Definições Recursivas e Indução Matemática

O texto apresentado neste documento é uma adaptação (tradução) de:

Thomas A. Sudkamp. 1997. Languages and machines: an introduction to the theory of computer science. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., USA.

1. Definições Recursivas

Uma definição recursiva de um conjunto *X* especifica um método para construir os elementos do conjunto. A definição utiliza dois componentes: a base e um conjunto de operações. A base consiste em um conjunto finito de elementos que são explicitamente designados como membros de *X*. As operações são usadas para construir novos elementos do conjunto a partir dos membros previamente definidos. O conjunto definido recursivamente *X* consiste em todos os elementos que podem ser gerados a partir dos elementos básicos por um número finito de aplicações das operações.

A palavra-chave no processo de definição recursiva de um conjunto é *gerar*. Claramente, nenhum processo pode listar o conjunto completo de números naturais. Qualquer número particular, entretanto, pode ser obtido começando com zero e construindo uma sequência inicial dos números naturais. Essa ideia é formalizada na definição seguinte, onde é usada uma função sucessor *s* que retorna o inteiro imediatamente seguinte ao fornecido.

Definição 1.1

Uma definição recursiva de *N*, o conjunto de números naturais, é construída usando a função sucessor *s*.

i) Base: $0 \in N$.

ii) Passo recursivo: Se $n \in N$, then $s(n) \in N$.

iii) Fechamento: $n \in N$ se, e somente se, pode ser obtido a partir de 0 por um número finito de aplicações da operação *s*.

A base afirma explicitamente que 0 é um número natural. Em (ii), um novo número natural é definido em termos de um número previamente definido e da operação *sucessor*. A seção *fechamento* garante que o conjunto contenha apenas os elementos que podem ser obtidos a partir de 0 usando a função sucessor.

A Definição 1.1 gera uma sequência infinita 0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))),... Essa sequência é geralmente abreviada como 0, 1, 2, 3,.... No entanto, qualquer coisa que possa ser feita com os numerais arábicos familiares também pode ser feita com a representação não abreviada mais complicada.

A essência de um procedimento recursivo é definir processos ou estruturas complicadas em termos de instâncias mais simples do mesmo processo ou estrutura. No caso dos números naturais, "mais simples" geralmente significa menor. A etapa recursiva da Definição 1 define um número em termos de seu predecessor.

Os números naturais foram aqui definidos de forma recursiva, mas o que significa entender suas propriedades? Normalmente associamos operações de adição, multiplicação e subtração aos números naturais. Podemos ter aprendido isso pela força bruta, seja por meio da memorização ou da tediosa repetição. Não se pode memorizar a soma de todas as combinações possíveis de números naturais, mas podemos usar a recursão para estabelecer um método pelo qual a soma de quaisquer dois números pode ser calculada mecanicamente. A função *sucessor s* é a única operação nos números naturais que foi introduzida. Assim, a definição de adição que iremos apresentar vai usar apenas 0 e *s*.

Definição 1.2

Nesta definição recursiva da adição de *m* e *n*, a recursão é feita em *n*, o segundo argumento da operação.

i) Base: Se $n = 0$, então $m + n = m$.

ii) Passo recursivo: $m + s(n) = s(m + n)$.

iii) Fechamento: $m + n = k$ se, e somente se, essa igualdade puder ser obtida a partir de $m + 0 = m$ usando um número finito de aplicação do passo recursivo.

A etapa de fechamento é frequentemente omitida de uma definição recursiva de uma operação em um determinado domínio, quando se assume que a operação é definida para todos os elementos do domínio. Assumindo que a operação de adição dada acima é definida para todos os elementos de N x N, poderíamos simplesmente omitir a seção de fechamento. Vamos adotar essa abordagem em outras definições recursivas, daqui para frente.

Na Definição 1.2, a soma de *m* e o sucessor de *n* é definida em termos do caso mais simples, a soma de *m* e *n*, e a função sucessor. A escolha de *n* como operando recursivo foi arbitrária; a operação também poderia ter sido também definida em termos de *m*, com *n* fixo.

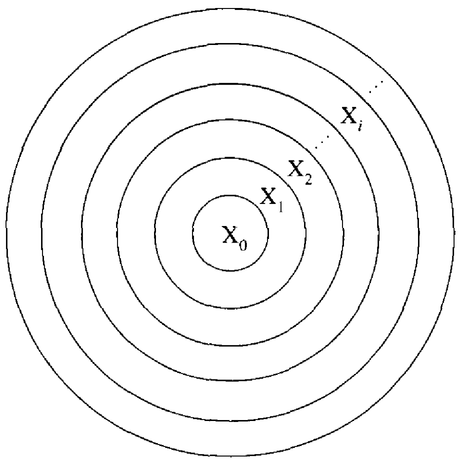
Seguindo a construção dada na Definição 2, a soma de quaisquer dois números naturais pode ser calculada usando 0 e *s*, as primitivas usadas na definição dos números naturais. O Exemplo 1 rastreia o cálculo recursivo de 3 + 2.

Exemplo 1.1

Os números 3 e 2 abreviam *s(s(s(0)))* e *s(s(0))*, respectivamente. A soma é calculada recursivamente por:

$$
\begin{aligned}
s(s(s(0))) + s(s(0) \quad &= s(s(s(s(0))) + s(0)) \\
&= s(s(s(s(s(0))) + 0)) \\
&= s(s(s(s(s(0)))))
\end{aligned}
$$

O valor final é a representação do número 5. ❑



Geração recursiva de X:

X_0 = {x I x é um elemento base}

X_{i+1} = X_i U {x | x pode ser gerado por i + 1 operações}

X = {x I $x \in X$j para algum j >0}

Figura 1: Sequência aninhada de conjuntos em definição recursiva.

A Figura 1 ilustra o processo de geração recursiva de um conjunto X a partir da base X_0. Cada um dos círculos concêntricos representa uma etapa da construção. X_1 representa os elementos básicos e os elementos que podem ser obtidos a partir deles usando uma única aplicação de uma operação definida na etapa recursiva. X_i contém os elementos que podem ser construídos com i ou menos operações. O processo de geração na parte recursiva da definição produz uma sequência infinita contável de conjuntos aninhados. O conjunto X pode ser pensado como a união infinita dos X_i 's.

Seja x um elemento de X e seja X_j o primeiro conjunto em que x ocorre. Isso significa que x pode ser construído a partir dos elementos de base usando exatamente j aplicações dos operadores. Embora cada elemento de X possa ser gerado por um número finito de aplicativos dos operadores, não há limite superior no número de aplicativos necessários para gerar todo o conjunto X. Esta propriedade, geração usando um número finito, mas ilimitado de operações, é uma propriedade fundamental das definições recursivas.

2. Indução Matemática

O estabelecimento de relações entre elementos e operações em conjuntos requer a capacidade de construir provas para verificar propriedades hipotéticas. É impossível provar que uma propriedade é válida para cada membro de um conjunto infinito, considerando cada elemento individualmente. O Princípio da Indução Matemática (ou Indução Finita) fornece condições suficientes para provar que uma propriedade é válida para todos os elementos em um conjunto definido recursivamente. A indução usa a família de conjuntos aninhados gerados pelo processo recursivo para estender uma propriedade da base para todo o conjunto.

Princípio da indução matemática

Seja X um conjunto definido recursivamente com base X_0 e seja X_0, X_1 , X_2 ,. . . , X_i , a sequência de conjuntos gerados pelo processo recursivo. Seja P uma propriedade definida nos elementos de X. Se puder ser mostrado que

i) P vale para cada elemento em X_0,

ii) sempre que P for válido para todo elemento nos conjuntos X_0, X_1, . . . , X_i , P também vale para todo elemento em X_{i+1} ,

então, pelo princípio da indução matemática, P vale para todo elemento em X.

A correção do princípio da indução matemática pode ser exibida intuitivamente usando a sequência de conjuntos construída por uma definição recursiva. Sombrear o círculo X_i indica que P vale para todos os elementos de X_i. A primeira condição requer que o conjunto interno seja sombreado. A condição (ii) afirma que o sombreamento pode ser estendido de qualquer círculo para o próximo círculo concêntrico. As Figuras 2(a) e 2(b) ilustram como esse processo eventualmente sombreia todo o conjunto X.

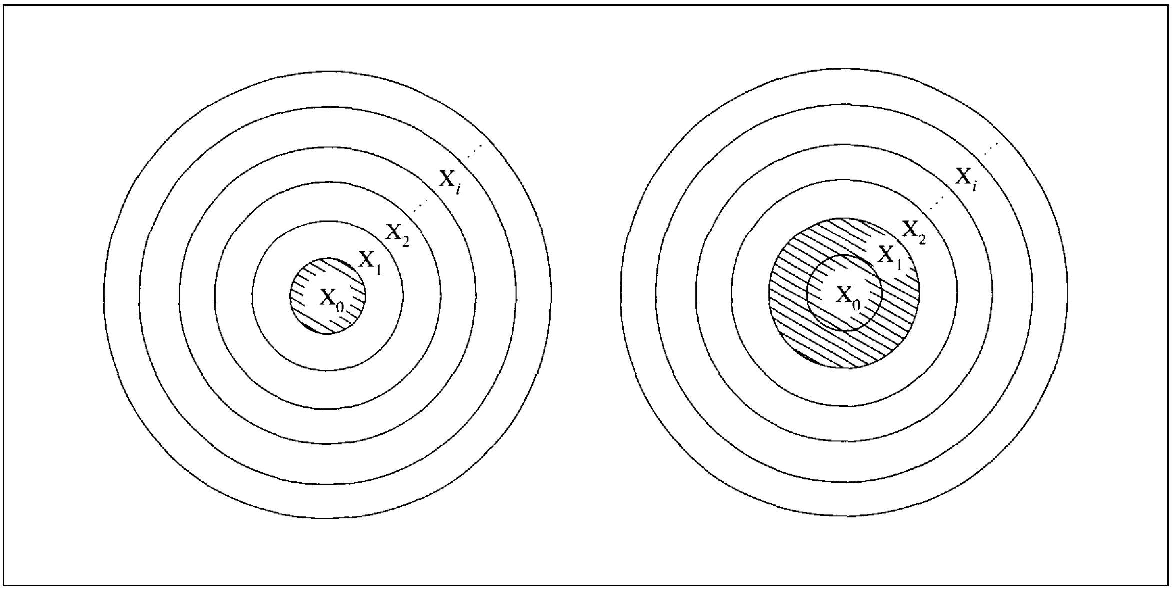


Figura 2(a): Indução matemática - início de verificação da propriedade.

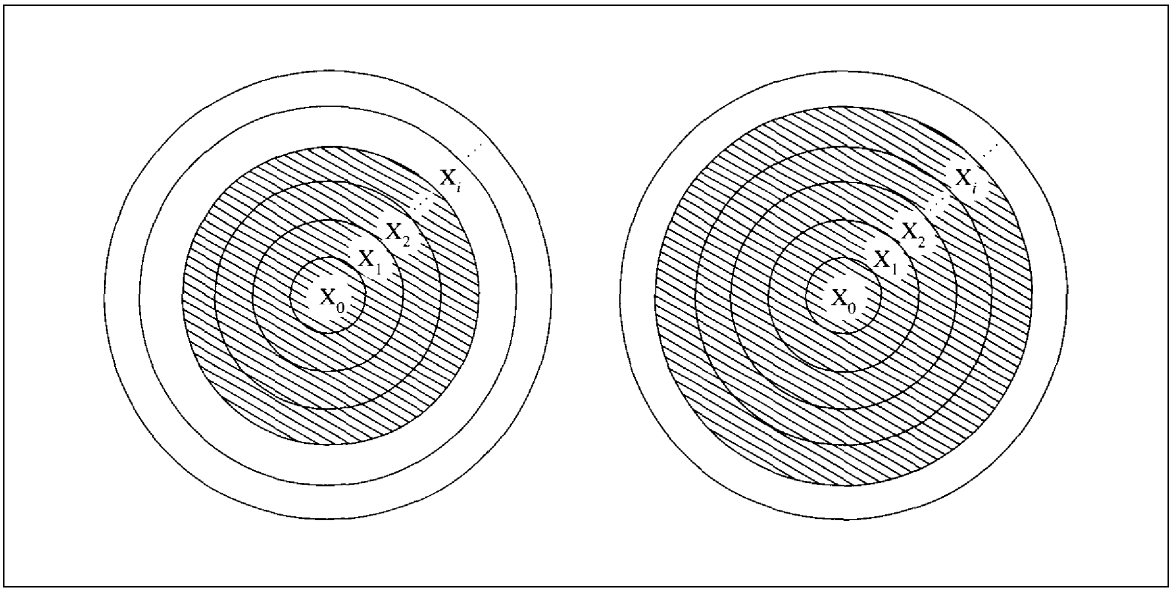


Figura 2(b): Princípio da Indução Matemática – estendendo verificação da propriedade.

Uma prova indutiva consiste em três etapas distintas. O primeiro passo é provar que a propriedade *P* é válida para cada elemento de um conjunto base. Isso corresponde a estabelecer a condição (i) na definição do princípio da indução matemática. O segundo é o enunciado da hipótese indutiva. A hipótese indutiva é a suposição de que a propriedade *P* é válida para todos os elementos dos conjuntos X_0, X_1, . . . , X_i . O passo indutivo então prova, usando a hipótese indutiva, que *P* pode ser estendido para cada elemento em X_{i+1}. A conclusão da etapa indutiva satisfaz os requisitos do princípio da indução matemática. Assim, pode-se concluir que *P* é verdadeiro para todos os elementos de *X*.

Para ilustrar as etapas de uma prova indutiva, usamos os números naturais como o conjunto subjacente definido recursivamente. Ao estabelecer propriedades de números naturais, geralmente ocorre que a base consiste no único número natural zero. Uma definição recursiva deste conjunto com base {0} é dado na Definição 1. O Exemplo 2 mostra que isso não é necessário; uma prova indutiva pode ser iniciada usando qualquer número n como base. O princípio da indução matemática então nos permite concluir que a propriedade é válida para todos os números naturais maiores ou iguais a *n*.

Exemplo 2.1

Indução é usada para provar que $0 + 1 + ... + n = n(n + 1)/2$. Usando notação de somatório, essa expressão pode ser escrita como:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Base: A base é n=0. A relação é confirmada calculando-se os valores dos 2 lados da igualdade.

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Hipótese Indutiva: Para todos os valores *k = 1, 2, ..., n*, assumir que

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Passo Indutivo: Precisamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

A hipótese indutiva estabelece o resultado da soma da sequência contendo *n* ou menos inteiros. Combinando a hipótese indutiva com as propriedades de adição, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i==0}^{n} i + (n+1) && \text{(associatividade de +)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(hipótese indutiva)} \\
&= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) && \text{(propriedade distributiva)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Uma vez que as condições do princípio de indução matemática foram estabelecidas, concluímos que a propriedade é válida para todos os números naturais. ❑

Exemplo 2.2

$n! > 2^n$, para $n \geq 4$.

Base: *n*=4. 4! = 24 > 16 = 2^4.

Hipótese de indução: Assuma que $k! > 2^k$, para todos os valores *k*=4, 5, ..., *n*.

Passo indutivo: Temos que provar que $(n+1)! > 2^{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= n!\,(n+1) \\
&> 2^n(n+1) && \text{(hipótese indutiva)} \\
&> 2^n 2 && \text{(já que } n+1 > 2\text{)} \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

❑