UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

Segunda Prova de MAT 131-Introdução à Álgebra

23-05-2019

GABARITO

Questão 1: (**24Pts**) Considerando as proposições $p : x \notin A \;\; e \;\; x \notin B$; $\;\; r : x \in B - A \;\;$ e $\;\; s : x \in A \; ou \; x \notin B$. Determinar quais das proposições dadas acima são equivalentes à proposição $t : \; x \notin (A \cap B^c)$.

SOLUÇÃO: Considerando $p_1 : x \in A$ e $q_1 : x \in B$, podemos escrever as proposições dadas da seguinte forma:

$p :\sim p_1 \vee \sim q_1 \Longleftrightarrow \sim (p_1 \wedge q_1)$, $\;\; r :\sim p_1 \wedge q_1$, $\;\; s : p_1 \vee \sim q_1 \;\;$ e $\;\; t :\sim p_1 \vee q_1$. Vejamos a tabela-verdade abaixo.

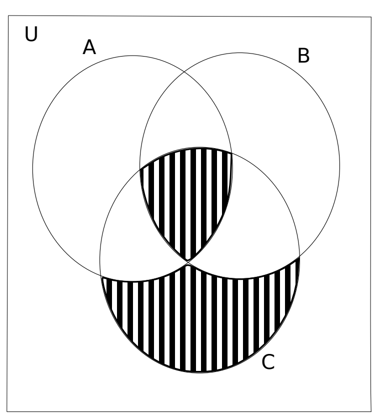
p_1	q_1	p	r	s	t	$p \longleftrightarrow t$	$r \longleftrightarrow t$	$s \longleftrightarrow t$
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	F	V

Como a tabela-verdade fornece **contingência para** $p \longleftrightarrow t$**,** $r \longleftrightarrow t$ **e** $s \longleftrightarrow t$ e não tautologia, concluímos que a proposição t não é equivalente a nenhuma das proposições dadas.

Questão 2: Para A, B e C conjuntos quaisquer. Pede-se:

(**6Pts**) (a) Representar, usando diagrama de Venn-Euler, o conjunto $S = C - [(A - B) \cup (B - A)]$.

SOLUÇÃO:



(**15Pts**) (b) Mostre que $A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$.

SOLUÇÃO:

$A - B = A \cap B^c = (A \cap B^c) \cap (C^c \cup C) = [(A \cap B^c) \cap C^c] \cup [(A \cap B^c) \cap C]$

$A - B = [(A \cap C^c) \cap B^c] \cup [(C \cap B^c) \cap A]$

$A - B \subset (A \cap C^c) \cup (C \cap B^c) = (A - C) \cup (C - B)$

$A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$

$\boxed{\textbf{Questão 3:}}$ Dados $M = \{-3, -2/3, 0, 1/2, 2, \sqrt{2}, 3+\sqrt{2}, 2i\}$, $A = \{x \in M; x \notin M \longrightarrow x \notin \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \in M; x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \in \mathbb{I}\}$, $D = \{x \in M; x \in \mathbb{C} \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$. Pede-se:

(**15Pts**) (a) Determinar os elementos dos conjuntos A, B e D.

SOLUÇÃO: Para descobrir os elementos de cada conjunto faremos uso de tabela-verdade.

	A $x \notin M \longrightarrow x \notin \mathbb{Z}$	B $x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \in \mathbb{I}$	D $x \in \mathbb{C} \wedge x \notin \mathbb{Q}$
-3	V	F	F
-2/3	V	F	F
0	V	F	F
1/2	V	F	F
2	V	F	F
$\sqrt{2}$	V	V	V
$3 + \sqrt{2}$	V	V	V
$2i$	V	V	V

Desse modo $A = M$ e $B = D = \{\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 2i\}$

(**10Pts**) (b) Determinar $(A \cap D) \cup (B - A)$.

SOLUÇÃO: A partir do item (a) temos que $A \cap D = D$ e $B - A = \emptyset$.
Portanto, $(A \cap D) \cup (B - A) = D \cup \emptyset = D = \{\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 2i\}$

$\boxed{\textbf{Questão 4:}}$ (**20Pts**) Sejam A, B e D conjuntos quaisquer. Mostre que se $D \subset (A \triangle B)$, então $D = (A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)]$

SOLUÇÃO:

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = (A \cup B) \cap [(A \cap D^c) \cup (B \cap D^c) \cup (A \cap B)]^c$ (def. de diferença)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = (A \cup B) \cap [((A \cup B) \cap D^c) \cup (A \cap B)]^c$ (distributividade)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = (A \cup B) \cap [(A \cup B) \cap D^c]^c \cap (A \cap B)^c$ (Lei de Morgan)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \cap [(A \cup B)^c \cup D]$ (Comutatividade e Lei de Morgan)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = (A \triangle B) \cap [(A \cup B)^c \cup D]$ (def. diferença simétrica)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = [(A \triangle B) \cap (A \cup B)^c] \cup [(A \triangle B) \cap D]$ (Distributividade)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = [\emptyset] \cup [D]$ (hipóteses $D \subset (A \triangle B)$)

$(A \cup B) - [(A - D) \cup (B - D) \cup (A \cap B)] = D$ (neutro da união)
Como queríamos mostrar.

$\boxed{\textbf{Questão 5:}}$ Sobre o número de pessoas que consomem os produtos A, B e C, uma pesquisa de opinião revelou que este é igual a:

☞ 1/6 dos que consomem somente o produto A.

☞ 1/5 dos que consomem somente o produto B.

☞ 1/4 dos que consomem somente o produto C.

☞ 1/2 dos que consomem os produtos A e B.

☞ 1/3 dos que consomem os produtos A e C.

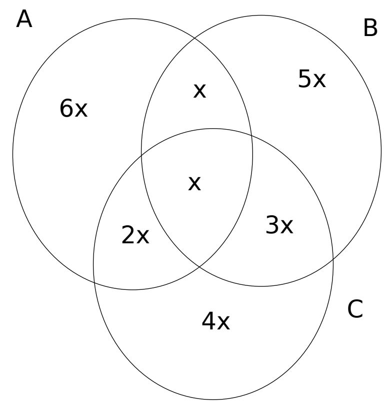
☞ 1/4 dos que consomem os produtos B e C.

Se o número de entrevistados foi de 4400 pessoas. Determinar.

(**10Pts**) (a) O número de pessoas que consomem somente dois produtos.

(**10Pts**) (b) O número de pessoas que consomem os três produtos.

SOLUÇÃO: Seja x o número de pessoas que consomem os três produtos. Assim, o diagrama de Venn fica preenchido conforme a figura abaixo.



Logo, $6x + 2x + x + x + 5x + 3x + 4x = 4400$. De onde $x = 200$. Portanto,

(a) O número de pessoas que consomem somente dois produtos é igual a $2x+x+3x = 6x = 1200$.

(b) O número de pessoas que consomem os três produtos é $x = 200$.