

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Probabilístico
 - Teorema de Bayes
 - Redes Baysianas
 - Inferência ingênua
- Raciocínio Nebuloso
 - Lógica Fuzzy

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de Bayes



Thomas Bayes

1702 - 1761

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de Bayes
- O teorema de Bayes procura definir como relacionar estatisticamente **evidências** e **hipóteses**. Ou seja, responder à questão: qual é a probabilidade de ocorrer uma determinada hipótese dadas as seguintes evidências?

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de Bayes
 - O teorema possui a seguinte forma:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_{n=1}^k P(E|H_n)P(H_n)}$$

Onde: $P(H_i|E)$ - Probabilidade de Hipótese H_i dada a evidência E .

$P(E|H_i)$ - Probabilidade da evidência E dada H_i .

$P(H_i)$ - Probabilidade *a priori* de H_i na ausência de evidências.

k - número de hipóteses.

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de bayes

Como lidar quando temos mais de uma evidência?

Neste caso é preciso **combinar as probabilidades**. Por exemplo dada uma evidência prévia **e** e uma nova evidência prévia **E** a conjunção das probabilidades é dada por:

$$P(H|E,e) = P(H|E) \cdot P(e|E,H)/P(e|E)$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de bayes

Outra forma do teorema de Bayes é:

$$P(H|E) = P(E|H)P(H)/P(E)$$

Exemplo: qual a probabilidade de um paciente ter Dengue no caso de estar com o corpo dolorido?

Em geral o médico sabe que a probabilidade de um doente com Dengue ter o corpo dolorido é 90% e a probabilidade de um paciente ter Dengue isoladamente é um caso em 20.000 e finalmente a probabilidade de alguém estar com o corpo dolorido isoladamente é 1 em 10000.

Logo a probabilidade é:

$$P(H|E)=(0.9)(1/20000)/(1/10000)=0,45$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de bayes
 - Problemas com o uso do teorema de Bayes:
 - O **espaço** necessário para armazenar todas as probabilidades em um problema complexo é muito grande.
 - O **tempo** exigido para computar todas as probabilidades é muito grande.
 - A **aquisição de conhecimento** é difícil. Os seres humanos são considerados estimadores fracos.
 - **Grande número de probabilidades** precisam ser fornecidas

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Teorema de bayes
 - Apesar destes problemas o teorema de Bayes forma a base para vários métodos para lidar com raciocínio probabilístico. Estes métodos procuram contornar os problemas listados acima. Dentre estes métodos podemos citar:
 - Redes Bayesianas.
 - Inferência bayesiana ingênua

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **REDES BAYSIANAS**

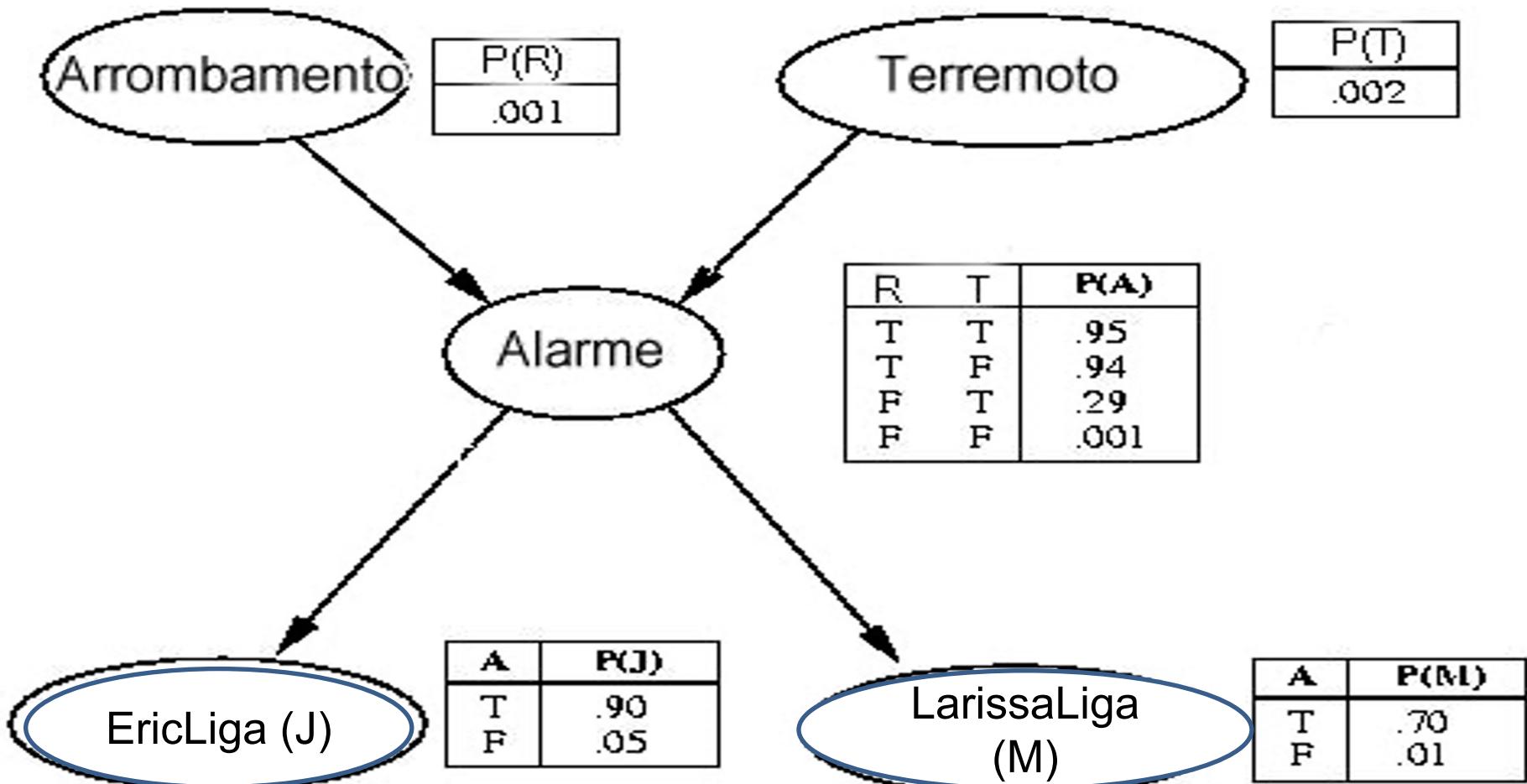
A principal ideia é que, para descrever o mundo real não é necessário usar uma enorme tabela de probabilidades conjuntas na qual listamos as probabilidades de todas as combinações possíveis de eventos.

A maioria dos eventos é condicionalmente independente entre si.

Portanto, basta uma representação mais local.

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - REDES BAYSIANAS



Exemplo de simulador: http://www.cs.man.ac.uk/~gbrown/bayes_nets/

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - REDES BAYSIANAS

Para se calcular a conjunção de probabilidades usa-se a fórmula:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1, n} P(x_i | \text{pais-de}(x_i))$$

Por exemplo, qual a probabilidade de que o alarme toque, a Larissa (M) e o Eric (J) liguem, mas não ocorra roubo e nem desabamento?

$P(\text{não roubo e não Terremoto } (D) \text{ e Alarme e Eric } (J) \text{ e Larissa } (M))$

$$= P(\sim R).P(\sim D).P(A|\sim R, \sim D).P(J|A).P(M|A)$$

$$= (0.999)(0.998)(0.001)(0.9)(0.7) = 0.00062$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - REDES BAYSIANAS

As redes Bayesianas são bastante flexíveis, permitindo o cálculo de probabilidade de qualquer nó. As inferências podem ser de vários tipos:

- **Inferências de diagnóstico** – do efeito para a causa. Dado que Eric ligou qual a probabilidade de ocorrer roubo?
- **Inferências causais** – da causa para o efeito. Dado que houve roubo qual a probabilidade de Eric ligar?
- **Intercausais** – entre causa comuns para o mesmo efeito. Qual a probabilidade de roubo dado o alarme e terremoto.

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

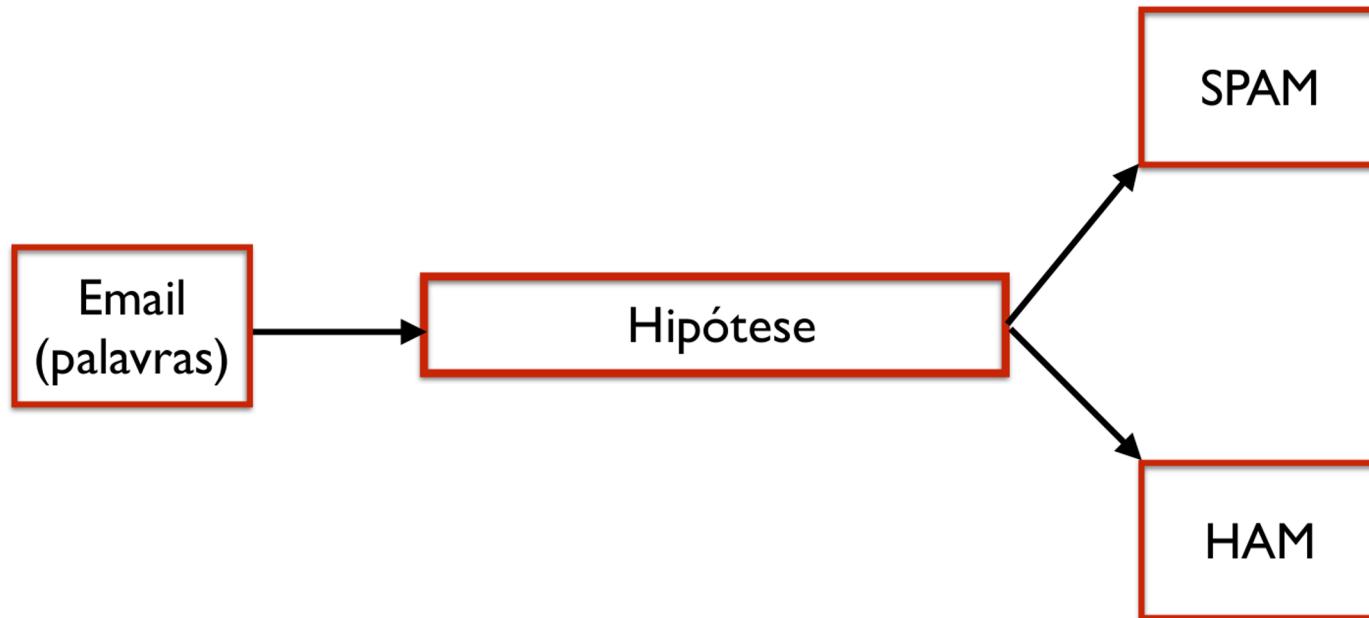
- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
- É um tipo de aprendizagem supervisionada
- É um tipo de classificador fácil de construir e treinar

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
 - Exemplo: Detecção de SPAM



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**

- Exemplo: Reconhecimento de Dígitos

- **Entrada:** conjunto de pixels.
- **Saída:** dígito 0-9. 0
- Obtém-se um conjunto de treinamento com imagens de dígitos e o dígito correspondente.
- Atributos: Se um determinado pixel (3, 1) da imagem está colorido ou não: $F(3, 1) = 0$ ou 1.

	0
	1
	2
	1
	??

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
 - Relembrando Bayes

$$P(causa|efeito) = \frac{P(efeito|causa)P(causa)}{P(efeito)}$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
 - Relembrando Bayes

$$P(\text{causa}|\text{efeito}) = \frac{P(\text{efeito}|\text{causa})P(\text{causa})}{P(\text{efeito})}$$

Direção do diagnóstico

$$P(\text{causa}|\text{efeito})$$

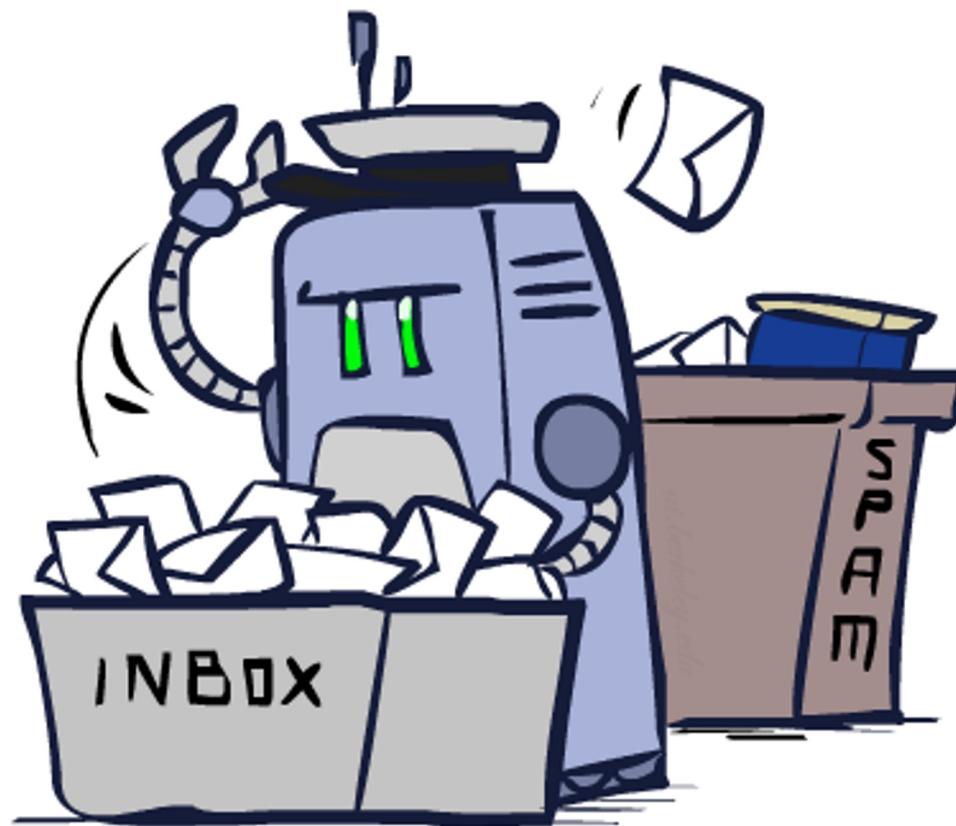
Direção causal

$$P(\text{efeito}|\text{causa})$$



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
- Classificação



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificador Bayesiano Ingênuo**
- Ao fazermos uma classificação geralmente temos múltiplas evidências, não apenas uma.

Exemplo: No caso da COVID-19 poderíamos observar perda de olfato e febre.

- Qual a probabilidade de uma mensagem ser SPAM dado que a mensagem contém as palavras p1, p2 e p3?

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Classificador Bayesiano Ingênuo
- Qual a probabilidade de uma mensagem ser SPAM dado que a mensagem contém as palavras p1, p2 e p3?

$$P(SPAM|p1, p2, p3) = \frac{P(SPAM)P(p1, p2, p3|SPAM)}{P(p1, p2, p3)}$$

- Apenas o numerador nos interessa, pois P(p1, p2, p3) será o mesmo para verificar SPAM ou HAM.

$$P(SPAM|p1, p2, p3) = \alpha(P(SPAM)P(p1, p2, p3|SPAM))$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Classificador Bayesiano Ingênuo

- O cálculo da equação abaixo é exponencial nas evidências.

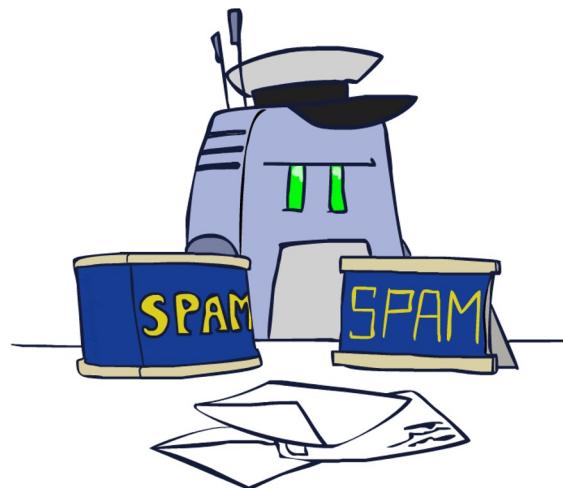
$$P(SPAM|p1, p2, p3) = \alpha \left(P(SPAM) P(p1, p2, p3|SPAM) \right)$$

- Assume-se então que as evidências são independentes.
- Na prática, as evidências geralmente não são independentes, por isso o nome Ingênuo.

$$P(SPAM|p1, p2, p3) = \alpha \left(P(SPAM) P(p1|SPAM) P(p2|SPAM) P(p3|SPAM) \right)$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Classificação Baseada em Modelo**
 - O classificador Bayesiano Ingênuo requer um conjunto de probabilidades.
 - As probabilidades podem ser aprendidas através de coleta de dados.
 - (marcar como SPAM do GMail, Amazon Turk, etc.)

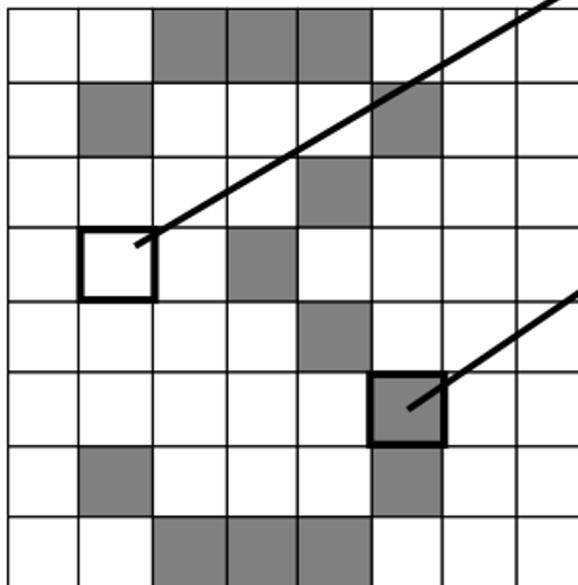


Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Exemplo: Reconhecimento de Dígitos

$P(Y)$

1	0.1
2	0.1
3	0.1
4	0.1
5	0.1
6	0.1
7	0.1
8	0.1
9	0.1
0	0.1



$P(F_{3,1} = 1|Y)$

1	0.01
2	0.05
3	0.05
4	0.30
5	0.80
6	0.90
7	0.05
8	0.60
9	0.50
0	0.80

$P(F_{5,5} = 1|Y)$

1	0.05
2	0.01
3	0.90
4	0.80
5	0.90
6	0.90
7	0.25
8	0.85
9	0.60
0	0.80

- Máxima Verossimilhança

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Máxima Verossimilhança

SPAM

offer is secret
click secret link
secret sports link

HAM

play sports today
went sports today
secret sports event
sports is today
sports costs money

Quiz: Qual a probabilidade apriori de SPAM e de HAM?

$$P(S) = \frac{3}{8}, P(H) = \frac{5}{8}$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Exemplo 1

● Mensagem: “sports”

$$P(SPAM | m) = ?$$

$$P(\neg SPAM | m) = ?$$

SPAM

offer is secret

click secret link

secret sports link

HAM

play sports today

went sports today

secret sports event

sports is today

sports costs money

$$P(SPAM|m) = \alpha(P(SPAM)P(m|SPAM)) = \alpha\left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{9}\right) = \alpha(0.041)$$

$$P(\neg SPAM|m) = \alpha(P(\neg SPAM)P(m|\neg SPAM)) = \alpha\left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{15}\right) = \alpha(0.208)$$

$$P(SPAM|m) = \frac{\frac{1}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8}} = 0.16666$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico

- Exemplo 2

- Mensagem: “secret is secret”

$$P(\text{SPAM} | m) = ?$$

$$P(SPAM|m) = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{15} \times \frac{1}{15}} = 0.9615$$

SPAM
offer is secret
click secret link
secret sports link

HAM
play sports today
went sports today
secret sports event
sports is today
sports costs money

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico

- Exemplo 3

- Mensagem: “today is secret”

$$P(SPAM | M) = ?$$

$$P(SPAM|m) = \alpha\left(\frac{3}{8} \times 0 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{3}\right) = 0$$

Superadaptação!

SPAM
offer is secret
click secret link
secret sports link

HAM
play sports today
went sports today
secret sports event
sports is today
sports costs money

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Suavização Aditiva (Laplace)**
- Qual a probabilidade de o sol não nascer amanhã?
- O sol nasceu em todos os dias até hoje, como aproximar a probabilidade de ele não nascer?

$$P(\neg sol) = \frac{1}{NumDias + 2}$$

- E para o classificador de SPAMs?

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Suavização Aditiva

- Máxima verossimilhança

$$P(X) = \frac{\#X}{N}$$

- Suavização aditiva

$$P(X) = \frac{\#X + k}{N + k|X|}$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Suavização Aditiva**
- Exemplo 1:
 $k = 1$
 - (a) 1 mensagem 1 SPAM, então $P(\text{SPAM}) = 2/3$
 - (b) 10 mensagens 6 SPAMs, então $P(\text{SPAM}) = 7/12$
 - (c) 100 mensagens 60 SPAMs, então $P(\text{SPAM}) = 61/102$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Suavização Aditiva

- Exemplo 2:

$k = 1$ e um dicionário de 12 palavras

(a) $P(\text{SPAM}) = 4/10 = 2/5$

(b) $P(\text{HAM}) = 6/10 = 3/5$

(c) $P(\text{"today"} | \text{SPAM}) = 1/(9+12) = 1/21$

(d) $P(\text{"today"} | \text{HAM}) = (3 + 1)/(15 + 12) = 4/27$

SPAM

offer is secret
click secret link
secret sports link

HAM

play sports today
went sports today
secret sports event
sports is today
sports costs money

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Suavização Aditiva

- Exemplo 3:

m = “today is secret”, para $k = 1$, calcule $P(SPAM|m)$

$$P(SPAM|m) = \alpha \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{9+12} \times \frac{2}{9+12} \times \frac{4}{9+12} \right) = 0.4146$$

SPAM
offer is secret
click secret link
secret sports link

HAM
play sports today
went sports today
secret sports event
sports is today
sports costs money

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - **Matriz de Confusão**
- Para apresentar a precisão do sistema, além de validação cruzada o que mais devemos fazer?
- Quiz: Um sistema com 99.9% de acerto é um bom sistema?
- Depende, se as classes são não balanceadas e a classe majoritária representa 99.9% dos objetos, então é fácil construir um classificador com precisão de 99.9%

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Matriz de Confusão

Classe	Predita Positiva	Predita Negativa
Real Positiva	Verdadeiro Positivo	Falso Negativo
Real Negativa	Falso Positivo	Verdadeiro Negativo

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Matriz de Confusão

Classe	Predita Positiva	Predita Negativa
Real Positiva	Verdadeiro Positivo	Falso Negativo
Real Negativa	Falso Positivo	Verdadeiro Negativo

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Matriz de Confusão

Classe	Prevista Positiva	Prevista Negativa
Positiva	30	5
Negativa	6	27

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Estatístico
 - Problemas de underflow

Underflow: Quando o número a ser armazenado é menor que a memória consegue armazenar.

Acontece com frequência com o classificador de Bayes Ingênuo.

Para mensagem m :

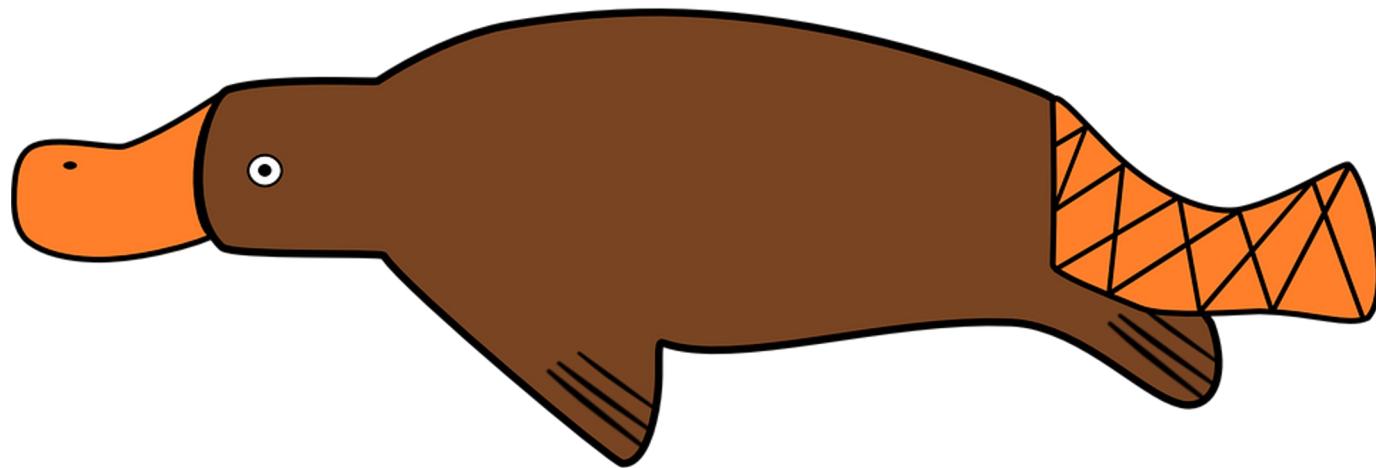
$$\operatorname{argmax}_{c \in \{S, H\}} P(c) \prod_{p \in m} P(p|c)$$

Utilizar:

$$\operatorname{argmax}_{c \in \{S, H\}} \left[\log P(c) + \sum_{p \in m} \log P(p|c) \right]$$

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- **Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)**



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)

O raciocínio estatístico difere do raciocínio nebuloso no sentido que o conceito é bem definido, mas o que desejamos obter é probabilidade de sua ocorrência. Já no raciocínio nebuloso o valor é conhecido, mas o conceito é nebuloso. Por exemplo, sabemos que a altura de Ana é 1,65m mas se ela é alta é um conceito nebuloso.

Outro exemplo: se colocarmos 5 pitbulls e 5 rottweilers em uma cesta qual a probabilidade de retirarmos um pitbull? (raciocínio estatístico). Se cruzarmos um pitbull com um rottweiler qual é o resultado? (raciocínio nebuloso).

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)

Para lidar com este tipo de raciocínio, Lotfi Zadeh desenvolveu a Lógica Nebulosa ou Fuzzy.

Na lógica Fuzzy um determinado fato poderá significar não apenas 1 ou 0 (true ou false), mas pode estar associado a qualquer valor real entre 0 e 1.

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)

A semântica de uma fórmula atômica *ground* (sem variáveis livres) é dada por uma função característica (CFUN) que retorna um valor entre 0 (falso) e 1 (verdade).

$$[P(a_1, \dots, a_n)] = \text{CFUN}(P(a_1, \dots, a_n)).$$

$$[A \wedge B] = \min([A], [B]).$$

$$[A \vee B] = \max([A], [B]).$$

$$[\neg A] = 1 - [A].$$

$$[A \Rightarrow B] = \max(1 - [A], [B]).$$

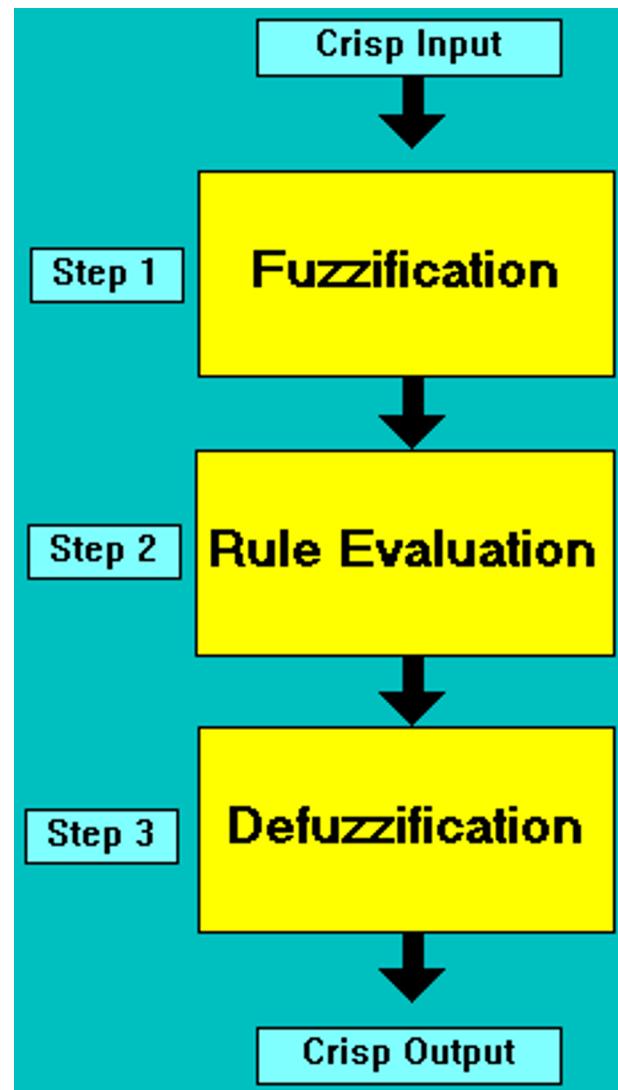
Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)

- A lógica Fuzzy não é consistente com a lógica clássica.
- Por exemplo, na lógica clássica $\alpha \vee \neg\alpha$ é sempre true, enquanto que na lógica fuzzy $\alpha \vee \neg\alpha$ nem sempre é true.
- A Lógica Fuzzy tem sido empregada com sucesso em sistemas de controle, como controle de foco em máquinas fotográficas e termostatos. Este sucesso se deve ao fato que o uso da lógica fuzzy diminui a complexidade destes sistemas e tornam mais fácil sua implementação.
- Alguns pesquisadores acreditam que a LF está restrita a este tipo de aplicação, onde a base de conhecimento possui poucas regras e não existe encadeamento de inferências.

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Lógica Fuzzy (Etapas de desenvolvimento)



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

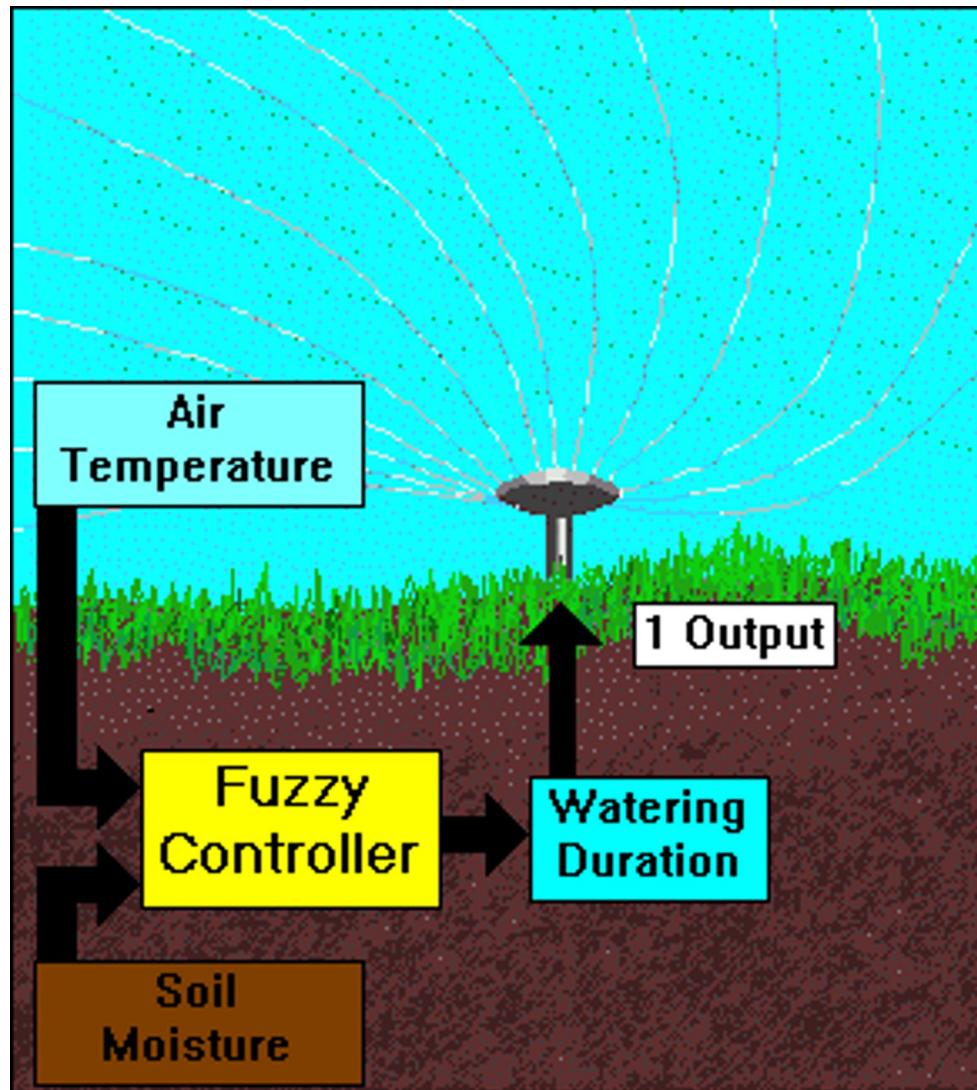
- Raciocínio Nebuloso (Fuzzy)

- Suponha que um fazendeiro deseja que controlar automaticamente o tempo de irrigação de uma plantação.
- Este tempo deve variar segundo a umidade do solo e da temperatura do ar.
- Como realizar esse controle?



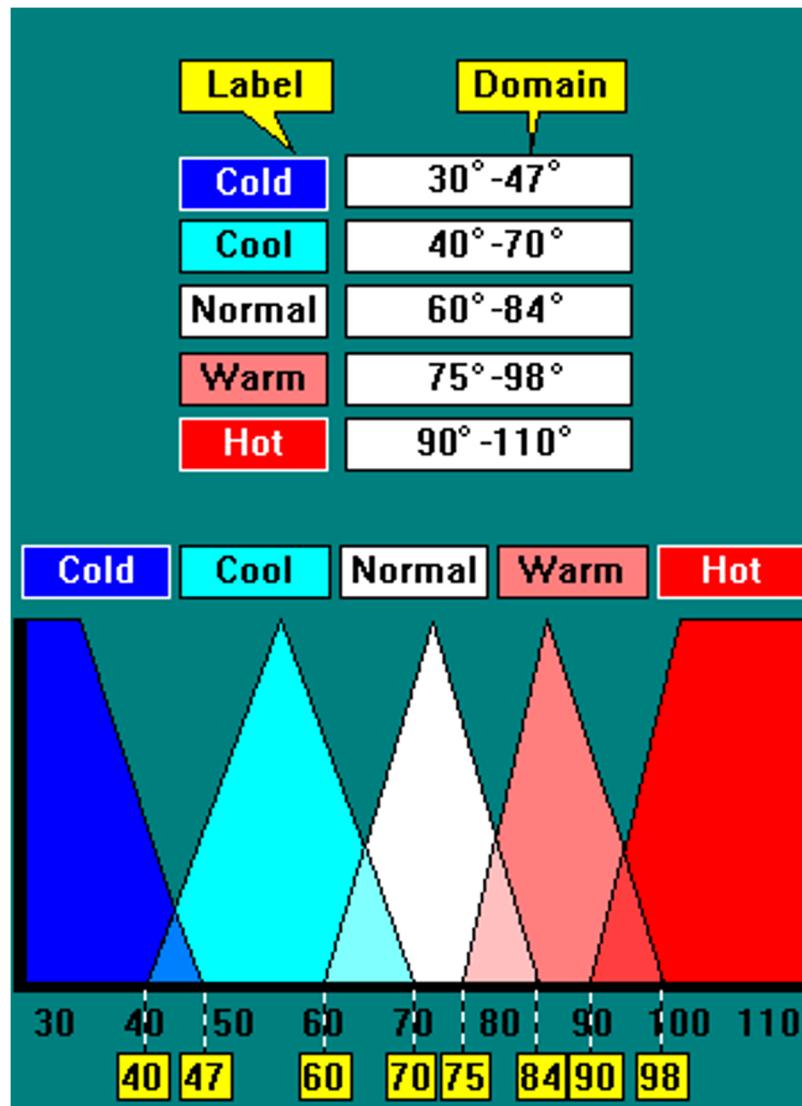
Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Lógica Fuzzy (Fuzzification)



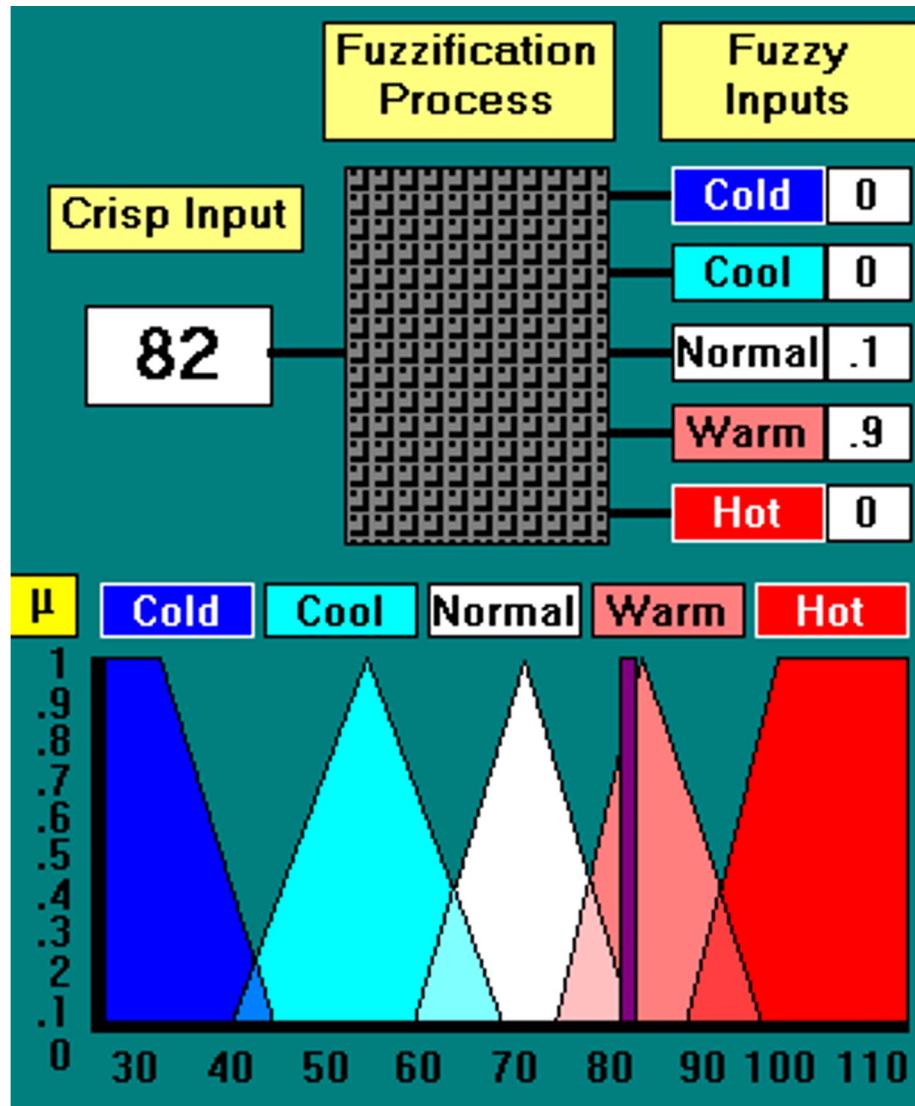
Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Lógica Fuzzy (Fuzzification)



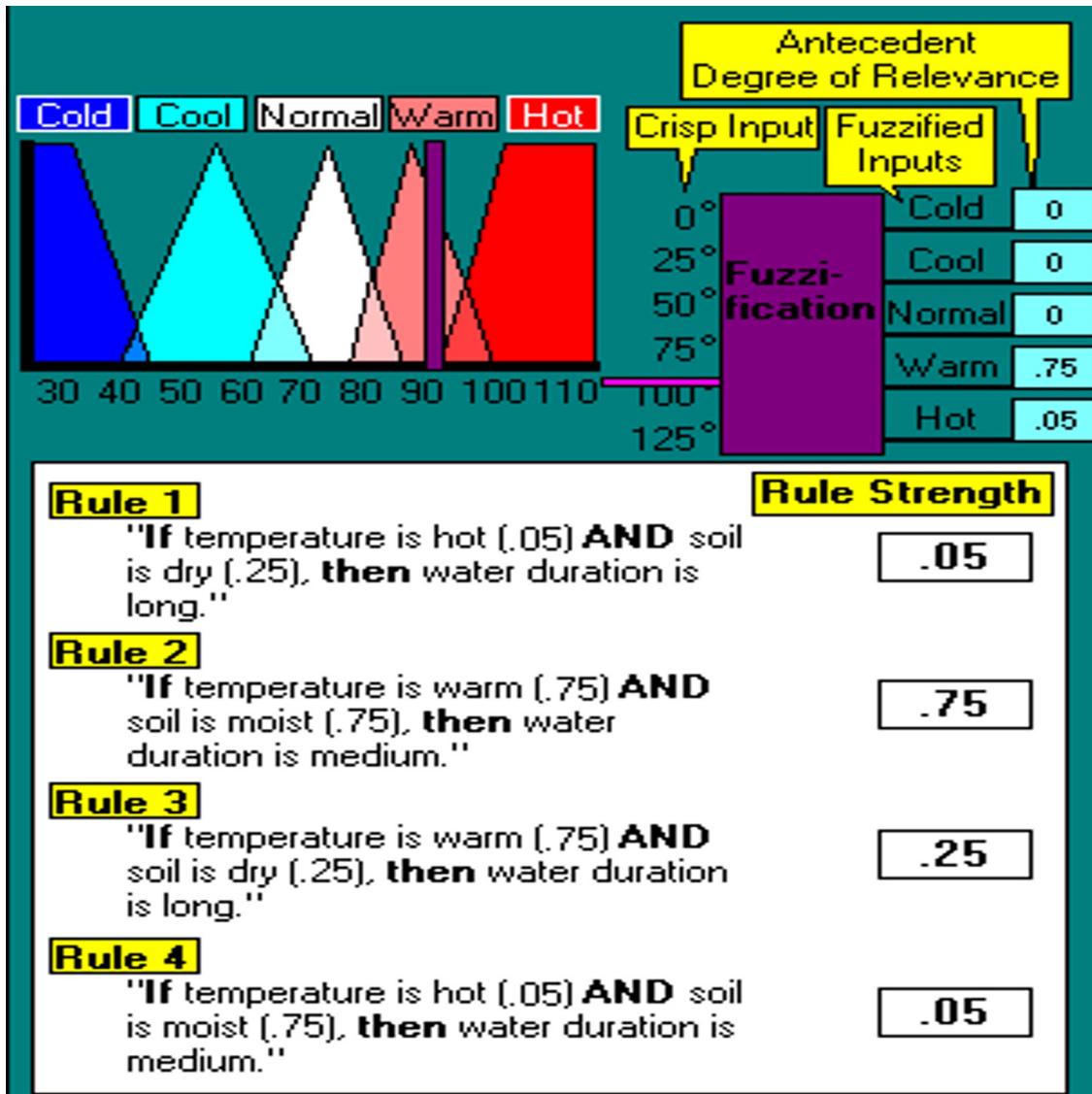
Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Lógica Fuzzy (Fuzzification)



Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

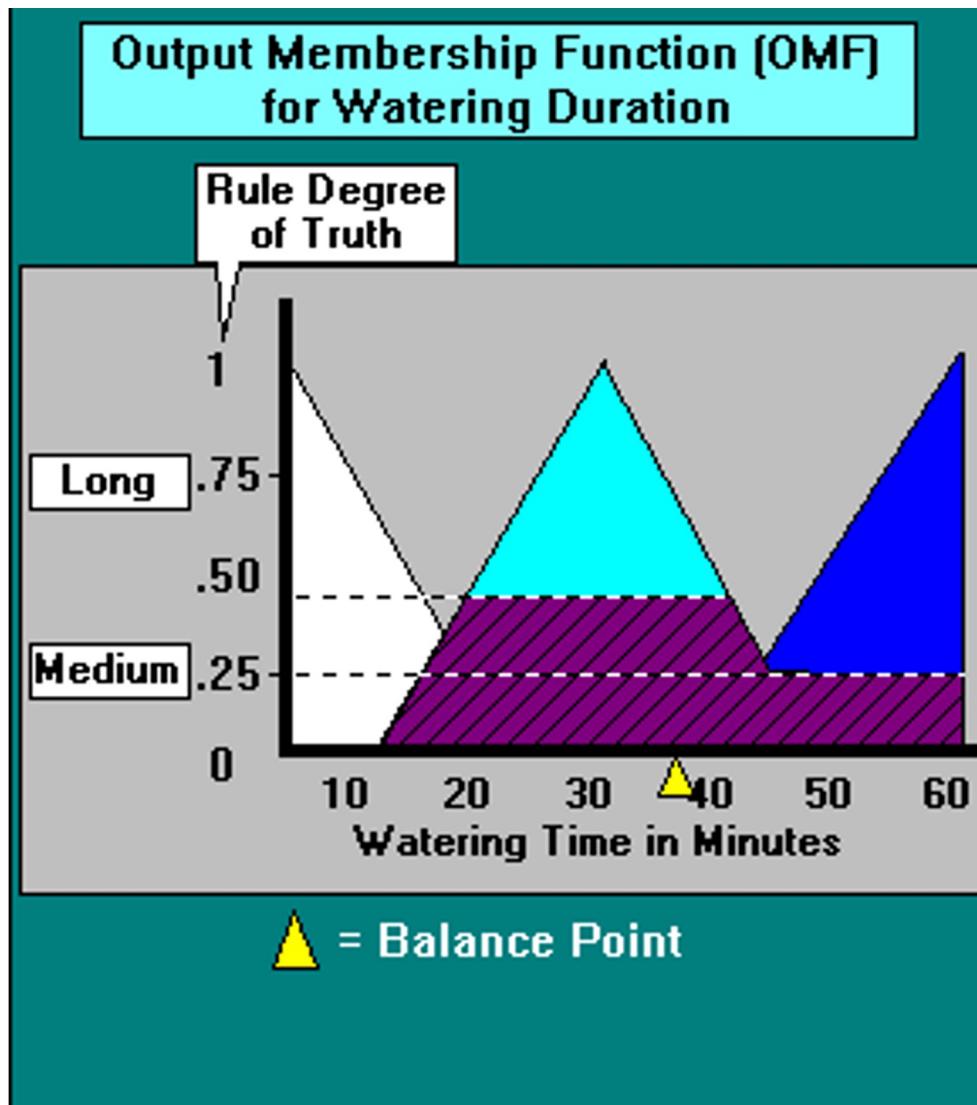
- Lógica Fuzzy (Avaliação da regra)



Long = 0.25
medium=0.75

Representação e Processamento de Raciocínio Incerto

- Lógica Fuzzy (Defuzzification)



$$\text{COG} = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot x \, dx}{\int_a^b \mu(x) \, dx}$$

FIM