S T Q Q S S D   __/__/__

P3 - MAT 135 - LUÍSA DE S. FERREIRA - 102026

1) $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2$

$u = (2,0)$ e $v = (2,1)$

A) $\cos\theta = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}} = \dfrac{(2)(2)-(2)(1)-0+0}{\sqrt{4-0-0+0}\cdot\sqrt{4-2-2+2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}.\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ $(45°)$ //

B) $\text{proj}_u v = \dfrac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u = \dfrac{(2)(2)-(2)(1)-\cancel{(0)(1)}^{0}+2\cancel{(0)(1)}^{0}}{4-0-0+0} u = \dfrac{2}{4} u =$

$= \dfrac{1}{2}(2,0) = (1,0)$ //

c) $B = \{u, v\}$. Queremos obter uma base ortogonal a partir do algoritmo de Gram-Schimit:

$w_1 = u = (2,0)$

$w_2 = v - \dfrac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = v - \dfrac{[4-2-0+0]}{4-0-0+0} w_1 = v - \dfrac{1}{2} w_1 =$

$= (2,1) - \dfrac{1}{2}(2,0) = (2,1) - (1,0) = (1,1)$

$C = \{w_1, w_2\} = \{(2,0), (1,1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ //

2) a) $p(x) = \det(A - \lambda I)$, para encontrarmos as raízes, basta igualar $p(x)$ a zero:

$p(x) = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} \leftrightarrow (-1-\lambda)^2(2-\lambda)+0+0-0-0-0 = 0$$

$(-1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

$(-1-\lambda)^2 = 0$	$(2-\lambda) = 0$
$-1-\lambda = \sqrt{0}$	$\lambda = 2$
$\lambda = -1$	

- $\lambda' = -1$, com multiplicidade algébrica $= 2$
- $\lambda'' = 2$, com multiplicidade algébrica $= 1$

___/___/___

S T Q Q S S D

B) $Av = \lambda v \leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \leftrightarrow (A - \lambda I)v = \vec{0}$

$\boxed{\text{PARA } \lambda = -1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \therefore \quad -x + 3y + z = 0$$
$$x = 3y + z$$

• Autoespaço associado a $\lambda = -1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 3y + z = 0\}$

$(x, y, z) = (3y + z, y, z) = y(3, 1, 0) + z(1, 0, 1)$

• $\beta_{\lambda=-1} = \{(3,1,0), (1,0,1)\} \rightarrow$ uma base para esse autoespaço associado ao $\lambda = -1$

• Dim $\beta_{\lambda=-1} = 2$

C) Para T ser diagonalizável, é preciso ver se é possível formar uma base de autovalores de A para $\mathbb{R}^3$. Vamos achar o autoespaço associado ao $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \therefore \quad \begin{cases} -3x = 0 & \therefore x = 0 \\ -x + z = 0 \\ -3z = 0 & \therefore z = 0 \end{cases}$$

• Autoespaço associado a $\lambda = 2$: $\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$

• $\beta_{\lambda=2} = \{(0,1,0)\} \rightarrow$ uma base para o autoespaço associado ao $\lambda = 2$

Como nós temos as bases dos autoespaços, podemos afirmar que $(3,1,0)$ e $(1,0,1)$ são autovetores de A associados ao autovalor -1 e $(0,1,0)$ é autovetor associado ao autovalor 2. Como o conjunto $\gamma = \{(3,1,0)(1,0,1), (0,1,0)\}$ possui 3 autovetores e é linearmente independente (provaremos abaixo), γ é uma base de autovetores do $\mathbb{R}^3$ e por isso, T é diagonalizável.

(PROVA DE QUE γ É L.I):

$$a(3,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,0) = 0$$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 & \therefore a = 0 \\ a + c = 0 & \therefore c = 0 \\ b = 0 & \therefore b = 0 \end{cases}$$

↳ Essa combinação linear homogenea só possui a solução trivial.

→ Sim, T é diagonalizável e $\gamma = \{(3,1,0), (1,0,1), (0,1,0)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ com autovetores de A.

S T Q Q S S D

__/__/__

③ $\overset{a}{5x^2} \overset{b}{-4xy} \overset{c}{+8y^2} \overset{d}{-36} = 0$

A) $x^T A x + b = 0$

$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$; $b = d \leftrightarrow b = -36$

$\rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36 = 0$ //

B) Dados fornecidos pela questão:

- $v_1 = (2,1)$ autovetor de A associado a 4.
- $v_2 = (-1,2)$ autovetor de A associado a 9.

$v_1 \perp v_2$?

$\langle v_1, v_2 \rangle = (2)(-1) + (1)(2) = -2+2 = 0$! Então v_1 e v_2 são ortogonais, logo não é preciso utilizar o algoritmo de Gram-Schmit para acharmos autovetores ortogonais. Sabemos que P, tal que $A.P = P.D$ é uma matriz dos autovetores de A, logo P que diagonaliza ortogonalmente a matriz A é

$\rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ //

matriz diagonal com os autovalores de A = D

$A.P = P.D \leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$ ✓

c) $x'^T . D . x' + b = 0$

$\underbrace{\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}}_{1\times2} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times2} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 4x' & 9y' \end{bmatrix}}_{1\times2} \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{2\times1} - 36 = 0$

Elipse!

$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad :36$

$\frac{4x'^2}{36} + \frac{9y'^2}{36} = \frac{36}{36} \leftrightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ //

S T Q Q S S D ___/___/___

(4) r é interseção de $\pi: -y+z=0$ e $\gamma: x+2y=1$

$A: (1,0,1)$

A) Primeiro vamos achar a reta r, sabemos que ela é a interseção de 2 planos, basta acharmos 2 pontos em comum entre esses 2 planos!

$B=(3,-1,1)$: $B \in \pi$ $(-1+1=0 \leftrightarrow 0=0 ✓)$ e $B \in \gamma$ $(3+2(-1)=1 \leftrightarrow 1=1 ✓)$

$C=(1,0,0)$: $C \in \pi$ $(-0+0=0 \leftrightarrow 0=0 ✓)$ e $C \in \gamma$ $(1+2(0)=1 \leftrightarrow 1=1 ✓)$

Se um ponto $P \in \pi$ e $P \in \gamma$, então ele pertencerá à reta r, visto que ela é interseção entre esses dois planos. Logo $B, C \in r$.

Com isso, podemos achar o vetor direção da reta r:

$\vec{BC} = C-B = (1,0,0)-(3,-1,1) = (-2,1,-1)$

$r: X = (3,-1,1) + \alpha(-2,1,-1)$!

Queremos encontrar agora a reta s que passa por $A=(1,0,1)$ e intercepta r ortogonalmente.

$s: X = (1,0,1) + t(x,y,z)$

$r \perp s \rightarrow (-2,1,-1) \perp (x,y,z) \rightarrow \langle(-2,1,-1),(x,y,z)\rangle = 0$

$\langle(-2,1,-1),(x,y,z)\rangle = 0 \leftrightarrow -2x+y-z=0 \leftrightarrow z=-2x+y$

$(x,y,z) = (x,y,-2x+y) = x(1,0,-2) + y(0,1,1)$.

Colocando $x=1$ e $y=1$, temos:

$(x,y,z) = 1(1,0,-2)+(0,1,1) = (1,1,-1)$ → vetor direção da reta s

$\rightarrow s: X = (1,0,1) + t(1,1,-1)$ //

B) $d(A,\pi) = \dfrac{|\langle BA, n\rangle|}{\|n\|}$

$B=(1,0,0) \in \pi$

$BA = A-B = (1,0,1)-(1,0,0) = (0,0,1)$

$\pi: -y+z=0 \therefore \vec{n}=(0,-1,1)$

$d(A,\pi) = \dfrac{(0)(0)+(0)(-1)+(1)(1)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+(1)^2}}$

$d(A,\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow d(A,\pi) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ //

5) A) VERDADEIRO!

A é diagonalizável e $p(x) = (x-2)^2 (x+3)$

multiplicidade algebrica = 2

multiplicidade algebrica = 1

↳ autovalores = 2 e -3

Se A é diagonalizável, então $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, sabemos que

A e D são matrizes semelhantes, pois existe um P tal que AP = PD, por isso, possuem o mesmo determinante. Logo:

$$\det A = \det D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

S T Q Q S S D

__/__/__

(5) B) VERDADEIRO!

$\langle (\overset{u}{a,b}), (\overset{v}{x,y}) \rangle = ax + by$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$\langle (a,b), (x,y) \rangle = \langle (x,y), (a,b) \rangle$

$ax + by = xa + yb$

$ax + by = ax + by$ ✓

(ii) $\langle u, v+u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle$

$\langle (a,b), (x+a, y+b) \rangle = a(x+a) + b(y+b) = ax + a^2 + by + b^2 =$

$= \underbrace{ax + by}_{\langle u,v \rangle} + \underbrace{a^2 + b^2}_{\langle u,u \rangle} = \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle$ ✓

(iii) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

$\langle (a,b), (\lambda x, \lambda y) \rangle = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by) = \lambda \langle u, v \rangle$ ✓

Então, $\langle (a,b), (x,y) \rangle = ax + by$ é um produto interno de $\mathbb{R}^2$

c) VERDADEIRO!

$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u-v, u-v \rangle \longrightarrow u \perp v$

$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u-v, u-v \rangle \leftrightarrow \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle =$

$= \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \cancel{\langle u,u \rangle} + \langle u,v \rangle + \langle u,v \rangle + \cancel{\langle v,v \rangle} = \cancel{\langle u,u \rangle} - \langle u,v \rangle - \langle u,v \rangle + \cancel{\langle v,v \rangle} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 4 \langle u,v \rangle = 0 \leftrightarrow \langle u,v \rangle = 0$!

Então, $\|u+v\| = \|u-v\|$ implica que $\langle u,v \rangle = 0$, isso significa que u ser ortogonal a v $(u \perp v)$

Digitalizado com CamScanner