Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

7ª Lista (Retas e planos) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 30 de abril de 2021

Use o produto escalar (produto interno usual) do $\mathbb{R}^n$ nos exercícios.

1) Obtenha, diretamente das equações, um ponto e um vetor diretor da reta dada.

(a) $\begin{cases} x = & 3+t \\ y = & -1+t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 4+t \end{cases}$

(b) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{1-y}{4} = z+5$

2) Dados $A = (2,2,5), u = (1,-1,3)$ e $v = (2,2,3)$, escreva as equações paramétricas da reta r que passa por A e é paralela ao vetor $v-u$.

3) Dadas as retas $r : \begin{cases} x = & 1+(m+1)t \\ y = & 0+0t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 0+2t \end{cases}$, $s : \begin{cases} x = & 2+t \\ y = & 2+mt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 1+nt \end{cases}$ e $l : x+1 = y-2 = \dfrac{z-3}{2}$, calcule m e n sabendo que l é ortogonal a r e s.

4) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1,2,3)$ e $B = (0,2,-2)$.

5) Determine as coordenadas do ponto Q, simétrico de $P = (1,1,-2)$ em relação à reta $s : x+1 = y-1 = z$.

6) Determine as equações da reta r definida pelos pontos $A = (2,-1,4)$ e $B = r \cap s$, em que $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{1-z}{2}$ e $s : \begin{cases} x = & 0+3t \\ y = & 1+2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = & 2+t \end{cases}$

7) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1,4,5)$ e que é perpendicular à reta $r : X = (-2,1,1)+t(1,-1,2), t \in \mathbb{R}$.

8) Determine as equações simétricas da reta s que passa pelo ponto $P = (1,3,1)$ que seja concorrente à reta $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$ e que seja ortogonal ao vetor $v = (2,0,-1)$.

9) Verifique se as retas $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ e $s : \begin{cases} x = & 5+t \\ y = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 7-2t \end{cases}$ são coplanares.

10) Determine o ponto de interseção das retas $r : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ e $s : \begin{cases} x = & 5+t \\ y = & 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = & 7-2t \end{cases}$

11) Determine a equação geral do plano:

(a) passa pelo ponto $D = (1, -1, 2)$ e é ortogonal ao vetor $v = (2, -3, 1)$.

(b) os pontos $A = (-2, 1, 0), B = (-1, 4, 2)$ e $C = (0, -2, 2)$ pertencem a ele.

(c) possui o ponto $P = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano xz.

(d) contém as retas $r : \dfrac{x}{2} = y + 1 = z + 3$ e $s : \dfrac{x+1}{4} = -\dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$

(e) contém a reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z - 1$ e é paralelo à reta $s : \dfrac{x-3}{2} = 2 - y = \dfrac{z-4}{4}$

12) Determine a equação da reta interseção dos planos $x + 2y - z - 1 = 0$ e $x + y + 1 = 0$.

13) Dado o ponto $P = (5, 2, 3)$ e o plano $\pi : 2x + y + z - 3 = 0$, determine:

(a) a equação paramétrica da reta que passa por P e é perpendicular a π.

(b) a projeção ortogonal de P sobre π.

(c) o ponto P' simétrico de P em relação a π.

(d) a distância de P ao plano π.

14) Determine a equação do plano que contém os pontos $A = (1; 2; 2)$ e $B = (3; 1; 2)$ e é perpendicular ao plano $\pi : 2x + y - z + 8 = 0$.

15) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 0, 0)$ e é paralela a cada uma dos planos $\pi_1 : 2x - y - z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 3y + z + 5 = 0$.

16) Determine a equação do plano que contém $A = (3, 2, 1)$ e a reta r, interseção dos planos $\pi_1 : x+2y-z-1 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z + 7 = 0$.

17) Dados os planos $\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0, \pi_2 : x + y + z + 1 = 0$ e $\pi_3 : x - 2y + z + 5 = 0$, encontre a equação do plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3.

18) Determine uma condição necessária e suficiente para que um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ seja ortogonal ao plano xz.

19) Determine o ponto do plano $ax + by + cz = d$ mais próximo da origem.

20) Determine se as retas r e s são paralelas, concorrentes ou reversas e calcule a distância entre elas, em que $r : \begin{cases} x = & -1 + t \\ y = & 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = & 1 + 2t \\ y = & 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = & 3t \end{cases}$

21) Seja r a interseção dos planos $x + z = 4$ e $y - 2z + 4 = 0$. Encontre uma equação da reta s definida pela projeção ortogonal de r no plano $x - y + z = 2$.

22) Escreva as equações simétricas da reta s, traçada pelo ponto $P = (1, 3, 1)$, que seja concorrente com a reta $r : \dfrac{x+1}{3} = y - 22 = z$ e seja ortogonal ao vetor $v = (2, 0, -1)$.

23) Sejam os planos paralelos $\pi_1 : ax+by+cz+d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax+by+cz+d_2 = 0$. Mostre que $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1-d_2|}{\|(a,b,c)\|}$.

24) Considere os planos $\pi_1 : x - 2y - 2z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 3x + y - 3z - 16 = 0$.

(a) Qual a posição relativa entre π_1 e π_2? Determine a interseção, se houver.

(b) Seja a reta r perpendicular à π_1 com $P = (0, -5, -5) \in r$. Se $A = r \cap \pi_1$ e $B = r \cap \pi_2$, então $dist(A, B) =$

Gabarito

1) (a) $P = (3, -1, 4)$ e $v = (1, 1, 1)$

   (b) $P = (3, 1, -5)$ e $v = (2, -4, 1)$

2) $r : \begin{cases} x = & 2 + t \\ y = & 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 5 \end{cases}$

3) $m = -5en = 2$

4) $r : \begin{cases} x = & -1 + t \\ y = & 2, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = & 3 - 5t \end{cases}$

5) $Q = (-3, 1, 2)$

6) $r : \begin{cases} x = & 2 - 2t \\ y = & -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 4 - 2t \end{cases}$

7) $r : \begin{cases} x = & -1 \\ y = & 4 - 4t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 5 - 2t \end{cases}$

8) $s + x - 1 = -y + 3 = \frac{z-1}{2}$

9) r e s não são coplanares.

10) $P = (4, 3, 9)$

11) Determine a equação geral do plano:

   (a) $2x - 3y + z - 7 = 0$

   (b) $12x + 2y - 9z + 22 = 0$

   (c) $y - 1 = 0$

   (d) $y - z - 2 = 0$

   (e) $3x - 2y - 2z - 1 = 0$

12) $r : (-1, 0, -2) + t(-1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$

13) (a) $r : \begin{cases} x = & 5 + 2t \\ y = & 2 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 3 + t \end{cases}$

   (b) $(1, 0, 1)$

   (c) $P' = (3, 2, 1)$

   (d) $2\sqrt{6}$

14) $x + 2y + 4z - 13 = 0$

15) $\begin{cases} x = & -1+2t \\ y = & -3t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = & 7t \end{cases}$

16) $4x + 23y - 9z - 49 = 0$

17) $x + y + z + 1 = 0$

18) $b = 0$

19) $P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(ad, bd, cd)$

20) Retas reversas e $d(r,s) = \frac{6\sqrt{46}}{23}$.

21) $r : \begin{cases} x = & 1 - t/3 \\ y = & 2 + 4t/3, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = & 3 + 5t/3 \end{cases}$

22) $s : x - 1 = 3 - y = \frac{z-1}{2}$

23) Sugestão: calcule a projeção do segmento orientado que liga os planos sobre o vetor normal aos planos.

24) (a) Planos concorrentes e $\pi_1 \cap \pi_2 = s : \dfrac{7x - 34}{8} = \dfrac{7y - 10}{3} = z$.

(b) $dist(A, B) = 60/7$