Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

2ª Lista (Sistemas Lineares) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 22 de fevereiro de 2021

1) Escreva cada um dos sistemas abaixo na forma matricial:

$$(a)\begin{cases} 2x + 8y = 18 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y + 7z = 12 \end{cases}, \qquad (b)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -16 \\ 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 21x_4 = -66 \end{cases},$$

2) Resolva, se possível, os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**:

$$(a)\begin{cases} 8x + 12y - 4z = -36 \\ 6x + 5y + 7z = 11 \\ 2x + y + 6z = 16 \end{cases}, \qquad (b)\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

3) Determine os valores reais de k, em cada um dos casos, tais que o sistema linear dado tenha:

(i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

$$(a)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}, \qquad (b)\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases},$$

$$(c)\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

4) Determine k para que o sistema linear $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$, admita solução não-trivial.

5) Encontre os valores reais de λ para os quais o sistema homogêneo $AX = 0$ admita apenas a solução trivial para $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$.

6) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine, se possível, a inversa de A.

(b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1, 2$.

7) Determine a condição que os números reais a, b e c devem satisfazer para que o sistema linear tenha solução.

$$(a)\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}, \qquad (b)\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = b \end{cases},$$

8) Dado o sistema linear $S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$.

(a) Verifique que $(1, -1, -1)$ é uma solução de S;

(b) Verifique que $(1, 0, 2)$ também é uma solução de S;

(c) Suponha x_1, y_1, z_1 reais tais que (x_1, y_1, z_1) é uma solução de S. Então $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ é também uma solução de S?

(d) Suponha x_1, y_1, z_1 reais tais que (x_1, y_1, z_1) é uma solução de S. Então $(3x_1, 3y_1, 3z_1)$ é também uma solução de S?

(e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

9) Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método de Gauss**. Classifique-os.

$$\text{(a)}\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 3y + 2z = 9 \\ 3x - y + 4z = 13 \end{cases}, \qquad \text{(d)}\begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ -x - y + 2z - 3t + w = 0 \\ x + y - 2z - w = 0 \\ z + t + w = 0 \end{cases},$$

$$\text{(b)}\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}, \qquad \text{(e)}\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases},$$

$$\text{(c)}\begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}, \qquad \text{(f)}\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases},$$

10) Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: o normal e o especial. Para produzir uma tonelada de plástico normal são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico especial são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?

11) Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento no alimento C encontramos 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?

12) Num torneio de triatlon as competições: nado, corrida e ciclismo foram pontuadas com pesos x, y e z, respectivamente. A tabela abaixo apresenta a pontuação dos quatro primeiros colocados em cada categoria e sua respectiva classificação final.

	Nado	Corrida	Ciclismo	Pontuação geral
Atleta 1	7,5	9	9	8,4
Atleta 2	8	7	9	8
Atleta 3	9	7,5	8,5	7,9
Atleta 4	7,5	8	8	7,8

O terceiro atleta alegou que se as classificações dos 1º, 2º e 4º atletas estivessem corretas, então sua classificação estaria incorreta. Sabendo que a classificação geral foi obtida pela média ponderada da pontuação de cada uma das competições e supondo que o terceiro atleta está correto determine:

(a) o peso de cada competição;

(b) a classificação do terceiro candidato.

13) Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira perde para cada um dos outros dois a mesma quantia que cada um deles tinha no início do jogo. Na segunda rodada, a segunda pessoa perde para cada um dos outros a mesma quantia que eles tinham no final da 1a rodada. Na terceira rodada, o 1º e o 2º jogadores ganham do 3º a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui $R\$24,00$. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?

14) Uma indústria produz três produtos, A, B e C, utilizando dois tipos de insumos, X e Y. Para a manufatura de cada quilo de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y; para cada quilo de B, 1 grama do insumo X e 1 grama do insumo Y e, para cada quilo de C, 1 grama do insumo X e 4 gramas do insumo Y. O preço da venda do quilo de cada um dos produtos A, B e C é de $R\$2,00$, $R\$3,00$ e $R\$5,00$, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A, B e C manufaturada com 1 quilo de X e 2 quilos de Y, essa indústria arrecadou $R\$2500,00$. Determine quantos quilos de cada um dos produtos A, B e C foram vendidos.

15) Cada ração contém as seguintes unidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G).

	P	C	G
(1)	1	0	2
(2)	3	1	4
(3)	2	2	1

Se as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G) que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo, qual a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês?

Quant./mês	P	C	G
Dezembro	15	10	14
Janeiro	13	5	17

16) Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

(a) Se o sistema linear $AX = 0$ admite as soluções X_1 e X_2, então também admite $k_1X_1 + k_2X_2$ como solução, quaisquer que sejam os números reais k_1 e k_2.

(b) Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $AX = 0$ tenha somente a solução trivial é que $\det A \neq 0$.

(c) Todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial.

(d) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $AX = 0$, então $X_1 - X_2$ é solução de $AX = 0$.

(e) Se C é uma matriz invertível tal que $CA = CB$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $BX = b$ são equivalentes.

(f) Se A é uma matriz tal que $A^TA = A$, então os sistemas lineares $AX = b$ e $A^2X = b$ são equivalentes.

(g) Um sistema linear com menos equações do que incógnitas tem sempre um número infinito de soluções.

(h) Um sistema linear com mais equações que incógnitas pode ter uma infinidade de soluções.

(i) Se A é uma matriz quadrada e sistema homogêneo $Ax = 0$ tem somente a solução trivial, então o sistema $Ax = b$, para todo b, tem solução e ela é única.

(j) Se o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem solução não trivial, existe b não nulo tal o sistema $Ax = b$, tem somente solução trivial.

(k) Se o sistema homogêneo $Ax = 0$ tem solução não trivial, então o sistema $Ax = b$, para todo b, tem solução não trivial.

17) Encontre todos os escalares a, b e c tais que:

(a) $a(1, 2, 0) + b(2, 1, 1) + c(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$

(b) $a(1, 2, 0) + b(2, 1, 1) + c(-1, 4, -2) = (0, 0, 0)$

18) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) Existem escalares a e b tais que $w = au + bv$, para $w = (7, -11, 2)$?

(b) Existem escalares a e b tais que $w = au + bv$, para $w = (2, -5, 4)$?

(c) Determine o conjunto de vetores w do $\mathbb{R}^3$ tais que $w = au + bv$, para a e b reais.

19) Mostre que:

(a) Se $a(5, 8) + b(3, 7) = (0, 0)$, então $a = 0$ e $b = 0$.

(b) $a(2, 4) + b(1, 2) = (0, 0)$ não implica necessariamente $a = 0$ e $b = 0$.

20) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função definida por $F_A(u) = uA^T$.

(a) Determine $F_A(u)$.

(b) Calcule $F_A(u)$, para $u = (1, 0, 2)$.

(c) Determine um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3 \in$ tal que $F_A(u) = 0$ (vetor nulo do $\mathbb{R}^2$).

(d) Mostre que $F_A(u + u) = F_A(u) + F_A(v)$ e $F_A(au) = aF_A(u)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

(e) O núcleo $N(F_A)$ de F_A é definido por $N(F_A) = \{u : F_A(u) = 0\}$. Determine $N(F_A)$. Existe relação entre o posto de uma matriz A e $N(F_A)$? Justifique.

21) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Decomponha A em LU.

(b) Calcule $\det A$ usando a decomposição obtida.

(c) Resolva o sistema linear $Ax = e_2$ em que $e_2 = (0, 1, 0)$

(d) Determine, caso exista, a inversa de A, usando a decomposição obtida.

22) Determine uma decomposição LU da matriz A e use esta decomposição para determinar o conjunto solução do sistema $Ax = b$, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

23) Use a decomposição PLU dada da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ para resolver o sistema $Ax = b$, em que $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = PLU$.

24) Determine duas decomposições PLU de matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Resolva o sistema $Ax = b$, em que $b^T = (-2, 1, 4)$ usando uma duas decomposições obtidas.

25) A tabela exibe o número de bactérias existentes em uma cultura (por unidade de volume) após x horas. Deseja-se estimar o número de bactérias em $t = 3,7$ horas.

número de horas (x)	0	1	2	3	4
número de bactérias por volume unitário (y)	32	37	65	92	132

(a) Calcule um polinômio interpolador P_1 usando 2 pontos da tabela e calcule $P_1(t)$.

(b) Calcule um polinômio interpolador P_2 usando 3 pontos e calcule $P_2(t)$.

Gabarito

1) (a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -16 \\ -66 \end{bmatrix}$;

2) (a) $sol(S) = \{(0, -2, 3)\}$

(b) $\det A = 0$, logo não é possível utilizar o método da matriz inversa para resolver o sistema.

3) (a) (i) $k \neq 2$ e $k \neq -3$; (ii) $k = 2$; (iii) $k = -3$.

(b) (i) $k \neq 1$ e $k \neq -2$; (ii) $k = 1$; (iii) $k = -2$.

(c) (i) $k \neq 3$; (ii) $k = 3$; (iii) para nenhum $k \in I\!\!R$.

4) $k = 1$

5) $S = \{\lambda \in I\!\!R;\ \lambda \neq 0,\ \lambda \neq -1,\ \text{e } \lambda \neq 1\}$.

6) (a) $\det A = -1 \neq 0$ logo, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathrm{S}_1 = \{(-1, -5, 4)\}$; $\mathrm{S}_2 = \{(-1, -5, -3)\}$

7) (a) $-5a + 2b + c = 0$; (b) para quaisquer a, b e c em $I\!\!R$;

8) (a) Sim, pois $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2(1) & + & 3(-1) & - & (-1) = & 0 \\ 1 & - & 4(-1) & + & 5(-1) = & 0 \end{array} \right.$

(b) Não pois $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2(1) & + & 3(0) & - & (2) = & 0 \\ 1 & - & 4(0) & + & 5(2) = 11 \neq & 0 \end{array} \right.$

(c) sim.

(d) sim.

(e) Em um sistema homogêneo se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são soluções então, $k_1(x_1, y_1, z_1) + k_2(x_2, y_2, z_2)$ também é solução para todo $k_1,\ k_2 \in I\!\!R$.

9) (a) $\mathrm{S} = \{(2, 1, 2)\}$ o sistema é compatível determinado;

(b) sistema incompatível, não tem solução;

(c) $\mathrm{S} = \{(-1 - 4z,\ \frac{1}{3} + 2z,\ z);\ z \in I\!\!R\}$ o sistema é compatível indeterminado;

(d) $\mathrm{S} = \{(1, 2, 2 - 2)\}$ o sistema é compatível determinado;

(e) $\mathrm{S} = \{(-z + 2t,\ 1 + 2z\ z,\ t);\ z, t \in I\!\!R\}$

10) $1,5T$ de plástico normal e $2,5T$ de plástico especial.

11) Devem ser utilizadas $3,2g$ de A, $4,2g$ de B e $2g$ de C.

12) (a) Os pesos de nado, corrida e ciclismo seguem a seguinte proporção, respectivamente, $\frac{4}{3} : 1 : 1$.

(b) Ele ficaria empatado com o primeiro colocado.

13) O jogador A tinha $R\$39,00$, o jogador B tinha $R\$21,00$ e o jogador C tinha $R\$12,00$.

14) Foram vendidos $700Kg$ do produto A, $200Kg$ do produto B e $100Kg$ do produto C.

15) Em dezembro foram produzidos 1 unidade da ração 1, 2 unidades da ração 2 e 4 unidades da ração 3.

Já em janeiro foram produzidos 2 unidades da ração 1, 3 unidades da ração 2 e 1 unidade da ração 3.

16) (a) V
(b) F
(c) V
(d) V
(e) F
(f) V
(g) F
(h) V
(i) V
(j) V
(k) F

17) (a) $a = b = c = 0$

(b) $a = -3c$ e $b = 2c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

18) (a) Sim, $w = 3u - v$

(b) Não.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 16x + 10y\}$

19) (a) o sistema linear homogêneo tem única solução.

(b) $S = \{(a, -2a), a \in \mathbb{R}\}$

20) (a) $F_A(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z)$

(b) $F_A(1, 0, 2) = (1, 3)$

(c) $u = (-2, 1, 3)$

(d) (use propriedades de operações com matrizes)

(e) $N(F_A) = \{(-2a, a, 3a), a \in \mathbb{R}\}$

21) (a) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\det A = \det L. \det U = 1.1 = 1$

(c) Resolvendo $Ly = e_2$ e $Ux = y$, obtemos $x = (-2, 1, 0)$.

(d) Com a solução do item anterior e com as soluções de $Ly_1 = e_1$ e $Ux = y_1$ e $Ly_3 = e_3$ e $Ux = y_3$, obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

22) $\{(-3, 1, 2, 1)\}$

23) $\{\frac{1}{17}(21, -14, 12)\}$

24)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PLU$$

$sol = \{(-1/2, 1/2, 3)\}$

25) (a) Usando os 2 últimos pontos, $P_1(x) = 40x - 28$ e $P_1(3, 7) = 120$.

(b) Usando os 3 últimos pontos, $P_2(x) = 50 - 5.5x + 6,5x^2$ e $P_2(3, 7) = 118,635$.