

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## PRIMEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

---

**Questão 1:** Calcular, nos itens abaixo, os limites solicitados:

(5Pts) (a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x - 3}$

(10Pts) (b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4x+9} - \sqrt{x+3}}{x+2}$

(10Pts) (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 13} - x)$

(10Pts) (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + \sin(7x)}{\sin(7x) - \sin(2x)}$

(10Pts) (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 8}$

**Questão 2:** Para a função  $f$  dada abaixo, pede-se:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a, & \text{se } x < 4 \\ (x + b)^2 + 3, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

(10Pts) (a) Considerando, somente para este item, os valores  $a = 1$  e  $b = -1$ , esboçar o gráfico de  $f$ .

(10Pts) (b) Determinar os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ .

(10Pts) (c) Determinar as constantes  $a$  e  $b$  que tornam a função  $f$  contínua em  $x = 4$ .

**Questão 3:** (10Pts) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz  $|3f(x) - 12| \leq 4(x - 7)^3$ .

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ .

**Questão 4:** Para a função  $f$ , dada por  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Indicar o domínio da função  $f$ .

(10Pts) (b) Calcular, caso exista,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## PRIMEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

1ª Questão: (45 pontos) Calcule os seguintes limites:

- (a) (5 pontos)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x}{x^2 - 3}$
- (b) (10 pontos)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{2x + 5}}$
- (c) (10 pontos)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \operatorname{sen} x}$
- (d) (10 pontos)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + 3x - 5|}{3x^2 - 1}$
- (e) (10 pontos)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

2ª Questão: (30 pontos) Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + b + 15, & \text{se } x < -1 \\ 5, & \text{se } x = -1 \\ bx - a, & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

- (a) (10 pontos) Faça  $a = 4$  e  $b = 1$  na função acima e esboce seu gráfico.
- (b) (10 pontos) Determine  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ .
- (c) (10 pontos) Determine os valores das constantes  $a$  e  $b$  para que a função  $f$  seja contínua no seu domínio.

3ª Questão: (10 pontos) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x) \cos \left( \frac{1}{x} \right)$

4ª Questão: (15 pontos) Seja  $f$  a função dada por  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$ .

- (a) (5 pontos) Determine o domínio de  $f$ .
- (b) (10 pontos) Calcule  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ .

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## SEGUNDA PROVA - MAT 140

2019-I

1ª Questão: (40 pontos) Derive as seguintes funções:

(a) (10 pontos)  $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) (10 pontos)  $f(x) = (x^4 + 2x^2 - 4x) \ln x$

(c) (10 pontos)  $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$

(d) (10 pontos)  $f(x) = [\arctan(x - x^4)]^2$

2ª Questão: (15 pontos) Encontre a equação da reta tangente à curva definida implicitamente pela equação  $3xy = 6x + y^3 - 18$  no ponto  $(3, 3)$ .

3ª Questão: (40 pontos) Para  $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ , sabe-se que  $f'(x) = \frac{-x+2}{x^3}$  e  $f''(x) = \frac{2(x-3)}{x^4}$ .

Determine:

(a) (5 pontos) O domínio da função  $f$ .

(b) (5 pontos) O(s) ponto(s) crítico(s) de  $f$ , caso existam.

(c) (5 pontos) O(s) intervalo(s) onde  $f$  é crescente e onde  $f$  é decrescente.

(d) (5 pontos) O(s) extremo(s) relativos de  $f$ , caso existam.

(e) (5 pontos) O(s) intervalo(s) onde o gráfico de  $f$  é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

(f) (5 pontos) O(s) ponto(s) de inflexão, caso existam.

(g) (5 pontos) Todas as assíntotas verticais e horizontais, caso existam.

(h) (5 pontos) Um esboço do gráfico de  $f$ .

4ª Questão: (15 pontos) Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 1 e 6 horas da tarde, a velocidade média neste cruzamento é dada pela equação  $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$  km/h, onde  $t$  é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 1 e 6 horas da tarde, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante, entre 1 e 6 horas da tarde, em que o trânsito é mais lento?

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## SEGUNDA PROVA - MAT 140

2019-I

**Questão 1:** A equação  $x^5 + y^5 = 2xy$  define implicitamente  $y$  como função de  $x$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar  $y' = \frac{dy}{dx}$

(10Pts) (b) Determinar a equação da reta tangente à curva  $x^5 + y^5 = 2xy$  no ponto  $(1, 1)$

**Questão 2:** Calcular a derivada das funções dadas nos itens abaixo.

(10Pts) (a)  $f(x) = \cos(x) + 5x^{\sqrt{2}} - \ln(x)$

(10Pts) (b)  $f(x) = (e^x + x^3) \sec(x)$

(10Pts) (c)  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ .

(10Pts) (d)  $f(x) = \tan(\ln(2x))$ .

**Questão 3:** Seja  $f$  a função dada por  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ , da qual se conhece  $f'(x) = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$  e  $f''(x) = \frac{16(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$ . Com base nessas informações responder os itens abaixo:

(5Pts) (a) Determinar o domínio de  $f$ .

(5Pts) (b) Determinar, caso existam, o(s) ponto(s) crítico(s) de  $f$ .

(10Pts) (c) Determinar o(s) intervalo(s) onde  $f$  é crescente e onde  $f$  é decrescente. Adicionalmente, encontrar os pontos  $x$  onde  $f$  possui máximo ou mínimo relativo.

(10Pts) (d) Determinar o(s) intervalo(s) onde  $f$  é côncava para cima e onde  $f$  é côncava para baixo. Em seguida, encontrar os pontos de inflexão de  $f$ .

### SOLUÇÃO:

(5Pts) (e) Determinar, caso existam, as assintotas ao gráfico de  $f$ .

(5Pts) (f) Esboçar o gráfico de  $f$ .

**Questão 4:** Num sistemas de coordenadas cartesianas são localizados os pontos  $A = (4, -5)$ ,  $B = (-2, 3)$  e  $C = (a, 0)$ . Considerando a função  $f$  dada por  $f(a) = (4 - a)^2 + (-2 - a)^2 + 34$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar  $f(-2)$  e  $f(4)$ .

(10Pts) (b) Determinar o(s) valor(es) de  $a$  onde  $f$  atinge mínimo e encontrar o valor mínimo que  $f$  assume.

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## TERCEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

1ª **Questão** (30 pontos) Esboce a região do primeiro quadrante delimitada pelos gráficos das funções  $y = 2x + 1$ ,  $y = \frac{3}{x}$  e  $y = 1$ . Calcule a área da região.

2ª **Questão** (40 pontos) Resolva as integrais

a) (10 pontos)  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

b) (15 pontos)  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

c) (15 pontos)  $\int x^2 \sin(3x) dx$

3ª **Questão** Faça o que se pede:

a) (5 pontos) Escreva a decomposição da função  $\frac{x^2 + 4}{x^3 - 2x^2}$  em frações parciais, sem calcular as constantes.

b) (15 pontos) Calcule a integral  $\int \frac{x^2 + 4}{x^3 - 2x^2} dx$ .

4ª **Questão** (10 pontos) Mostre que a função abaixo é uma primitiva de  $\arctg x$ :

$$x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + 2$$

5ª **Questão** (10 pontos) Dada a função  $F(x) = \int_3^x \frac{t}{t^2 - 9} dt$ , calcule a derivada de  $F(x)$  e verifique se a função  $F$  é crescente ou decrescente no intervalo  $(0,3)$ .

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## TERCEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

**Questão 1:** Resolver as seguintes integrais:

(10Pts) (a)  $\int \cos(x) \sqrt{\sin(x)} dx$       (15Pts) (b)  $\int (x-1)e^x dx$       (15Pts) (c)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Questão 2:** Fazer o que se pede:

(08Pts) (a) Escrever, sem determinar as constantes, a decomposição em frações parciais da função racional

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 11x - 10}{x^2(x+2)(x^2+3x+3)}$$

(10Pts) (b) Integrar  $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2(x-3)(x^2+3)} dx$

**Questão 3:** Uma região  $R$  é limitada pelas curvas  $y = 2 - x$ ,  $x = -1$  e  $y = x^2 - 4$ . Pede-se:

(4Pts) (a) Encontrar o(s) valo(es) de  $x$  onde as curvas  $y = 2 - x$  e  $y = x^2 - 4$ , se intersectam.

(3Pts) (b) Encontrar o ponto onde as curvas  $x = -1$  e  $y = x^2 - 4$  se intersectam.

(5Pts) (c) Fazer um esboço da região  $R$  (hachurar a região).

(8Pts) (d) Escrever na forma de integral, sem resolver a integral, a área da região  $R$ .

(10Pts) (e) Calcular a área da região  $R$ .

**Questão 4:** Fazer o que se pede:

(10Pts) (a) Verificar se a função  $F(x) = x^2 \ln(x) + 2019$  é primitiva da função  $f(x) = 2x \ln(x) + x$ .

(10Pts) (b) Seja  $F$  a função definida por  $F(x) = \int_{-4}^x t \sqrt{16 - t^2} dt$ . Determinar  $F'(x)$  e verificar se  $F$  é crescente no intervalo  $]1, 3[$

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## PRIMEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

**Questão 1:** Calcular, nos itens abaixo, os limites solicitados:

(5Pts) (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

(10Pts) (b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{3 - x}}{x - 2}$

(10Pts) (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x})$

(10Pts) (d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3) - \sin(2x - 6)}{\sin(3x - 9)}$

(10Pts) (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4}}{8 - x}$

**Questão 2:** Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} b - (x - 2)^2, & \text{se } x < 2 \\ 2a, & \text{se } x = 2 \\ 3x - b, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(10Pts) (a) Fazer  $a = 1$  e  $b = -1$  e esboçar o gráfico de  $f$ .

(10Pts) (b) Determinar os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ .

(10Pts) (c) Determinar as constantes  $a$  e  $b$  para que  $f$  seja contínua em  $x = 2$ .

**Questão 3:** (10Pts) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz  $|3f(x) + 15| \leq 5(2x - 8)^2$ .

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ .

**Questão 4:** Seja  $f$  a função dada por  $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar o domínio da função  $f$ .

(10Pts) (b) Calcular, caso exista,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## SEGUNDA PROVA - MAT 140

2019-I

**Questão 1:** A equação  $5x^3 - y^2 = 4\frac{y}{x}$  define implicitamente  $y$  como função de  $x$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar  $y' = \frac{dy}{dx}$

(10Pts) (b) Determinar a equação da reta tangente à curva  $5x^3 - y^2 = 4\frac{y}{x}$  no ponto  $(1, 1)$

**Questão 2:** Calcular a derivada das funções dadas nos itens abaixo.

(10Pts) (a)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 5x^3 + \sqrt[3]{x^2}$

(10Pts) (b)  $f(x) = (x^5 - x) \cos(x)$

(10Pts) (c)  $f(x) = \frac{e^x - x}{\ln(x)}$ .

(10Pts) (d)  $f(x) = [\arctan(x - 1)]^2$ .

**Questão 3:** Para  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ , sabe-se que  $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$  e  $f''(x) = \frac{2x(x^3 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar o domínio de  $f$ .

(5Pts) (b) Determinar o(s) ponto(s) crítico(s) de  $f$ , caso existam.

(10Pts) (c) Determinar o(s) intervalo(s) onde  $f$  é crescente e onde  $f$  é decrescente. Adicionalmente, encontrar os pontos  $x$  onde  $f$  possui máximo ou mínimo relativo.

(10Pts) (d) Determinar o(s) intervalo(s) onde  $f$  é côncava para cima e onde  $f$  é côncava para baixo. Em seguida, encontrar os pontos de inflexão de  $f$ .

(5Pts) (e) Encontrar a(s) assintota(s) ao gráfico de  $f$ , caso existam.

(5Pts) (f) Esboçar o gráfico de  $f$ .

**Questão 4:** A distância  $d$  do ponto  $A = (-2, 2)$  ao gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x}$  é dado pela expressão  $d = \sqrt{(x + 2)^2 + (1/x - 2)^2}$ . Considerando a função  $g$  dada por  $g(x) = (x + 2)^2 + (1/x - 2)^2$ . Pede-se:

(5Pts) (a) Determinar  $g(-1)$  e  $g(1)$ .

(10Pts) (b) Determinar o(s) valor(es) de  $x$  onde  $g$  assume mínimo e encontrar o valor mínimo que  $g$  assume.



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Departamento de Matemática

## TERCEIRA PROVA - MAT 140

2019-I

**Questão 1:** Resolver as seguintes integrais:

(10Pts) (a)  $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$       (15Pts) (b)  $\int (x+5)e^x dx$       (15Pts) (c)  $\int \frac{x+2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

**Questão 2:** Fazer o que se pede:

(08Pts) (a) Escrever, sem determinar as constantes, a decomposição em frações parciais da função racional  $f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 11x - 10}{x^2(x-2)(x^2+x+1)}$

(10Pts) (b) Integrar  $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x(x+3)(x^2+1)} dx$

**Questão 3:** Uma região  $R$  é limitada pelas curvas  $y = x - 2$ ,  $y = 4 - x^2$  e a esquerda de  $x = 1$ .  
Pede-se:

(4Pts) (a) Encontrar o(s) valo(es) de  $x$  onde as curvas  $y = x - 2$  e  $y = 4 - x^2$ , se intersectam.

(3Pts) (b) Encontrar o ponto onde as curvas  $x = 1$  e  $y = 4 - x^2$  se intersectam.

(5Pts) (c) Fazer um esboço da região  $R$  (hachurar a região).

(8Pts) (d) Escrever na forma de integral, sem resolver a integral, a área da região  $R$ .

(10Pts) (e) Calcular a área da região  $R$ .

**Questão 4:** Fazer o que se pede:

(10Pts) (a) Verificar se a função  $F(x) = (x^2 + 3)\ln(x) + \pi$  é primitiva da função  $f(x) = (2x + 1)\ln(x) + x + 1$ .

(10Pts) (b) Seja  $F$  a função definida por  $F(x) = \int_{-4}^x t^2 e^{2t} dt$ . Determinar  $F'(x)$  e verificar se  $F$  é crescente no intervalo  $]1, 3[$