Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

2^a Prova de Geometria Analítica e Álgebra Linear - 2021/I

Profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Matrícula: 102026

---

1. (20 pontos) Seja $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   (a) O conjunto S é linearmente dependente ou linearmente independente?

   Justifique usando os conceitos de posto e nulidade.

   (b) Determine o subespaço U gerado por S.

   Descreva U deixando explícita a condição para que um vetor do $M_2(\mathbb{R})$ esteja em U.

2. (20 pontos) Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$

   $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0,\ x + y = 0\}$.

   (a) Determine $U \cap W$ e uma base de $U \cap W$.

   (b) Determine $U + W$. Esta soma é direta? Justifique.

3. (20 pontos) Sejam $B = \{(1, 2), (0, -1)\}$, T um operador linear do $\mathbb{R}^2$ e uma matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Considere $C = \{u, v\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$.

   (a) Se $P = [I]_C^B$ (matriz mudança de bases B para C), determine $[u]_B$.

   (b) Se $P = [T]_C^B$ (matriz de T das bases B para C), determine $[T(1, 0)]_C$.

4. (10 pontos) Seja o vetor $u = (1, 2)$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que o subespaço $N(T)$ (núcleo de T) seja gerado por u.

5. (14 pontos) Seja T um operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, x + 2y)$. Mostre que T é inversível e determine a transformação inversa T^{-1}.

6. (16 pontos) Discuta a veracidade das seguintes afirmações. Caso seja verdadeira, prove; caso seja falsa, dê um contra-exemplo ou justifique sua resposta.

   (a) Seja A uma matriz de ordem n. O conjunto $U = \{u \in \mathbb{R}^n : uA = 2u\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Sejam u, v, w vetores de um espaço vetorial V. Se o conjunto $\{u, v, w\}$ é linearmente independente então o conjunto $\{u + v, v + w, u - w\}$ é linearmente independente.