Departamento de Matemática - UFV

MAT 131-Introdução à Álgebra

LÓGICA PROPOSICIONAL

Por lógica, entendemos o estudo dos processos válidos do raciocínio humano e automatizado. A lógica se aplica, por exemplo: no desenvolvimento de máquinas de computação, linguagens de programação, inteligência artificial, na compreensão de argumentos (matemáticos, físicos, químicos, etc) corretos, através da análise de proposições e suas componentes, ou seja, uma demonstração.

Existem dois tipos de raciocínio importantíssimos: o indutivo e o dedutivo.

Iniciamos este estudo com aspectos essenciais da lógica proposicional (desenvolvida por primeira vez, de forma sistemática, pelo filósofo grego Aristóteles), através do uso de uma simbologia adequada.

Definição 1 (Proposição) *Uma Proposição é um enunciado ou sentença declarativa cuja propriedade fundamental é a de ser* **verdadeira***, V, ou* **falsa***, F, mas não ambos valores simultaneamente.*

Uma proposição será representada por letras minúsculas e quando necessário usaremos subíndices para distinguir uma da outra.

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t, \quad , \ldots$$

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots \quad , \quad p_n$$

Escrevemos $v(p) = V$ ou $v(p) = F$, para indicar o valor de verdade de uma proposição.

O "valor de verdade"pode ser vista como uma função definida no conjunto $P = \{p : p \quad \text{é uma proposição}\}$ de todas as proposições e com valores no conjunto $\mathcal{F} = \{V, F\}$, ou seja, $v : P \longrightarrow \mathcal{F}$.

Exemplo 1 *Os seguintes enunciados são proposições:*

(a) Belo Horizonte é a capital do estado de Minas Gerais.

(b) Para toda força corresponde uma força de reação de igual intensidade e no mesmo sentido da primeira.

(c) $2 + 3 > 10 - 4$

(d) O número 1331 é divisível por 11.

Solução: *De fato, cada um dos enunciados tem um valor de verdade definido. Para verificar isto, vamos dar nome a cada enunciado. Sejam p, q, r, t, respectivamente, cada um dos enunciados dados.*

$v(p) = V$, *pois assim define o governo do estado de Minas Gerais.*
$v(q) = F$, *pois o enunciado é contrário à terceira lei de Newton.*
$v(r) = F$, *uma vez que 5 não é maior que 6.*
$v(t) = V$, *uma vez que* $1331 = 11 \times 121$

Exemplo 2 *As sentenças declarativas a seguir não são proposições*

(a) *Você estuda na UFV?*

(b) *Preste atenção nas aulas!*

(c) $x + 3 \geq 3$

(d) $3x + 2y = 10$

Solução: *De fato,*
A sentença em (a) é uma interrogação para a qual não pode ser atribuído um valor de verdade.
A sentença em (b) é uma exclamação que carece de valor de verdade.
A sentença em (c) é uma desigualdade, cujo valor de verdade depende do valor de x.
A sentença em (d) define uma reta, cujo valor de verdade depende dos valores de x *e* y.

Exemplo 3 *Decida quais das sentenças a seguir são proposições, justificando sua resposta.*

(a) *Por um ponto de uma reta passa uma e somente uma reta perpendicular a ela.*

(b) *Ela está jogando futebol.*

(c) *João está jogando tênis.*

(d) $x = 2$ *é solução da equação* $x^2 - 2x = 0$.

(e) *Qual é sua idade?*

(f) $x^2 + 1 < 0$ *para todo número real* x.

(g) $ax^2 + bx + c = 0$.

(h) $\cos(x) = sen(x)$.

(i) *A função* f *dada por* $f(x) = x$ *é injetora.*

Solução:

(a) *É uma proposição já que esta afirmação é um dos cinco postulados (de Euclides) válidos da geometria plana. O valor de verdade desta proposição é V.*

(b) *Não é uma proposição, pois o sujeito "ela" não define claramente quem é a pessoa e daqui não se pode atribuir um valor de verdade ao enunciado.*

(c) *É uma proposição, pois será verdadeira se João está jogando tênis e falsa em caso contrário.*

(d) *É uma proposição verdadeira, pois* $x = 2$ *é raiz da equação proposta.*

(e) *Não é uma proposição, pois não tem como associar um valor de verdade a essa pergunta.*

(f) *É uma proposição que é falsa para quaisquer* $x \in \mathbb{R}$.

(g) *Não é uma proposição. É uma equação cujo valor de verdade depende dos valores da variável* x.

(h) *Não é uma proposição. É uma equação cujo valor de verdade depende dos valores da variável x.*

(i) *É uma proposição, cujo valor de verdade é V, pois satisfaz a definição de função injetora. Vejamos: para quaisquer dois pontos $x_1 \neq x_2$ no domínio de f, temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

Na lógica proposicional distinguimos dois tipos de proposições:

1. **Proposição Simples:** Possui um único sujeito e único complemento.

2. **Proposição Composta:** Composta por várias proposições simples ligadas por operadores ou conectivos lógicos.

Observações:

1. O valor de verdade de uma proposição composta depende dos valores de verdade das proposições simples que a compõem.

2. Uma proposição composta constituída de n proposições simples permite fazer 2^n combinações possíveis para obter o seu valor de verdade.

3. Usamos tabela-verdade para obter o valor de verdade de uma proposição composta. No entanto, recomenda-se fazer isto somente para valores pequenos de n.

CONECTIVOS OU OPERADORES LÓGICOS:

1. **Negação ($\sim$):** Dada uma proposição p, sua negação é a proposição $\sim p$, cuja leitura é "não é o caso de p". O valor de verdade de $\sim p$ é contrário ao valor de verdade de p.

   Trata-se de uma operação *unária*, isto é, opera sobre uma proposição.

2. **Conjunção ($\wedge$):** Dadas duas proposições p e q, a conjunção de p e q é a proposição $p \wedge q$, cuja leitura é "p e q", Seu valor de verdade é verdadeiro unicamente quando ambas as proposições são verdadeiras.

   Trata-se de uma operação *binária*, isto é, opera sobre duas proposições.

3. **Disjunção Inclusiva ($\vee$):** Dadas duas proposições, a disjunção de p e q é a proposição $p \vee q$, cuja leitura é "p ou q". Seu valor de verdade é falso unicamente quando ambas as proposições são falsas.

   Trata-se de uma operação *binária*, isto é, opera sobre duas proposições.

4. **Condicional ($\longrightarrow$):** Dadas duas proposições p e q, a condicional de p e q é a proposição $p \longrightarrow q$, a qual é falsa unicamente quando $v(p) = V$ e $v(q) = F$.

   Trata-se de uma operação *binária*, isto é, opera sobre duas proposições.

Em $p \longrightarrow q$: p é dito antecedente/premissa/hipótese e q consequente/tese/conclusão. A leitura de $p \longrightarrow q$ é: "se p então q", "p implica q", "p, somente se q", "q, se p", "p é condição suficiente para q"

5. **Bicondicional ($\longleftrightarrow$):** Dadas duas proposições p e q, a bicondicional de p e q é a proposição $p \longleftrightarrow q$, a qual é verdadeira unicamente quando $v(p) = (q)$.

   Trata-se de uma operação *binária*, isto é, opera sobre duas proposições.

   A leitura de $p \longleftrightarrow q$ é: "p se, e somente se, q", "p é condição necessária e suficiente para q".

6. **Disjunção Exclusiva ($\triangle$):** Dadas duas proposições p e q, a disjunção exclusiva de p e q é a proposição $p\triangle q$, cuja leitura é "p ou q". Esta proposição só é verdadeira se $v(p) \neq v(q)$.

   Trata-se de uma operação *binária*, isto é, opera sobre duas proposições.

   A disjunção que frequentemente usamos é a inclusiva $\vee$.

Tabela-Verdade dos operadores lógicos

		Negação	Conjunção	Disjunção	Condicional	Bicondicional	Disj. Exc.
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$p\triangle q$
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F

Exemplo 4 *Considerando p : 7 é maior que 9 e q : 4 é menor que 5. Determinar o valor de verdade de $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p\triangle q$.*

Solução:
Notamos que $v(p) = F$ e $v(q) = V$. Logo, $v(p \wedge q) = F$, $v(p \vee q) = V$, $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(p\triangle q) = V$.

Exemplo 5 *Determine o valor de verdade da seguinte afirmação: Não é verdade que 5 é maior que 2 ou que todo número ímpar é par.*

Solução: *Sejam p : 5 é maior que 2 e q : Todo número ímpar é par. Usando lógica simbólica o enunciado se escreve $\sim (p \vee q)$. Claramente, $v(p) = V$, $v(q) = F$ e $v(p \vee q) = V$. Logo, o valor de verdade da afirmação é F.*

Exemplo 6 *Determine o valor de verdade da seguinte afirmação: 16 é múltiplo de 2 uma vez que 16 é um número par.*

Solução: *Sejam p : 16 é múltiplo de 2 e q : 16 é número par. Usando lógica simbólica, o enunciado se escreve $q \longrightarrow p$. Claramente, $v(p) = v(q) = V$. Logo, o valor de verdade da afirmação é V.*

Exemplo 7 *Considere as proposições* p *: 3 é um número par,* q *: 5 é maior do que 2,* r *: todo número primo é ímpar. Escreva em português a seguinte proposição:* $\sim [(\sim r \wedge p) \wedge q]$.

Solução: *A proposição* $(\sim r \wedge p) \wedge q$ *é traduzida para "3 é par, 5 é maior que 2 e nem todo número primo é ímpar". Daqui,* $\sim [(\sim r \wedge p) \wedge q]$ *se traduz para "não é verdade que 3 seja par, que 5 seja maior do que 2 e que nem todo número primo seja ímpar".*

Exemplo 8 *Sejam as proposições* p, q *e* r *tais que* $v(p) = v(q) = F$ *e* $v(r) = V$. *Determine o valor de verdade das seguintes proposições: (a)* $p \longrightarrow \sim (q \vee r)$, *(b)* $\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim r \wedge p)$ *e (c)* $\sim (q \longrightarrow \sim r) \longrightarrow (\sim p \longrightarrow r)$.

Solução: *Como* $v(p) = v(q) = F$ *e* $v(r) = V$ *temos:*

(a) $v(q \vee r) = v(F \vee V) = V$, *logo* $v[\sim (q \vee r)] = F$. *De onde,*
$v[p \longrightarrow \sim (q \vee r)] = v[F \longrightarrow F] = V$.

(b) $v(p \wedge \sim q) = v(F \wedge V) = F$ *e* $v(\sim r \wedge p) = v(F \wedge F) = F$. *Logo,*
$v[\sim (p \wedge \sim q) \longrightarrow (\sim r \wedge p)] = v(V \longrightarrow F) = F$.

(c) $v(q \longrightarrow \sim r) = v(F \longrightarrow F) = V$ *e* $v(\sim p \longrightarrow r) = v(V \longrightarrow V) = V$. *Logo,*
$v[\sim (q \longrightarrow \sim r) \longrightarrow (\sim p \longrightarrow r)] = v(F \longrightarrow V) = V$.

Exemplo 9 *Sejam* p, r *proposições e* q *: 4 é um número ímpar. Se* $\sim [(r \vee q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)]$ *é verdadeira. Determine o valor de verdade de* $[r \longleftrightarrow (p \wedge q)] \longleftrightarrow (q \wedge \sim p)$.

Solução: *Pelos dados do enunciado,* $v(q) = F$ *e* $v((r \vee q) \longrightarrow (r \longrightarrow p)) = F$. *Desta última parte,* $v(r \vee q) = V$ *e* $v(r \longrightarrow p) = F$. *Daqui resulta que* $v(r) = V$ *e* $v(p) = F$. *Portanto,* $v\left([r \longleftrightarrow (p \wedge q)] \longleftrightarrow (q \wedge \sim p)\right) = v([V \longleftrightarrow (F \wedge F)] \longleftrightarrow (F \wedge V)) = V$.

OBSERVAÇÃO: Para toda proposição condicional $p \longrightarrow q$ associam-se três proposições igualmente importantes:

1. **Proposição Recíproca:** $q \longrightarrow p$.
2. **Proposição Inversa:** $\sim p \longrightarrow \sim q$.
3. **Proposição Contrapositiva:** $\sim q \longrightarrow \sim p$.

Exemplo 10 *Seja $p \longrightarrow q$ a proposição "Se x é par, então é divisível por 2". Obtenha as proposições recíproca, inversa e contrapostiva.*

<u>**Solução:**</u> *A proposição recíproca é $q \longrightarrow p$: "Se x é divisível por 2, então é x é par".*
A proposição inversa é $\sim p \longrightarrow \sim q$: "Se x não é par, então não é divisível por 2".
A proposição contrapostiva é $\sim q \longrightarrow \sim p$: "Se x não é divisível por 2, então x não é par".

Exemplo 11 *Se a inversa de $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow (q \vee \sim r)$ é falsa. Determine o valor de verdade da contrapostiva.*

<u>**Solução:**</u> *A inversa de $[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow (q \vee \sim r)$ é $\sim [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] \longrightarrow \sim (q \vee \sim r)$. Como a inversa é falsa, temos $v[(p \wedge q) \vee (q \wedge r)] = F$ e $v(q \vee \sim r) = V$.*
Daqui, a proposição contrapostiva $\sim (q \vee \sim r) \longrightarrow \sim [(p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$, tem valor de verdade V.

Exemplo 12 *Sob quais condições a inversa e a recíproca de $p \longrightarrow q$ tem o mesmo valor de verdade?*

<u>**Solução:**</u> *A inversa, $\sim p \longrightarrow \sim q$, é falsa somente se $v(\sim p) = V$, $v(\sim q) = F$, isto é, somente se $v(p) = F$ e $v(q) = V$. E, verdadeira nos demais casos.*
A recíproca, $q \longrightarrow p$, é falsa somente se $v(q) = V$ e $v(p) = F$. E, verdadeira nos demais casos.
Portanto, independente dos valores de verdade de p e q, $v(\sim p \longrightarrow \sim q) = v(q \longrightarrow p)$.

Isto pode ser visto também via tabela-verdade. Deixamos como exercício para o estudante.

Exemplo 13 *A recíproca e a contra recíproca de $p \longrightarrow q$ tem o mesmo valor de verdade?*

<u>**Solução:**</u> *Não, pois se $v(q) = F$ e $v(p) = V$ temos que $v(q \longrightarrow p) = v(F \longrightarrow V) = V$ e $v(\sim q \longrightarrow \sim p) = v(V \longrightarrow F) = F$.*

Isto também pode ser comprovado via tabela-verdade. Exercício para o estudante.

Exemplo 14 *É verdade que a negação de $p \triangle q$ é $p \longleftrightarrow q$?*

<u>**Solução:**</u> *Sim.*
$v(p \triangle q) = F$ somente se $v(p) = V = v(q)$ e $v(p) = v(q) = F$. Logo, $v[\sim (p \triangle q)] = V$ nesses valores de p e q, que é exatamente quando $v(p \longleftrightarrow q) = V$.
$v(p \triangle q) = V$ somente se $v(p) \neq v(q)$. Logo, $v[\sim (p \triangle q)] = F$ quando p e q assumem valores de verdade diferentes, que é exatamente quando $v(p \longleftrightarrow) = F$.
Portanto, $\sim (p \triangle q) = p \longleftrightarrow q$.
Exercício: *Verificar via tabela-verdade.*

TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO, CONTINGÊNCIA

Toda proposição composta tem um conectivo principal. Assim, dizemos que uma proposição é:

Tautologia: se o valor de verdade do conectivo principal é sempre VERDADEIRO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

Contradição: se o valor de verdade do conectivo principal é sempre FALSO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

Contingência: se o valor de verdade do conectivo principal apresenta pelo menos um VERDADEIRO e um FALSO, qualquer que seja o valor de verdade das proposições componentes.

Exemplo 15 *As proposições compostas $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p \longleftrightarrow q$ e $p \triangle q$ são contingências.*

Solução: *De fato, os conectivos principais nessas proposições são $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\triangle$, respectivamente. A tabela-verdade abaixo exibe os valores de verdade.*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \longrightarrow q$	$p \longleftrightarrow q$	$p \triangle q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Exemplo 16 *Classifique como tautologia, contradição, contingência cada uma das proposições a seguir:*

(a) $[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$

(b) $[(\sim p \wedge q) \longrightarrow \sim r] \longleftrightarrow [r \wedge \sim (p \vee \sim q)]$

(c) $(q \longrightarrow r) \vee (\sim p \longrightarrow r)$

Solução: *Vamos obter a tabela-verdade de cada proposição e segundo o resultado faremos a classificação.*

(a)

p	q	$[p \wedge$	$(p \longrightarrow q)]$	$\longrightarrow q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	V	**V**

É uma tautologia.

(b)

p	q	r	$[(\sim p \wedge q)$	$\longrightarrow \sim r]$	$\longleftrightarrow$	$[r \quad \wedge$	$\sim (p$	$\vee \sim q)]$
V	V	V	F	V	**F**	F	F	V
V	V	F	F	V	**F**	F	F	V
V	F	V	F	V	**F**	F	F	V
V	F	F	F	V	**F**	F	F	V
F	V	V	V	F	**F**	V	V	F
F	V	F	V	V	**F**	F	V	F
F	F	V	F	V	**F**	F	F	V
F	F	F	F	V	**F**	F	F	V

É uma contradição.

(c)

p	q	r	$(q \longrightarrow r)$	$\vee$	$(\sim p \longrightarrow r)$
V	V	V	V	**V**	V
V	V	F	F	**V**	V
V	F	V	V	**V**	V
V	F	F	V	**V**	V
F	V	V	V	**V**	V
F	V	F	F	**F**	F
F	F	V	V	**V**	V
F	F	F	V	**V**	F

É uma contingência.

Exemplo 17 *Em quais dos seguintes casos é suficiente a informação fornecida para conhecer o valor de verdade da proposição dada:*

(a) $(p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, $v(q) = V$;

(b) $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)$, $v(p) = V$, $v(r) = F$;

(c) $p \wedge (q \longrightarrow r)$, $v(p \longrightarrow r) = V$;

(d) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$, $v(r) = V$.

Solução: *Procuramos saber se a informação dada nos dá o valor de verdade exato da proposição.*

(a) Se $v(q) = V$, *então* $v(p \vee q) = V$ *e* $v(\sim \wedge \sim q) = F$. *Logo,*
$v((p \vee q) \longleftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)) = v(V \longleftrightarrow F) = F$. *Portanto, a informação dada é suficiente para saber o valor de verdade da proposição.*

(b) Se $v(p) = V$ *e* $v(r) = F$, *então* $v(p \wedge q) = v(q)$ *e* $v(p \vee r) = V$. *Logo,*
$v((p \wedge q) \longrightarrow (p \vee r)) = v(q \longrightarrow V) = V$, *independente do valor de verdade de* q. *Portanto, a informação dada é suficiente para saber o valor de verdade da proposição.*

(c) Se $v(p \longrightarrow r) = V$, *então de acordo ao valor de verdade da condicional, teremos os seguintes casos válidos: (i)* $v(p) = V = v(r)$, *(ii)* $v(p) = F$ *e* $v(r) = V$, *(iii)* $v(p) = F = v(r)$.

No primeiro caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(V \wedge (q \longrightarrow V)) = v(V \wedge V) = V$.
No segundo caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(F \wedge (q \longrightarrow V)) = v(F \wedge V) = F$.
No terceiro caso, $v(p \wedge (q \longrightarrow r)) = v(F \wedge (q \longrightarrow F)) = F$.
Portanto, a informação dada é insuficiente para conhecer o valor de verdade da proposição.

(d) Se $v(r) = V$, *então independentemente do valor de verdade de* $p \longrightarrow q$ *teremos*
$v((p \longrightarrow q) \longrightarrow r) = v((p \longrightarrow q) \longrightarrow V) = V$. *Portanto, a informação dada é suficiente para conhecer o valor de verdade da proposição.*

INFERÊNCIA LÓGICA OU IMPLICAÇÃO LÓGICA VÁLIDA

Definição 2 *Uma inferência lógica é uma proposição condicional da seguinte forma*

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$$

A inferência será válida se a implicação é uma tautologia, caso contrário será uma falácia.

Definição 3 *Entendemos por raciocínio um par ordenado* $(\{p_i\}, q)$*, onde* $\{p_i\}$ *é um conjunto finito de proposições, chamadas de premissas/hipóteses, e* q *é uma proposição, chamada de tese/conclusão.*

Definição 4 *Um* **raciocínio dedutivo** *é aquele onde as premissas fornecem ou evidenciam um fundamento definitivo da conclusão. Um* **raciocínio indutivo** *é aquele onde as premissas proporcionam somente algum fundamento da conclusão, mas não um fundamento conclusivo.*

Teorema 1 *Se o argumento* $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$ *é uma tautologia e se as premissas* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *são verdadeiras, então a conclusão é verdadeira.*

Exemplo 18 *Determine se* $p \vee q$ *é uma conclusão válida de* $\sim p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow r$ *e* $\sim r$.

Solução: *Queremos verificar se a implicação* $[(\sim p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim q \longrightarrow r) \wedge (\sim r)] \longrightarrow (p \vee q)$ *é válida.*

1^a *forma: Usamos tabela-verdade*

p	q	r	$[(\sim p \longrightarrow \sim q)$	$\wedge$	$(\sim q \longrightarrow r)$	$\wedge$	$(\sim r)]$	$\longrightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	F	F	**V**	V
V	V	F	V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	V	V	V	V	F	F	**V**	V
V	F	F	V	F	F	F	V	**V**	V
F	V	V	F	F	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	F	V	V	V	**V**	V
F	F	V	V	V	V	F	F	**V**	F
F	F	F	V	F	F	F	V	**V**	F
			(1)	(5)	(2)	(6)	(3)	(7)	(4)

A coluna (7) exibe que a implicação é uma tautologia. Portanto, a inferência é válida.

2^a *forma: Vamos usar um método prático. Este consiste em usar o fato de que a implicação não é válida somente no caso em que a premissa é verdadeira e a conclusão falsa. A partir disto, procuramos os valores de verdade das proposições simples envolvidas. Caso consigamos para alguma das proposições mais de um valor de verdade, a implicação será VERDADEIRA. Se por outro lado, encontrarmos para cada proposição simples envolvida um único valor de verdade, a implicação será FALSA. Vejamos como:*

A implicação será falsa se $v((\sim p \longrightarrow \sim q) = V$, $v(\sim q \longrightarrow r) = V$, $v(\sim r) = V$ *e* $v(p \vee q) = F$. *De* $v(p \vee q) = F$ *resulta* $v(p) = v(q) = F$. *E de* $v(\sim r) = V$ *resulta* $v(r) = F$. *Logo, a partir de* $v(\sim q \longrightarrow r) = V$ *e* $v(r) = F$, *temos que* $v(q) = V$. *Isto contradiz o fato de que* $v(q) = F$. *Assim, de acordo com o exposto inicial, a suposição da implicação ser falsa é incorreta. Portanto, a inferência é válida.*

Exemplo 19 *Mostre que a implicação* $[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$ *é válida.*

Solução: *Embora uma tabela-verdade seja adequada para este exemplo por conter só duas proposições simples, usaremos o método prático.*

Suponha que a implicação seja falsa. Isto nos fornece $v(p) = V$, $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$. *A partir de* $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(p) = F$, *contrariando o fato de* $v(p) = V$. *Portanto, a suposição é incorreta e a inferência é válida.*

Exemplo 20 *A inferência* $[(p \longrightarrow q) \wedge q] \longrightarrow p$ *é válida? Justifique sua resposta.*

Solução:
A inferência será válida se, independentemente dos valores de verdade das proposições simples envolvidas, a implicação é uma tautologia. Isto não ocorre quando $v(p) = F$ *e* $v(q) = V$.

Exemplo 21 *Verificar se o seguinte argumento é válido: Se o triângulo é isósceles então tem dois lados iguais. Mas o triângulo não possui dois lados iguais. Portanto, o triângulo não é isósceles.*

Solução: *Vamos escrever o argumento em lógica formal. Seja* p : *O triângulo é isósceles,* q : *O triângulo tem dois lados iguais. Formalmente, o argumento é:* $[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim q)] \longrightarrow (\sim p)$.

Suponha que a implicação não seja válida. Isto nos fornece $v(p \longrightarrow q) = V$, $v(\sim q) = V$ *e* $v(\sim p) = F$. *De* $v(\sim p) = F$, *resulta* $v(p) = V$ *e de* $v(\sim q) = V$, *resulta* $v(q) = F$. *Agora, a partir de* $v(p \longrightarrow q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(p) = F$. *Isto contradiz o fato de que* $v(p) = V$. *Portanto, a suposição é falsa e a inferência é válida.*

Exemplo 22 *Verifique a validade do seguinte argumento: Se 6 é par, então 2 não divide 7. 5 não é primo ou 2 divide 7. Portanto, 6 é ímpar.*

Solução: *Sejam* p : *6 é par,* q : *2 divide 7,* r : *5 é primo. Formalmente o argumento é:* $[(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \longrightarrow (\sim p)$.

Observe que neste exemplo temos $v(p) = V$, $v(q) = F$ *e* $v(r) = V$. *Com isto,*

$v([(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q)] \longrightarrow (\sim p)) = v([(V \longrightarrow V) \wedge (F \vee F)] \longrightarrow F) = V$. *Portanto, a inferência é válida.*

Como visto nos exemplos anteriores, uma outra forma de resolver é aplicando o método prático. Suponha que seja falsa a implicação, logo $v(p \longrightarrow \sim q) = V$, $v(\sim r \vee q) = V$ *e* $v(\sim p) = F$. *De* $v(\sim p) = F$, *resulta* $v(p) = V$. *A partir de* $v(p \longrightarrow \sim q) = V$ *e* $v(p) = V$ *resulta* $v(\sim q) = V$, *de onde* $v(q) = F$. *De* $v(\sim r \vee q) = V$ *e* $v(q) = F$ *resulta* $v(\sim r) = V$, *de onde* $v(r) = F$. *Mas isto é uma contradição, pois a proposição* r *é verdadeira. Portanto, a suposição é falsa e a inferência é válida.*

QUANTIFICADORES

Definição 5 *Uma função proposicional ou proposição aberta nas variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma afirmação simbolizada por $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Exemplo 23 *Saõ funções proposicionais:*

1. $P(x)$: $x > 3$. *Observe $P(4)$ é verdadeira, enquanto $P(2)$ é falsa.*
2. $P(x, y)$: $x + y = 5$. *Observe que $P(4, 1)$ é verdadeira, enquanto $P(1, 0)$ é falsa.*
3. $P(x, y) : x^2 - y^2 = 1$. *Observe que $P(1, 0)$ é verdadeira, enquanto que $P(1, 1)$ é falsa.*
4. $P(x, y, z) : x^2 + yz - z^2 = xy$. *Observe que $P(1, 1, 1)$ é verdadeira, enquanto $P(-1, -1, 1)$ é falsa.*
5. $P(x, y) : x$ *é amigo de* y.

A partir de uma função proposicional podemos gerar proposições sem a necessidade de estar avaliando-a em valores específicos. Para isto, usamos quantificadores. A saber:

Quantificador Universal ($\forall$):

"$P(x)$ é válido para todo x no domínio do discurso." Simbolicamente: $\forall x : P(x)$.

Quantificador Existencial ($\exists$):

"Existe um elemento x no domínio do discurso tal que $P(x)$." Simbolicamente: $\exists x : P(x)$

Quantificador de Unicidade ($\exists!$):

"Existe um único x no domínio do discurso tal que $P(x)$." Simbolicamente: $\exists! x : P(x)$

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES COM QUANTIFICADORES

Proposição	**Negação**
$\forall x : P(x)$	$\sim [\forall x : P(x)] \equiv \exists x :\sim P(x)$
$\exists x : P(x)$	$\sim [\exists x : P(x)] \equiv \forall x :\sim P(x)$
$\forall x \in A : P(x)$	$\sim [\forall x \in A : P(x)] \equiv \exists x \in A :\sim P(x)$
$\exists x \in A : P(x)$	$\sim [\exists x \in A : P(x)] \equiv \forall x \in A :\sim P(x)$

Exemplo 24 *Obtenha a negação da proposição $\forall x \in A : [P(x) \longrightarrow Q(x)]$*

Solução: *A negação será* $\sim [\forall x \in A : [P(x) \longrightarrow Q(x)] \equiv \exists x \in A : P(x) \wedge \sim Q(x)$

Exemplo 25 *Obtenha a negação da proposição $\forall x \exists y \exists z : [P(x, y) \longrightarrow (Q(x) \wedge R(z))]$*

Solução: *A negação será*

$$\sim [\forall x \exists y : [P(x, y) \longrightarrow (Q(x) \wedge R(z))]] \equiv \exists x \forall y \forall z : P(x, y) \wedge (\sim Q(x) \vee \sim R(z))$$

Exemplo 26 *Para $A = \{0, 1, 2\}$, determine o valor de verdade das proposições a seguir:*

1. $\forall x \in A, \forall y \in A : y^2 \leq 4(x+1)$;
2. $\forall x \in A, \exists! y \in A : y = \begin{cases} \dfrac{2|x|}{x}, \; x \neq 0 \\ 2, \; x = 0 \end{cases}$
3. $\exists! x \in A / \forall y \in A : (x-1)^2 > y$;

Solução: *Analisemos cada proposição dada:*

1. $\forall x \in A, \forall y \in A : y^2 \leq 4(x+1)$

   Se $x = 0$, para cada $y \in A$ teremos $0 \leq 4; 1 \leq 4; 4 \leq 4$.

   Se $x = 1$, para cada $y \in A$ temos $0 \leq 8; 1 \leq 8; 8 \leq 8$.

   Se $x = 2$, para cada $y \in A$ temos $0 \leq 12; 1 \leq 12; 12 \leq 12$.

   Portanto, a proposição é verdadeira.

2. $\forall x \in A, \exists! y \in A : y = \begin{cases} \dfrac{2|x|}{x}, \; x \neq 0 \\ 2, \; x = 0 \end{cases}$

   Note que para qualquer $x \in A$, $y = 2$ é o único valor que torna a proposição verdadeira. Portanto, a proposição dada aqui é verdadeira.

3. $\exists! x \in A / \forall y \in A : (x-1)^2 > y$

   A proposição é falsa, já que para qualquer $x \in A$, o valor $(x-1)^2 \in \{0, 1, 2\}$, que não é maior do que qualquer $y \in A$.

Exemplo 27 *Seja $P(x)$ uma função proposicional com domínio $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Escreva em termos de disjunções e/ou conjunções cada proposição a seguir:*

(a) $\exists x, P(x)$ *(b)* $\forall x, P(x)$ *(c)* $\forall x, \sim P(x)$ *(d)* $\sim \forall x, P(x)$ *(e)* $\exists x, \sim P(x)$ *(f)* $\sim \exists x, P(x)$

Solução: *Escrever, conforme pedido, só é válido quando o domínio da função proposicional é finito.*

(a) A proposição $\exists x, P(x)$ é lida como "para algum $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, vale $P(x)$. Isto se traduz na forma $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$. Portanto, $\exists x, P(x) \equiv P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$.

(b) A proposição $\forall x, P(x)$ é lida como "Qualquer que for $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $P(x)$ é verdadeiro. Portanto, $\forall x, P(x) \equiv P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$.

(c) e (f) Note que $\forall x, \sim P(x) \equiv \sim [\exists x, P(x)]$. Logo, $\forall x, \sim P(x) \equiv \sim [P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)]$.

(d) e (e) Note que $\sim \forall x, P(x) \equiv \exists x, \sim P(x)$. Logo, $\sim \forall x, P(x) \equiv \sim [P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)]$.

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO

Entendemos por demonstração uma sequência de afirmações lógicas com a finalidade de atingir uma conclusão. Uma demonstração pode ser FORMAL ou INFORMAL.

Dizemos que a demonstração é formal quando se deixa de forma clara, em cada passo, as leis da lógica proposicional que foram usadas. Um demostração será informal quando não se deixa de forma explícita as leis da lógica proposicional usadas, pulando determinados argumentos, subintendendo-se que fazem sentido. Essas últimas são as demonstrações que mais usamos em matemática.

Queremos mostrar um resultado ou teorema que aparece na forma de uma implicação

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$$

MÉTODO DIRETO: Este método consiste em usar as hipóteses $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e a partir da validade delas, junto com definições, axiomas e leis, alcançar a validade da conclusão q.

Observações: (i) Quando a conclusão q é verdadeira, a implicação torna-se naturalmente verdadeira. Nesse caso, dizemos que a implicação se verifica trivialmente ou por trivialização.

(ii) Quando a hipótese $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ é falsa, a implicação é verdadeira naturalmente. Nesse caso, dizemos que a implicação se verifica por vacuidade.

A seguir dois exemplos de provas formais.

Exemplo 28 *Mostre que se $2x^2 + a < 9$ e $x = 2$, então $a < 1$.*

Solução: *Sejam $p : 2x^2 + a < 9$, $q : x = 2$ e $r : a < 1$. Queremos provar que $(p \wedge q) \longrightarrow r$.*

(1) Para $x = 2$, temos a inferência válida $[(2x^2 + a < 9) \wedge x = 2] \longrightarrow (2(2)^2 + a < 9)$;

(2) Fazendo $t : 2(2)^2 + a < 9$, temos que t é equivalente a $t : a < 1$. Assim, $(p \wedge q) \longrightarrow t$;

(3) O anterior ocorre pois por hipótese $p \wedge q$ é verdadeiro;

(4) Aplicando a Lei Modus Ponens a (2) e (3), a conclusão t é válida. Ou seja,é válida a inferência $[[(p \wedge q) \longrightarrow t] \wedge (p \wedge q)] \longrightarrow t$;

(5) Como $t = r$, segue que r se cumpre;

(6) Portanto, a implicação é verdadeira.

Exemplo 29 *Demonstre que $\{(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow s]\} \longrightarrow s$*

Solução: *Mostraremos que a condicional $\{(p \wedge q) \wedge [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow s]\} \longrightarrow s$ é uma tautologia. De fato,*

(1) $\{(p \wedge q) \wedge [\sim (p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim r \vee s]\} \longrightarrow s$ (Lei da condicional)
(2) $\{(p \wedge q) \wedge r \wedge [\sim r \vee s]\} \longrightarrow s$ (Lei associativa e de absorção)
(3) $\{(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)\} \longrightarrow s$ (Lei associativa e de absorção)
(4) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (r \wedge s) \vee s$ (Lei da condicional e Morgan)
(5) $\sim (p \wedge q) \vee [\sim r \vee (\sim s \vee s)]$ (Lei de Morgan e associativa)
(6) $\sim (p \wedge q) \vee (\sim r) \vee V \equiv V$ (valor de verdade da disjunção)
Portanto, a implicação é válida.

Os exemplos a seguir, usuais no ambiente matemático, apresentam provas usando o método direto.

Exemplo 30 *Mostre que se x é um inteiro par, então x^2 é par.*

<u>**Solução:**</u> *Como x é par, existe um inteiro k tal que $x = 2k$. Logo, $x^2 = (2k)(2k) = 2(2k^2)$. Como o conjunto dos números inteiros é fechado sob a operação de multiplicação, $2k^2$ é inteiro. Denotando por $m = 2k^2$, temos que $x^2 = 2m$. Portanto, x^2 é par, como queríamos mostrar.*

Exemplo 31 *Mostre que se x e y são inteiros pares, então $5x + 3y$ é par.*

<u>**Solução:**</u> *Como x e y são pares, existem $k, p \in \mathbb{Z}$, tais que $x = 2k$ e $y = 2p$. Logo, $5x + 3y = 5(2k) + 3(2p) = 2(5k + 3p)$. Como $\mathbb{Z}$ é fechado pela soma e multiplicação, $m = (5k + 3p) \in \mathbb{Z}$. Portanto, $5x + 3y = 2m$ é par.* $\blacksquare$

Exemplo 32 *Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, vale $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.*

<u>**Solução:**</u> *De fato, sabemos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Logo, $(x-1)^2 \geq 0$. Daqui, $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff x^2 + 1 \geq 2x$. Como $x > 0$, temos*

$$x^2 + 1 \geq 2x \iff \frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x} \iff x + \frac{1}{x} \geq 2. \ \blacksquare$$

Exemplo 33 *Mostre que se $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$, então $x \in \mathbb{Q}$.*

<u>**Solução:**</u> *De fato, por definição de número racional, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tal que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$. De onde, $x = \dfrac{p^2}{q^2}$. Como $\mathbb{Z}$ é fechado pela multiplicação, $p^2, q^2 \in \mathbb{Z}$ e $q^2 \neq 0$. Portanto, $x \in \mathbb{Q}$.* $\blacksquare$

Exemplo 34 *Mostre que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x^2 + x$ é par.*

<u>**Solução:**</u> *Note que se $x \in \mathbb{Z}$, então $x = 2k$ ou $x = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.*
Se $x = 2k$, então $x^2 + x = (2k)^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$ é par.
Se $x = 2k+1$, então $x^2 + x = (2k+1)^2 + 2k + 1 = 2(2k+1)(k+1)$ é par.
Portanto, qualquer que seja $x \in \mathbb{Z}$, $x^2 + x$ é par. $\blacksquare$

Exemplo 35 *Mostre que se $x \in \mathbb{R}$, então $|x| = |-x|$.*

<u>**Solução:**</u> *Dado $x \in \mathbb{R}$, então, somente uma das opções a seguir ocorre: $x > 0$, $x = 0$, $x < 0$.*
Se $x > 0$, então $-x < 0$. Logo, por definição de valor absoluto, $|x| = x$ e $|-x| = -(-x) = x$ e daqui, $|x| = |-x|$.
Se $x < 0$, então $-x > 0$. Logo, por definição de valor absoluto, $|x| = -x$ e $|-x| = -x$ e daqui, $|x| = |-x|$.
Se $x = 0$, temos $-x = 0$ e daqui $|x| = 0 = |-x|$.
Portanto, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$. $\blacksquare$

MÉTODO INDIRETO: Este método não é direto e distinguimos dois tipos: Argumentos por contrapositiva e por redução ao absurdo.

Argumentos por contra positiva

Consiste em assumir como hipóteses $\sim q$ e concluir $\sim p$. Isto é, consiste em mostrar a implicação $\sim q \longrightarrow \sim p$.

Exemplo 36 *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.*

Solução: *Sejam $p : 3n+2$ é ímpar e $q : n$ é ímpar. Vamos mostrar $\sim q \longrightarrow \sim p$.*
Suponha que n seja par, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Logo, $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$ é par. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 37 *Mostre que se x não é inteiro, então $\frac{x}{2}$ não é inteiro.*

Solução: *Sejam $p : x \notin \mathbb{Z}$, $q : \frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$. Vamos mostrar $\sim q \longrightarrow \sim p$.*

Suponha que $\frac{x}{2}$ seja inteiro, então $x = 2(\frac{x}{2}) \in \mathbb{Z}$, que é a negação de nossa hipótese. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 38 *Mostre que se x é irracional, então $\frac{1}{x}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $q : \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Vamos mostrar $\sim q \longrightarrow \sim p$.*

Suponha que $\frac{1}{x}$ seja racional, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, tais que $\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$. Note que $\frac{1}{x} \neq 0$, logo $a \neq 0$. Assim, $x = \frac{b}{a}$ é racional. O enunciado esta demonstrado. ■

Exemplo 39 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x + y \geq 2$, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.*

Solução: *Sejam $p : x + y \geq 2$, $q : x \geq 1$ e $r : y \geq 1$. O enunciado se traduz em $p \longrightarrow (q \vee r)$. Vamos mostrar $\sim (q \vee r) \longrightarrow \sim p$.*
Suponha que $x < 1$ e $y < 1$. Então $x + y < 2$, que é a negação de nossa hipótese. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Exemplo 40 *Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que se x é irracional, então $\sqrt[3]{x}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $q : \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Vamos mostrar $\sim q \longrightarrow \sim p$.*

Suponha que $x \in \mathbb{Q}$. Então, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tais que $\sqrt[3]{x} = \frac{a}{b}$. Logo, $x = \frac{a^3}{b^3}$ é racional. Portanto, está mostrado o enunciado. ■

Exemplo 41 *Seja f a função real dada por $f(x) = 3x - 2$. Mostre que se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$.*

Solução: *Sejam $p : x \neq y$ e $q : f(x) \neq f(y)$, para f dada. Vamos mostrar a contrapositiva $\sim q \longrightarrow \sim p$.*
Suponha que $f(x) = f(y)$. Então $3x - 2 = 3y - 2$, de onde $x = y$. Assim, fica mostrado o enunciado. ■

Argumentos por redução ao absurdo

Mais uma vez, estamos interessados em mostrar um teorema da forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$$

O argumento por redução ao absurdo consiste em assumir a negação da conclusão como uma hipótese verdadeira e junto com as outras premissas chegar a uma contradição. Dito de outra forma, este argumento consiste em mostrar a seguinte implicação

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge (\sim q)] \Longrightarrow \text{CONTRADIÇÃO}$$

Exemplo 42 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que se $a \cdot b$ é ímpar, então a é ímpar ou b é ímpar.*

Solução: *Sejam $p : a \cdot b$ é ímpar, $q : a$ é ímpar e $r : b$ é ímpar. Vamos mostrar que*

$$[p \wedge \sim (q \vee r)] \Longrightarrow \textit{CONTRADIÇÃO}$$

Suponha que a e b sejam pares. Então $a = 2k$ e $b = 2m$, onde $k, m \in \mathbb{Z}$. Assim, $a \cdot b = (2k)(2m) = 2(2km)$ é par e $a \cdot b$ é ímpar por hipótese. Isto é uma contradição, pois um número inteiro ou é par ou é ímpar, não ambos simultaneamente. Portanto, temos mostrado o enunciado. ∎

Exemplo 43 *Seja $x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$. Mostre que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.*

Solução: *Sejam $p : x > 0$ e $q : x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Vamos mostrar que $[p \wedge (\sim q)] \Longrightarrow$ CONTRADIÇÃO*

Suponha que $x + \dfrac{1}{x} < 2$. Daqui, $x + \dfrac{1}{x} - 2 < 0$. Logo, $\dfrac{x^2 + 1 - 2x}{x} < 0$. Como $x > 0$, temos $x(\dfrac{x^2 + 1 - 2x}{x}) < 0(x)$. Daqui, $x^2 - 2x + 1 < 0$, isto é, $(x - 1)^2 < 0$, o que é um absurdo, pois sabemos que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Portanto, está demonstrado o enunciado. ∎

Exemplo 44 *Sejam $a, b, cx \in \mathbb{R}$. Mostre que se $a > b$, $c > 0$, então $ac > bc$.*

Solução: *Sejam $p : a > b$, $q : c > 0$ e $r : ac > bc$.*
Vamos mostrar que $[(p \wedge q) \wedge (\sim r)] \Longrightarrow$ CONTRADIÇÃO
Suponha que $ac \leq bc$, isto é, $ac - bc \leq 0$. Daqui, $c(a - b) \leq 0$. Como $c > 0$ e $a > b$, temos $(a - b)c > 0$.
Assim, $(a - b)c \leq 0$ e $(a - b)c > 0$ é um absurdo! Portanto, está demonstrado o enunciado. ∎

Exemplo 45 *Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.*

Solução: *Sejam $p : 3 \in \mathbb{Z}^+$ e $q : \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
Vamos mostrar que $(p \wedge \sim q) \Longrightarrow$ CONTRADIÇÃO
Suponha que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$, tais que $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$. Elevando à potência em ambos os lados, temos $3b^2 = a^2$. Daqui, 3 divide a^2 e como 3 é primo, 3 divide a. Assim, $a = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e $b^2 = 3k^2$. De novo, 3 divide b^2 e daqui, 3 divide b. Portanto, 3 é um fator comum de a e b, o que é uma contradição. Isto mostra o enunciado. ∎

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Os números naturais e todas as suas propriedades decorrem dos Axiomas de Peano. Para tal, é dado um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados de *números naturais* e, uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ o valor $s(n) = n + 1$, chamado de sucessor de n.

Axioma P1: A função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetora. Isto é, se $s(n) = s(m)$, então $n = m$.
Axioma P2: $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é unitário. Isto é, existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro número natural. Este é simbolizado por 1. Assim, $1 \neq s(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Axioma P3: (Princípio de Indução) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um conjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se que $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

A partir disto, entendemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. No entanto, se escolhermos 0 como aquele que não é sucessor de nenhum outro número, teremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e nesse caso usamos $\mathbb{N}^*$ para representar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Uma formulação equivalente do princípio de indução, muito mais popular no ambiente matemático, é a seguinte:

Teorema 2 *(***Princípio de Indução Finita (PIF)***) Seja $p(n), n \in \mathbb{N}$, uma função proposicional, tal que:*

1. *$p(1)$, é verdadeira;*
2. *Se da validade de $p(k), k \in \mathbb{N}$, concluí-se que $p(k + 1)$ é válida.*

   Então, $p(n)$, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como aplicar corretamente o PIF? É necessário seguir os seguintes passos:

1. Verificar que a sentença é verdadeira para $n = 1$, isto é, $p(1)$ é verdadeira.
2. (**Hipótese de Indução: HI**) Aceitamos que para $n = k \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, $p(k)$ é verdadeira.
3. (**Tese de Indução: TI**) Devemos mostrar que para $n = k+1$, $p(k+1)$ é verdadeira a partir da validade de $p(k)$.

Um resultado importantíssimo do números naturais é o princípio de boa ordenação.

Teorema 3 (Princípio de Boa Ordenação) *Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui elemento mínimo.*

Teorema 4 (Segundo Princípio de Indução) *Seja $p(n)$ uma função proposicional, tal que:*

1. *$p(n_0)$ é verdadeira;*
2. *Se da validade de $p(k)$, com $k > n_0$, conclui-se que $p(k + 1)$ é verdadeira.*

Então, $p(n)$ é válida para todo $n \geq n_0$.

Exemplo 46 *Mostre que a soma dos n primeiros números naturais é dada por* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solução: *Seja* $p(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

2. *(HI) Suponha que* $p(k)$ *seja verdadeira, para* $k > 1$. *Isto é,* $1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira. Isto é,*

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vejamos,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= [1 + 2 + \ldots + k] + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \textit{(Por HI)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ *é verdadeira. Portanto,* $p(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 47 *Mostre que a soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é dada por* $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solução: *Seja* $p(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

2. *(HI) Suponha que* $p(k)$ *seja verdadeira, para* $k > 1$. *Isto é,*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira. Isto é, vale*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

De fato,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \ldots + k^2] + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad \textit{(Por HI)} \\ &= (k+1)\left[\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6}\right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Assim, $p(k+1)$ *é verdadeira. Portanto,* $p(n)$ *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 48 *Mostre que $4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: *Seja $p(n) : 4^n - 1 = 3q$ para algum $p \in \mathbb{N}$.*

1. *$p(1)$ é verdadeira, pois $4^1 - 1 = 3$.*
2. *(HI) Suponha que para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira. Isto é, $4^k - 1 = 3q_1$.*
3. *Queremos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeira, isto é, vale $4^{k+1} - 1 = 3q$.*
   De fato, $4^{k+1} - 1 = 4^k 4 - 1 = 4(3q_1 + 1) - 1 = 3(q_1 + 1) = 3q$
   Portanto, $4^n - 1$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 49 *Mostre que o polinômio $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x + y$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Solução: *Dizer que $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ é divisível por $x + y$, significa que existe $Q(x, y)$ tal que $x^{2n-1} + y^{2n-1} = (x + y)Q(x, y)$.*

Seja $p(n) : x^{2n-1} + y^{2n-1} = (x + y)Q(x, y)$

1. *$p(1)$ é verdadeira, pois $x^{2(1)-1} + y^{2(1)-1} = x + y$.*
2. *(HI) Suponha que, para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira. Isto é, $x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x + y)Q_1(x, y)$*
3. *Queremos mostrar que $p(k + 1)$ é verdadeira. Isto é, vale $x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x + y)Q(x, y)$.*
   De fato,

$$\begin{aligned}
x^{2k+1} + y^{2k+1} &= x^{(2k-1)+2} + y^{(2k-1)+2} \\
&= x^{2k-1}x^2 + y^{2k-1}y^2 \qquad \textit{(Por HI)} \\
&= (x^{2k-1}x^2 + y^{2k-1}x^2) - (y^{2k-1}x^2 - y^{2k-1}y^2) \\
&= (x^{2k-1} + y^{2k-1})x^2 - y^{2k-1}(x^2 - y^2) \\
&= (x + y)Q_1(x, y)x^2 - y^{2k-1}(x + y)(x - y) \\
&= (x + y)[Q_1(x, y)x^2 - y^{2k-1}(x - y)] \\
&= (x + y)Q(x, y), \qquad \textit{onde } Q(x, y) = Q_1(x, y)x^2 - y^{2k-1}(x - y)
\end{aligned}$$

Assim, $p(k + 1)$ é verdadeira. Portanto, $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 50 *Determine uma fórmula para $f(n)$ sabendo que $f(1) = 1$ e $f(n) = nf(n-1)$ para todo $n > 1$. Após isso, mostre por indução que a fórmula que encontrou é válida.*

Solução: *Vamos obter alguns valores:*

$f(2) = 2f(1) = 2 \cdot 1$; $f(3) = 3f(2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$; $f(4) = 4f(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$. *Assim,* $f(n) = n!$.

Agora, seja $p(n) : f(n) = n!$ *Vamos mostrar por indução.*

1. $p(1)$ *é verdadeira pois* $1! = 1$ *e* $f(1) = 1$.
2. *Suponha que para* $k > 1$, $p(k)$ *é verdadeira, isto é* $f(k) = k!$.
3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira, ou seja,* $f(k+1) = (k+1)!$. *De fato,*

   Como $k > 1$, *temos* $k+1 > 1$, *logo* $f(k+1) = (k+1)f(k) = (k+1)k! = (k+1)!$

   Portanto, $f(n) = n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 51 *Determine uma fórmula para $f(n)$ sabendo que $f(1) = 25$ e $f(n) = f(n-1) + 4$ para todo $n > 1$. Após isso, mostre por indução que a fórmula que encontrou é válida.*

Solução: *Vamos obter alguns valores:*

$f(2) = f(1) + 4 = 25 + 4$; $f(3) = f(2) + 4 = 25 + 4 + 4 = 25 + (2)4$; $f(4) = f(3) + 4 = 25 + (2)4 + 4 = 25 + (3)4$. *Assim,* $f(n) = 25 + (n-1)4$.

Agora, seja $p(n) : f(n) = 25 + (n-1)4$ *Vamos mostrar por indução.*

1. $p(1)$ *é verdadeira pois* $f(1) = 25 = 25 + (1-1)4$.
2. *Suponha que para* $k > 1$, $p(k)$ *é verdadeira, isto é* $f(k) = 25 + (k-1)4$.
3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é verdadeira, ou seja,* $f(k+1) = 25 + [(k+1)-1]4 = 25 + 4k$. *De fato,*

   Como $k > 1$, *temos* $k+1 > 1$, *logo* $f(k+1) = f(k) + 4 = 25 + (k-1)4 + 4 = 25 + [(k+1)-1]4$

   Portanto, $f(n) = 25 + (n-1)4$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 52 *Define-se a potenciação de números naturais por $a^1 = a, \quad a^n = a \cdot a^{n-1}$. Mostre que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.*

Solução: *Vamos fixar m e mostrar que vale essa propriedade.*
Para isto, seja $p(n) : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1. $p(1)$ *é verdadeira, pois* $a^{m+1} = a \cdot a^{(m+1)-1} = a \cdot a^m = a^m.a^1$.
2. *Suponha que para* $k > 1$ *vale* $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$.
3. *Queremos mostrar que* $p(k+1)$ *é válida, isto é,* $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}$. *De fato,*

   $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{(m+k)+1} = a^{m+k+1}$

   Portanto, está mostrada a propriedade. De forma similar se mostra fixando n.

Exemplo 53 *Sejam $a_1 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$ para $n > 1$. Mostre que $a_n = 2^n - 1$.*

Solução: *Seja $p(n) : a_n = 2^n - 1$.*

1. *$p(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = 2^1 - 1 = 1$.*
2. *Suponha que para $k > 1$, $p(k)$ é verdadeira, isto é $a_k = 2^k - 1$.*
3. *Vamos mostrar que $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. De fato,*
   $a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$

Portanto, $a_n = 2^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 54 *Mostre que $5^n > n + 4^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.*

Solução: *Consideremos $p(n) : 5^n > n + 4^n$.*

1. *$p(2)$ é verdadeira, pois $5^2 > 2 + 4^2$.*
2. *Suponha que para $k > 2$, $5^k > k + 4^k$.*
3. *Queremos mostrar que $5^{k+1} > k + 1 + 4^{k+1}$. De fato,*
   $5^{k+1} = 5 \cdot 5^k > 5(k + 4^k)$. Mas, $5(k + 4^k) = 4(k + 4^k) + (k + 4^k) = 2k + 4^{k+1} + (3k + 4^k)$
   Como $k > 2$, temos $2k > k + 2 > k + 1$ e daqui $2k + 4^{k+1} + (3k + 4^k) > (k+1) + 4^{k+1}$. Logo, $5(k + 4^k) > (k + 1) + 4^{k+1}$. Assim, $5^{k+1} > (k + 1) + 4^{k+1}$.

Portanto, $5^n > n + 4^n$ para todo $n \geq 2$.

Exemplo 55 *Mostre que $n! > 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.*

Solução: *Consideremos $p(n) : n! > 2^n$.*

1. *$p(4)$ é verdadeira, pois $4! > 2^4$.*
2. *Suponha que para $k > 4$, $k! > 2^k$.*
3. *Queremos mostrar que $(k+1)! > 2^{k+1}$. De fato, $(k+1)! = (k+1)k! > (k+1)2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$*

Portanto, $n! > 2^n$ para todo $n \geq 4$.

Exemplo 56 *Mostre que $2^n > 1 + n$, para todo $n \geq 2$.*

Solução: *Considerando $p(n) : 2^n > 1 + n$, temos:*

1. *$p(2)$ é verdadeira, pois $2^2 > 1 + 2$.*
2. *Suponha que para $k > 2$, $2^k > 1 + k$.*
3. *Queremos mostrar que $2^{k+1} > 1 + (k + 1)$. De fato, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(1 + k) > k + 2$.*

Portanto, $2^n > 1 + n$ para todo $n \geq 2$.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o valor de verdade das seguintes proposições:

   (a) Se $5 + 4 = 11$, então $6 + 6 = 12$ R. V

   (b) Não é verdade que $3 + 3 = 7$ se, e somente se, $5 + 5 = 12$. R. F

   (c) $(3 + 5 = 8) \wedge (5 - 3 = 4)$. R. F

   (d) $[(2 + 6 > 5) \wedge (7 - 1 = 6)] \longrightarrow [(3 - 1 < 2) \vee (5 + 7 = 12)]$. R. V

   (e) $[(2 + 6 > 5) \wedge (7 - 1 = 6)] \longrightarrow [(3 - 1 < 2) \vee (5 + 7 > 12)]$. R. F

2. Considerando p :João é inteligente, q : João é milionário e r : João é feliz. Escrever em linguagem proposicional os seguintes enunciados:

   (a) Se João é milionário, é feliz. R. $q \longrightarrow r$

   (b) Se João é pobre mas não inteligente, é feliz. R. $(\sim q \wedge \sim p) \longrightarrow r$

   (c) Que João seja pobre não implica que seja feliz. $\sim (r \vee q)$

   (d) João tem que ser pobre para ser feliz. R. $\sim q \longrightarrow r$

   (e) Que João seja inteligente é necessário para ser feliz. R. $r \longrightarrow p$

   (f) Que João seja inteligente é suficiente para ser milionário. R. $p \longrightarrow q$

   (g) Se João é inteligente ou milionário, é feliz. R. $(p \vee q) \longrightarrow r$

   (h) Se João é milionário, é inteligente e feliz. R. $q \longrightarrow (p \wedge r)$

3. Simbolizar as seguintes situações:

   (a) O café é agradável salvo se colocam açúcar e estiver forte.

   (b) A erva é verde, porem o céu é azul e chove.

   (c) Se o time do América vai para a Taça Libertadores, Vilma vota pelo FJG e o time do Barça chega em Viçosa.

   (d) Nem Pedro e nem o pai dele viajarão para Manaus se Pedro não tirar a carteira dele.

4. Construir a tabela-verdade das seguintes proposições:

   (a) $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim p$

   (b) $\sim (p \wedge q) \longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

   (c) $\sim \{\sim [p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$

   (d) $[\sim p \wedge (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

   (e) $[p \longrightarrow (r \vee \sim q)] \longleftrightarrow (\sim r \longrightarrow \sim p)]$

   (f) $[(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)] \longleftrightarrow [\sim q \longrightarrow \sim p]$

5. Usando as leis lógicas, simplificar as seguintes proposições:

   (a) $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \longrightarrow \sim p$

   (b) $\sim (p \wedge q) \longrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

   (c) $\sim \{\sim [p \vee (\sim q \longrightarrow p)] \vee \sim [(p \longleftrightarrow \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)]\}$

   (d) $[\sim p \wedge (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$

(e) $[p \longrightarrow (r \vee \sim q)] \longleftrightarrow (\sim r \vee \sim p)]$

(f) $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \wedge \sim p)] \longleftrightarrow [\sim q \longrightarrow \sim p]$

(g) $\{[\sim (p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q \vee s)] \wedge (p \wedge q)\} \vee [\sim (p \vee q) \longrightarrow [(p \vee q) \wedge (s \wedge p \wedge q)]]$

6. Determinar o valor de verdade das proposições r e s, em cada item, a partir das informações dadas:

   (a) $\sim r \vee \sim s$ é verdadeira.

   (b) $(r \wedge s) \triangle (r \vee s)$ é verdadeira.

   (c) $(r \wedge s) \longleftrightarrow (\sim r \vee \sim s)$ é falsa.

7. Sabendo que as proposições p, q, t são falsas e as proposições x, y, z são verdadeiras. Indicar quais das proposições abaixo são falsas:

   (a) $[(p \wedge x) \vee (t \wedge y)] \longrightarrow (z \vee q)$

   (b) $\sim [q \wedge t) \vee (t \wedge y)] \wedge (z \vee p)$

   (c) $[(x \longrightarrow p) \vee (q \longrightarrow x)] \longrightarrow (t \longrightarrow y)$

   (d) $[p \longrightarrow (q \vee y)] \longleftrightarrow [(t \vee z) \longrightarrow y]$

8. A partir da falsidade da proposição $(p \longrightarrow \sim q) \vee (\sim r \longrightarrow s)$. Determinar o valor de verdade das seguintes proposição.

   (a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

   (b) $(\sim r \vee q) \longleftrightarrow [(\sim q \vee r)]$

   (c) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

   (d) $[(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \vee q)] \wedge \sim q$

9. Se $p(x) : x^2 - 16 = 0$, $q(x) : x - 12 = 0$, $r(x) : x^2 > 9$. Encontrar o valor de verdade das proposições abaixo:

   (a) $[p(2) \wedge \sim q(2)] \longleftrightarrow r(4)$

   (b) $[\sim p(4) \longrightarrow r(5)] \vee \sim q(4)$

   (c) $\{[p(1) \wedge p(3)] \longleftrightarrow [r(2) \vee p(3)]\} \longleftrightarrow [\sim q(3) \vee \sim p(-3)]$

   (d) $\{[p(1) \wedge p(3)] \longleftrightarrow r(2)\} \vee [p(3) \longleftrightarrow \sim q(3)] \vee \sim p(-3)$

10. Substituir as reticencias por alguma das seguintes frases " *é suficiente*", "*é necessário*", " *é necessário e suficiente*", de tal forma que o enunciado seja correto.

   (a) Para ganhar na loteria ... ter feito pelo menos uma aposta.

   (b) Para que a soma de dois números reais seja um número racional ... que cada uma das parcelas seja um número racional.

   (c) Para que um triângulo seja isósceles ... que os ângulos da base sejam iguais.

   (d) Para que a equação $x^2 - 2x + q = 0$ tenha duas raízes positivas ... que seja satisfeita condição $q > 0$.

   (e) Para retornar me casa .... ter saído dela.

11. Analisar se as seguintes inferências são válidas, justificando o método que for utilizado.

    (a) $[(r \longleftrightarrow q) \wedge (\sim p \triangle \sim r) \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow (\sim p \vee r)$
    (b) $[(p \longleftrightarrow q) \wedge (\sim p \wedge \sim r) \wedge (r \longrightarrow \sim s)] \longrightarrow [p \longrightarrow (r \wedge q)]$
    (c) $[(p \longrightarrow r) \wedge (p \vee q)] \longrightarrow (p \vee r)$
    (d) $[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim r \longrightarrow \sim q) \wedge [\sim (\sim p \wedge \sim t)] \wedge (t \longrightarrow s) \wedge \sim r] \longrightarrow s$
    (e) $[(r \longrightarrow q) \wedge (\sim p \longrightarrow \sim q) \wedge (r \vee t) \wedge \sim p] \longrightarrow (\sim p \vee \sim r)$
    (f) $[(p \vee q) \wedge (t \vee s) \wedge r] \longrightarrow (q \vee s)$

12. Analisar a validade dos seguintes raciocínios.

    (a) Se Carlos ou Ana vão ao cinema, então Jaime permanecerá em casa. Logo, se Ana vai ao cinema, Jaime fica em casa.
    (b) Todos os matemáticos são pessoas interessantes. Alguns advogados são cobiçosos. Certos filósofos são matemáticos. Somente os que não são interessantes são cobiçosos. Portanto, os cobiçosos não são matemáticos.
    (c) Se eu chegar a tempo em casa, irei jantar, sempre que eu esteja com fome. Em consequência não chegarei em tempo.
    (d) Se Londres não está na Holanda, então Paris não está na França. Portanto, Londres está na Holanda.
    (e) Se eu trabalho não posso estudar, trabalho ou me saio bem em Matemática, mas aprovei Matemática. Portanto, eu estudei.
    (f) Se um satélite gira em torno de la lua, então gira também ao redor da terra;e, se gira em torno da terra, também gira em torno do sol. E, se gira ao redor do sol, então gira em torno da lua, então gira ao redor da constelação da lua.
    (g) Se é acompanhado pelo calendário, então esse período de tempo es curto e se alguém tem percorrido a vida, como eu, nesse período, então esse intervalo de tempo é longo. Não entanto, se toda proposição é falsa então esse período de tempo é curto. Portanto, obtemos uma contradição.

13. Para duas proposições p, q definimos uma nova operação $*$ entre elas, da seguinte forma: $p * q \equiv \sim p \wedge \sim q$. Escrever em função dessa nova operação as seguintes proposições.

    (a) $p \wedge q$
    (b) $p \vee q$
    (c) $\sim p \vee q$
    (d) $p \longrightarrow q$
    (e) $p \longleftrightarrow q$
    (f) $p \longleftrightarrow \sim q$
    (g) $p \triangle q$

14. Para a operação definida no exercício 13, simplificar a proposição $[(p * p) * q] * [(p * p) * \sim q]$

15. Defina $t \equiv (r \longleftrightarrow s) \triangle \sim r$ e $\mu \equiv [(r \longrightarrow \sim s) \longrightarrow r]$. Se se sabe que t é falsa e μ é verdadeira. Qual o valor de verdade de $[(r \longleftrightarrow \mu) \wedge (t \triangle s)] \triangle \sim t$

16. Define-se o conectivo # entre duas proposições por $p\#q \equiv [(p \wedge q) \longrightarrow r] \wedge [r \longrightarrow \sim (p \wedge q)]$. Simplificar a proposição

$$\{[(p\# \sim q)\#(\sim p\#q)]\#[(\sim p\# \sim p)\#(p\#q)]\} \longrightarrow \{p\#q\}$$

17. Negar as seguintes proposições:

    (a) $\exists x / x + 7 < y$
    (b) $\forall x \in \mathbb{Z}/x^2 - 1 > 0$
    (c) $\exists x \in \mathbb{Z}/x^2 = x$
    (d) $\exists x : p(x) \vee \sim q(x)$
    (e) $\forall x : p(x) \longrightarrow q(x)$
    (f) $\forall x : p(x) \wedge \exists x : q(x)$
    (g) $\forall x, \exists y : (x^2 - y^2 < 10) \vee (x^2 < y + 1)$
    (h) $\forall x, \forall y : (x^2 - y^2 > -10) \wedge (x^2 > y + 1)$

18. Formalizar as seguintes proposições fazendo uso de quantificadores, após isso negar a proposição obtida e finalmente escrever em português a proposição resultante.

    (a) Todos os poetas são criativos
    (b) todos os números ímpares são primos.
    (c) Nenhum número par diferente de dois é primo.
    (d) Existem futebolistas que não satisfazem os requesitos para serem futebolistas.
    (e) Todos os números inteiros são ímpares e existem números reais irracionais, se existe algum número par se, e somente se, há algum número real irracional ou qualquer número inteiro é par, se cada número for racional.
    (f) Todo número complexo tem duas componentes se estas são diferentes de zero e, se a segunda componente é zero o número é real.

19. Encontrar o valor de verdade da proposição $[(p \vee q) \longrightarrow (\sim r \vee \sim w)] \longleftrightarrow [q \longrightarrow r]$ se:
$p : \exists x \in \mathbb{Q} : x + 3 = \sqrt{2} + 3$, $q : \exists x \in \mathbb{I} : x + 0 = \pi$, $r : \forall x \in \mathbb{N}/x + 2,5 = 5$ e $w : \exists x \in \mathbb{Q}/x + 0 = \sqrt{2}$

20. Usando o método direto e o método indireto, mostrar a validade da inferência

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \longrightarrow q$$

21. Para $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 5x - 6$, mostre que existe x real tal que $f(x) = g(x)$.

22. Mostrar ou dar um contra-exemplo para a seguinte afirmação: Se x e y são inteiros positivos, então $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

23. Mostre que se $x \in \mathbb{Q}$, então $x + 5x^2 \in \mathbb{Q}$.

24. Qual o erro na prova apresentada abaixo para a seguinte afirmação "Se n^2 é par, então n é par".

    Prova: Suponha que n^2 seja par. Então, $n^2 = (2k)^2 = (2k)(2k)$ para algum número k. Por outro lado, $n^2 = (n)(n)$. Daqui, igualando expressões obtemos $n = 2k$. Portanto, n é par.

25. Mostre que se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

26. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $|x - 1| = |1 - x|$.