MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

5ª Lista (Autovalores e Autovetores) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 16 de março de 2021

1) Seja $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2, 1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1, 2)$ sem alterar as direções e nem inverter os sentidos.

   (a) Determine $T(x, y)$

   (b) Qual é a matriz do operador T na base $\{(2, 1), (1, 2)\}$.

2) Verifique se o vetor v dado é autovetor da correspondente matriz A.

   (a) $v = (-2, 1)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $v = (1, 1, 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Seja o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$ associados, respectivamente, aos autovalores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-1, 0)$. Determine $T(x, y)$.

4) Determine os autovalores e autovetores das seguintes transformações lineares:

   (a) $T : I\!R^2 \to I\!R^2, T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$

   (b) $T : I\!R^2 \to I\!R^2, T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$

   (c) $T : I\!R^3 \to I\!R^3, T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

   (d) $T : I\!R^3 \to I\!R^3, T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

5) Seja $[T]$ um operador linear em $I\!R^3$ e a matriz de T com respeito a base canônica é dada por $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Encontre o polinômio característico de T, os autovalores e

6) Verifique se a transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, x - 3y + 2z)$ é diagonalizável. Caso a resposta seja positiva, indique a matriz diagonal de T e a base em relação a qual T é diagonalizável.

7) Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : I\!R^2 \to I\!R^2$. Mostre que:

   (a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são L.I.

   (b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são L.I.

8) O Teorema de Cayley-Hamilton afirma que uma matriz quadrada A é uma raíz de seu polinômio característico, isto é, se $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ é o polinômio característico de A então $a_0I + a_1A = a_2A^2 + ... + a_nA^n = 0$(matriz nula).

(a) Verifique este resultado para $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) Este teorema proporciona um método para calcular a inversa e potências n de uma matriz, tendo conhecimento de potências inferiores. Verifique que isto é verdade tomando por exemplo uma matriz 2×2 com polinômio característico $c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

(c) Calcule agora A^2 e A^3 sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e calcule a inversa da matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

9) Suponha que o polinômio característico de um operador T seja $p(x) = x(x+2)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Em cada item responda a pergunta e explique seu raciocínio.

(a) Qual a dimensão do domínio de T?

(b) T é invertível?

(c) Quantos auto-espaços tem T?

(d) O que você pode dizer sobre as dimensões dos auto-espaços de T?

(e) O que você pode dizer sobre as dimensões dos auto-espaços de T, se você souber que T é diagonalizável?

(f) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto LI de autovetores de T, todos associados ao mesmo autovalor de T. O que você pode dizer sobre esse autovalor?

10) Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe neste exercício as seguintes propriedades:

(a) Se um operador T admite $\lambda = 0$ como autovalor, então T não é invertível.

(b) Uma matriz A e sua transposta possuem os mesmos autovalores.

(c) Os autovalores de uma matriz triangular(ou diagonal) são os elementos da diagonal principal.

11) Seja T o operador linear do $\mathbb{R}^2$. Sabendo que T duplica o vetor $(1, -1)$ e triplica o vetor $(0, 1)$ sem alterar o sentido deles, determine $T(x, y)$. A transformação é diagonalizável? Justifique sua resposta! Se for, dê a base do $\mathbb{R}^2$ com relação à qual a matriz de T é diagonal e escreva a matriz de T em relação a esta base.

12) Dê exemplos de:

(a) Um operador linear em $\mathbb{R}^2$ que não possui autovalores reais.

(b) Um operador linear em $\mathbb{R}^3$ que satisfaça todas as condições abaixo:

i. T é diagonalizável.

ii. T não é injetora.

iii. $T(v) \neq v$, para qualquer vetor não nulo.

iv. $\lambda = 2$ é autovalor de T.

v. $v_0 = (1, 0, -1)$ é autovetor de T.

vi. $T(v_0) \neq v_0$.

vii. $(0, 0, 2) \in Im(T)$.

13) Seja A uma matriz de ordem 4 com as seguintes características:

- A possui somente 2 autovalores distintos.
- Existem $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ tais que $\{v_1, v_2\}$ é LI e $Av_1 = 2v_1, Av_2 = 2v_2$.
- A dimensão do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -3$ é igual a 1.

(a) Quais os possíveis polinômios característicos de A?

(b) Se é diagonalizável, qual o polinômio característico de A?

14) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) Se $Ax = \lambda x$ para algum escalar λ não nulo então λ é um autovetor de A.

(b) Se λ é um autovalor de A então o sistema linear $(\lambda I - A)x = 0$ só tem a solução trivial.

(c) Se u_1 e u_2 são autovetores associados a um mesmo autovalor de A, então qualquer vetor não nulo, combinação linear de u_1 e u_2 é um autovetor de A.

15) Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

(a) Defina autovalor de A.

(b) Se λ é autovalor de A, mostre que 2 é autovalor de $2A$.

(c) Se λ é autovalor de A, mostre que λ^2 é autovalor de A^2.

(d) Se $\lambda = 0$ é autovalor de A, então A não é invertível.

(e) A e A^T tem os mesmos autovalores.

(f) Se A é uma matriz triangular (ou diagonal) os autovalores de A são os elementos da diagonal principal.

16) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta!

(a) Se uma matriz A não tem autovetores, então A é invertível.

(b) Uma matriz A é dita diagonalizável se existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $A = P^{-1}DP$. Se $P^T = P^{-1}$ então A é simétrica.

(c) Se v é um autovetor de um operador T associado ao autovalor λ, então $u = 3v$ é também um autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ.

(d) Seja um operador linear T sobre um espaço vetorial V de dimensão n. Um condição suficiente para que T seja diagonalizável é que tenha n autovalores distintos.

17) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ são os autovalores de A.

(b) Determine uma base e a dimensão do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

(c) A é invertível? Justifique!

(d) Mostre que A é diagonalizável.

(e) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P tal que $A = PDP^{-1}$.

18) Em uma certa região, cerca de 10% da população urbana se mudam para os subúrbios vizinhos a cada ano e cerca de 20% da população suburbana se mudam para a cidade. Em 2019, existiam 100.000 residentes na cidade e 200.000 nos subúrbios.

(a) Monte uma equação de diferenças ($x_{k+1} = Mx_k$, para $k \leq 0$) que descreve essa situação, onde x_0 é a população inicial em 2019.

(b) Obtenha uma estimativa da população na cidade e nos subúrbios dois anos mais tarde, em 2021.

19) Uma espécie de pássaro admite duas fases de vida: juventude (até 1 ano de idade) e adulta. Em uma determinada reserva florestal, suponha que o número de fêmeas jovens no ano $k+1$ é 30% do número de fêmeas adultas no ano k (baseado na taxa de nascimentos). Cada ano, 20% das jovens sobrevivem e se tornam adultas e 50% das adultas sobrevivem. Para $k \geq 0$, seja $x_k = (j_k, a_k)$, onde as componentes de x_k representam os números das fêmeas jovens e adultas no ano k.

(a) Obtenha a matriz de fase M tal que $x_{k+1} = Mx_k$, para $k \geq 0$.

(b) Suponha que $x_0 = (150, 100)$, isto é, existem 150 fêmeas jovens e 100 fêmeas adultas nesse ano. Estime a população dessa espécie de pássaro na reserva no ano seguinte.

(c) Sabendo-se que $\lambda_1 = -0,1$ e $\lambda_2 = 0,6$ são os autovalores de M, justifique por que M é diagonalizável e mostre que $B = \{(3,1), (1,2)\}$ é uma base de autovetores.

(d) Justifique (usando os dados do item anterior) por que, após muitos anos, essa espécie tente a desaparecer dessa reserva.

20) Uma população de plantas se encontra distribuída nas quantidades a_n, b_n e c_n de todos os tipos possíveis de genótipos AA, Aa e aa, respectivamente. Deseja-se implantar um programa de melhoramento genético no qual toda planta é sempre fertilizada por um individuo AA. As equações abaixo exprimem a distribuição da população na geração $n+1$ a partir da distribuição populacional na geração n.

$$\begin{cases} a_{n+1} = & a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = & \frac{1}{2}b_n + c_n \\ c_{n+1} = & 0 \end{cases}$$

(a) Construa a matriz de fase F do processo de melhoramento genético.

(b) Determine os autovalores de F.

(c) O sistema é estável para alguma distribuição populacional? Justifique.

(d) F é diagonalizável? Justifique.

(e) Supondo o vetor população inicial $x_0 = (100, 200, 100)$, determine a distribuição da população na segunda geração.

21) Dado $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{10}. Exiba uma fórmula para A^n.

Gabarito

1) (a) $T(x,y) = \frac{1}{3}(5x+2y, -2x+10y)$

   (b) $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) (a) $(-2,1)$ é autovetor de A associado a $\lambda = 1$.

   (b) $(1,1,2)$ é autovetor de A associado a $\lambda = 4$.

3) $T(x,y) = (\frac{-4x+5y}{2}, 3y)$

4) (a) $\lambda_1 = 2, v_1 = (2,1), \lambda_2 = 3, v_2 = (1,1)$

   (b) $\lambda_1 = 4, v_1 = (1,1), \lambda_2 = 1, v_2 = (-2,1)$

   (c) $\lambda_1 = 1, v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-1,1)\lambda_2 = 4, v_3 = (1,1,2)$

   (d) $\lambda_1 = -1, v_1 = (0,-3,1), \lambda_2 = 1, v_2 = (-1,1,1), \lambda_3 = 2, v_3 = (0,0,1)$

5) $p(x) = -(x-2)(x+3)^2$, $\lambda_1 = -3, v_1 = (0,1,0)$, $\lambda_2 = 2, v_3 = (1,0,0)$

6) T é diagonalizável. Uma base de autovetores de T é $B = \{(-1,0,1),(3,1,0),(0,0,1)\}$ e $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9) (a) A é quadrada e de ordem 10.

   (b) A não é inversível pois admite $\lambda = 0$ como autovalor.

   (c) 4 autoespaço.

   (d) dim$V(0) = 1$, dim $V(-2) \leq 2$, dim $V(2) \leq 3$, dim $V(3) \leq 4$.

   (e) dim $V(0) = 1$, dim $V(-2) = 2$, dim $V(2) = 3$, dim $V(3) = 4$.

   (f) Esse autovalor tem multiplicidade geométrica $geq 3$, logo ele só poderá ser $\lambda = 2$ ou $\lambda = 3$.

10) $p_1(x) = (x-5)(x^2-3x+3)$. Autovetor $v = (6,13,-2)$ associado ao autovalor $x = 5$.
$p_2(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)$. Autovalores $1, -1, 3, 2$ com respectivos autovetores $(1,0,0,0)$, $(1,-1,0,0)$, $(3,1,4/3,0)$, $(29/3,-7/3,-3,1)$

11) $T(x,y) = (2x, x+3y)$. T é diagonalizável, pois possui uma base de autovetores $B = \{(1,-1),(0,1)\}$. A matriz de T em relação a base de autovetores é a matriz diagonal $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

12) (a) $T(x,y) = (-2y, 2x)$

   (b) $T(x,y,z) = (3x, 0, = x+2z)$

13) (a) $p(x) = (x-2)^2(x+3)^2$ ou $p(x) = (x-2)^3(x+3)$

   (b) $p(x) = (x-2)^3(x+3)$.

14) (a) (F) (b) (F) (c) (V)

15) (a) λ é autovalor de A ,se existe um vetor X (não nulo) tal que $AX = \lambda X$.

   (b) $AX = \lambda X \Rightarrow 2(AX) = 2(\lambda) \Rightarrow (2A)X = (2\lambda)X$.

   (c) $AX = \lambda X \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X) \Rightarrow (A^2)X = \lambda AX) \Rightarrow (A^2)X = \lambda(\lambda X) \Rightarrow (A^2)X = (\lambda^2)X$.

(d) Use fato de que $det(A - 0I) = det(A)$.

(e) Use fato de que $det(B) = det(B^T)$

(f) Use fato de que se A é triangular, $A - \lambda I$ é triangular.

16) (a) (V) Se A não fosse inversível, como $0 = det(A) = det(A - 0I)$, zero seria autovalor de A. Portanto, A teria, pelo menos, um autovalor.

(b) (V) $A^T = (P^{-1}DP)^T = P^T D^T (P^{-1})^T = P^T D^T P = P^{-1} D P = A$

(c) (V) $T(u) = T(3v) = 3T(v) = 3(\lambda v) = 3\lambda v = \lambda(3v) = \lambda u$

(d) (V)

17) (a) O polinômio característico de A é $p(x) = -x(x-1)^2$ cujas raízes são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

(b) $B_2 = \{(1, 0, -2), (0, 1, -4)\}$, $\dim(V_2) = 2$.

(c) Não, pois A tem autovalor zero e isto implica que $det(A - 0I) = det(A) = 0$.

(d) A é diagonalizável, pois a soma das dimensões dos auto-espaços de A é igual a ordem de A que é 3.

(e) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18) (a) $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 100.000 \\ 200.000 \end{pmatrix}$

(b) $X_2 = \begin{pmatrix} 151.000 \\ 149.000 \end{pmatrix}$

19) (a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

(b) $x_1 = \begin{pmatrix} 30 \\ 80 \end{pmatrix}$ ou seja, 30 fêmeas jovens e 80 fêmeas adultas.

(c) M é diagonalizável pois admite dois autovalores distintos, $\lambda_1 = -0,1$ e $\lambda_2 = 0,6$, com autovalores associados $v_1 = (-3, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$, respectivamente. $B = \{v_1, v_2\}$ é uma base de autovetores.

(d) Como M é diagonalizável, $x_k = \alpha(-0,1)^k v_1 + \beta(0,6)^k v_2$. Se $k \to \infty$, $(-0,1)^k \to 0$, $(-0,6)^k \to 0$. Assim, ao longo do tempo, a população tende a desaparecer.

20) (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Os autovalores são $1, 1/2$ e 0.

(c) Sim, pois admite autovalor $\lambda = 1$.

(d) Sim, pois possui 3 autovalores distintos.

(e) $x_2 = (300, 100, 0)$

21) $A^{10} = \frac{1}{2048} \begin{bmatrix} 1025 & -1023 \\ -2023 & 1025 \end{bmatrix}$, $A^n = \frac{1}{2^{n+1}} \begin{bmatrix} 2^n + 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2^n + 1 \end{bmatrix}$

Para estes cálculos, lembre-se que:

i Se D é uma matriz diagonal com elementos d_i na diagonal, então D^n também é diagonal, d_i^n na diagonal.

ii Se $A = PDP^{-1}$, em que D é uma matriz diagonal, então $A^n = PD^nP^{-1}$.