Conjuntos e Funções

O texto apresentado neste documento é uma adaptação de:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_conjuntos

https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica)

Alguns conceitos matemáticos que serão úteis no curso são abordados, como conjuntos e funções.

Conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos. A relação básica entre um objeto e o conjunto é a relação de pertinência: quando um objeto *x* é um dos elementos que compõem o conjunto *A*, dizemos que *x* pertence a *A*. Nos conjuntos, a ordem e a quantidade de vezes que os elementos estão listados na coleção não é relevante.

A notação padrão em Matemática lista os elementos separados por vírgulas e delimitados por chaves. Um certo conjunto *A*, por exemplo, poderia ser representado como:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Um certo conjunto *A* também fica definido (ou determinado, ou caracterizado) quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário pertence ou não a *A*. Por exemplo, a frase "*B é o conjunto dos triângulos retângulos*" define perfeitamente o conjunto *B*, já que permite decidir se um objeto qualquer é ou não elemento de *B*. O mesmo conjunto *A* do parágrafo anterior poderia ser representado por uma regra como:

$$A = \left\{ x \,|\, x \text{ é um número inteiro tal que } 0 < x < 4 \right\}$$

ou ainda:

$$A = \left\{ x \,:\, x \text{ é um número natural tal que } 1 \leq x \leq 3 \right\}$$

Note que as propriedades ou descrições de um conjunto são representadas dentro das {}, após os elementos e separadas destes por : ou por |. Também é possível representar graficamente os conjuntos. O Diagrama de Venn-Euler é a representação gráfica dos conjuntos, através de entidades geométricas.

Conceitos essenciais:

- **Conjunto**: representa uma coleção de objetos, geralmente representado por letras maiúsculas;
- **Elemento**: qualquer um dos componentes de um conjunto, geralmente representado por letras minúsculas;
- **Pertinência**: é a característica associada a um elemento que faz parte de um conjunto. Se *a* é um elemento do conjunto *A*, podemos dizer que o elemento *a* pertence ao conjunto *A* e podemos escrever $a \in A$. Se *a* não é um elemento de *A*, nós podemos dizer que o elemento *a* não pertence ao conjunto *A* e podemos escrever $a \notin A$.

Conjunto vazio

É o conjunto que não possui elemento. Ele é representado pelos símbolos { } ou $\emptyset$.

Cardinalidade

Se um conjunto tem *n* elementos, onde *n* é um número natural (possivelmente 0), então diz-se que o conjunto é um conjunto finito com uma cardinalidade de *n*. A cardinalidade de um conjunto *A* é denotada por $|A|$.

Conjunto potência ou das partes

O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto *A* é chamado de conjunto potência (ou conjunto das partes) de *A*, denotado por *P(A)*. Sendo o conjunto *A* finito, com *n* elementos, prova-se que o número de subconjuntos ou o número de elementos do conjunto potência ou conjunto das partes de *A* é 2^n, ou seja, a cardinalidade do conjunto das partes de *A* é igual a 2^n. É usual representar-se *P(A)* por 2^A.

Produto cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos *A* e *B* é o conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Operações com conjuntos

Operação	Operador	Definição
União	$\cup$	$A \cup B = \{\forall x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Interseção	$\cap$	$A \cap B = \{\forall x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Complemento	$\overline{A}$ ou A^c	$A^c = \{\forall x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$
Diferença	$\setminus$ ou -	$A \setminus B = \{\forall x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Leis de DeMorgan:

i) $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

ii) $\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

Propriedades de operações binárias:

Propriedade	Definição	
Fechamento	Uma operação binária # é fechada em um conjunto S se:	$\forall$ a,b $\in$ S, (a # b) $\in$ S.
Identidade	Uma identidade para # sobre S é um elemento e em S para o qual:	$\forall x,\ (x \# e) = x \wedge\ (e \# x) = x$
Comutatividade	Uma operação binária # é comutativa se:	$\forall x \forall y,\ (x \# y) = (y \# x)$
Associatividade	Uma operação binária # é associativa se:	$\forall x, \forall y, \forall z,\ x \# (y \# z) = (x \# y) \# z$
Distributividade	Uma operação binária $ é dita distributiva sobre # se:	$\forall x \forall y \forall z,\ x \$ (y \# z) = (x \$ y) \# (x \$ z)$ $\forall x \forall y \forall z,\ (x \# y) \$ z = (x \$ z) \# (y \$ z)$
Elemento Inverso	Seja e a identidade para # sobre S. O elemento x-1 é um inverso de x com respeito a # sobre S se:	$\forall x\ (x \# x^{-1}) = e, (x^{-1} \# x) = e$

Para refletir:

Que propriedades de operações binárias se aplicam a cada operação com conjuntos estudada?

Funções

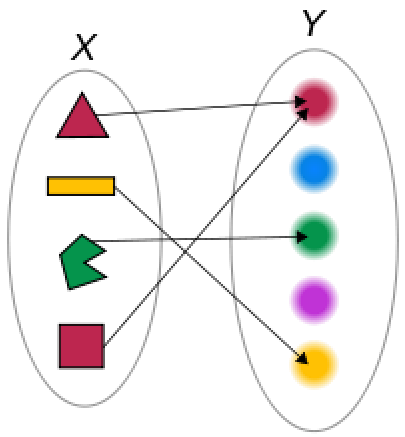
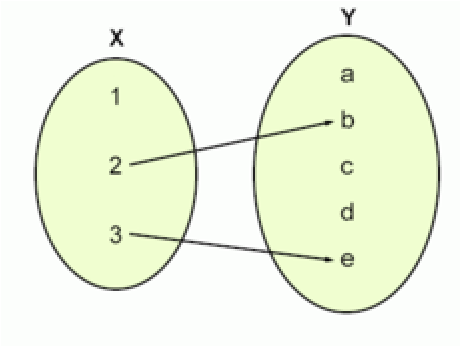
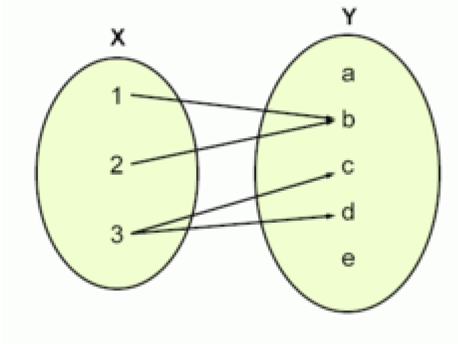
Uma função é uma relação de um conjunto A com um conjunto B. Usualmente, denotamos uma tal função por

$$f: A \to B, \quad y = f(x)$$

onde *f* é o nome da função, *A* é chamado de domínio, *B* é chamado de contra-domínio e *y=f(x)* expressa a lei de correspondência (relação) dos elementos $x \in A$ com os elementos $y \in B$.

Seja *P* o conjunto dos pares ordenados {(*a,b*) $\in A \times B$; *a* se relaciona com *b* por *f*}. Então f é uma função se, e somente se, $\forall a \in A$ existe no máximo um $b \in B$ tal que *a* se relaciona com *b*.

Exemplos:

		
Função que associa objeto a sua cor.	Função parcial (não definida para todos os elementos do domínio).	Esta não é uma função, pois “3” se relaciona com mais de um elemento do contra-domínio.