TRABALHO 3 - PRODUTO CARTESIANO E RELAÇÕES

1- $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x = \frac{2k-1}{3}, k \in \mathbb{Z}^+\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x^2 + 1 \leq 12\} = \{0, 1, 2, 3\}$

Queremos determinar o valor de $(A \cap B) \times (B - A)$. Para isso vamos achar quais elementos em comum de B e A, para isso iremos substituir o x de A por cada valor B, de uma maneira que se $k \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x \in A$:

$B = \{\overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{2}, \overset{4}{3}\}$

1- $x = 0 = \frac{2k-1}{3} \Rightarrow 2k - 1 = 0$

$2k = 1$

$\boxed{k = 1/2} \notin \mathbb{Z}$, logo $x = 0 \notin A$ //

2- $x = 1 = \frac{2k-1}{3} \Rightarrow 2k - 1 = 3$

$2k = 4$

$k = 2 \in \mathbb{Z}$, logo $= x = 1 \in A$ //

3- $x = 2 = \frac{2k-1}{3} \Rightarrow 2k - 1 = 6$

$2k = 7$

$k = 7/2 \notin \mathbb{Z}$, logo $x = 2 \notin A$

4- $x = 3 = \frac{2k-1}{3} \Rightarrow 2k - 1 = 9$

$2k = 10$

$k = 5 \in \mathbb{Z}$, logo $x = 3 \in A$

A partir daí, concluímos que $1, 3 \in A$ e $0, 2 \notin A$. A definição de interseção nos diz que $x \in A$ e $x \in B$, com isso $(A \cap B) = \{1, 3\}$ (elementos que pertencem a A e a B) e a definição de diferença nos diz que $x \in B$ e $x \notin A$, com isso $(B - A) = \{0, 2\}$ (elementos que estão em B e não estão em A). Portanto:

$(A \cap B) \times (B - A)$

$\{1, 3\} \times \{0, 2\}$, por definição de produto cartesiano:

$\Rightarrow (A \cap B) \times (B - A) = \{(1,0), (1,2), (3,0), (3,2)\}$ //

2- Sejam A, B, D conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset D$.

a) Mostre que $A \times (B \cup E) \subset B \times (D \cup E)$

Seja $(x, y) \in A \times (B \cup E)$, por definição de produto cartesiano, temos:

$x \in A$ e $y \in B \cup E$

$x \in A$ e $y \in B$ ou $y \in E$: por definição de união

Pelo enunciado, temos que $x \in A \rightarrow x \in B$ $(A \subset B)$ e $y \in B \rightarrow y \in D$ $(B \subset D)$, então:

$x \in B$ e $y \in D$ ou $y \in E$: pelo enunciado

$x \in B$ e $y \in (D \cup E)$: por definição de união

$(x, y) \in B \times (D \cup E)$: por definição de produto cartesiano.

Provamos que $(x, y) \in A \times (B \cup E) \rightarrow (x, y) \in B \times (D \cup E)$, logo, por definição de inclusão: $A \times (B \cup E) \subset B \times (D \cup E)$.

b) Mostre que $P(A \cup D) \times P(B) \subset P(D) \times P(D)$

Sabemos pelo enunciado que $A \subset B$ e $B \subset D$, por transitividade da inclusão temos que $A \subset D$. Assim, seja $(X, Y) \in P(A \cup D) \times P(B)$, por definição de produto cartesiano:

$X \in P(A \cup D)$ e $Y \in P(B)$

$X \subset (A \cup D)$ e $Y \subset B$: por definição de conjunto de partes.

Assim: $a \in X \rightarrow a \in (A \cup B)$ e $b \in Y \rightarrow a \in B$. Contudo, temos pelo enunciado que $a \in A \rightarrow a \in D$ $(A \subset D)$ e $a \in B \rightarrow a \in D$. Então: $a \in X \rightarrow a \in A$ ou $a \in B$ (definição de união) e $a \in Y \rightarrow a \in B$. Pelas informações do enunciados:

$a \in X \rightarrow a \in D$ ou $a \in D$ e $a \in Y \rightarrow a \in D$

$a \in X \rightarrow a \in D$ e $a \in Y \rightarrow a \in D$: por idempotência

$X \subset D$ e $Y \subset D$: por definição de inclusão

$X \in P(D)$ e $Y \in P(D)$: por definição de conjunto de partes

$(X, Y) \in P(D) \times P(D)$: por definição de produto cartesiano.

Provamos que $(X, Y) \in P(A \cup D) \times P(B) \rightarrow (X, Y) \in P(D) \times P(D)$, logo, por definição de inclusão: $P(A \cup D) \times P(B) \subset P(D) \times P(D)$.

3 DA AV3 - Mostrar ou dar contraexemplo: $(A^c \cup B^c) \times C^c \subset [(A \cap B) \times C]^c$, $\forall A, B, C$

$(A^c \cup B^c) \times C^c$

$(A \cap B)^c \times C^c$: por lei de Morgan

Temos uma propriedade de produto cartesiano: $D^c \times E^c \subset (D \times E)^c$. Logo:

$(A \cap B)^c \times C^c \subset [(A \cap B) \times C]^c$ //

4-B DA AV3 - Estabelecer o valor de verdade de: "Se R é simétrica, então $R \cap T = R^{-1} \cap T$".

Se R é simétrica, por definição de relação simétrica, para qualquer $(x,y) \in R$ implica que $(y,x) \in R$ também, logo $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$. Por definição de inversa, qualquer $(x,y) \in R$ implica que $(y,x) \in R^{-1}$ e por R ser simétrica, $(y,x) \in R$ implica que $(x,y) \in R^{-1}$. Portanto podemos concluir que $R = R^{-1}$, pois $R \subset R^{-1}$ e $R^{-1} \subset R$. Assim, provamos como VERDADE a expressão $R \cap T = R^{-1} \cap T$, $\forall T$. Como é uma proposição simples verdadeira implicando a outra proposição simples verdadeira, o valor de verdade proposição composta $p \to q$, sendo p: R é simétrica e q: $R \cap T = R^{-1} \cap T$, é VERDADEIRO //