UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

1^a Lista - MAT 138 - Noções de Álgebra Linear (Matrizes) II/2005

---

1. Considere as matrizes A, B, C, D e E com respectivas ordens, 4×3, 4×5, 3×5, 2×5 e 3×5. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e determine a respectiva ordem.

   (a) $AE + B^T$; (b) $C(D^T + B)$; (c) $AC + B$; (d) $E^T(CB)$.

2. Sejam A, B, C, D e E matrizes que satisfazem:

   AB^T tem ordem 5×3; $(C^T + D)B$ tem ordem 4×6 e $E^T C$ tem ordem 5×4.

   Determine as ordens das matrizes A, B, C, D e E, respectivamente.

3. Construa uma matriz e identifique a ordem, em cada caso:

   (a) linha; (b) coluna; (c) quadrada; (d) diagonal.

   (e) triangular superior; (f) simétrica; (g) anti-simétrica.

4. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Obtenha as matrizes A^2, $A \cdot B$, B^2, $A + B$ e $(A + B)^2$.

   (b) Verifique se vale a identidade: $A^2 + 2A \cdot B + B^2 = (A + B)^2$.

   (c) Verifique se vale a identidade: $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

   (d) Qual é a condição necessária para que as identidades dos itens (b) e (c) sejam verdadeiras?

5. Obtenha as matrizes que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & 15 \\ 3 & -4 & 20 & 33 \\ 1 & 2 & 1 & 44 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ determine os elementos $(A \cdot B)_{12}$ e $(B \cdot A)_{23}$.

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine x e y tais que $A \cdot C = B \cdot C$.

   (b) Sendo $A \cdot C = B \cdot C$, é possível cancelar C?

   (c) E se a matriz C tivesse determinante diferente de zero?

8. Se A é uma matriz 2×4, definida pela lei $\begin{cases} i + j, & \text{se } i \leq j \\ i - j, & \text{se } i > j \end{cases}$, determine a matriz A e A^T.

9. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma matriz X tal que $A + X = B$. Essa matriz X é única?

   (b) Encontre uma matriz X tal que $A \cdot X = B$. Essa matriz X é única? Por quê?

   (c) Encontre uma matriz X tal que $B \cdot X = A$. Essa matriz X é única? Por quê?

10. Dada uma matriz quadrada A, se existir um número inteiro $p > 0$, tal que $A^p = A$, diz-se que A é uma matriz idempotente. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, mostre que A é idempotente. Determine o menor inteiro p para o qual $A^p = A$.

11. Calcule o valor de x, para que o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ pela matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ seja uma matriz simétrica. (**Observação:** dizemos que uma matriz A é simétrica se $A = A^t$.)

12. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule $\det A$, $\det A^T$ e compare os resultados.

    (b) Se k é um número (escalar), calcule:

        i. $\det(kA)$.

        ii. Escreva esse resultado em termos de $\det A$.

    (c) Seja M uma matriz anti-simétrica.

        i. Se M for de ordem 2, mostre que M pode ser inversível.

        ii. Se a ordem de M for 3, então M não tem inversa.

13. Calcule o determinante das seguintes matrizes e identifique as que são inversíveis.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

14. Dada a matriz A abaixo, determine sua inversa se isso for possível. Use neste primeiro exercício o método que trabalha com operações elementares sobre linhas. Classifique as matrizes em singular ou não singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine o polinômio $p(X) = \det(A - xI_3)$ sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3 e $x \in \mathbb{R}$.

    (b) Verifique que $p(A) = 0$ (matriz nula).

    (c) Use o item (b) para calcular a inversa de A.

16. Sendo A e B matrizes inversíveis de ordem n, isolar a matriz X de cada equação abaixo:

    (a) $AXB = I$; (b) $(AX)^T = B$; (c) $(AX)^{-1} = I$;

    (d) $(A + X)^T = B$; (e) $AXB = BA$; (f) $(AX^{-1})^T = B$.

17. Sejam A, B e C , matrizes reais de ordem 3, satisfazendo a seguintes relações; $A \cdot B = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante da matriz C vale 32, qual é o valor, em módulo, do determinante da matriz A?

18. Seja Q uma matriz de ordem 4, tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Calcule o valor de $\det Q$.

19. Use algumas propriedades de determinantes para mostrar que: $\det \begin{pmatrix} a+c & b+c & 2c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$

20. Sejam $A = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine, se possível, a inversa da matriz A.

    (b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $A \cdot X = B_k$, $k = 1, 2$.

21. Um fabricante de móveis faz cadeiras e mesas, cada uma das quais passa por um processo de montagem e outro de acabamento. O tempo necessário para esses processos é dado (em horas) pela matriz

$$\text{A=}\begin{array}{cc|l} \text{Montagem} & \text{Acabamento} & \\ 2 & 2 & \text{Cadeira} \\ 3 & 4 & \text{Mesa} \end{array}.$$

O fabricante tem uma fábrica em Belo Horizonte e outra em Ubá. As taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em dólares) pela matriz

$$\text{A=}\begin{array}{cc|l} \text{Belo Horizonte} & \text{Ubá} & \\ 9 & 10 & \text{Montagem} \\ 10 & 12 & \text{Acabamento} \end{array}.$$

Qual o significado dos elementos do produto matricial $A \cdot B$?

22. Um fabricante faz dois tipos de produtos, P e Q, em cada uma de suas fábricas, X e Y. Ao fazer esses produtos, são produzidos dióxido de enxofre, óxido nítrico e partículas de outros materiais poluentes. As quantidades de poluente são dadas (em quilos) pela matriz:

$$\text{A=}\begin{array}{ccc|l} \text{Dióxido de Enxofre} & \text{Óxido Nítrico} & \text{Partículas} & \\ 300 & 100 & 150 & \text{Produto P} \\ 200 & 250 & 400 & \text{Produto Q} \end{array}.$$

Leis estaduais e federais exigem a remoção desses poluentes. O custo diário para remover cada quilo de poluentes é dado (em dólares) pela matriz

$$\text{B=}\begin{array}{cc|l} \text{Fábrica } X & \text{Fábrica } Y & \\ 8 & 12 & \text{Dióxido de Enxofre} \\ 7 & 9 & \text{Óxido Nítrico} \\ 15 & 10 & \text{Partículas} \end{array}.$$

Qual é o significado dos elementos do produto matricial AB?

23. Um projeto de pesquisa alimentar conta com a participação de adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz

$$\begin{array}{cccl} & \text{Adulto} & \text{Criança} & \\ \text{A}= & \left[\begin{array}{c}80\\100\end{array}\right. & \left.\begin{array}{c}120\\200\end{array}\right] & \begin{array}{l}\text{sexo feminino}\\ \text{sexo masculino}\end{array} \end{array}.$$

O número de gramas diários de proteínas, gordura e carboidratos consumido por cada criança e cada adulto é dado pela matriz

$$\begin{array}{ccccl} & \text{Proteína} & \text{Gordura} & \text{Carboidrato} & \\ \text{A}= & \left[\begin{array}{c}20\\10\end{array}\right. & \begin{array}{c}20\\20\end{array} & \left.\begin{array}{c}20\\30\end{array}\right] & \begin{array}{l}\text{Adulto}\\ \text{Criança}\end{array} \end{array}.$$

(a) Quantos gramas de proteína são consumidos diariamente pelos homens que participam do projeto?

(b) Quantos gramas de gordura são consumidos diariamente pelas mulheres que participam do projeto?

24. A tiragem diária na cidade de Mimosa dos jornais: **Dia a Dia, Nossa Hora, Acontece e Urgente**, durante o ano de 2002 está representada na seguinte tabela:

	Dia a Dia	**Nossa Hora**	**Acontece**	**Urgente**
Dias úteis	400	600	450	650
Feriados	350	550	500	600
Sábados	350	600	500	650
Domingos	450	500	400	700

Determine:

(a) A tiragem de cada jornal em Mimosa em 2002, sabendo-se que 2002 tivemos 52 sábados, 52 domingos, 12 feriados e 249 dias úteis.

(b) A estimativa da tiragem total de cada jornal em Mimosa para o ano de 2005, sabendo-se que a previsão é que até o final deste ano (2005) a tiragem tenha um aumento de 60% em relação à 2002.

25. Uma construtora está fazendo o orçamento de 47 estabelecimentos rurais sendo estes divididos em: 20 de alvenaria, 30 mistos e 15 de madeira. A tabela abaixo descreve a quantidade de material utilizado em cada tipo de construção.

Tipo de Construção/Material	Tábuas (unidade)	Tijolos (mil)	Telhas (mil)	Tinta (litros)	Mão-de-obra (dias)
Alvenaria	50	15	6	70	25
Madeira	500	1	5	20	30
Misto	200	8	7	50	40

Pede-se:

(a) Determinar, utilizando produto de matrizes, a matriz A que descreve quantas unidades de cada componente serão necessárias para cumprir o orçamento.

(b) Dar o significado do produto de matrizes AB, onde A é a matriz obtida no item (a) e B é a matriz obtida pela tabela abaixo.

	Valor da Compra (a unidade em reais)	Transporte (a unidade em reais)
Tábuas	12	0,08
Tijolos	100	20
Telhas	300	10
Tinta	3	0,50
Mão-de-obra	40	1,50

26. Considere os adubos I, II, III e IV com características e preços descritos nas tabelas abaixo:

Substância por kg	Fósforo	Nitrato	Potássio
Adubo I	$25g$	$15g$	$70g$
Adubo II	$30g$	$25g$	$40g$
Adubo III	$60g$	$10g$	$55g$
Adubo IV	$15g$	$30g$	$60g$

Adubos	I	II	III	IV
Preço por kg	$R\$ \ 7,50$	$R\$ \ 5,00$	$R\$ \ 4,50$	$R\$ \ 6,50$

Um agricultor necessita de uma mistura com a seguinte especificação:

6 kg do adubo I, 7 kg do adubo II, 5 kg do adubo III e 8 kg do adubo IV.

Usando produto de matrizes determine a quantidade de cada substância na mistura descrita acima e o preço (da mistura).

27. Um fabricante de farinha produz três tipos de farinha: de mandioca, de milho e de trigo. Para produzir cada um dos tipos de farinha o produto bruto passa por três processos: seleção, processamento e embalagem. O tempo necessário (em horas), em cada processo, para produzir uma saca de farinha, é dado na tabela abaixo:

Processos/ Tipo de Farinha	Seleção	Processamento	Embalagem
Mandioca	1	3	1
Milho	2	5	1
Trigo	1,5	4	1

O fabricante produz as farinhas em duas usinas uma em Cacha Pregos (BA) e outra em Cacimba de Dentro (PB), as taxas por hora para cada um dos processos são dadas (em reais) na tabela abaixo:

	Cacha Pregos	Cacimba de Dentro
Seleção	2	1,50
Processamento	1	1,80
Embalagem	0,50	0,60

Encontre A e B matrizes obtidas pelas primeira e segunda tabelas, respectivamente. Qual o significado do produto matricial AB?

28. A secretaria de meio ambiente de uma cidade constatou que as empresas que trabalham nos ramos de suinocultura, cunicultura e piscicultura são as grandes poluidoras de três regiões do município, diariamente despejam dejetos destas culturas segundo a descrição da tabela abaixo:

Quant. de Dejetos por dia (em kg)	1^a Região	2^a Região	3^a Região
Cunicultura	80	90	70
Piscicultura	200	40	30
Suinocultura	150	120	100

A secretaria decidiu então aplicar multas diárias sobre estas empresas afim de angariar fundos para despoluir tais regiões, as multas foram estabelecidas de acordo com a tabela abaixo:

Multa Cobrada (em reais) por kg de dejetos depositados	1^a Região	2^a Região	3^a Região
Cunicultura	400	200	300
Piscicultura	50	400	100
Suinocultura	600	300	500

Considerando A a matriz obtida através da tabela 1 e B a matriz obtida através da tabela 2, determine os elementos da matriz quem fornecem a arrecadação da secretaria nas regiões, por ramo de atividade, ao aplicar tais multas.

29. Verifique se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas. **Justifique sua resposta.**

    (a) ( ) $\det(-A) = -\det A$.

    (b) ( ) $(b) \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

    (c) ( ) Sejam A, B e P matrizes reais de ordem n, tais que $B = P^T AP$, sendo P inversível. Então $\det A = \det B$.

    (d) ( ) Dada a equação matricial $X^2 + 2X = 0$, onde X é uma matriz quadrada de ordem n, não singular. Então esta equação tem única solução.

    (e) ( ) Se $A,\ B \in M_{n\times n}(I\!R)$ são tais que $A \cdot B = 0$ (matriz nula), então $B \cdot A$ também é a matriz nula.

    (f) ( ) Se $A,\ B \in M_{n\times n}(I\!R)$ são tais que $A \cdot B = 0$ (matriz nula), então $A = 0$ ou $B = 0$.

    (g) ( ) A soma de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

    (h) ( ) O produto de duas matrizes simétricas de mesma ordem é uma matriz simétrica.

    (i) ( ) Se um sistema quadrado $Ax = 0$ tem somente a solução trivial, então $Ax = b$ tem uma única solução.

    (j) ( ) A soma de dois vetores soluções de um sistema linear é sempre um vetor solução do sistema.

    Nas afirmativas abaixo, A, B e C são matrizes cujos tamanhos são apropriados para as operações indicadas.

    (k) ( ) Se $A \cdot C = B \cdot C$ e C é inversível, então $A = B$.

    (l) ( ) Se $A \cdot B = 0$ e B é inversível, então $A = 0$.

    (m) ( ) Se $A \cdot B = C$ e duas das matrizes são inversíveis, então a terceira também é.

    (n) ( ) Se $A \cdot B = C$ e duas das matrizes são singulares (não inversíveis), então a terceira também é.

30. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Definamos $A^0 = I$ e $A^n = A^{n-1} \cdot A$ para todo número natural n, com $n \geq 1$. Então mostre que: $A^{2n} = I$ e $A^{2n*1} = I$, para todo natural n.

31. Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2AA^T) = 4x$.

32. Coloque a matriz de observações $\begin{bmatrix} 12 & 13 & 13 & 14 \\ 61 & 60 & 62 & 65 \end{bmatrix}$ em forma de desvio médio e construa a matriz de covariância das amostras. Qual o significado de cada elemento dessa matriz?