que $t(x) \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$. Assim o mínimo é no ponto com derivada zero. Como

$$t'(x) = \frac{x}{v_2\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_1\sqrt{b+(c-x)^2}}.$$

Se $t'(x_0) = 0$ então:

$$\frac{x_0}{v_2\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{c-x_0}{v_1\sqrt{b+(c-x_0)^2}}.$$

Note que isto implica que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1}$.

Ext 4.17: (a) Se $y = t$, $x = \pm\sqrt{t^2+1}$. Assim a distância ao quadrado $d(t) = (t-2)^2 + t^2 + 1$. Como $d'(1) = 0$, o ponto mais próximo é $(\pm\sqrt{2}, 1)$.

(b) A distância ao quadrado é $d(x) = (x-4)^2 + x^6$. Como $d'(x) = 6x^5 + 2x - 8$. Uma das raízes é $x = 1$ e a função d' é crescente (sua derivada é sempre positiva). Assim é a única raiz. Assim o ponto é $(1, 1)$.

(c) Se $x = t$, $y = \pm\sqrt{8-4t^2}$, com $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. A distância ao quadrado é $d(t) = (t-1)^2 + 8 - 4t^2$. Logo $d'(t) = -6t - 2$. Assim $d'(-1/3) = 0$. Agora temos que comparar $d(-1/3) = 28/3 \approx 9.33$ com $d(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0.17$ e $d(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}-1)^2 \approx 5.28$. Logo o ponto mais perto é $(\sqrt{2}, 0)$.

(d) A distância ao quadrado é $d(x) = (x-2)^2 + x$ para $x > 0$. Assim $d'(x) = 2x - 3$. Assim $d'(3/2)$. Devemos comparar $d(3/2) = 7/4$ com $d(0) = 4$ ($d(\infty) = \infty$, o outro extremo do intervalo). Assim o ponto mais perto é $(3/2, \sqrt{3/2})$.

Ext 4.18: Modelagem: Seja $2x$ o lado do retângulo no diâmetro do semicírculo e y o outro lado. A área é $A = 2xy$. Note que ligando-se o centro do círculo a um vértice do retângulo obtemos um triângulo retângulo com lados x, y, R. Assim, por Pitágoras, $x^2 + y^2 = R^2$. Logo, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ para $x \in [0, R]$. Assim queremos o máximo de $A(x) = 2x\sqrt{R^2-x^2}$ para $x \in [0, R]$.

Resolução: Como $A'(x) = 2\dfrac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$. A raiz positiva será $x_0 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Como $x_0^2 + y_0^2 = R^2$, $y_0 = x_0 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Note que $A(0) = A(R) = 0$. Assim o máximo será em x_0. Logo as dimensões são $2x_0 = R\sqrt{2}$ e $y_0 = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Ext 4.19: Modelagem: Sejam h e r os lados do retângulo. Quando giramos o retângulo em torno do lado de tamanho h obtemos um cilindro de volume $V = \pi r^2 h$. Como $P = 2h + 2r$, $h = P/2 - r$. Assim queremos maximizar $V(r) = \pi r^2(P/2 - r)$. Se $h = 0, r = P/2$. Assim $r \in [0,\ P/2]$.

Resolução: Como $V'(r) = \pi r(P - 3r)$, os pontos críticos são 0 e $P/3$, ambos no intervalo. Mas $V(0) = V(P/2) = 0$. Assim $r_0 = P/3$ é o ponto de máximo. Então $h_0 = P/2 - r_0 = P/6$. Assim $\dfrac{r_0}{h_0} = 2$.

Ext 4.20: (a) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cilindro inscrito na esfera. O volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas.

Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cilindro observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h/2$. Logo, por Pitágoras, $(h/2)^2 + r^2 = R^2$, Assim, $r^2 = R^2 - h^2/4$. Logo $V(h) = \pi(R^2 - h^2/4)h$. Note que $h \in [0,\ 2R]$. Assim queremos o máximo de $V(h)$ para $h \in [0,\ 2R]$.

Resolução: Note que $V(0) = V(2R) = 0$. Como $V'(h) = \pi(R^2 - 3h^2/4)$, o ponto crítico positivo é $h_0 = 2R/\sqrt{3}$ que pertence ao intervalo ($\sqrt{3} > 1$). Este será o ponto de máximo pois a função é positiva em h_0.

(b) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cone inscrito no cone. O volume do cone é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Note que como $\dfrac{1}{3}\pi$ é um constante, maximizar a função $f = r^2 h$ é um problema equivalente. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{H}{H-h} = \dfrac{R}{r}$. Logo, $h = H(1 - r/R)$. Assim queremos maximizar $f(h) = r^2 H(1 - r/R)$ para $r \in [0, R]$.

Resolução: Como $f'(r) = H/Rr(2R - 3r)$. As raízes são 0 e $2R/3$, ambas no intervalo $[0, R]$. Mas $f(0) = f(R) = 0$. Assim o máximo é em $r_0 = 2R/3$.

Ext 4.21: Modelagem: Chame de x a distância da base da escada até a base da cerca, de y a distância da base do prédio até o ponto onde a escada encosta no prédio e de d o tamanho da escada. Por Pitágoras $(x+L)^2+y^2=d^2$. Por semelhança de triângulos, $H/x=y/(x+L)$. Assim, $y=H(x+L)/x$. Utilizando Pitágoras obtemos que $d^2(x)=(x+L)^2(1+H^2/x^2)$. Queremos minimizar $d^2(x)$ para $x\in(0,\infty)$.

Resolução: É fácil ver que $d^2(x)\to\infty$ nos extremos deste intervalo. Assim o mínimo é no ponto onde a derivada se anula. Derivando $d^2(x)$ obtemos $\dfrac{2(L+x)(x^3-LH^2)}{x^3}$. As raízes reais são $x_0=-L$ (descartada pois está fora do intervalo de minimização) e $x_0=\sqrt[3]{LH^2}$. Portanto a menor distância é $d(\sqrt[3]{LH^2})$.

A.4.4 ⋆Problemas (Taxas Relacionadas) p.127

Prob 4.1: Seja x a distância entre a caixa e o ponto P. Claro que $\tan\theta(t)=\dfrac{1}{x(t)}$. Derivando obtemos que

$$\frac{\theta'}{\cos^2\theta}=-\frac{x'}{x^2}.$$

Quando $x(t)=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Como $x'=-2$ (o sinal é negativo pois a caixa está sendo puxada, diminuindo o valor de x), substituindo na relação acima, obtemos $\dfrac{\theta'}{\cos^2(\pi/4)}=-\dfrac{-2}{1^2}$. Logo, $2\theta'=2$, ou, $\theta'=1m/min$.

Prob 4.2: Seja $x(t)$ a posição do carro e $y(t)$ a posição do trem com a a origem na interseção da rodovia e os trilhos do trem. Agora por Pitágoras a distância $d(t)$ satisfaz $d^2(t)=x^2(t)+y^2(t)+10^2$. Pelos dados, $x(0)=y(0=0$. Além disso, $x(2)=2(40)=80$ e $y(2)=2(20)=40$. No instante $t=2$ a distância entre eles por Pitágoras é $d(2)=90$.

Derivando (e dividindo por 2) obtemos que $dd'=xx'+yy'$. No instante $t=2$, como $d=90, x=80, x'=40, y=40, y'=20$, obtemos que $90d'(2)=80(40)+40(20)$. Logo $d'(2)=\dfrac{400}{9}$ m/s.

Outra forma (mais complicada) sem utilizar taxas relacionadas: Colocando a origem na interseção, na altura do trilho do trem, com o eixo x na direção do movimento do carro e o eixo y na direção do movimento do trem, o carro encontra-se no instante s em $c(s)=(40s,\ 0,\ 10)$ e o trem (o final do último vagão) em $t(s)=(0,\ 20s,\ 0)$. A distância $d(s)=\sqrt{(40s)^2+(20s)^2+10}$. Assim,

$$d'(s)=\frac{2\cdot40s\cdot40+2\cdot20s\cdot20}{2\sqrt{(40s)^2+(20s)^2+10}}.$$

Calculando obtemos que $d'(2)=\dfrac{400}{9}$ m/s.

Prob 4.3: Seja x a distância da base da escada até a parede e y a altura do topo da escada. Por Pitágoras, $x^2+y^2=L^2$. Assim, $2xx'+2yy'=0$. Como $x'=V$ e quando $y=H$, $x=\sqrt{L^2-H^2}$, $V\sqrt{L^2-H^2}+Hy'=0$. Basta resolver para y', a velocidade do topo: $y'=-(V\sqrt{L^2-H^2})/H$.

Prob 4.4: Por semelhança de triângulos, se r é o raio de água do tanque com h metros de profundidade, $h(t)=r(t)H/R$. Assim o volume $v(t)=\pi/3r^2(t)h(t)$. Assim $v'(t)=\pi/3(2rr'h+r^2h')$ e $h'=r'H/R$. Assim se $v'=V$, $h=L$ então $r=LR/H$ e $r'=h'R/H$.
$V=\pi/3(2(LR/H)(h'R/H)L+(LR/H)^2h')=\pi(LR/H)^2h'$. Resolvendo para h' obtemos: $h'=\dfrac{VH^2}{\pi R^2L^2}$.

Prob 4.5: Seja O o ponto no solo verticalmente abaixo do balão. Se $h(t)$ é altura do solo, $x(t)$ distância de O até o carro, e $d(t)$ a distância balão-carro, por Pitágoras $h(t)^2+x(t)^2=d(t)^2$. Logo $2hh'+2xx'=2dd'$. Após 4 segundos: $h(4)=48+4\cdot3=60$, $x(4)=0+20\cdot4=80$. Por Pitágoras, $d(4)=100$. Como $h'(4)=3$ e $x'(4)=20$. substituindo na equação (obtida por derivação implícita) obtemos: $2(60)(3)+2(80)(20)=2(100)d'(4)$. Logo a variação da distância vale $d'(4)=17,8$m/s.

Prob 4.6: Se $P=(x_0,y_0)$, a equação da reta tangente t que passa em P é $y-y_0=-2x_0(x-x_0)$. Como $y_0=-x_0^2+1$, a equação de t é: $y=1-x_0^2-2x_0(x-x_0)$. O Ponto Q é a interseção de t com o eixo x. Basta colocar $y=0$ na equação da reta t para se obter que a coordenada x de Q é: $x_0+\dfrac{1-x_0^2}{2x_0}$. Note que $M=(x_0,0)$. Assim, $MQ=\dfrac{1-x_0^2}{2x_0}$. Logo $MQ'(t)=\dfrac{-4x_0^2(t)x_0'(t)-(1-x_0^2)2x_0'(t)}{4x_0(t)^2}$. Tomando $x_0=1/\sqrt{2}$, obtemos que $MQ'(t)=-3cm/min$.

Prob 4.7: Seja d a distância da fonte até a parede e r o raio da área iluminada. Como o ângulo é de 90^o, a o triângulo retângulo cujos catetos são

r e d é isósceles. Assim $r = d$. Logo $A(t) = \pi r(t)^2 = \pi d(t)^2$. Assim, $A' = 2\pi dd'$. Logo $A' = 2\pi k(-a) = -2ka\pi$.

Prob 4.8: Vamos chamar de x o outro lado do retângulo. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{40-x}{40} = \dfrac{y}{60}$. Quando $y = 36$, resolvendo a equação obtemos que $x = 16$. Como, $\dfrac{-x'}{40} = \dfrac{y'}{60}$, quando $y' = 0,5$, $x' = -1/3$.

Assim a área do retângulo $A(t) = x(t)y(t)$ varia em função do tempo por $A' = x'y + xy'$. Logo no instante t quando $y' = 0,5$, $x' = -1/3$, $y = 36$, $x = 16$, temos que $A'(t) = -4cm/s$. Logo a área está diminuindo neste instante.

Prob 4.9: (a) O volume $V(r) = 4/3\pi r^3$. Assim $V'(r) = 4\pi r^2$. Seja $r(t)$ o raio do balão em função do tempo. Por hipótese $r'(t) = -15$ para todo t. Seja $f(t) = V(r(t))$ a variação no volume em função do tempo. Então $f'(t)$ será a taxa com o ar estará saindo do balão. Então, $f'(t) = V'(r(t))r'(t) = -15(4\pi r^2(t))$. Assim se $r(t) = 9$, $f'(t) = -15(4\pi 81) = -4860\pi m^3/s$.

(b) Escrevemos o volume do balão em função do tempo e do raio $R(t)$ (o raio depende do tempo) por $V(t) = 4/3\pi R^3(t)$. Como $V'(t) = 4\pi R^2(t)R'(t)$. Assim $p_0 = V'(t_0) = 4\pi R_0^2 R'(t_0)$. Como $A(t) = 4\pi R^2(t)$, $A'(t) = 8\pi R(t)R'(t)$. Como $R'(t_0) = p_0/(4\pi R_0^2)$,
$A'(t_0) = 8\pi R_0 p_0/(4\pi R_0^2) = 2p_0/R_0$.

Prob 4.10: Sejam $R(t)$ o raio da esfera, $r(t)$ o raio e $h(t)$ a altura do cone inscrito na esfera. Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cone observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h - R$. Logo, por Pitágoras,

$$(h(t) - R(t))^2 + r(t)^2 = R(t)^2.$$

Agora são dados que $R(t) = 1$, $h(t) = 4/3$. Por esta relação obtemos que $r(t) = 2\sqrt{2}/3$ (ou $r^2(t) = 8/9$). Derivando e dividindo por 2 obtemos que

$$(h - R)(h' - R') + rr' = RR'.$$

Como $R' = 0,9$, $h' = 0,8$, $R = 1$, $h = 4/3$ e $r = 2\sqrt{2}/3$, resolvendo para r' obtemos que $r' = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ ou $rr' = \dfrac{14}{15}$.

O volume do cone é $V(t) = \dfrac{\pi}{3}r(t)^2h(t)$. Assim a variação do volume do cone $V(t)$ é dado por

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}(2r'(t)r(t)h(t) + r^2(t)h'(t)).$$

Substituindo os valores acima ($r(t)r'(t) = \dfrac{14}{15}$ e $r^2(t) = 8/9$) obtemos que $V'(t) = \dfrac{16\pi}{15}$m^3/min

Prob 4.11: $A(t) = p^2(t)/16$, onde A é área e p perímetro. Logo, $A'(t) = p(t)p'(t)/8$. Assim, se $A(4) = 100$, $p(4) = 40$. Como $p' = 3, A' = 40(3)/8 = 15$m/s.

Prob 4.12: Seja $x(t)$ a distância da mulher até o muro e $s(t)$ o comprimento da sombra no muro. Considere a reta saindo do refletor, passando pela cabeça da mulher até encontrar o muro. Igualando $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ do intervalo 0 até x e de x até 40 obtemos que

$$\frac{1,80 - s(t)}{x} = \frac{3 - 1,80}{40 - x(t)} = \frac{1,2}{40 - x(t)}.$$

Logo, $(1,80 - s(t))(40 - x(t)) = 1,2x(t)$. Logo quando $x(t) = 20$ (meio caminho), $s(t) = 3/5$. Derivando obtemos que

$$(-s')(40 - x) + (1,80 - s)(-x') = 1,2x'.$$

Substituindo $x = 20, s = 3/5, x' = -4$ (é negativa pois x diminui quando caminhamos na direção do muro) obtemos que $s' = \dfrac{12}{25} = 0,48m/s$.

Prob 4.13: Colocando a origem na casa do pescador e chamando de x a posição na margem do rio, temos que a distância entre o barco e a casa é $d(x) = \sqrt{x^2+9}$. Assim, $d' = (xx')/\sqrt{x^2+9}$. Note que no instante em que a distância é 5 entre barco-casa, $|x| = 4$ (triângulo retângulo 3,4,5). Orientando a posição para que fique negativa antes da casa, $x' = 10$ e, em (a) $x = -4$ e em (b) $x = 4$. Substituindo obtemos que a velocidade é $8Km/h$, com sinal negativo em (a) e positivo em (b).

Prob 4.14: (a) Seja $a(r) = \pi r^2$ a área do círculo. Então $a'(r) = 2\pi r$. Assim $f(t) = a(r(t))$ é a variação da área em função do tempo e $f'(t) = a'(r(t))r'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$. Logo se $r'(t) = k$, $f'(t) = 2k\pi r(t)$.

(b) Seja $V(x) = x^3$ o volume do cubo. Então $V'(x) = 3x^2$. Assim, $f(t) = V(x(t))$ é a variação do volume em função do tempo e $f'(t) = V'(x(t))x'(t) = 3x^2(t)x'(t)$. Logo se $x'(t) = k$, $f'(t) = 3kx^2(t) = k/2(6x^2(t))$, onde $6x^2(t)$ é a área de superfície.

(c) Aqui $V(r) = kr^3$ ($k = 4/3\pi$). Assim $V'(r) = 3kr^2$. Assim, $f(t) = V(x(t))$ é a variação do volume em função do tempo e $f'(t) =$

$V'(r(t))r'(t) = 3kr^2(t)r'(t)$. Suponha que $f'(t) = C4\pi r^2(t)$. Então, $C4\pi r^2(t) = 3kr^2(t)r'(t)$. Logo, $r'(t) = \dfrac{C4\pi}{3k}$, uma constante.

Prob 4.15: Seja $B(t)$ a coordenada y do vértice B. Pelos dados do problema, $B(t) = 1 + 2t$. Precisamos calcular a altura $h = BC$ do triângulo. Como C está na parábola, dada coordenada y, $x(y) = \sqrt{y-1}$. Assim $h(t) = x(B(t)) = \sqrt{2t}$. Logo a área $a(t) = (1+2t)\sqrt{2t}/2$. Assim $a'(t) = \sqrt{2t} + \dfrac{2t+1}{2\sqrt{2t}}$. Calculando $a'(8)$ obtemos: $49/8\text{cm}^2/\text{s}$.

A.4.5 Desafios p.130

Des 4.1: Para todos a resposta é k.

Des 4.2: Calcule a série de Taylor de segunda ordem em $x = 1$. Como $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$, $f'(1) = -2$. Como $f''(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$, $f''(1) = 4$. Assim, como a série de Taylor de $f(x)$ de ordem 2 é $f(1) + f'(1)h + f''(1)h/2$, obtemos $p(h) = -1-2(h-1)-2(h-1)^2 = -2h^2+2h-1$. Plote com algum software os gráficos de f e do polinômio p.

Des 4.3: (b) $f^k(x) = \dfrac{k!(-1)^k}{2i}\left(\dfrac{1}{(x-i)^{k+1}} - \dfrac{1}{(x+i)^{k+1}}\right)$. (c) Use (b) e obtenha: $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9$. (d) Como $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, substitua $x = 1$ na série de Taylor.

Des 4.5: O quadrado da distância entre o ponto $(s, f(s))$ e (a, b) é $d(s) = (s-a)^2 + (f(s)-b)^2$. Assim o mínimo será no ponto onde $f'(s_0) = 0 = 2(s_0-a) + 2(f(s_0)-b)f'(s_0)$, isto é quando $f(s_0) - b = -1/f'(s_0)(s_0-a)$. Como $f'(s_0)$ é o coeficiente da reta tangente no ponto $(s_0, f(s_0))$, $-1/f'(s_0)$ é o coeficiente da reta normal neste ponto. Assim obteremos a identidade $f(s_0) - b = -1/f'(s_0)(s_0-a)$ se, e somente se, (a, b) pertencer a reta normal neste ponto. Portanto o ponto mais perto de (a, b) no gráfico de f é o ponto onde a reta normal intercepta (a, b).

Des 4.6: Queremos minimizar a distância ao quadrado: $f(x) = (x-x_0)^2 + (y(x)-y_0)^2$, onde $y(x)$ é definida implicitamente por $ax + by(x) + c = 0$. Derivando implicitamente, $a + by'(x) = 0$. Como $f'(x) = 2(x-x_0) + 2(y(x)-y_0)y'(x)$, vamos obter $w \in \mathbb{R}$ tal que $f'(w) = 0$. Resolvendo: $(w-x_0) + (y(w)-y_0)y'(w) = 0$. Como $y' = -a/b$ e $y(x) = -(ax+c)/b$, temos que resolver. $(w-x_0) + (-(ax+x)/b - y_0)(-a/b) = 0$. Com o Maxima obtemos que:

$$w = \frac{-aby_0 + b^2x_0 - ac}{b^2 + a^2}.$$

Como $(w-x_0) + (y(w)-y_0)y'(w) = 0$, $(y(w) - y_0)y'(w) = -(w-x_0)$ e $y' = -a/b$,

$$(y(w) - y_0)^2(w-x_0)^2(a^2/b^2).$$

Logo,

$$f(w) = (w-x_0)^2(1 + a^2/b^2).$$

Agora com o Maxima obtemos que

$$f(w) = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Des 4.7: Soma das áreas dos trapézios é $(1 + 1/x)/2(x-1) + (1/x + 1/a)/2(a-x)$. Note que esta área é maior que $\log a$. Assim queremos minimizar $f(x) = \frac{(a-1)\,x^2 + a^2 - a}{2\,a\,x} - \log a$. Calculando $f'(x) = \frac{(a-1)\,x^2 - a^2 + a}{2\,a\,x^2}$. Logo $f'(x_0) = 0$ e $x_0 > 0$ se $x_0 = \sqrt{a}$.

Des 4.8: (a) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cone inscrito na esfera. Área lateral do cone é $A = \pi r l$, onde l é o comprimento da lateral do cone, que por Pitágoras satisfaz $l^2 = h^2 + r^2$. Maximizar A é o mesmo que maximizar $A^2 = \pi^2 r^2 l^2 = \pi^2 r^2(h^2 + r^2)$.

Ligando-se o centro da esfera até um dos pontos do círculo da base do cone observamos o triângulo retângulo com hipotenusa R e catetos r e $h - R$. Logo, por Pitágoras, $(h-R)^2 + r^2 = R^2$, Assim, $r^2 = 2hR - h^2$.

Assim queremos maximizar $A^2(h) = \pi^2(2hR - h^2)2hR = 2\pi^2 Rh^2(2R - h)$ para $h \in [0, 2R]$.

Resolução: $A^2(h)$ vale zero nos extremos do intervalo. A derivada de $A^2(x)$ em relação a x é $2\pi^2 Rh(4R - 3h)$. Assim os pontos críticos são $h = 0$ e $h = 4R/3$. Logo o máximo é em $h = 4R/3$, o mesmo resultado que obtemos se maximizarmos o volume ao invés da área.

(b) **Modelagem**: Seja r o raio e h a altura do cilindro inscrito no cone. A área do cilindro é $A = 4\pi r^2 + 2\pi rh$. Como é função de duas variáveis, devemos eliminar uma delas. Note que cortando o cone temos uma semelhança de triângulos: a altura H do cone está para R assim como $H-h$ está para r. Assim, $\dfrac{H}{R}=\dfrac{H-h}{r}$. Logo, $h=H(1-r/R)$. Logo queremos maximizar $A(r)=4\pi r^2+2\pi rH(1-r/R)$ para $r\in[0,\,R]$.

Resolução: Note que $A(0)=0$ e que $A(R)=4\pi R^2$ é candidato a máximo. Como $A'(r)=2\pi/R(HR-r(2H-4R))$, o único ponto crítico é $r_0=\dfrac{HR}{2H-4R}$.

Agora pode-se provar que $r_0\in[0,\,R]$ se, e somente se, $H\geq 4R$. Neste caso o máximo será em r_0 e $A(r_0)=\dfrac{\pi H^2R}{2H-4R}$ (calculei com Maxima, não precisa calcular).

Por outro lado, se $H<4R$ então $r_0\notin[0,\,R]$ e o máximo será em $r=R$, com área igual a $A(R)=4\pi R^2$.

Des 4.9: **Modelagem**: Suponha que o raio do círculo é 1. Colocando a origem no centro do círculo queremos partir de $\theta=0$ chegar em $\theta=\pi$. Devemos nadar em linha reta de $\theta=0$ até φ e depois correr na beira do lago até $\theta=\pi$. O percurso nadando possui comprimento igual a distância entre $(\cos 0,\operatorname{sen} 0)=(1,0)$ e $(\cos\varphi,\operatorname{sen}\varphi)$. Assim distância de nado ao quadrado: $(\cos\varphi-1)^2+(\operatorname{sen}\varphi)^2$. A distância correndo é o arco de círculo de ângulo $\pi-\varphi$. Colocando como velocidade 1 e 2 para nadar e correr respectivamente, o tempo $t(\varphi)=\sqrt{(\cos\varphi-1)^2+(\operatorname{sen}\varphi)^2}+(\pi-\varphi)/2$. Note que $\varphi\in[0,\pi]$.

Resolução: $t'(x)=-\frac{\sqrt{2-2\,\cos(x)}-2\operatorname{sen}(x)}{2\,\sqrt{2-2\cos(x)}}$. Assim queremos determinar x_0 tal que $\sqrt{2-2\cos x_0}=2\operatorname{sen}x_0$. Assim, $x_0=0$ ou $x_0=2\pi/3$. Comparando $t(0)=\pi/2\approx 1.57$, $t(\pi)=2$ e $t(2\pi/3)=\pi/6+\sqrt{3}\approx 2.25$. Assim o melhor é correr diretamente para o outro lado do lago e levar tempo $t(0)$.

Des 4.10: Queremos que o círculo $(x-a)^2+(y(x)-b)^2=r^2$ oscule a curva. Derivando implicitamente obtemos que $(x-a)+(y-b)y'=0$ e $1+(y-b)y''+(y')^2=0$. Para que o círculo oscule, quando $x=c$: $y=\eta_0,y'=\eta_1,y''=\eta_2$. Temos que determinar a,b,r tais que:

$$\begin{cases}(c-a)^2+(\eta_0-b)^2=r^2,\\ (c-a)+(\eta_0-b)\eta_1=0,\\ 1+(\eta_0-b)\eta_2+(\eta_1)^2=0.\end{cases}$$

Resolvendo, obtemos r (se quiser a e b também). Veja [Ha, p.299] e [Co, p.333 e p.283].

Des 4.11: É fácil provar que $g(x)\to\infty$ quando $x\to\pm\infty$. Como $g(x)\geq 0$, o problema tem mínimo global. Pela linearidade entre um ponto e outro, o mínimo será em um dos pontos. Se n é impar, o mínimo ocorrerá no ponto do meio, se n for par a função será constante entre os dois pontos do meio.

Des 4.12: A derivada será a soma de termos do tipo $\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^k}$, com $k\in\mathbb{N}$. Por LH cada um dos termos tem limite igual a zero.

Des 4.13: Seguindo a dica, teremos que provar que $1\leq\dfrac{z}{p}+\dfrac{1}{qz^{q-1}}$ para todo $z>0$. Segue determinando mínimo do lado direito (que é 1).

Des 4.14: Uma solução é parametrizar a circunferência por $x=\cos(at)$, $y=\operatorname{sen}(at)$ de modo que a velocidade seja de $0,1$. O módulo da velocidade é $\sqrt{(x')^2+(y')^2}=|a|$. Assim tome $a=-0,1$ para que $h=y$ (pois quando t aumenta h esta diminuindo). Assim $y'=a\cos(at_0)$. Como $\operatorname{sen}(at_0)=4$, $\cos(at_0)=-3$ (Pitágoras). Assim $h'=(-0,1)\cdot -3=0,3$m/s.

A.5 Integral

A.5.1 Exer. de Fixação p.160

Fix 5.1: (a) Falso. A função pode ser positiva num intervalo e negativo em outro de modo que as áreas se cancelam. Exemplo $\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}x\,dx=0$ mas $\operatorname{sen}(x)$ não é zero para todo x.

(b) Verdadeiro, pelo Lema 5.3 da p.135 (monotonicidade da integral).

(c) Falso. Podemos mudar a integral num número finito que o valor da integral será mantido.

Fix 5.2: (a) Pela Definição 5.2 da p.134,

$$\int_2^{-1}f(x)\,dx=-\int_{-1}^2 f(x)\,dx=-5.$$

(b) Utilizando a linearidade, $5+2(-3)=5-6=-1$.

(c) Pela Definição 5.2 da p.134, a integral é 0 (mesmos limites de integração).

(d) Pelo Lema 5.3 da p.135, item (c),

$$\int_{-1}^2(\cdots)=\int_{-1}^0(\cdots)+\int_0^2(\cdots).$$

Assim,

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^2 f(x)\,dx-\int_{-1}^0 f(x)\,dx=$$
$$=5-7=-2.$$

(e) Note que $g(t)$ é constante na integral em ds. Assim,

$$\int_{-1}^{0} f(s)g(t)\,ds = g(t)\int_{-1}^{0} f(s)\,ds = g(t)7.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{0} f(s)g(t)\,ds\right)\,dt = \int_{-1}^{2} (g(t)7)\,dt = (-3)7 = -21.$$

(f) Mudar a função em um único ponto **não** altera o valor da integral. Assim $\int_{-1}^{2} h(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 5$.

Fix 5.3: (a) $F(0)=0$, $F(1)=2$ (área do retângulo), $F(2)=F(1)+1=3$, $F(3)=F(2)-1/2=5/2$.

(b) F vai crescer onde f é positiva, pois a área vai aumentar. Assim, F cresce em $(0,2)$ e depois de $x=5$ e decresce em $(2,5)$.

(c) Máximo local em $x=2$ pois estava crescendo e passa a decrescer e mínimo local em $x=5$ pois estava decrescendo e passa a crescer.

Fix 5.4: O aluno X aplicou de forma incorreta o TFC pois o integrando não é contínuo em $[-2,2]$ (a função não está definida em $x=0$). O aluno Y está quase correto. Como a função não está definida trata-se de uma integral imprópria, que deveria ser escrita como soma de integrais: $\int_{-2}^{0} + \int_{0}^{2}$. Ambas divergem para ∞.

Fix 5.5: (a) $h(2) = \int_{2}^{2}(\ldots) = 0$.

(b) Pelo TFC, $h'(x) = \dfrac{(5-x)^5}{x^4+6}$. Assim o sinal de h' é igual ao sinal de $5-x$. Logo $h'(x) > 0$ (e h cresce) se $x<5$ e h decresce para $x>5$.

(c) somente em $x=5$ a derivada é zero. Como h' é positiva antes e negativa depois, $x=5$ é máximo local.

Fix 5.6: Pelo Corolário 5.5 da p.136,

$$\int_{-1}^{1} h(s)\,ds = g(1)-g(-1) = \\ = (Ke+B-C)-(Ke^{-1}-B-C) = \\ = K(e-e^{-1})+2B.$$

Fix 5.7: (a) a primitiva é $x^4/2 - x^3 + 5x$. O resultado é $9/2$.

(b) No intervalo $[0,1]$, y^2-1 é negativo. Assim, $|y^2-1| = 1-y^2$. Logo, a primitiva é $y - y^3/3$. O resultado é $2/3$.

(c) Note que a integral é em t. Logo, x é constante nesta integral. Assim,

$$\int (3x + e^t - 7x\,\mathrm{sen}\,t)\,dt = 3xt + e^t + 7x\cos t.$$

Fix 5.8: Todos integraram corretamente. Primitivas podem diferir por uma constante. Note que:

$$\frac{-\cos^2 x}{2} = \frac{\mathrm{sen}^2 x - 1}{2} = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + C,$$

$$-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x}{4} = \\ = -\frac{1-2\mathrm{sen}^2 x}{4} = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + C.$$

Fix 5.9:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} e^{-s^2}\,ds = \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{5} f(s)\,ds.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\log(5-x^2)} = \lim_{k\to 2^-}\int_{0}^{k} \frac{dx}{\log(5-x^2)}.$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k} \frac{dy}{1+y^4}.$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^{10}-1} = \lim_{k\to 1^+}\int_{k}^{2} \frac{dx}{x^{10}-1}.$

Fix 5.10: (a) Tome $x=t/c$. Logo $dx = dt/c$. Logo, $dt = c\,dx$. Assim, quando $t=ac$, $x=a$ e quando $t=bc$, $x=b$.

(b) Tome $u=x-c$. Logo $du=dx$. Assim, quando $x=a+c$, $u=a$ e quando $x=b+c$, $u=b$.

Fix 5.11: (a) Tome $u = K-3x$. Então $du = -3dx$. Assim devemos integrar $\int \sqrt[4]{u}(-du/3) = -4/15u^{5/4}$. Logo a integral é $-4/15(K-3x)^{5/4}$.

(b) Tome $u=x^3$. Então $du = 3x^2dx$. Assim devemos integrar $\int \cos u\,du = \mathrm{sen}\,u = \mathrm{sen}(x^3)$.

(c) Tome $u=\log t$. Então $du = dt/t$. Assim devemos integrar $\int u^2du = u^3/3 = \log^3 t/3$.

(d) Tome $u = 3-2x^2$. Então, $du = -4x\,dx$. Assim devemos integrar

$$\int \sqrt{u}\,(-du/4) = -\frac{u^{3/2}}{6} = -\frac{(3-2x^2)^{3/2}}{6}.$$

(e) Tome $u=\cos\theta$. Então, $du = -\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$. Assim devemos integrar

$$\int -\frac{du}{\sqrt{u}} = -2\sqrt{u} = -2\sqrt{\cos\theta}.$$

(f) Tome $u = 5\operatorname{sen} x$. Então, $du = 5\cos x\,dx$. Assim devemos integrar

$$\int e^u\,(du/5) = \frac{e^u}{5} = \frac{e^{5\operatorname{sen} x}}{5}.$$

Fix 5.12: (a) Tome $u = \log x$ e $dv = x$. Assim, $du = dx/x$ e $v = x^2/2$. Logo,

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}.$$

Esta última integral fica $\displaystyle\int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}$. Logo, obtemos que

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

(b) (Veja integral de arcsen no Exemplo 5.18 da p.148). Tomando $u = \arctan x$ e $dv = 1\cdot dx$, $du = \dfrac{dx}{x^2+1}$ e $v = x$. Logo,

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Agora vamos resolver a integral tomando $z = x^2+1$, $dz = 2x\,dx$. Logo,

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dz}{2z} = \frac{\log z}{2} = \frac{\log(x^2+1)}{2}.$$

Juntando tudo obtemos,

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{\log(x^2+1)}{2}.$$

Fix 5.13: Na integração por partes sem limites de integração estamos dizendo que a primitiva de $1/x$ é uma constante (1) mais a primitiva de $1/x$. Se colocarmos limites de integração (experimente!) vamos obter que o termo 1 vai virar 0.

Fix 5.14: (a) Tome $u = 3-2x$. Assim $du = -2dx$. Logo,

$$\int (3-2x)^4\,dx = \int u^4(-\frac{du}{2}) = -\frac{u^5}{10} = $$
$$= -\frac{(3-2x)^5}{10}.$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_1^2 (3-2x)^4\,dx = -\frac{(3-2x)^5}{10}\bigg|_1^2 =$$
$$= -\frac{(3-2(2))^5}{10} + \frac{(3-2(1))^5}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

(b) Tome $u = -x/4$. Assim $du = -dx/4$. Logo,

$$\int e^u(-4)\,du = -4e^u = -4e^{-x/4}.$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_{\log 3}^{\infty} e^{-x/4}\,dx = -4e^{-x/4}|_{\log 3}^{\infty} =$$
$$= 4(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} - e^{-\infty/4}) = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}.$$

(c) A primitiva é $-\dfrac{\cos(2\theta)}{2}$. Logo,

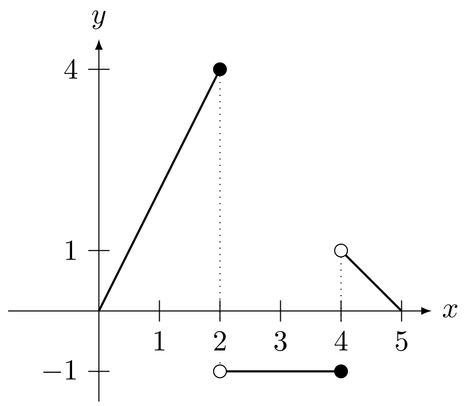
$$\int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta = -\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos(\pi/2)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(d) A primitiva é $-\dfrac{1}{2s^2}$. Logo a integral vale

$$\lim_{s\to\infty} -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A.5.2 Problemas p.162

Prob 5.1: Primeiro esboce o gráfico:



Agora calcule as integrais determinando as áreas com sinal.

(a) Área do triângulo igual a 4 menos a área do quadrado igual a 1. Logo a integral é $4-1=3$.

(b) Área do retângulo (com sinal negativo): -2.

(c) Área do trapézio igual a 3 menos a área do retângulo igual a 2 mais área do triângulo igual a $1/2$. Logo a integral é $3-2+1/2 = 3/2$.

Prob 5.2: (a) Basta aplicar a (monotonicidade da integral) do Lema e observar que $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b-a)$.

(b) Novamente, note que $\text{sen}(\text{qualquer coisa}) \geq -1$. Como $\log$ é crescente, seu menor valor em $[e, 5e]$ é $\log e = 1$. Assim a função é limitada inferiormente por $m = -4$. De forma análoga ao item (a), limitamos a integral por baixo por $m(6e - e) = 5em = -20e$.

Prob 5.3: Pelo Teorema 5.2 da p.135 (TFC), $F'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. O sinal de F' será determinado pelo numerador pois o denominador é sempre positivo.

(a) F é crescente em $x > 1$ e $x < -1$; F é decrescente em $(-1, 1)$.

(b) $F''(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$. Assim a concavidade é para cima em $x > 0$ e para baixo em $x < 0$.

(c) A derivada é zero em ± 1. Mas o mínimo local é em $x = 1$ pois a concavidade do gráfica é para cima neste ponto. O máximo local é em $x = -1$ onde a concavidade é para baixo.

Prob 5.4: Pelo Teorema 5.2 da p.135 (TFC) e pela regra da cadeia, $y'(x) = \dfrac{2x\cos(x^2 - \pi)}{2 + \text{sen}(x^2 - \pi)} + \cos(x^2)$. Logo, $y'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi} + 1$. Assim a equação da reta tangente é $y - \log(2) = (\sqrt{\pi} + 1)(x - \sqrt{\pi})$ ou $y = \sqrt{\pi}x + \log(2) - \pi$.

Prob 5.5: (a) Defina

$$H(y) = \int_1^y e^{t^3}\,dt \text{ e } G(k) = \int_4^k \cos(1 + s^2)\,ds.$$

Agora pelo TFC, $H'(y) = e^{y^3}$ e $G'(k) = \cos(1 + k^2)$. Assim, como $f(y) = G(H(y))$, pela regra da cadeia, $f'(y) = G'(H(y))H'(y)$. Logo, $f'(1) = G'(H(1))H'(1)$. Como $H(1) = 0$, $f'(1) = \cos(1)e$.

(b) Defina $J(x) = \displaystyle\int_8^x \log(t^3 + 1)\,dt$. Assim, $g(y) = \displaystyle\int_y^5 J(x)\,dx = -\int_5^y J(x)\,dx$. Logo, pelo TFC, $g'(y) = -J(y) = -\displaystyle\int_8^y \log(t^3 + 1)\,dt$. Assim, $g'(8) = 0$.

Prob 5.6: (a) A primitiva é $\dfrac{x^{1-p}}{1-p}$. Logo a integral vale $\dfrac{1}{p-1} + \lim_{N\to\infty} \dfrac{N^{1-p}}{1-p}$. Para que o limite seja finito (na realidade será zero) o expoente de $1 - p$ deve ser negativo. Assim, $1 - p < 0$, o que implica que $1 < p$. Assim a integral será finita se $p > 1$ e valerá $\dfrac{1}{p-1}$.

(b) Novamente a primitiva é $\dfrac{x^{1-p}}{1-p}$. Logo a integral vale $\dfrac{1}{1-p} + \lim_{k\to 0} \dfrac{k^{1-p}}{1-p}$. Para que o limite seja finito (na realidade será zero) o expoente de $1 - p$ deve ser positivo. Assim, $1 - p > 0$, o que implica que $p < 1$. Assim a integral será finita se $0 < p < 1$ e valerá $\dfrac{1}{1-p}$.

Prob 5.7: (a) Substitua $u = \sqrt{k}$.
R: $2\,\text{sen}(\sqrt{k}) + C$.

(b) Substitua $u = 1 - 3\,x^2$.
R: $-\sqrt{1 - 3\,x^2} + C$

(c) Deverá ser feita a substituição $u = 3x + 1$. Depois uma integração por partes tomando $z = x$ e $dw = \text{sen}(u)$.

$$R: \frac{\text{sen}(3\,x + 1) - 3x\cos(3x + 1)}{9} + C.$$

(d) Tomando $u = \tan x$, obtemos $\int \log u\,du = u\log u - u$.
R: $\tan x \log(\tan x) - \tan x$

(e) Substitua $u = \sqrt{t}$. Depois obterá uma integral do tipo $\int u\,\text{sen}\,u\,du$, que deverá ser resolvida integrando por partes.
R: $2\,\text{sen}(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C$.

(f) Veja técnica do Exemplo 5.19 da p.149 (integrar por partes duas vezes seguidas).
R: $2/5\,e^{2\,x}\cos(x) + 1/5\,e^{2\,x}\,\text{sen}(x) + C$

(g) Tome $u = \log x$. Logo, $du = dx/x$. Como $x = e^u$, $dx = e^u\,du$. Portanto temos que integrar $\displaystyle\int e^u\,\text{sen}(u)\,du$. Veja técnica do Exemplo 5.19 da p.149 (integrar por partes duas vezes seguidas).

$$R: \frac{x\ (\text{sen}\,(\log\,(x)) - \cos\,(\log\,(x)))}{2} + C$$

(h) Substitua $u = 3\sqrt{s}$. Depois obterá uma integral do tipo $\int ue^u\,du$, que deverá ser resolvida integrando por partes.
R: $\dfrac{2\ (3\,\sqrt{s} - 1)\ e^{3\,\sqrt{s}}}{9} + C$.

(i) Substitua $u = e^x$. Vai obter $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u$.
R: $\arctan(e^x) + C$.

Prob 5.8: (a) Primitiva: $-\dfrac{e^{-x^2}}{2}$. R: $\dfrac{1 - 1/e}{2}$.

(b) Primitiva: $-\dfrac{(3s+1)e^{-3s}}{9}$. R: $\dfrac{1 - 4e^{-3}}{9}$.

(c) Primitiva: $-\dfrac{1}{2(\log x)^2}$. R: $1/2$.

(d) Primitiva: $-2\,se^{-1/2\,s} - 4\,e^{-1/2\,s}$; R: 4.

(e) Primitiva: $\dfrac{2(e^x+1)^{3/2}}{3}$. R: $(16-4\sqrt{2})/3$.

(f) Primitiva: $\dfrac{\log(1+x^2)}{2}$. R: $\log(2)/2$.

(g) Primitiva: $-\dfrac{2(1+1/x)^{3/2}}{3}$. R: $\dfrac{37}{24}\sqrt{2}$.

Prob 5.9: (a) Separe na integral de 0 até 2 de $x^2(2-x)$ e de 2 até 4 de $x^2(x-2)$. R: 24.

(b) Separe na integral de $1/2$ até 1 de $-\log s$ e de 1 até 2 de $\log s$. R: $(3\log(2)-1)/2$.

(c) Note que $e^y - 1 > 0$ se $y > 0$. Logo $e^{s-1} - 1 > 0$ se $s - 1 > 0$ e caso contrário será negativo. Assim calcule -2 até 1 $\displaystyle\int_{-2}^{1} 1-e^{s-1}\,ds$, cuja primitiva é $e^{s-1} - s$ e some com $\displaystyle\int_1^2 e^{s-1} - 1\,ds$, cuja primitiva é $s - e^{s-1} - s$. R: $e + e^{-3}$.

Prob 5.10: (a) Integrando obtemos que $y(x) = \dfrac{4x^{3/2}+6\sqrt{x}}{3} + C$. Como queremos que $y(1) = 10/3 + C = 0$, $C = -10/3$. Assim, $y(x) = \dfrac{4x^{3/2}+6\sqrt{x}}{3} - \dfrac{10}{3}$.

(b) Substitua $u = x^2 + 1$. Vamos obter $y(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{2} + C$. Como queremos que $y(1) = \dfrac{e^2}{2} + C = e^2$, $C = \dfrac{e^2}{2}$. Assim, $y(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{2} + \dfrac{e^2}{2}$.

Prob 5.11: (a) A primitiva é $\dfrac{4x^{3/4}}{3}$. R: $32/3$.

(b) Tome $u = \log x$ e faça a substituição. A primitiva é $-\dfrac{1}{2\log^2 x}$. R. $1/2$

(c) Tome $u = 3 - 2e^x$ e faça a substituição. A primitiva é $-\dfrac{3-2e^x}{2}$. R: $\dfrac{\log 3}{2}$.

Prob 5.12: (a) Note que trata-se de um limite do tipo 0 vezes infinito. Assim, escrevendo como o quociente da integral por e^{x^2} podemos aplicar L'Hospital. Derivando a integral com o TFC obtemos que o limite é igual ao limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^9+3)}{2xe^{x^2}}.$$

Colocando $\dfrac{1}{2x}$ em evidência e aplicando L'Hospital mais uma vez vamos obter o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^8}{(x^9+3)2xe^{x^2}}.$$

Agora como exponencial vai mais rápido para infinito que polinômio (ou aplicando L'Hospital umas 8 vezes mais), concluímos que o limite vale 0.

(b) Derivando os dois lados, utilizando o TFC, obtemos que $e^{-x}f'(x) = 3$ ou $f'(x) = 3e^x$. Assim, integrando, obtemos que $f(x) = 3e^x + C$. Como $f(0) = 1 = 3 + C$, $C = -2$. Logo, $f(x) = 3e^x - 2$.

Prob 5.13: Como seno é limitado, a integral vale menos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^7+1}\,dx$. Como $x^7+1 > x^2+1$ para $x > 1$, a integral vale menos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi/4$, um valor finito.

A.5.3 Extras p.163

Ext 5.1: Aplique LH e o TFC para transformar em $\dfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{1} = K$.

R: O limite é K.

Ext 5.2: Pelo TFC, $\mathrm{Si}'(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x}$. A derivada é zero em $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}^*$ (sem o zero, pois pelo limite fundamental, $\mathrm{Si}'(0) = 1$). Para saber se é máximo ou mínimo temos que ver o sinal da derivada antes e depois destes pontos. Para $x > 0$ vamos ter os máximos locais em $x = 2k\pi + \pi$ para $k \in \mathbb{N}$. Para $x < 0$ vamos ter os máximos locais em $x = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{N}$.

Ext 5.3: (a) Pelo TFC, $f'(x) = \log(e^x + x - 1)e^{x^2}$. Logo, $f'(1) = e$. Como $f(1) = 0$ (pois $\displaystyle\int_1^1 (\cdots) = 0$), a reta tangente é $y = e(x-1)$.

(b) Pelo TFC, $h'(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$. Logo, $h'(2) = \dfrac{e^2}{5}$. Como $h(2) = 7$, a reta tangente é $y - 7 = \dfrac{e^2}{5}(x-2)$.

Ext 5.4: Sabemos que a aceleração $a(t)$ é igual a derivada da velocidade $v(t)$ que é igual a derivada da posição $x(t)$. Assim, $v' = a$, $x' = v$. Como $v'(t) = a(t) = A\omega^2\cos(\omega t)$,

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int A\omega^2\cos(\omega t)\,dt = \\ = A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + C.$$

Como $v(0) = 0 = A\omega\,\mathrm{sen}(\omega 0) + C = C$, $C = 0$.

Como $x'(t) = v(t)$,

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int A\omega \operatorname{sen}(\omega t)\,dt =$$
$$= -A\cos(\omega t) + C.$$

Como $x(0) = -A\cos(\omega 0) + C = 0 = -A + C$. Assim, $C = A$. Logo, $x(t) = -A\cos(\omega t) + A$.

Ext 5.5: (a) Seja $h(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2}\,dt$. Note que $f(s) = h(s^2) - h(s)$ (porque?). Pelo TFC, $h'(y) = \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y^2}$. Assim, pela regra da cadeia. $f'(s) = 2sh'(s^2) - h'(s) = \dfrac{2s\operatorname{sen}(s^2)}{s^4} - \dfrac{\operatorname{sen}(s^2)}{s^4}$.

(b) Definindo $h(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, queremos determinar a derivada de $g(x) = h(e^{2x})$. Pelo Teorema 5.2 da p.135, $h'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Utilizando a regra da cadeia, a derivada de $g(x) = h(e^{2x})$ é $g'(x) = h'(e^{2x})(e^{2x})' = \operatorname{sen}((e^{2x})^2)2e^{2x}$. Logo, $g'(x) = \operatorname{sen}(e^{4x})2e^{2x}$.

Ext 5.6: Tome $u = 2x+1$. Então $du = 2dx$. Logo quando $x = 0$, $u = 1$; quando $x = -1$, $u = -1$. Logo, $\displaystyle\int_{-1}^0 f(2x+1)\,dx = \int_{-1}^1 f(u)\,du/2$. Agora, pelas propriedades da integral,

$$\int_{-1}^1 = \int_{-1}^3 - \int_1^3 .$$

Assim $\displaystyle\int_{-1}^1 f(u)\,du/2 = (1/2)(7-3) = 4/2 = 2$.

Ext 5.7: (a) Integrando obtemos que $y(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + 3x + C$. Como $y(\pi) = 15\pi + C = 5\pi$, $C = -10\pi$. Logo, $y(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + 3x - 10\pi$.

(b) Integrando obtemos que $y(x) = \dfrac{\log(2x+1)}{2} + C$. Como $y(0) = 0 + C = 3$, $C = -3$. Logo, $y(x) = \dfrac{\log(2x+1)}{2} - 3$.

Ext 5.8: Temos que $y'(x) = \sqrt{x+1}$ e que $y(0) = 1$. Integrando obtemos que $y(x) = \dfrac{2(x+1)^{3/2}}{3} + C$. Como $y(0) = 2/3 + C = 1$, $C = 1/3$. Logo, $y(x) = \dfrac{2(x+1)^{3/2}}{3} + 1/3$.

Ext 5.9: (a) Como $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, separe em três integrais: $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\,dx = 5/6$, $\displaystyle\int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx = 1/6$ e $\displaystyle\int_2^4 (x^2-3x+2)\,dx = 14/3$. R: $5/6 + 1/6 + 14/3 = 17/3$.

(b) Separe na integral de $\displaystyle\int_{-3}^0 \sqrt{1-x}\,dx = 14/3$ e $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = 14/3$. R: $14/3 + 14/3 = 28/3$.

(c) Como $x^2 - 2x = x(x-2)$, separe na integral de $\displaystyle\int_{-2}^0 x(x^2-2x)\,dx = -28/3$ mais $\displaystyle\int_0^2 x(2x-x^2) = 4/3dx$ R: $-28/3 + 4/3 = -8$.

Ext 5.10: (a) $1/3\,x^3\log(x) - 1/9\,x^3 + C$.

(b) $2\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}\log x}{3} - \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{9}\right) + C$.

(c) $\dfrac{x^2(2(\log x)^2 - 2\log x + 1)}{4} + C$.

(d) Faça a substituição $u = \cos x + \operatorname{sen} x$, $du = (-\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$.

R: $-\log(\operatorname{sen} x + \cos x)$

(e) $-\dfrac{1}{e^x+1} + C$.

(f) $\dfrac{e^{3\operatorname{sen}(x)+4}}{3} + C$.

(g) $\operatorname{sen}(e^3+3) + C$.

(h) Como $a^x = \exp(x\log a)$, por substituição, $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$.

Ext 5.11: (a) Primitiva $-e^{1/x}$. R: $e^2 - e$.

(b) Primitiva $\dfrac{(x^2-1)e^{x^2}}{2}$. R: $\log(2) - 1$.

(c) Primitiva $2\sqrt{x}(\log x - 2)$. R: $8\log(2) - 4$.

(d) Primitiva $\dfrac{2(\operatorname{sen}\theta)^{3/2}}{3}$. R: $2/3$.

(e) Primitiva $-\frac{2\,(1-y)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4\,(1-y)^{\frac{3}{2}}}{3} - 2\sqrt{1-y}$ R: $16/15$.

(f) Primitiva $-2\cos(\sqrt{x})$. R: -4.

(g) Primitiva $\log(e^x+4)$. R: $\log(7/6)$.

(h) Primitiva $\sqrt{t^2+1}$. R: $\sqrt{2} - 1$.

Ext 5.12: (a) A primitiva é $-\dfrac{1+\log x}{x}$ (integração por partes). R: 1.

(b) A primitiva é $\dfrac{p-1+\log x}{(1-p)x^{p-1}}$ (integração por partes). R: $1/(p-1)^2$.

(c) A primitiva é $\dfrac{1}{4-x}$. R: $\dfrac{1}{2}$.

(d) Por substituição $u = \sqrt{1-e^{-x}}$, $du = e^{-x}\,dx$. A primitiva é: $2\sqrt{1-e^{-x}}$. R: 2.

A.5.4 ⋆Problemas (Integração e Substituição Trigonométrica) p.165

Prob 5.1: (a) Pela técnica,

$$\cos x \cos x = 1/2(\cos 2x + 1).$$

Assim,

$$\cos^3 x = 1/2\cos x + 1/2\cos x\cos 2x =$$
$$= 1/2\cos x + 1/4(\cos 3x + \cos x) =$$
$$= 3/4\cos x + 1/4\cos 3x.$$

R: $3/4\,\mathrm{sen}\, x + 1/12\,\mathrm{sen}\, 3x + C$.

(b) Pela técnica, $\cos^2 3x = 1/2(\cos 6x + 1)$ e $\cos^2 3x\cos 5x = 1/2\cos 6x\cos 5x + 1/2\cos 5x$. Agora, $\cos 6x\cos 5x = 1/2(\cos 11x + \cos x)$. Logo, $\cos^2 3x\cos 5x = 1/4(\cos 11x + \cos x) + 1/2\cos 5x$.

R: $1/44\,\mathrm{sen}\, 11x + 1/4\,\mathrm{sen}\, x + 1/10\,\mathrm{sen}\, 5x + C$

(c) Pela técnica do texto, $\cos x\,\mathrm{sen}\, x = 1/2(\mathrm{sen}\, 2x + \mathrm{sen}\, 0) = 1/2\,\mathrm{sen}\, 2x$.

R: $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

Outra solução: Tome $u = \mathrm{sen}\, x$, $du = \cos x\, dx$. Assim a integral se transforma em $\displaystyle\int u\,du = \frac{u^2}{2}$.

R: $\dfrac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + C$.

Deixo o leitor verificar que as primitivas diferem por uma constante. Ainda outra resposta possível é: $\dfrac{-\cos^2 x}{2} + C$.

(d) Como $\mathrm{sen}^2 x = 1/2(1 - \cos 2x)$, $\mathrm{sen}^4 x = 1/4(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$. Também temos que $\cos^2 2x = 1/2(\cos 4x + 1)$. Assim, $\mathrm{sen}^4 x = -1/2\cos 2x + 1/8\cos 4x + 3/8$.

R: $-1/4\,\mathrm{sen}\, 2x + 1/32\,\mathrm{sen}\, 4x + 3/8x + C$

(e) Pela técnica, $\cos(4x)\,\mathrm{sen}(3x) = 1/2(\mathrm{sen}\, 7x - \mathrm{sen}\, x)$

R: $-1/14\cos 7x + 1/2\cos x + C$.

Prob 5.2: (a) Fazendo substituição $x = \mathrm{sen}\, t$, $dx = \cos t\, dt$ obtemos

$$\int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int \sec^2 t\, dt = \tan t.$$

Como $x = \mathrm{sen}\, t$, $\tan t = x/\sqrt{1 - x^2}$.

R: $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$.

(b) Fazendo substituição $x = \mathrm{sen}\, t$, $dx = \cos t\, dt$:

$$\int \frac{\mathrm{sen}^2 t\cos t\, dt}{\cos t} = \int \mathrm{sen}^2 t\, dt =$$
$$= \text{(integral trigonométrica) } \frac{t}{2} - \frac{\mathrm{sen}\, t\cos t}{2}.$$

Como $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$ e $t = \mathrm{arcsen}\, x$:

R: $\dfrac{\mathrm{arcsen}\, x}{2} - \dfrac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$.

(c) Completando o quadrado obtemos que $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$. Fazendo $u = x + 1$, $du = dx$ obtemos $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 + 1)^{3/2}}$. Fazendo $u = \tan t$, $du = \sec^2 t\, dt$. Assim, $(u^2 + 1)^{3/2} = \sec^3 t$. Substituindo na integral obtemos

$$\int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\, dt = \int \frac{1}{\sec t}\, dt = \int \cos\, dt = \mathrm{sen}\, t.$$

Como $u = \tan t$, $\mathrm{sen}\, t = u/\sqrt{u^2 + 1}$. Passando para x a resposta é $\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

(d) Tome $x = \sec t$. Então $dx = \sec t\tan t dt$ e $\sqrt{x^2 - 1} = \tan t$. Assim ficamos com $\displaystyle\int \tan^2 t\, dt = \int (\sec^2 t - 1)\, dt = \tan t - t$ (derivada de tangente é secante ao quadrado). Reescrevendo em x:

R: $\sqrt{x^2 - 1} - \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) + C$. Outras respostas: $\sqrt{x^2 - 1} - \mathrm{acos}(1/x)$ ou $\sqrt{x^2 - 1} - \mathrm{asec}(x)$.

(e) Tome $x = \sec t$. Então $dx = \sec t\tan t dt$ e $\sqrt{x^2 - 1} = \tan t$. Assim ficamos com $\displaystyle\int \frac{dt}{\sec t} = \int \cos t\, dt = \mathrm{sen}\, t$. Como $\cos t = 1/x$, $\mathrm{sen}\, t = \sqrt{x^2 - 1}/x$.

R: $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$.

(f) Fazendo $x = 5\tan t$, $dx = 5\sec^2 t\, dt$. Assim, $\sqrt{x^2 + 25} = 5\sec t$. Substituindo na integral obtemos:

$$\int \frac{5\sec^2 t\, dt}{25\tan^2 t\,(5\sec t)} = \int \frac{\sec t\, dt}{25\tan^2 t} = \int \frac{\cos t\, dt}{25\,\mathrm{sen}^2 t}.$$

Fazendo $u = \mathrm{sen}\, t$, $du = \cos t\, dt$ obtemos

$$\int \frac{\cos t\, dt}{25\,\mathrm{sen}^2 t} = \int \frac{du}{25u^2} = -\frac{1}{25u} = -\frac{1}{25\,\mathrm{sen}\, t}.$$

Como $\tan t = x/5$, $\mathrm{sen}\, t = x/\sqrt{x^2 + 25}$ e portanto:

R: $-\dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{25x} + C$.

Prob 5.3: (a) Fazendo substituição $x = 2\,\mathrm{sen}\, t$, $dx = 2\cos t\, dt$: $\displaystyle\int \frac{2\cos t\, dt}{2\cos t} = \int dt = t = \mathrm{arcsen}(x/2) + C$.

Poderia ser feita diretamente: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1 - (x/2)^2}}$. Tomando $y = x/2$ e sabendo que a derivada de $\operatorname{arcsen} y$ é $\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, obtemos $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen} y = \operatorname{arcsen}(x/2) + C$.

(b) Neste caso o mais fácil é fazer a substituição $u = 1-x^2$ e $du = -2x\,dx$, transformando em $\displaystyle -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2} + C$.

Por substituição trigonométrica, fazendo substituição $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\,dt$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{\cos t}\,dt = \int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Colocando os limites de integração obtemos

R: 1.

(c) Tome $x = \sec t$. Então $dx = \sec t \tan t dt$ e $\sqrt{x^2-1} = \tan t$. Obtemos $\displaystyle\int \sec t\,dt = $ $= \log|\sec t + \tan t|$ (problema Extra 5.14 da p.164). Trocando x por t:

R: $\log|x + \sqrt{x^2-1}|$.

(d) Fazendo substituição $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\,dt$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t}{\cos^3 t}\,dt = \int \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\cos^2 t}\,dt = = \int \frac{(1-\cos^2 t)\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\,dt.$$

Agora tome $u = \cos t$, $du = -\operatorname{sen} t\,dt$ e obtenha $\displaystyle\int \frac{u^2-1}{u^2}\,du = u + \frac{1}{u}$. Logo a integral vale $\cos t + \dfrac{1}{\cos t}$. Como $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ obtemos:

R: $\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

(e) Tomando $x = 4\operatorname{sen} u$, $\sqrt{16-x^2} = 4\cos u$, $dx = 4\cos u\,du$. Assim, após substituição obtemos a integral $16\displaystyle\int \cos^2 u\,du$ Por integral trigonométrica, sua primitiva é $4\operatorname{sen}(2u) + 8u$. Como $x = 4\operatorname{sen} u$, os limites de integração são $u = \pi/4$ ($x = 4\operatorname{sen}(\pi/4) = 2\sqrt{2}$) até $u = \pi/2$ ($x = 4\operatorname{sen}(\pi/2) = 4$). Calculando

$$16\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 u\,du = 4\operatorname{sen}(2u) + 8u\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\pi - 4.$$

R: $2\pi - 4$.

Prob 5.4: (a) Substituindo, separando um sen: $\displaystyle\int (1-u^2)^2 u^4(-du) = -u^9/9 + 2u^7/7 - u^5/5$. R: $-\cos^9 x/9 + 2\cos^7 x/7 - \cos^5 x/5 + C$. (c) $\operatorname{sen}^3 x/3 - \operatorname{sen}^5 x/5 + C$ e $\operatorname{sen}^5 x/5 - 2\operatorname{sen}^3 x/3 + \operatorname{sen} x + C$. (e) $\operatorname{sen}^4 x/4 - \operatorname{sen}^6 x/6 + C$ ou $-\cos^4 x/4 + \cos^6 x/6 + C$.

Prob 5.5: (a) $\sec^3 x/3 - 2\sec^5 x/5 + \sec^7 x/7 + C$. (b) Podemos reescrever a integral:

$$\int (\tan^2)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\,dx = = \int (\sec^2 - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x\,dx$$

Agora faça a mudança de variáveis $u = \sec x$ e obtenha $\displaystyle\int (u^2-1)^k u^{n-1} x\,du = P(u)$ para algum polinômio P. Assim, retomando a variável x obtemos a resposta. (c) $\tan^9 x/9 + 2\tan^7 x/7 + \tan^5 x/5 + C$. (e) De fato

$$\int (\tan^2)^k \sec^n x\,dx = \int (\sec^2 - 1)^k \sec^n x, dx = = \int P(\sec x)\,dx.$$

Mais explicitamente, $Q(y) = (y^2-1)^k y^n$.

A.5.5 ⋆Problemas (Integração de Funções Racionais) p.166

Prob 5.1: (a) Fatorando denominador: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Calculando coeficientes: $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{-1}{x+1}$. Primitiva: $-1/(x+1) + 1/(x-1)$. O resultado: $\log(5/3)$. R: $\log(5/3)$.

(b) Completando o quadrado e colocando em evidência constantes, vai aparecer uma integral do tipo $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$. Colocando os limites ($\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$) obtemos resposta $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4c-b^2}}$.

Prob 5.2: (a) Fatorando denominador: $x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7)$. Calculando coeficientes: $\dfrac{2x-3}{x^2-8x+7} = \dfrac{1/6}{x-1} + \dfrac{11/6}{x-7}$.

R: $1/6\log|x-1| + 11/6\log|x-7| + C$.

(b) Fatorando denominador: $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Calculando coeficientes: $\dfrac{2x-3}{x^3-x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{-1}{x-1}$.

R: $-\log|x-1| + \log|x| - 3/x + C$.

(c) Fatorando denominador: $x^3 + 4x = x(x^2+4)$. Calculando coeficientes: $\dfrac{x+4}{x^3+4x} = \dfrac{1-x}{x^2+4} + \dfrac{1}{x}$.

R: $1/2\arctan(x/2) + \log|x| - 1/2\log|x^2 + 4| + C$.

(d) Fatorando denominador: $x^2 + 8x + 7 = (x+1)(x+7)$. Calculando coeficientes:
$\dfrac{6}{x^2+8x+7} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-1}{x+7}$

R: $\log\left|\dfrac{x+1}{x+7}\right| + C$.

(e) Fatorando denominador: $x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$. Calculando coeficientes:
$\dfrac{x^2+4x-2}{x^4-4x^2} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1/2}{x^2} + \dfrac{3/8}{x-2} + \dfrac{5/8}{x+2}$.
R: $-\log|x| - 1/(2x) + 5/8\log|x-2| + 3/8\log|x+2| + C$.

(f) Calculando coeficientes:
$\dfrac{2x^2+x+2}{(x-1)(x^2+4)} = \dfrac{x+2}{x^2+4} + \dfrac{1}{x-1}$.
R: $1/2\log|x^2+4| + \arctan(x/2) + \log|x-1| + C$.

Prob 5.3: (a) $\dfrac{1}{b-a}\log\left(\dfrac{x-b}{x-a}\right)$.

(b) $\dfrac{\log(x-a) - \log(x)}{a^2} + \dfrac{1}{ax}$.

Prob 5.4: Defina $D = aB - bA$ e $X = ax^2 + 2bx + c$.

(a) $\dfrac{A}{2a}\log|X| + \dfrac{D}{2a\sqrt{\Delta}}\log\left|\dfrac{ax+b-\sqrt{\Delta}}{ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|$.

(b) $\dfrac{A}{2a}\log|X| + \dfrac{D}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\dfrac{ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$.

(c) $-\dfrac{D}{a(ax+b)} + \dfrac{A}{a}\log|ax+b|$.

Prob 5.5: Para detalhes ver [Co, p.228]. Note que $I_1 = \displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)} = \arctan y$.

Prob 5.6: Ver [Co] para (a)-(c).

(d) Aplicando (c) obtemos que $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{2}{(1+t^2)(1+(1-t^2)/(1+t^2))}\,dt = \int dt = t = \tan(x/2)$.

(e) Aplicando (c) obtemos que $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{\tan(x/2)+1}$.

(f) Aplicando (c) obtemos que $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dt}{t} = \log(\tan(x/2))$.

(g) Note que $\sec x \tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}$. Aplicando (c) obtemos que

$$\int \sec x \tan^2 x\,dx = \int \frac{8t^2}{(1-t^2)^3}\,dt$$

(veja no `Maxima` a resposta: são muitos termos!).

(h) Note que $\sec 2x\,\tan 3x = \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(2x)\cos(3x)}$. Agora podemos expandir os termos usando as fórmulas do seno/cosseno da soma. Por exemplo: $\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2 x\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$. De forma análoga (obtive no `Maxima` com `trigexpand(cos(2*x)*cos(3*x))`:

$$\cos(2x)\cos(3x) =$$
$$= 3\cos x \operatorname{sen}^4 x - 4\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^5 x.$$

Definindo $Q(c,s) = \dfrac{3c^2 s - s^3}{3cs^4 - 4c^3 s^2 + c^5}$ temos que

$$\int \sec 2x\,\tan 3x\,dx = \int Q(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx =$$
$$= \int Q\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

A.5.6 Desafios p.166

Des 5.1: (a) (i) $c \le a$ para todo $a \in A$ (c é uma cota inferior de A); (ii) Se h é cota inferior de A, $h \le c$ (c é a maior cota inferior). (b) 1 e 0; (c) $\sqrt{7}$ e $-\sqrt{7}$. (d) 3 e 2. (e) 1 e -1 (mas é bem difícil provar, basicamente $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x \mod 2\pi)$ e $x \mod 2\pi$ será **denso** em $[0, 2\pi]$. Veja em livro de análise real ([NC] por exemplo).

Des 5.2: Pelas propriedades da integral, $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(s)\,ds$. Como f é contínua, possui máximo e mínimo (TVE) num intervalo fechado contendo x, digamos M e m com $M > m > 0$ pois f é estritamente positiva. Assim, $|F(x+h) - F(x)| \le M|h|$. Quando $h \to 0$ obtemos que $F(x+h) \to F(x)$. Logo F é contínua em x. Do mesmo modo, para $h > 0$, $F(x+h) - F(x) > mh > 0$. Assim $F(x+h) > F(x)$.

Des 5.3: (a) Basta comparar áreas (veja no gráfico de $y = f(x)$ a integral da inversa.

(b) Tomando $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $g(y) = \operatorname{sen} y$, $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} s\,ds = x\operatorname{arcsen} x + \cos(\operatorname{arcsen} x) + af(a)$. Como $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$, a primitiva é $x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Tomando $f(x) = \log x$, $g(y) = e^y$, $\displaystyle\int \log s\,ds = x\log x - e^{\log x} + C = x\log x - x + C$.

Des 5.4: (a) Derivando, $x^3e^x = (p'(x)+p(x))e^x$. Cancelando e^x (que é $\neq 0$): $x^3 = p'(x) + p(x)$. Dai deduzimos que $p(x)$ tem grau 3. Vemos que $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Agora $p'(x) + p(x) = x^3+(3+a)x^2+(2a+b)x+b+c = x^3+0x^2+0x+0$. Assim $3 + a = 2a + b = b + c = 0$. Assim, $a = -3, b = 6, c = -6$. R: $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$. (b) Basta aplicar o TFC. Veja item (a) para o caso $n = 3$. (c) Vamos fazer explicitamente para $n = 2$. Derivando (TFC) obtemos $(\log x)^2 = q(\log x) + q'(\log x)$. Para ter a igualdade $q(y) = y^2+by+c$, $y^2 = y^2+by+c+(2y+b) = y^2 + (b+2)y + b + c$. Assim, $b = -2, c = 2$ e $q(y) = y^2 - 2y + 2$, e portanto $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = xq(\log x) = x((\log x)^2 - 2\log x + 2)$. (d) Pelo TFC deveríamos ter $e^{x^2} = (p'(x) + 2xp(x))e^{x^2}$. Assim $1 = p'(x)+2xp(x)$. Termine supondo grau de p igual a 3, 4, etc.

Des 5.5: Pelo TFC, $e^{ax}\operatorname{sen} bx = e^{ax}(A\operatorname{sen} bx - Bb\operatorname{sen} bx + B\cos bx + Ab\operatorname{sen} bx)$. Igualando os coeficientes que multiplicam $e^{ax}\operatorname{sen} bx$ de cada lado e que multiplicam $e^{ax}\cos bx$ obtemos o sistema (com incógnitas A, B):

$$\begin{bmatrix} 1 & -b \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como seu determinante é $1 + b^2 > 0$, a solução existe e é única.

Des 5.6: Veja na Internet artigo da Wikipedia: "Sophomore's dream".

Des 5.7: Dividimos em 2 integrais. A parte fácil é:
$\displaystyle\int_0^1 e^{-y^2}\,dy \le (1-0)e^{-0} = 1$. Agora para outra parte, se $y > 1$ então $e^{-y^2} < ye^{-y^2}$. Como podemos integrar explicitamente ye^{-y^2} em 1 até ∞, a integral converge.

Des 5.8: (b) Como $\operatorname{sen}(x)/x$ é uma função contínua perto de zero se for redefinida em zero, $\operatorname{sen}(x)/x$ é integrável em $[0, 1]$. Para outra parte, note que $|\cos(x)/x^2| \le 1/x^2$ e esta função é integrável em $[1, \infty]$.

Des 5.9: Pelo TFC, $f'(x) = f(x)$. Pela propriedade de f, $f(0) = 0$. Assim a solução é $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Des 5.10: Use l'Hospital para determinar $\displaystyle\lim_{y\to-1} f(y) = \ln(b) - \ln(a)$ ([Ap] p.309).

Des 5.12: Por contradição, se f não é nula, será diferente de zero em algum ponto $c \in [a, b]$. Sem perda de generalidade, suponha $f(c) > 0$. Por continuidade $f > 0$ em algum intervalo $[x, y]$ contendo c. Logo $\displaystyle\int_x^y f(s)\,ds > 0$. Contradição!

Des 5.15: Pense em representação polar (coordenadas r e θ) do número $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

R: $\displaystyle\frac{1}{r}\log\left|\tan\frac{x+\theta}{2}\right|$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

A.6 Aplicações da Integral

A.6.1 Exer. de Fixação p.188

Fix 6.1: (a) Uma função é a translação da outro por 2 unidades. Assim a área é igual a

$$\int_0^5 (e^x + 2 - e^x)\,dx = \int_0^5 2\,dx = 2\cdot 5 = 10.$$

(b) Está área é igual $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx = 2$.

Fix 6.2: (a) $\displaystyle\int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (f(x)-g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x)-f(x))\,dx$.

Fix 6.3: (a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \pi[f(x)]^2\,dx$.

(b) $\displaystyle\int_1^2 \pi[g(x)]^2\,dx - \int_1^2 \pi[f(x)]^2\,dx$.

(c) $\displaystyle\int_3^6 \pi[g^{-1}(y)]^2\,dy - \int_1^2 \pi[f^{-1}(y)]^2\,dy$.

Fix 6.4: $\displaystyle\int_{-2}^3 (g(y) - f(y))\,dy$.

Fix 6.5: Pelo Teorema 6.2 da p.175 o volume de Ω é $\displaystyle\int_{-2}^4 A(s)\,ds$.

Fix 6.6: Pela definição de média,

$$K = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx.$$

Pela monotonicidade da integral (Lema 5.3 da p.135), como $g(x) \le 5$,

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b 5\,dx = 5(b-a).$$

Assim, $K \le \dfrac{1}{b-a}5(b-a) = 5$. De forma análoga, pela monotonicidade da integral, como $g(x) \ge -4$,

$$\int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b -4\,dx = -4(b-a).$$

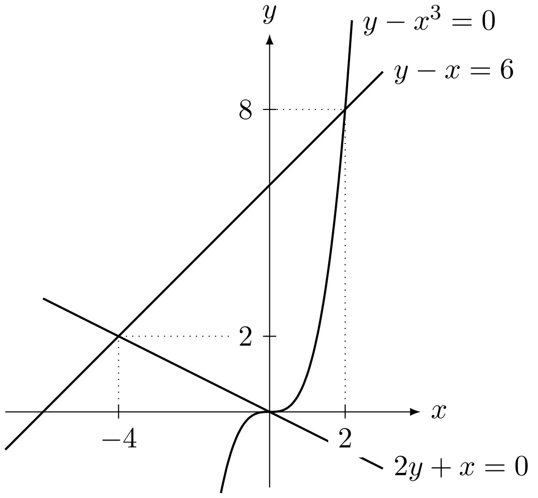
Assim, $K \geq \dfrac{1}{b-a}(-4)(b-a) = -4$.

A.6.2 Problemas p.189

Prob 6.1: (a) A interseção ocorre quando $y = x^2 = x - x^2$, ou seja, quando $2x^2 - x = x(2x-1) = 0$. Assim a interseção é em $x = 0$ e $x = 1/2$. Logo a área é igual a $\displaystyle\int_0^{1/2} (x - x^2 - x^2)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right|_0^{1/2} = \frac{1}{24}$

(b) A interseção ocorre é quando $\cos x = \operatorname{sen} x$, que ocorrerá dentro de um ciclo do seno ($[0, 2\pi]$) em $\pi/4$ e $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Assim a área é igual a $\displaystyle\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx = \sqrt{8}$.

Prob 6.2: (a) A interseção de $y = x^3 = x + 6$ é em $x = 2$ e $y = 8$. A interseção de $2y = x$ e $y = x + 6$ é em $(-4, 2)$. Assim o esboço é:

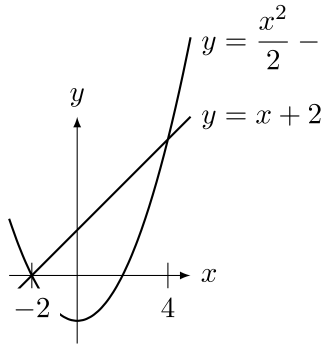


Assim a área é:

$$\int_{-4}^{0} ((x+6) - (-x/2))\,dx + \int_0^2 ((x+6) - (x^3))\,dx.$$

Como $\displaystyle\int_{-4}^{0} ((x+6)-(-x/2))\,dx = 12$ e $\displaystyle\int_0^2 ((x+6) - (x^3))\,dx = 10$, a área é 22.

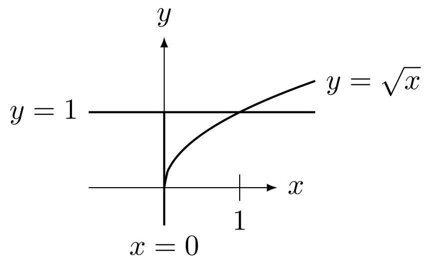
(b) Para facilitar, o primeiro passo é trocar x com y e resolver o problema: Calcule a região delimitada por por $x^2 = 2y + 4$ e por $x = y - 2$. Assim, $y = \dfrac{x^2}{2} - 2$ e $y = x + 2$. A interseção ocorrerá quando $y = \dfrac{x^2}{2} - 2 = x + 2$, isto é se $x = -2$ ou se $x = 4$. Assim a área é igual a $\displaystyle\int_{-2}^{4} ((x+2) - (x^2/2 - 2))\,dx = 18$.



Resolvendo o problema original ($y^2 = 2x + 4$ e $y = x - 2$) e integrando em x teríamos que escrever como soma de duas integrais (verifique):

$$\int_{-2}^{0} 2\sqrt{2x+4}\,dx + \int_0^6 (\sqrt{2x+4} - (x-2))\,dx =$$
$$= \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18.$$

(c) Fazendo o esboço observamos que a interseção ocorrerá em $x = 0$ e em $x = 1$. Assim a área é igual a $\displaystyle\int_0^1 (1 - \sqrt{x})\,dx = \frac{1}{3}$. Outra possibilidade é integrar em y. Como $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$. Assim, a área é $\displaystyle\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$.



Prob 6.3: Sua área será determinada por

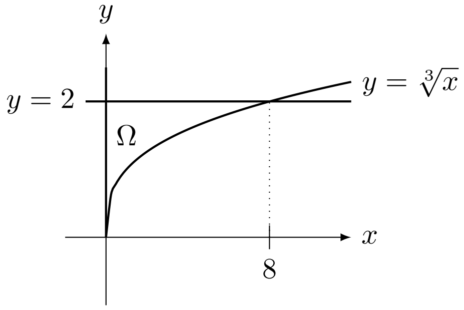
$$\int_{-4}^{4} (4 + \sqrt{16 - 4x^2} - 4)\,dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (6 - x^2 - 4)\,dx.$$

A primeira integral é igual a metade da área do círculo de raio 4: 8π. R: $8\pi - 8\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Prob 6.4: Note que a região é limitada superiormente por $y = x + 1$. Assim, rodando no eixo x o volume será $\displaystyle\int_0^1 \pi(x+1)^2\,dx = \frac{7\pi}{3}$. O sólido obtido será um tronco de cone.

Girando em torno do eixo y vamos obter um cilindro de 1 e altura 2 menos o sólido obtido girando $x = y - 1$ (já que $y = x + 1$) para $y \in [1, 2]$. O cilindro possui volume 2π ($\pi r^2 h$, com $r = 1$ e $h = 2$). Devemos subtrair $\displaystyle\int_1^2 \pi(y-1)^2\,dy = \frac{\pi}{3}$. Assim o volume é $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Prob 6.5: (a) Primeiro o esboço.



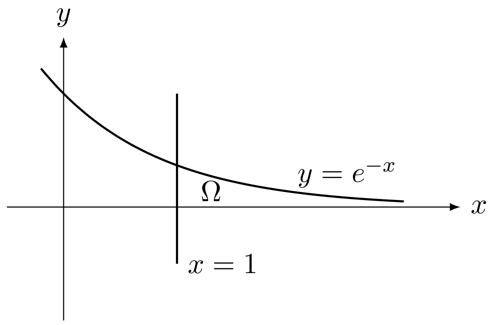
Sua área é igual a

$$\int_0^8 (2 - \sqrt[3]{x})\, dx = 4.$$

O volume será calculado como a diferença entre dois volumes:

$$\pi \int_0^8 2^2\, dx - \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{x})^2\, dx = 32\pi - \pi\frac{96}{5} = \frac{64\pi}{5}.$$

(b) Primeiro o esboço.



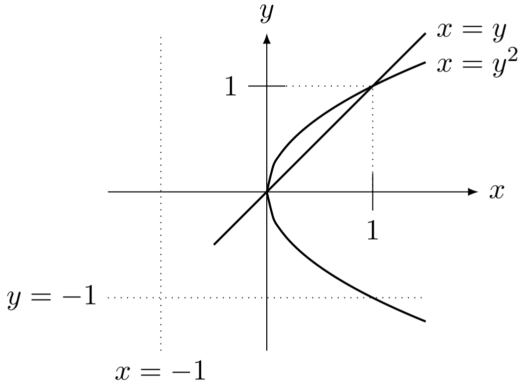
Sua área é igual a

$$\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \frac{1}{e}.$$

O volume é igual a

$$\pi \int_1^\infty (e^{-x})2\, dx\pi \int_1^\infty (e^{-2x})\, dx = \frac{\pi}{2e^2}.$$

Prob 6.6: Primeiro o esboço:



(a) Note que $y = \sqrt{x}$. Como a rotação é em torno de $y = -1$, o raio maior é $1+\sqrt{x}$ e o menor é $1 + x$, ao invés de $\sqrt{x}$ e x se fosse rotação em torno de $y = 0$ (eixo x). O volume será dado pela diferença de volumes:

$$\pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2\, dx - \pi \int_0^1 (x + 1)^2\, dx = \frac{17\pi}{6} - \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

(b) De forma análoga, o raio maior é $y+1$ e o menor $y^2 + 1$. O volume será dado pela diferença de volumes:

$$\pi \int_0^1 (y + 1)^2\, dy - \pi \int_0^1 (y^2 + 1)^2\, dy = \frac{7\pi}{3} - \frac{28\pi}{15} = \frac{7\pi}{15}.$$

Prob 6.7: Note que $A = (1, e)$ pois está na curva $y = e^{x^2}$, e portanto, $y = e^{1^2} = e^1 = e$. Por outro lado B está parábola. Como $y = 0$, $x = 2$. Assim $B = (2, 0)$. Assim a equação da reta L (que passa em A e B) é $y = -ex + 2e$, ou $x = 2 - y/e$. A função $y = e^{x^2}$ intersepta o eixo y em $y = 1$.

O volume será igual ao volume do tronco de cone obtido ao girar a reta L para $y \in [0, e]$ menos o volume ao girar $y = e^{x^2}$ para $y \in [1, e]$ e menos o volume ao girar a parábola para $y \in [0, 1]$.

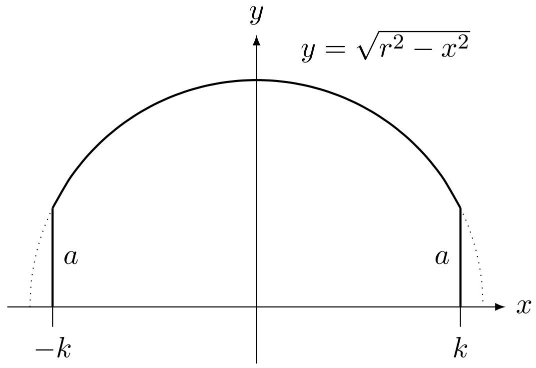
Invertendo as funções, como $y = e^{x^2}$, $\log y = x^2$, $x = \sqrt{\log y}$. Assim o integrando será $x^2 = \log y$. Como $4y = (x - 2)^2$, e na região (veja figura) $2\sqrt{y} = x - 2 \leq 0$, $\sqrt{(x - 2)^2} = -(x - 2) = 2 - x$. Assim, $2\sqrt{y} = 2 - x$. Logo, $x = 2 - 2\sqrt{y}$.

Assim o volume é igual a

$$\pi \int_0^e (2 - y/e)^2\, dy - \\ - \pi \int_0^1 (2 - 2\sqrt{y})^2\, dy - \pi \int_1^e \log y\, dy.$$

Prob 6.8: A primeira coisa a ser observada é que a resposta **não** é o volume da esfera menos o volume do cilindro de raio a. Isto porque o final do "cilindro" retirado pelo furo é arredondado (está na superfície da esfera).

A esfera é o sólido de revolução de $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x. Como o buraco tem raio a (veja figura), o valor $x = k$ para que $f(k) = a = \sqrt{r^2 - x_0^2}$ será $k = \sqrt{r^2 - a^2}$.



Assim o volume será dado por

$$\pi \int_{-k}^{k} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = 2k\pi r^2 - \frac{2\pi k^3}{3},$$

onde $k = \sqrt{r^2 - a^2}$.

Prob 6.9: Como $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, o lado do quadrado para cada x é $2\sqrt{r^2 - x^2}$. A área de cada corte $A(x) = 4(r^2 - x^2)$. Assim, o volume é

$$\int_{-r}^{r} 4(r^2 - x^2)\, dx = \frac{16}{3} r^3.$$

Prob 6.10: Faça a figura e observe que a interseção é em $(1, 1)$ e $(0, 0)$. O lado do quadrado para cada x é $x - x^2$. A área de cada corte $A(x) = (x - x^2)^2$. Assim, o volume é

$$\int_0^1 (x - x^2)^2\, dx = \frac{1}{30}.$$

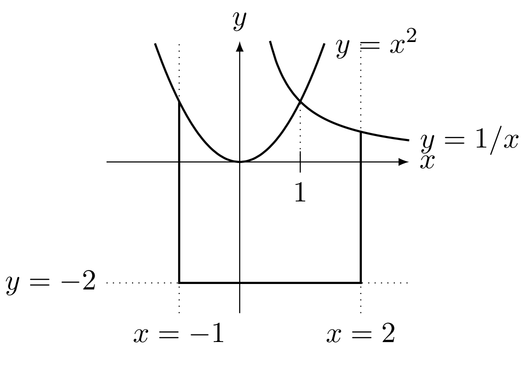
Prob 6.11: (a) $\dfrac{k^2}{3}$.

(b) $\dfrac{2}{\pi}$.

Prob 6.12: (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\pi x \operatorname{sen}(x)\, dx = 2\pi^2$. (b) $\displaystyle\int_0^1 2\pi x(x - x^3)\, dx = 4\pi/15$.

A.6.3 Extras p.191

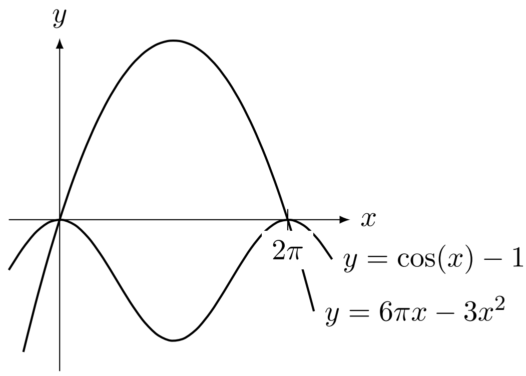
Ext 6.1: (a) Começamos com o esboço:



Assim a área será:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - (-2))\, dx + \int_{1}^{2} (1/x - (-2))\, dx = \frac{14}{3} + \log(2) + 2 = \frac{20}{3} + \log 2.$$

(b) Note que as raízes da equação do segundo grau são 0 e 2π. O esboço é:

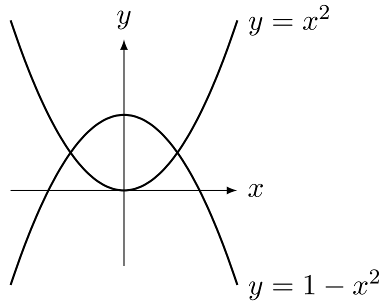


Assim a área é

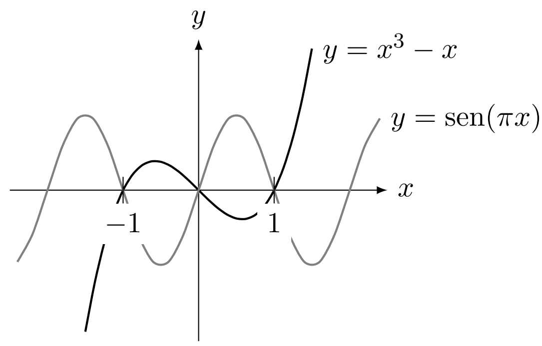
$$\int_0^{2\pi} (6\pi x - 3x^2 - (\cos(x) - 1))\, dx = 4\pi^3 + 2\pi.$$

(c) A interseção ocorrerá se $y = x^2 = 8 - x^2$, isto é, quando $2x^2 = 8$, em $x = \pm 2$.

Assim a área é $\displaystyle\int_{-2}^{2} ((8 - x^2) - x^2)\, dx = \frac{64}{3}$.



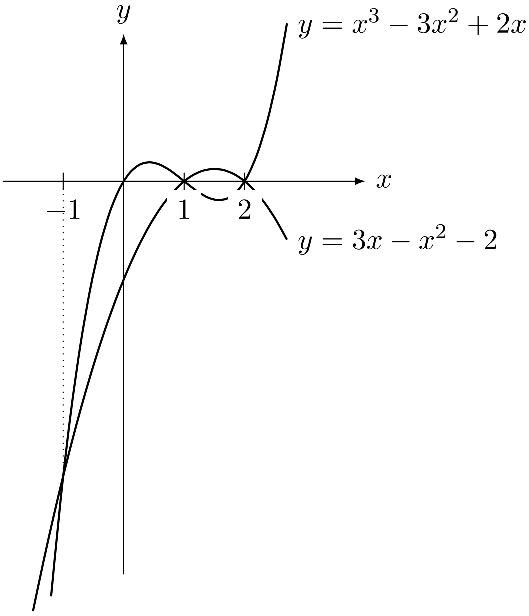
Ext 6.2: (a) Começamos pelo esboço.



Assim a área será, por simetria, o dobro da área para $x \in [0, 1]$, ou seja,

$$2\int_0^1 (\operatorname{sen}(\pi x) - (x^3 - x))\, dx = \frac{\pi + 8}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}.$$

(b) Começamos pelo esboço.



Assim calculamos a área somando duas integrais:

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x - (3x - x^2 - 2))\, dx +$$
$$\int_{1}^{2} (3x - x^2 - 2 - (x^3 - 3x^2 + 2x))\, dx =$$
$$\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$

Ext 6.3: Note que $W_n = \pi \displaystyle\int_0^1 (x^n)^2\, dx = \frac{\pi}{2n+1}$ e $V_n = \pi \displaystyle\int_0^1 (1 - (y^{1/n})^2)\, dx = \frac{2\pi}{n+2}$. Logo, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{W_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+2} = 4.$

Ext 6.4:

$$f(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{a} \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Tome $u = x/a$. Assim, $du = dx/a$. Mudando variável vamos obter $\displaystyle\int_1^b du/u = f(b)$.

Ext 6.5: (a) duas parábolas, uma com concavidade para baixo, outra para cima. Ambas se intersectam, e possuem como raízes $\pm\sqrt{c}$.

(b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2 - 2x^2 + 2c)\, dx = 4c^{3/2} = 2^5$. Logo, $c = 4$.

Ext 6.6: (a) O volume será dado por

$$\pi \int_e^{\infty} \frac{\log(x) - 1}{x^2}\, dx = -\frac{\log x}{x}\bigg|_e^{\infty} = \frac{\pi}{e}.$$

(b) O volume será dado por:

$$\int_1^{e^2} \log^2 x\, dx =$$
$$= x(\log^2 x - 2\log x + 2)\Big|_1^{e^2} = 2e^2 - 2$$

Ext 6.7: (a) Quando $x = 1$, $y = 1/9$. Note que $x = \sqrt{1/y - 5}$ na região. Assim, o volume rodando em x será dado por

$$\pi \int_0^2 \frac{dx}{(x^2+5)^2}.$$

O volume rodando em y é

$$\pi \int_0^{1/9} (2)^2\, dy + \pi \int_{1/9}^{1/5} (1/y - 5)\, dy.$$

(b) A interseção é em $(0,0)$ e $(4,2)$. Ambos volumes serão determinados subtraindo volumes.

O volume rodando em x será dado por

$$\pi \int_0^4 x\, dx - \pi \int_0^4 \frac{x^2}{4}\, dx.$$

Invertendo as relações obtemos $x = y^2$ e $x = 2y$. O volume rodando em y será dado por

$$\pi \int_0^2 4y^2\, dy - \pi \int_0^2 y^4\, dy.$$

(c) Note que embora as raízes de $(6-x)^2 = x$ sejam $x = 4$ e $x = 9$, a única interseção (soluções de $6 - x = \sqrt{x}$) é em $x = 4$, $y = 2$ (porque descartei $x = 9$?). A reta $y = 6 - x$ intersepta o eixo x em $x = 6$

O volume rodando em x será dado por

$$\pi \int_0^4 x\, dx + \pi \int_4^6 (6-x)^2 dx.$$

Invertendo as relações obtemos que $x = 6 - y$ e $x = y^2$. O volume rodando em y será dado por

$$\pi \int_0^2 (6-y)^2\, dy - \pi \int_0^2 y^4 dy.$$

Ext 6.8: Note que $y(x) = \pm 2\sqrt{x}$. Logo, para cada x, o lado do quadrado é $4\sqrt{x}$. A área de cada corte $A(x) = 16x$. Assim, o volume é

$$\int_0^9 16x\, dx = 648.$$

Ext 6.9: Veja artigo `Cavalieri's_principle` na `Wikipedia`.

Ext 6.10: De forma análoga a um exercício anterior onde determinamos o volume de uma esfera com um furo. Por Pitágoras, $r^2 = a^2 + (r-h)^2$.

Rodando a figura em 90 graus, pensando na esfera como o sólido de revolução de $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo x e definindo $k = r - h$, o volume da calota será

$$\pi \int_k^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3kr^2 + k^3).$$

Substituindo $k = r - h$, obtemos que o volume é $\pi(h^2 r - h^3/3)$. Com mais alguma manipulação também obtemos que o volume é $\dfrac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2)$.

Outra solução é utilizando somente o princípio de Cavalieri e a ralação entre volume de cone, cilindro e esfera. É solução elementar, que pode ser feita no Ensino médio.

Ext 6.11: O volume total é

$$\pi \int_0^2 (x+1)\, dx = 4\pi.$$

O volume até $x = a$ é

$$\pi \int_0^a (x+1)\, dx = \pi \frac{a^2 + 2a}{2}.$$

Igualando $\dfrac{a^2+2a}{2} = \dfrac{1}{2}4$, obtemos que $a = \sqrt{5} - 1$ (a solução no intervalo $[0,1]$, pois a outra, $-\sqrt{5} - 1$ está fora.

Ext 6.12: Observe que $y(x) = \pm b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ com $x \in [-a, a]$. Assim o volume é

$$\pi \int_{-a}^a b^2 (1 - (x/a)^2)\, dx = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

Ext 6.13: Por frações parciais, $\dfrac{dx}{x(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$. Assim $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)} =$ $= \log x - \dfrac{\log(x^2+1)}{2}$. Colocando limites de integração obtemos resposta.

R: $\pi \log(2)/2$.

A.6.4 ⋆Problemas (Comprimento de Curvas no Plano) p.192

Prob 6.1: (a) Calculando $1 + [f'(x)]^2 = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. A integral que determina o comprimento possui primitiva $\sqrt{x^2 - 1}$.

R: $\sqrt{3}$.

(b) Calculando, $1 + [f'(x)]^2 = \dfrac{16}{16 - x^2}$. A integral que determina o comprimente possui primitiva $4 \operatorname{arcsen}(x/4)$.

R: 2π.

(c) Vamos ter que calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$. Fazendo substituição hiperbólica, obtemos a primitiva $\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arcsenh}(1/x)$.

R: $\sqrt{5} - \sqrt{2} + \operatorname{arcsenh}(1) - \operatorname{arcsenh}(1/2)$.

(d) Como $g'(x) = \tan x$, calculamos

$$\int \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx = \int \sec\, dx = \log(\sec x + \tan x).$$

Substituindo os limites de integração obtemos:

R: $\log\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$.

Prob 6.2: Prove que se $f(x) = ax + b$ para $x \in [C, D]$ (f é uma poligonal neste trecho) então o comprimento do gráfico neste intervalo é igual a $\sqrt{(D-C)^2 + (aD - aC)^2}$ (comprimento dado por Pitágoras).

A.6.5 ⋆Problemas (Área de Superfície de Sólido de Revolução) p.192

Prob 6.1: (a) $\dfrac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1)$.

(b) $\dfrac{\pi}{32}(18\sqrt{5} - \log(2 + \sqrt{5}))$.

(c) $\pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$.

A.6.6 Desafios p.193

Des 6.1: Suponha que os cilindros possuem como eixos os eixos x e y. Agora para cada plano $z = s$, que é paralelo aos eixos, a interseção é um quadrado de lado $2L$. Por Pitágoras, $r^2 = L^2 + s^2$, ou, $L(s) = \sqrt{r^2 - s^2}$. A área de cada quadrado é $A(s) = (2L(s))^2 = 4(r^2 - s^2)$. Assim o volume é

$$\int_{-r}^r 4(r^2 - s^2)\, ds = \frac{16}{3} r^3.$$

Procure na internet *Intersection of Two Cylinders*.

Des 6.2: Introduzimos coordenadas e colocamos um círculo na origem e a "lua eclipsada" (em cinza no livro) em $(0, L)$. Queremos a área ocupada pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq R^2, \\ x^2 + (y - L)^2 \leq r^2. \end{cases}$$

Obtemos solução (x_0, y_0) do sistema subtraindo as duas equações:

$$y_0^2 - (y_0 - L)^2 = R^2 - r^2.$$

Assim,

$$y_0 = \frac{R^2 - r^2 + L^2}{2L} \quad \text{e} \quad x_0 = \sqrt{R^2 - y_0^2}.$$

Pode-se verificar (utilizei `Maxima`) que:

$$x_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{[r^2 - (R - L)^2][(R + L)^2 - r^2]}.$$

Os dois termos dentro da raiz são positivos pois vai ocorrer uma interseção se, e somente se, (faça uma figura) $-R \leq L - r \leq R \leq L + r$.

Vamos calcular a área da lúnula como a diferença entre duas integrais. Para isto definimos

$$y_R(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{e} \quad y_r(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

funções que delimitam a lúnula. Como

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}(x/a),$$

substituindo $\sqrt{R^2 - x_0^2}$ por $|y_0|$ e $\sqrt{r^2 - x_0^2}$ por $|y_0 - L|$ obtemos que:

$$\int_{-x_0}^{x_0} y_r(x)\, dx = x_0|y_0 - L| + r^2 \operatorname{arcsen}(x_0/r),$$

$$\int_{-x_0}^{x_0} y_R(x)\, dx = x_0|y_0| + R^2 \operatorname{arcsen}(x_0/R).$$

Agora separamos em três casos, dependendo onde ocorreu a interseção:

(a) $y_0 \geq L$ (interseção acima do centro do círculo de raio r). Como $|y_0| = y_0$ e $|y_0 - L| = y_0 - L$, a área é igual a:

$$\int_{-x_0}^{x_0} (L + y_r(x) - y_R(x))\, dx = x_0 L + \\ + r^2 \operatorname{arcsen}(x_0/r) - R^2 \operatorname{arcsen}(x_0/R).$$

(b) $L \geq y_0 \geq 0$ (interseção entre os centros dos círculos). Como $|y_0| = y_0$ e $|y_0 - L| = L - y_0$, a área é igual a:

$$\pi r^2 - \int_{-x_0}^{x_0} (y_R(x) - (L - y_r(x))\, dx = x_0 L + \pi r^2 + \\ + (-r^2 \operatorname{arcsen}(x_0/r) - R^2 \operatorname{arcsen}(x_0/R)).$$

(c) $y_0 \leq 0$ (interseção abaixo do centro do círculo de raio R). Como $|y_0| = -y_0$ e $|y_0 - L| = L - y_0$, a área é igual a:

$$\pi r^2 - \left[\pi R^2 - \int_{-x_0}^{x_0} (L - y_r(x) - (-y_R(x)))\, dx\right] = \\ = x_0 L + \pi r^2 - \pi R^2 + \\ + R^2 \operatorname{arcsen}(x_0/R) - r^2 \operatorname{arcsen}(x_0/r).$$

Des 6.3: Isto ocorre pois $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{2} \to f(x)$ quando $\Delta x_i \to 0$.

Referências Bibliográficas

[Ap1] Apostol, T. M.; Chrestenson, H. E.; Ogilvy, C. S.; Richmond, D. E. and Schoonmaker, N. J. (eds); *Selected papers on calculus.* Reprinted from the American Mathematical Monthly (Volumes 1–75) and from the Mathematics Magazine (Volumes 1–40). The Mathematical Association of America, Buffalo, N.Y. 1969.

[Ap2] Apostol, T. M. *Calculus Vol. 1.* John Wiley; 1967.

[Bo] Boyer, C. B. ; *História da Matemática*, Editora Edigard Blücher ltda, 9ª ed. 1991.

[Co] Courant, R. ; *Differential and Integral Calculus Vol. I;* Interscience; 1934.

[Fe] Felicio, J. R. ; *Fórmula de Stirling em tempos de Maple;* Revista de Matemática Universitária, **17**, (1994).

[Fi] Figueiredo, D.; *Números Irracionais e Transcendentes;* SBM; 1980.

[Ha] Hardy, G. H. ; *A Course of Pure Mathematics;* Cambridge University Press; 1967.

[M] *The MacTutor History of Mathematics archive*, `turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history`.

[NC] Neri, Cassio; Cabral, Marco; *Curso de Análise Real;* UFRJ; 2009. Disponível em `www.labma.ufrj.br/~mcabral/livros`.

[Sp] Spivak, M.; *Calculus;* W. A. Benjamin; 1967.

[Si] Simmons, G..; *Calculo com Geometria Analítica vol. 1;* Mc Graw Hill; 1987.

[Zo] Zorich, V.A.; *Mathematical Analysis I;* Springer Verlag; 2004.

Índice Remissivo