PROVA 2 - MAT 135 - LUÍSA DE SOUZA FERREIRA - 102026

1) A) Para ser linearmente independente a combinação nula deverá ter apenas a solução trivial, caso tenha alguma solução não-trivial, o conjunto S é linearmente dependente.

$$a\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}a+b=0\\-b+c=0\\-a-c=0\\a+c=0\end{cases}\therefore\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&-1&0\\1&0&1&0\end{array}\right]\underset{\substack{L_3\leftarrow L_1+L_3\\L_4\leftarrow -L_1+L_4}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right]\underset{L_2\leftarrow -L_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right]\underset{\substack{L_1\leftarrow -L_2+L_1\\L_3\leftarrow -L_2+L_3\\L_4\leftarrow L_2+L_4}}{\sim}$$

$a=-c \quad b=c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

pa = posto da matriz ampliada

pc: posto matriz dos coeficientes

$pa=pc=2<$ número de incógnitas (3), logo esse sistema tem infinitas soluções além da trivial. Portanto, o conjunto S é LINEARMENTE DEPENDENTE (LD)

B) $\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}a+b=x\\-b+c=y\\-a-c=z\\a+c=w\end{cases}\therefore\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&-1&1&y\\-1&0&-1&z\\1&0&1&w\end{array}\right]\underset{\substack{L_3\leftarrow L_1+L_3\\L_4\leftarrow L_1+L_3}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&-1&1&y\\0&1&-1&x+z\\0&-1&1&-x+w\end{array}\right]\underset{\substack{L_3\leftarrow L_2+L_3\\L_4\leftarrow L_2+L_4}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&-1&1&y\\0&0&0&x+z+y\\0&0&0&-x+w+y\end{array}\right]$$

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\ /\ a_{11}+a_{12}+a_{21}=0 \text{ e } -a_{11}+a_{12}+a_{22}=0\right\}$$

Digitalizado com CamScanner

② $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0,\ x + y = 0\}$

A) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \therefore \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow -L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$

$\rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \therefore x = 0 \\ -y - z = 0 \therefore y = 0 \\ -2z = 0 \therefore z = 0 \end{cases}$

⇨ $U \cap W = \{\vec{0}\}$

⇨ Não existe base geradora para conjuntos com apenas o vetor nulo, porque todo vetor é combinação linear de $\vec{0}$.

B) Está soma é direta, visto que a interseção entre U e W tem apenas o vetor nulo (como mostrado na letra A).

③ $B = \{\overset{w_1}{(-1,2)}, \overset{w_2}{(0,1)}\}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \{u, v\}$

A) $[I]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\cdot\ w_1 = (-1,2) = a_{11}u + a_{21}v = u + v = (x_u, y_u) + (x_v, y_v)$

$\cdot\ w_2 = (0,1) = a_{12}u + a_{22}v = 2u + v = (2x_u, 2y_u) + (x_v, y_v)$

$\begin{cases} x_u + x_v = -1 \therefore x_u = 1 \\ 2x_u + x_v = 0 \therefore x_v = -2x_u = -2 \end{cases}$ $\cdot\ u = (1,-1)$ $\cdot\ v = (-2,3)$

$\begin{cases} y_u + y_v = 2 \\ 2y_u + y_v = 1 \end{cases} \therefore \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} y_u + y_v = 2 \therefore y_u = -1 \\ y_v = 3 \end{cases}$

$u = a w_1 + b w_2$

$(1,-1) = a(-1,2) + b(0,1)$

$\begin{cases} -a = 1 \therefore a = -1 \\ 2a + b = -1 \therefore b = 1 \end{cases}$ ⇨ $[u]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Digitalizado com CamScanner

3.B) $[T]^{\beta}_{c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[T(1,0)]_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ //

4) $\ker T = \{ v \in \mathbb{R}^2 / Tv = 0 \} = [(1,2)]$ (O QUE A QUESTÃO PEDIU)

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y) \to (2x-y, 4x-2y, -2x+y)$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \therefore \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to 2x - y = 0$

$\ker T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x \} = \{ (x, 2x), x \in \mathbb{R} \}$

$(x, 2x) = x(1,2)$

$\ker T = [(1,2)]$

Portanto, $T(x,y) = (2x-y, 4x-2y, -2x+y)$ é uma transformação linear $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo $N(T) = [(1,2)]$ //

5) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;/\; T(x,y) = (x+y, x+2y)$

$\alpha = \{ (1,0), (0,1) \}$, onde α é base canônica de $\mathbb{R}^2$

$\cdot T(1,0) = (1,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1)$

$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 1 \end{cases}$

$\cdot T(0,1) = (1,2) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1)$

$\begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 2 \end{cases}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det T = 2 - 1 = 1 \neq 0$, portanto T é invertível!

5 $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftarrow -L_1+L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftarrow -L_2+L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{bmatrix}$

$T^{-1}(x,y) = (2x-y, -x+y)$

6 A) Verdadeiro!

(0) $\vec{0} \in U$, visto que $0.A = 0 = 2.0$!

(1) Seja u, v vetores de U, sendo assim, $u.A = 2u \rightarrow u.A - 2u = 0$ e $v.A = 2v \rightarrow v.A - 2v = 0$. Sendo assim,

$(u+v).A = 2(u+v)$

$u.A + v.A = 2u + 2v$

$u.A - 2u = -(v.A - 2v)$

$0 = -0 \rightarrow 0 = 0$ V, portanto $u+v \in U$!

(2) Seja u um vetor de U e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$(\lambda u).A = 2.(\lambda u)$

$\cancel{\lambda}(u.A) = \cancel{\lambda}(2u)$

$u.A = 2u$, o que é verdade visto que $u \in U$, portanto $\lambda u \in U$! Com isso, podemos afirmar que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

6) B) Falso!

Sabemos que para um conjunto ser linearmente dependente, a combinação linear nula deve ter somente a solução trivial, ou seja:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \vec{0} \therefore a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

O conjunto $\{u+v, v+w, u-w\}$ é linearmente independente? Vejamos:

$$a(u+v) + b(v+w) + c(u-w) = 0$$

$$(a+c)u + (a+b)v + (b-c)w = \vec{0}$$

Como o enunciado da questão diz, $\{u, v, w\}$ é L.I, logo:

$$0u + 0v + 0w = \vec{0}$$

Então $(a+c)$, $(a+b)$ e $(b-c)$ tem que ser iguais a 0!

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \therefore \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim_{L_2 \leftarrow -L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim_{L_3 \leftarrow -L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

pa = posto da matriz amplizda

pc = posto da matriz dos coeficientes

$pa = pc = 2 <$ número de incógnitas $= 3$, portanto esse sistema tem mais soluções além da trivial e, por isso, o conjunto $\{u+v, v+w, u-w\}$ é linearmente dependente!