Geometria Analítica e Álgebra Linear

3 de dezembro de 2019

Sumário

1 Matrizes

Uma matriz A, $m \times n$, é uma tabela de $m \times n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

- Usamos sempre letras maiúsculas para representar uma matriz;
- Se quisermos representar a ordem de uma matriz (número de linhas e colunas) usa - se $A_{m\times n}$;
- Se os elementos de uma matriz A forem números reais, dizemos que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1.1 Igualdade entre Matrizes

Dizemos que duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são iguais se:

- Os números de linhas (m e p) e os números de colunas (n e q) forem iguais. Ou seja, $m = p$ e $n = q$;
- Todos os itens são iguais ao da sua respectiva posição ($a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e j).

$$\begin{bmatrix} 2^4 & \log 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ sen\frac{\Pi}{2} & \cos\frac{3\Pi}{2} \end{bmatrix}$$

1.2 Tipos Especiais de Matrizes

1.2.1 Matriz Quadrada

- é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})}, \; B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{B\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})}$$

1.2.2 Matriz Nula

- é aquela cujo todos os elementos são nulos - ou seja, 0.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriz Coluna

- é aquela que só contém uma coluna.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 23 \end{bmatrix}$$

1.2.4 Matriz Linha

- é aquela que só contém uma linha.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.5 Matriz Diagonal

- é uma matriz quadrada onde todos os números fora da diagonal principal são nulos - ou seja, $a_{ij} = 0$, com $i \neq j$.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.6 Matriz Identidade

- é uma matriz quadrada em que a diagonal principal é igual a 1 e todos os outros elementos são nulos - ou seja, $a_{ij} = 1$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.7 Matriz Triângular Superior

- é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos - ou seja $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.8 Matriz Triângular Inferior

- é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos - ou seja $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.9 Matriz Simétrica

- é uma matriz quadrada onde todos os elementos espelhados são iguais - ou seja $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.10 Matriz Antissimétrica

- é uma matriz quadrada onde todos os elementos espelhados são opostos - ou seja $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e j.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que, na matriz antissimétrica, a diagonal principal é sempre nula.

1.3 Operações com Matrizes

1.3.1 Adição

- a soma de duas matrizes de mesma ordem é uma matriz C obtida somando - se os elementos correspondentes de A e B, ou seja $C_{ij} = A_{ij} + Bij$, para todo i e j.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 4+0 & -3+1 \\ 2+(-2) & 3+5 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3.1.1 Propriedades da Adição

- **Comutatividade:** $A + B = B + A$
- **Associatividade:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elemento Neutro:** $A + 0_{m \times n} = A$

1.3.2 Multiplicação por Escalar

- a multiplicação de uma matriz $A_{m \times n}$ por um escalar (número) k é definida pela matriz $B = A \times k$, obtida multtiplicando cada elemento da matriz A pelo escalar k - ou seja $B_{ij} = A_{ij} \times k$, para todo i e j.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; k = -2$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} -2 \times -2 & 0 \times -2 & 4 \times -2 \\ 1 \times -2 & 3 \times -2 & -1 \times -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3.2.1 Propriedades da Multiplicação por Escalar

- **Distributividade:** $k(A + B) = kA + kB$
- **Distributividade:** $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 A + k_2 A$
- **Elemento Nulo:** $0 \cdot A = 0_{m \times n}$
- **Associatividade:** $k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A$

1.3.3 Transposição

- Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = (b_{ij})_{n\times m}$ cujas linhas serão as colunas da matriz A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j.

Exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.3.1 Propriedades da Transposição

- Uma matriz A é **simétrica** se, e somente se, ela for igual a sua transposta. Ou seja, $A = A^T$
- Uma matriz é **antissimétrica** se, e somente se, ela for igual ao oposto da sua transposta. Isso é, se $A = A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(k \times A)^T = k \times A^T$

1.3.4 Multiplicação de Matrizes

- Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$. Definimos $AB = (C_{uv})_{m\times p}$, onde $C_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} \times b_{vk}$

Observações:

- Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{l\times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz resultante $C = AB$ terá ordem $m \times p$.
- O elemento C_{ij} é obtido multiplicando os elementos correspondentes da i - ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j - ésima coluna da segunda matriz, e somando esses produtos.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \times (-1) + 0 \times 1 & 2 \times 0 + 0 \times 1 \\ 1 \times (-1) + (-1) \times 1 & 1 \times 0 + 1 \times 1 \\ 3 \times (-1) + 2 \times 1 & 3 \times 0 + 2 \times 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 2 \\ 0 \times 0 + (-1) \times 1 & 0 \times 1 + (-1) \times 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

1.3.4.1 Propriedades da Multiplicação de Matrizes

- Em geral, $AB \neq BA$, podendo até mesmo um dos produtos estar definido e o outro não
- $A \times I_n = I_n \times A$, para toda matriz $A_{m\times n}$
- **Distributividade:** $A(B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A \times B)^T = B^T \times A^T$ (*Observação: A ordem importa*)
- **Associatividade:** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

1.3.5 Diferença entre Matrizes

- É dada para duas matrizes de mesma ordem, onde $A - B = A + (-B)$

1.3.6 Potenciação

- Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ e p um número inteiro positivo, define - se $\underbrace{A^p = A \times A \times \cdots \times A}_{p\ vezes}$

2 Determinantes

Definição: O determinante da matriz **quadrada** $A = (a_{ij})_{n\times n}$ $|A| = det(A) = \sum_p (-1)^J a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \cdots \times a_{nj_n}$

Observações:

- Em cada termo do somatório existe um, e somente um, elemento de cada linha; e um, e somente um, elemento de cada coluna.
- Também é possível definir o determinante de A variando o j nas linhas.

2.1 Propriedades dos Determinantes

- $det(A) = det(A^T)$
- Se multiplicarmos uma linha (ou coluna) por uma constante, o determinante da matriz fica multiplicado por essa constante. Ou seja, $det(B) = k \times det(A)$
- Se A é uma matriz de ordem n, então $det(kA) = k^n det(A)$
- Uma vez trocadas de posição duas linhas (ou colunas), o determinante troca de sinal.
- O determinante de uma matriz triangular é igual à multiplicação dos elementos da diagonal principal.
- O determinante de uma matriz que tem todos os elementos de uma linha (ou coluna) iguais a 0, é igual a 0.
- O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é igual a 0.
- O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) proporcionais é igual a 0. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

  Neste exemplo, a linha 3 é a linha 1 multiplicada por 2. Logo, o determinante da matriz é 0.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
- O determinante de uma matriz não se altera se sormarmos uma linha a outra multiplicada por uma constante.
- $det(AB) = det(A) \times det(B)$

2.2 Cálculo dos Determinantes

Existem diversas técnicas para cálculo dos determinantes, mostradas abaixo.

2.2.1 Matriz 2 x 2

O determinante de uma matriz 2×2 é dado pelo produto dos termos da diagonal principal menos o produto dos termos da diagonal secundária.

Exemplos

$$det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \times 9 - 2 \times 5 = 44$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 9 \times -1 = 21$$

2.2.2 Regra de Sarrus

Consiste em duplicar as duas primeiras colunas da matriz a sua direita, e fazer a soma dos produtos da diagonal principal e suas paralelas, menos a soma dos produtos de sua diagonal secundária e suas paralelas. Atenção: A Regra de Sarrus só funciona para **matrizes** 3×3.

Exemplos

$$det(A) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & -2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{array}$$

$$= 1 \times 3 \times 2 + 5 \times 0 \times 4 + (-2) \times 8 \times (-1) - (-2) \times 3 \times 4 + 1 \times 0 \times (-1) + 5 \times 8 \times 2$$

$$= 6 + 0 + 16 - (-24) - 0 - 80$$

$$= 22 - 56 = -34$$

2.2.3 Desenvolvimento de Laplace

Seja $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, chamado de cofator, e onde A_{ij} é uma submatriz da inicial, de onde a i-ésima e a j-ésima coluna foram retiradas. Logo, podemos definir $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times \Delta_{ij}$

Exemplos

Calcule o determinante de A utilizando o desenvolvimento de Laplace pela 2ª coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 3 \times (-1)^{1+2} \times 1 + 1 \times (-1)^{2+2} \times 2$$

$$det(A) = -3 + 2$$

$$det(A) = -1$$

Calcule o determinante da matriz B utilizando o desenvolvimento de Laplace pela segunda linha.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = 2 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$det(B) = -2(4+3) + 1(-2+6) - 1(-1-4)$$

$$det(B) = -2 \times 7 + 4 + 5$$

$$det(B) = -5$$

Calcule o determinante da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace pela 4ª linha, obtemos:

$$det(C) = -2 \times (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace pela 3ª linha, temos:

$$det(C) = -2 \left(5 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$det(C) = -10$$

3 Operações Elementares

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

3.1 Permutação

Permutação da i - ésima linha pela j - ésima linha da matriz $(L_i \leftrightarrow L_j)$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

3.2 Multiplicação

Multiplicação a i - ésima linha por um escalar não nulo k $(L_i \rightarrow kL_i)$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_1 \rightarrow -3L_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

3.3 Substituição

Subsituição da i - ésima linha pela i - ésima linha mais k vezes a j - ésima linha $(L_i \rightarrow L_i + kL_j)$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4 Processo de Triangularização

O cálculo do determinante de uma matriz quadrada pode ser realizado utilizando - se operações elementares sobre as linhas da matriz. Tal método consiste em encontrar uma matriz triângular equivalente por lihas à matriz dada respeitando - se as propriedades dos deerminantes. **O determinante de uma matriz triângular é o produto dos elementos da diagonal principal.** Observe que:

- $L_i \leftrightarrow L_j$: determinante troca de sinal
- $L_i \rightarrow kL_i$: determinante fica multiplicado pela constante k.
- $L_i \rightarrow L_i + kL_j$: não muda o determinante

Exemplos

a) Calcule o determinante da matriz dada usando o processo de Triangularização

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_2 \rightarrow 1/2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\rightarrow}{L_2 \rightarrow -5L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 14 & -14 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \underset{\rightarrow}{\rightarrow 3L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 14 & -14 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} L_2 \underset{\rightarrow}{\rightarrow 1/14L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 14 \end{bmatrix} L_3 \underset{\rightarrow}{\rightarrow 6L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Utilizando as propriedades de determinantes, temos que:

$$det(A_1) = 1/2det(A);\ det(A_2) = det(A_1);\ det(A_3 = det(A_2);$$
$$det(A_4) = 1/14det(A_3);\ det(B) = det(A_4))$$
$$det(A) = 2det(A_1) = 2det(A_2) = 2det(A_3) = 2 \times 14det(A_4) = 2 \times 14det(B) = 2 \times 14 \times 8$$
$$det(A) = 28 \times 8 = 224$$

5 Forma Escada

Definição: Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada se:

1. o primeiro elemento não nulo de uma linha não nula, chamado pivô, é 1
2. cada coluna que contém o pivô de uma linha tem todos os elementos iguais à zero
3. toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas
4. o pivô de uma linha está à direita do pivô da linha anterior

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

não é linha reduzida à forma escada pois a condição 2 não se verifica. Observe que na coluna do pivô da terceira linha existe um elemento não nulo, o -1;

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é linha reduzida à forma escada pois as condições 1 e 4 não se verificam. Observe o primeiro elemento não nulo da primeira linha é o número 2 e que o pivô da segunda linha está a esquerda do pivô da primeira.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é linha reduzida à forma escada.

6 Matriz Inversa

Definição: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível ou não - singular se existe $B = (b_{ij})_{n\times n}$ tal que $A \times B = B \times A = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz B é a inversa da matriz A. Se A não tem inversa, dizemos que A é não invertível ou singular.

Teorema: Se uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tem inversa, então a inversa é única. **Demonstração:** Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então:

$$A \times B = B \times A = I_n \ e \ A \times C = C \times A = I_n$$
$$B = B \times I_n = B \times (A \times C) = (B \times A) \times C = I_n \times C = C$$

Denotamos a inversa de A por A^{-1}

6.1 Propriedades da Inversa

1. Se A é invertível, então A^{-1} também é invertível - $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ são matrizes invertíveis, então $A \times B$ também é invertível e $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
3. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é invertível, então A^T também é invertível - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema: Sejam A e B matrizes de ordem n

1. Se $B \times A = I_n$, então $A \times B = I_n$
2. Se $A \times B = I_n$, então $B \times A = I_n$

6.2 Matriz Adjunta

Definição: Dada uma matriz quadrada A e calculados seus cofatores, podemos formar uma nova matriz $\bar{A} = cof(A) = [\Delta_{ij}]_{n\times n}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 - 4) = 19$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -18 - 1 = -19$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -(5 + 0) = -5$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 = 10$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(12 - 1) = -11$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 0 = 4$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -(8 + 0) = -8$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

Logo,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de matriz adjunta de A a transposta da matriz dos cofatores de A:

$$adj(A) = (\bar{A})^T$$

No exemplo anterior,

$$adj(A) = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema: $A \times (\bar{A})^T = A \times adj(A) = \det(A) I_n$ se $\det(A) \neq 0$ temos:

$$A \times \left[\frac{1}{\det(A)} \times adj(A) \right] = I_n.$$

Como a inversa de uma matriz é única, segue que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times adj(A).$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 22 = 2 \neq 0$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$
$$\Delta_{12} = (-1)^{1+1} \cdot 11 = -11$$
$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$$
$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \times 6 = 6$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times adj(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

6.3 Matriz Elementar

Cada operação sobre as linhas de uma matriz corresponde a uma multiplicação dessa matriz por uma matriz especial.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Multiplicando a primeira linha de A por 3, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Ao trocarmos a segunda e terceira linhas de A, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

c) Ao somarmos a primeira linha de A a segunda multiplicada por -2, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Observando estes exemplos, vemos que aplicar uma operação elementar sobre as linhas da matriz A é o mesmo que aplicar esta operação na matriz identidade e, em seguida, multiplicar essa nova matriz por A.

Definição: Uma matriz elementar é uma matriz obtida da matriz identidade I através de uma operação elementar com linhas.

Teorema: Sejam uma matriz elementar $E_{m \times n}$ e uma matriz qualquer $A_{m \times n}$, então $E \times A$ é igual a matriz obtida aplicando - se na matriz A a mesma operação elementar que originou E.

Corolário: Uma matriz elementar E_1 é invertível e sua inversa é uma matriz E_2, que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada por E_1.

6.4 Procedimento para Inversão de Matrizes

Teorema: Se A é uma matriz invertível, sua matriz linha reduzida à forma escada é a matriz identidade; além disso, A é um produto de matrizes elementares.

Teorema: Se uma matriz A pode ser reduzida à uma matriz identidade por uma sequêndcia de operações elementares com linha, então A é invertível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando - se a mesma sequência de operações com linhas.

Sendo assim **para obtermos a inversa de A**, operamos simultaneamente com as matrizes A e I, através de operações elementares, até chegarmos à matriz identidade I na posição correspondente a A. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz I será a inversa de A.

$$(A|I) \rightarrow (I|A).$$

7 Sistemas Lineares

Definição 1. Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ em que $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são constantes.

Exemplo.

$$2x + 3y + 9t = 0$$

é uma equação linear nas variáveis x, y, t.

Observação.
- Quando o termo independente b for nulo trata - se de uma equação linear homogênea
- Toda equação linear tem expoentes de todas as incógnitas iguais a 1
- Uma equação linear não apresenta termos mistos $(xy, xz, \cdots)$

Definição 2. Uma sequência ordenada ou n - upla dos números reais $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é a solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se, e somente se, a equação $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Exemplo. O par ordenado $(-1, 2)$ é a solução da equação $2z + y = 0$, pois

$$2(-1) + 2 = 0.$$

Definição 3. Um sistema de equações lineares (ou sistema linear) é um conjunto de equações lineares nas mesmas variáveis, isto é, um conjunto da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots + & \vdots & + \ddots + & \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots + & a_{n3}x_3 & = b_n \end{cases}$$

7.1 Matrizes Associadas a um Sistema Linear

O sistema linear da definição anterior pode ser escrito como uma equação matricial $AX = B$ em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A matriz A é chamada de **matriz associada ao sistema ou matriz dos coeficientes** e B é a **matriz dos termos independentes**. Outra matriz que também podemos associar a um sistema é:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

a qual chamamos de **matriz ampliada ou matriz aumentada do sistema**

7.2 Solução de um Sistema Linear

Uma sequência ordenada ou uma n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, cdots, \alpha_n)$ é a solução de um sistema linear quando é a solução de cada uma das equações do sistema. **Exemplo:**
O sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + \ \ y = 0 \end{cases}$$

admite como solução o par ordenado $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ pois esse par verifica cada uma das equações.

7.3 Classificação de um Sistema Linear

Consideremos um sistema linear de m equações e n incógnitas cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_k são números reais, esse sistema poderá ter

1. Uma única solução: Sistema Possível e Determinado (SPD) (det $\neq 0$)
2. Infinitas soluções: Sistema Possível e Indeterminado (SPI) (det $= 0$)
3. Nenhuma solução: Sistema Impossível (SI)
   (det principal $= 0t$ e det secundário $\neq 0$)

7.4 Sistema Homogêneo

Um sistema linear é dito homogêneo quando os termos independentes de cada equação são iguais a zero. O sistema homogêneo sempre tem solução, pois a solução é nula ou trivial.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Em particular, se um sistema linear homogêneo possui uma solução não nula, ele possui infinitas soluções.

8 Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

Teorema: Se dois sistemas lineares $AX = B$ e $CX = D$ são tais que a matriz $[C|D]$ é obtida de $[A|B]$ aplicando - se operações elementares, então os dois sistemas possuem a mesma solução.
Dois sistemas que possuem o mesmo número de soluções são chamados de **sistemas equivalentes**.

8.1 Método de Gauss

Consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema, por linha equivalência, a uma matriz que só é diferente da linha reduzida à forma escada na condição dois, que passa a ser: Cada coluna que contém o pivô de uma linha não nula tem todos os elementos abaixo dessa linha iguais a zero.
Uma vez reduzida a matriz ampliada a essa forma, a solução final do sistema é obtida por substituição.

8.2 Método de Gauss-Jordan

Consiste em se reduzir a matriz ampliada do sistema, por linha equivalência, a uma matriz reduzida a forma escada.

8.3 Posto e Nulidade de uma Matriz

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida a forma escada da linah equivalente a A. O Posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A Nulidade de A é o número $n - p$.

Teorema 1.
1. Um sistema com m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, a posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
2. Se as matriz têm o mesmo posto p e $n = p$, então a solução será única
3. Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $n > p$, podemos escolher $n - p$ incógnitas e outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Observações:

1. Se $pc = pa$, denotamos o posto por p
2. No caso 3, dizemos que o grau de liberdade do sistema é $n - p$

8.4 Método da Matriz Inversa e Regra de Cramer

Método utilizado para resolver sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Que equivale a

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Se $\det(A) \neq 0$, A é invertível e, em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ou, ainda

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Daí,

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{22} + \cdots + b_n\Delta_{nn}}{\det(A)}.$$

Note que o numerador é igual ao determinante da matriz obtida de A substituindo-se a primeira coluna pela matriz dos termos independentes B.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Fazendo deduções análogas,

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Onde a coluna que se encontra a matriz dos termos independetes é a i-ésima coluna.

9 Retas no Espaço

Seja r uma reta paralela a um vetor $v = (a, b, c)$ não nula e que passapelo ponto $P_0 = (x, y, z)$, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\vec{P_0}P$ é paralelo ao vetor v, isto é, se o vetor $\vec{P_0}$ é um múltiplo escalar de v, ou seja:

$$P_0\vec{P} = tv, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc) \tag{2}$$

As equações dadas em (1) e (2) são chamadas **equações vetoriais da reta r**. De (2), obtemos:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

As equações acima são chamadas de **equações paramétricas da reta r** e o vetor $v = (a, b, c)$ é chamado de **vetor diretor da reta r**. Se a, b, c são não nulos, eliminando o parâmetro t do sistema, obtemos:

$$r = \ \tfrac{x-x_0}{a} = \tfrac{y-y_0}{b} = \tfrac{z-z_0}{c}$$

as equações acima são chamadas de **equações simétricas da reta**.
Exemplo. a) encontre as equações simétricas da reta que passa por $P_0 = (1, 0, -1)$ e é paralela ao vetor $v = (3, -1, 2)$ tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$r : \ \tfrac{x-1}{3} = \tfrac{y}{-1} = \tfrac{z+1}{2}$$

b) encontre as equações paramétricas da reta que passa por $P_0 = (2, 4, -1)$ e
$P_1 = (3, -2, 7)$
$\vec{P_0 P} = (1, -6, 8)$ é paralelo a reta r; $P_0 \in \mathbb{R}$

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 6t \\ z = -1 + 8t \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

10 Equações do Plano

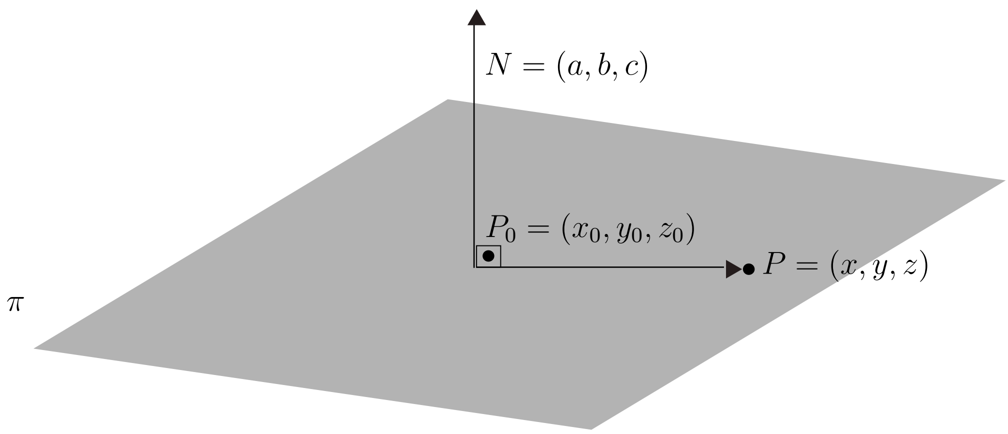

Figura 1 – plano1

Suponhamos que queremos determinar a equação do plano π que passa por
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor $n = (a, b, c)$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao planoπ se , e somente se, o vetor $\vec{P_0 P}$ for perpendicular ao vetor n, ou seja
$\langle n, \vec{P_0 P} \rangle = 0$.
Como $\vec{P_0 P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, podemos escrever a equação acima como:

$$\pi : \langle (a, b, c), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$
$$\pi : a(x - x_0, b(y - y_0), c(z - z_0)) = 0$$
$$\pi : ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$
$$\pi : ax + by + cz - d = 0$$

Sendo esta equação chamada de **forma geral** da equação do plano π e o vetor n é chamado de **vetor normal** ao plano.

Exemplo. a) Encontre a equação do plano π que passa por $P_0 = (2, 1, -4)$ e é perpendicular ao vetor $n = (1, 2, -1)$
Seja $P = (x, y, z)$ pertencente ao plano π. Então, $\vec{P_0P} = (x - 2, y - 1, z + 4)$ é perpendicular a n, isto é

$$\langle (x-2, y-1, z+4), (1, 2, -1) \rangle = 0$$

Assim:

$$\pi : 1(x-2) + 2(y-1) - 1(z+4) = 0$$
$$\pi : x - 2 + 2y - 2 - z - 4 = 0$$
$$\pi : x + 2y - z - 8 = 0$$

b) Encontrar a equação geral do plano π que contém os pontos $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 1, 2)$ e $C = (-1, -1, 3)$
Uma vez que A, B e C pertencem ao plano π, os vetores $u = \vec{AB} = (-2, 0, 3)$ e $v = \vec{AC} = (-3, -2, 4)$ são paralelas a π. O vetor normal ao plano π deve ser perpendicular aos vetores u e v. Assim, escolhemos:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (6, -1, 4)$$

Sabendo que $A \in \pi$, obtemos:

$$\pi : 6(x-2) - 1(y-1) + 4(z+1)$$
$$\pi : 6x - y + 4z - 7 = 0$$

11 Posições Relativas entre Retas no Espaço

Quando consideramos duas retas no espaço, elas podem ou não estar contidas em um mesmo plano. Logo, podemos classificá-las da seguinte forma:

- Retas Coplanares: Se estão contidas no mesmo plano.
  - Paralelas: Se os vetores diretores são múltiplos um do outro.
    - Coincidentes: Possuem um ponto em comum
    - Não Coincidentes: Não possuem nenhum ponto em comum
  - Concorrentes: Se interceptam em um único ponto. Logo, os vetores diretores não são paralelos
- Retas Reversas: Não estão contidas no mesmo plano.

Exemplo. a)

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \text{ e } s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

$v_r = (2, 2, 2)$ e $v_s = (1, -1, 2)$ são os vetores diretores de r e s, respectivamente. Como um não é múltiplo escalar do outro, as retas não são paralelas.
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence a r e s. Logo, existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_0 = 1 + 2t_1, y_0 = 2t_1, z_0 = 2t_1; x_0 = 2 + t_2, y_0 = 3 - t_2, z = 2t_2.$$

Daí, temos:

$$\begin{cases} 2t_1 + \ \ t_2 = 1 \\ 2t_1 + \ \ t_2 = 3 \\ 2t_1 - 2t_2 = 0 \end{cases} .$$

Realizando operações elementares sobre as linhas da matriz do sistema, temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] L_2 \rightarrow -L_1 + L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] L_3 \rightarrow -L_1 + L_3 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{L}_2 \rightarrow \tfrac{1}{2}L_2 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] L_1 \rightarrow L_2 + L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] L_3 \rightarrow L_2 + L_3 \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_1 \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$S = \{(1, 1)\} \implies \mathrm{P}_0 = (3, 2, 2)$ é o ponto de interseção de r e s, e as retas são concorrentes.

> **Observação.** Podemos verificar que as retas r e s são concorrentes através do produto misto e verificando que os vetores diretores v_r e v_s não são paralelos.
> Notemos que se $v_r, v_s, \vec{PQ} = 0$ onde $P \in \mathbb{R}$ e $Q \in \mathbb{R}$, então r e s são coplanares.

12 Equações Paramétricas do Plano

Além da equação geral do plano, podemos, também, caracterizar os pontos de um plano da seguinte forma:
Considere um plano π, um ponto $P_0 \in \pi$ e dois vetores, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ não colineares e paralelos a π. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se o vetor

$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ é uma combinação linear de u e v, isto é, existem escalares t e s tais que

$$\vec{P_0P} = tu + sv.$$

Em termos de componentes, temos:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tu_1 + sv_1, tu_2 + sv_2, tu_3 + sv_3).$$

Assim, o ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, satisfaz as equações:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} , t, s \in \mathbb{R}.$$

Exemplo. a) Encontre as equações paramétricas do plano π que contém
$P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0), P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0), P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Como π é paralelo a $\vec{P_1P_2} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ *e* $\vec{P_1P_3} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $P_1 \in \pi$

$$\pi : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} .$$

13 Ângulos

13.1 Ângulos Entre Retas

Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

1. **As retas são concorrentes**, logo, elas determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.
   O ângulo entre elas é definido como sendo o menor desses ângulos.

2. **as retas são paralelas**, logo o ângulo entre elas é 0.;

3. **as retas são reversas**, logo, por um ponto P de r_1 passa uma reta r_2' que é paralela a r_2.

Em qualquer um dos casos, se v_1 e v_2 são vetores paralelos a r_1 e r_2 , respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é:

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta|,$$

onde θ é o ângulo entre v_1 e v_2. Assim, o cosseno do ângulo entre as retas é:

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos\theta| = \frac{|\langle v_1, v_2\rangle|}{||v_1||||v_2||}.$$

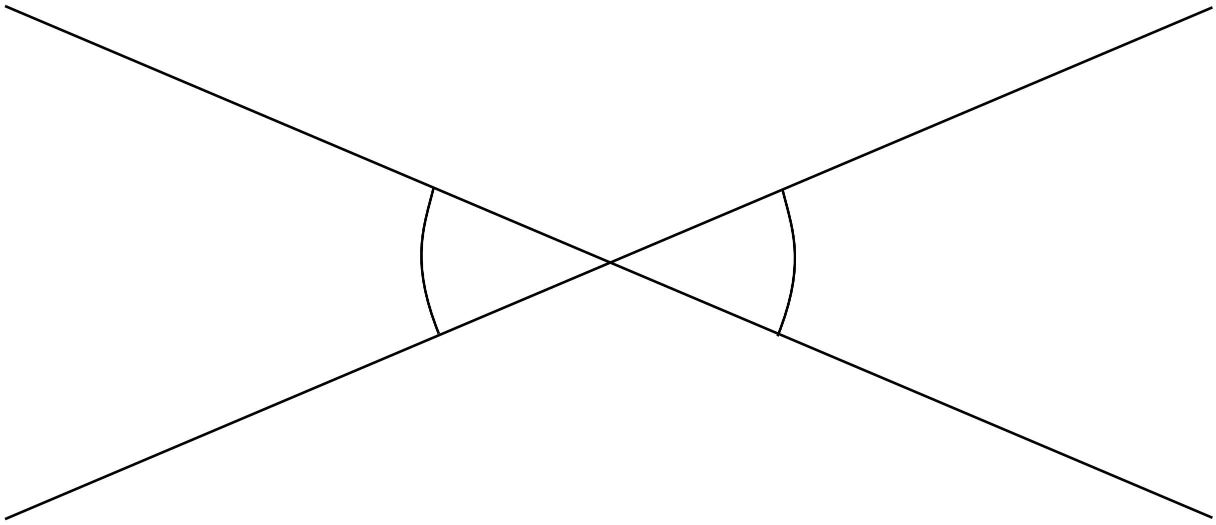

Figura 2 – Retas Concorrentes

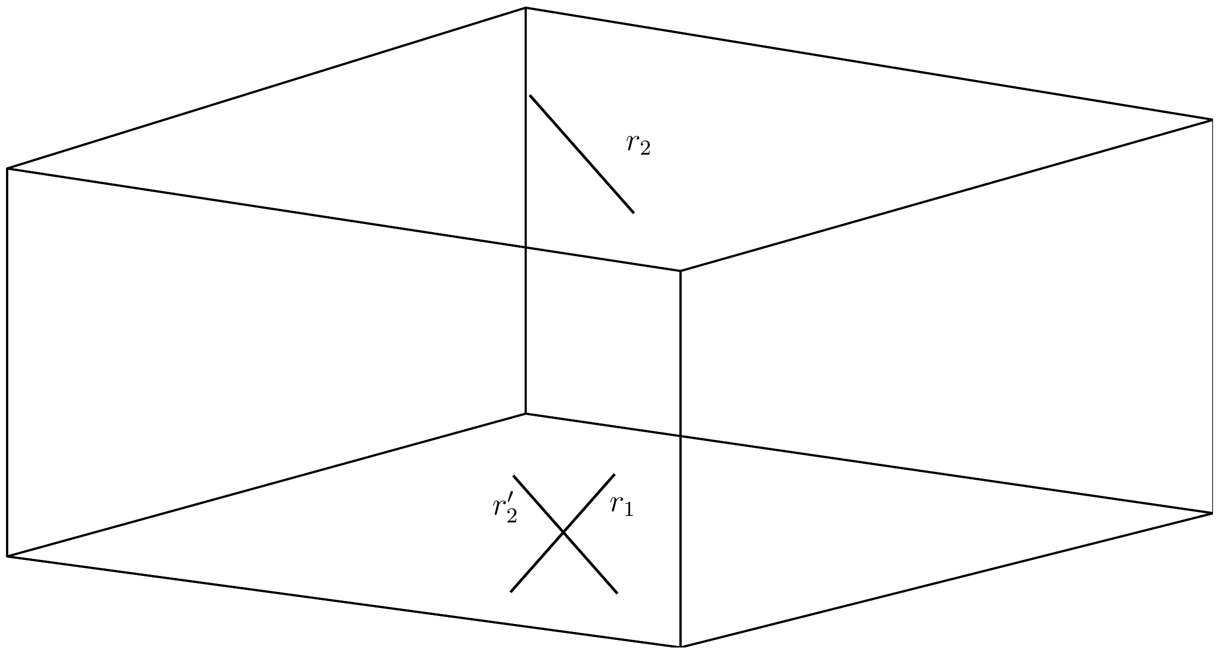

Figura 3 – Retas Reversas

13.2 Ângulos Entre Planos

Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1$ e $\pi_2 : a_2x + a_2y + c_2z + d_2$ dois planos com normais $n_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $n_2 = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente, o ângulo entre π_1, π_2 é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles.
Como toda reta perpendicular a π_1 tem n_1 como veor direor e toda reta perpendicular a π_2 tem n_2 como veor diretor, o cosseno do ângulo entre eles é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos\theta|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores n_1 e n_2.

Portanto, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\langle n_1, n_2 \rangle|}{\|n_1\|\|n_2\|}.$$

14 Distâncias

14.1 Distância de um Ponto a uma Reta

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e r uma reta cujo vetor diretor é v, a distância do ponto P_0 a r, denotada por $d(P_0, r)$, é definida como a distância de P_0 ao ponto mais próximo de r. INSERIR DESENHO
Seja $P_1 = (x, y, z)$ um ponto sobre a reta r e posicione o vetor v de modo que P_1 seja seu ponto inicial. Assim, os vetores $\vec{P_1P_0}$ e v formam um paralelogramo de lados $\|v\|$ e $\|\vec{P_1P_0}\|$.
Como a área do paralelogramo é dada por $\|v \times \vec{P_1P_0}\|$, segue que a distância de P_0 a r é dada por

$$d(P_0, r) = \frac{\|v \times \vec{P_1P_0}\|}{\|v\|}.$$

14.2 Distância de um Ponto a um Plano

Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano, a distância do ponto P_0 a π, denotada por $d(P_0, \pi)$, é definida como a distância de P_0 ao ponto mais próximo de π.
INSERIR DESENHO
Seja $P_1 = (x, , z)$ um ponto qualquer do plano π e posicione o vetor normal $n = (a, b, c)$ de modo que P_1 seja seu ponto inicial. Assim, a distância de P_1 a π é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\vec{P_1P_0}$ sobre n, isto é,

$$d(P_0, \pi) = \|proj_n \vec{P_1P_0}\| = \left\| \frac{\langle \vec{P_1P_0}, n \rangle}{\|n^2\|} \right\| = \frac{|\langle \vec{P_1P_0}, n \rangle|}{\|n\|}$$

.

Desenvolvendo a fórmula, chegamos que

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

14.3 Distância Entre Dois Planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos quaisquer, a distância entre π_1 e π_2, denotada por $d(\pi_1, \pi_2)$ é definida como a menor distância entre dois pontos, um de π_1 e outro de π_2.

1. Se os seus vetores normais não são paralelos, então os planos são concorrentes e, neste caso, a distância entre eles é zero.

2. Se os vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (coincidentes ou não coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual a distância entre um plano de um deles a outro plano.

14.4 Distância Entre Duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas quaisquer, a distância entre elas, denotada por $d(r_1, r_2)$ é definida como a menor distância entre dois pontos, um de r_1 e outro de r_2.

1. Se os vetores diretores são paralelos, então as retas são paralelas (coincidentes ou não), neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de uma reta e a outra reta. Assim, se $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ e v_1 e v_2 são os vetores diretores, temos:
$$d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = \frac{\|\vec{P_1P_2} \times v\|}{\|v_2\|}.$$

2. Se os vetores diretores não são paralelos, as retas são reversas ou concorrentes; estas retas definem dois planos paralelos, π_1 que contém r_1 e é paralelo a r_2, e π_2 que contém r_2 e é paralelo a r_1. Se v_1 e v_2 são os vetores diretores, o vetor $n = v_1 \times v_2$ é nromal a ambos os planos, isto é,
$$d(r_1, r_2) = d(\pi_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1) = \frac{|\langle \vec{P_1P_2}, v_1 \times v_2 \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}, P_1 \in r_1, P_2 \in r_2.$$

15 Espaços Vetoriais

Seja X um conjunto não vazio, no qual estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot\colon V \times V &\to V \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

Definição 4. Dizemos que V é um *espaço vetorial real* se, para qualquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, têm-se:

1. $u + v = v + u$

2. (u + v) + w = u + (v + w)

3. Existe $O \in V$ tal que $u + O = u = O + u$ para todo $u \in V$

4. Para cada $u \in V$, existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = O = (-u) + u$

5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

6. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

7. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta u)$

8. $1 \cdot u = u$

15.1 Propriedades

Sejam v um espaço vetorial, u um vetor em V e λ um escalar, então:

1. $O \cdot u = O$

2. $\lambda \cdot O = O$

3. $-1 \cdot u = -u$

4. Se $\lambda u = O$, então $\lambda = 0$ ou $u = O$

16 Subespaços Vetoriais

Definição 5. Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é um espaço vetorial de V se W é um espaço vetorial com relação ás operações de adição e de multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema 2. Se W é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial V, então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as condições:

Observação. Como W é uma parte de V, que é um espaço vetorial, não há necessidade de verificar os oito axiomas.

1. Se $u, v \in W$, então $u + v \in W$.
2. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, então $\lambda u \in W$.

Teorema 3. Dados U e W subespaços de um mesmo espaço vetorial V, a interseção $U \cap X = \{v \in V; v \in U\ e\ v \in W\}$ também é subespaço vetorial de V.

Demonstração. 1) Observe que $U \cap V \neq \emptyset$, pois como U e W são subespaços de V, ambos contém o vetor nulo. Logo, $0 \in U \cap W$.
2) Sejam $u, v \in U \cap W$. Então $u \in U, u \in W, v \in U$ e $v \in W$. Como U é um subespaço vetorial de V, $u + v \in W$. Assim, $u + v \in U \cap W$.
3) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$. Então $u \in U$ e $u \in W$. Como U_2 é um subespaço, $\lambda u \in W$. Logo, $\lambda u \in U \cap W$. Assim, $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.

Observação. A união de dois espaços de um mesmo espaço vetorial V não é necessariamente um subespaço vetorial de V.

Teorema 4. Sejam U e W dois subespaços de um mesmo espaço vetorial V. Então o conjunto $U + W = \{v \in V; v = u + w, u \in U\ e\ w \in W\}$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

1. Como U e W são subespaços de V, ambos contém o vetor nulo. Logo, $0 = 0 + 0 \in U + W$. Assim, $U + W \neq \emptyset$
2. Sejam $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2 \in U + W$ com $u_1 \in U, w_1 \in W, u_2 \in U, w_2 \in W$. Como U é subespaço de V, $u_1 + u_2 \in U$ e, como W é subespaço de V, $w_1 + w_2 \in W$. Assim, $v1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w2) = (u_1 + u2) + (w_1 + w2) \in U + W$.
3. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}\ e\ v = u + w$, com $u \in U\ e\ w \in W$. Como U é subespaço, $\lambda u \in U$ e, como W é subespaço, $\lambda w \in W$. Daí, $\lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w \in U + W$. Assim, U + W é um subespaço vetorial de V.

Definição 6. Sejam U e V subespaços de um mesmo espaço vetorial V. Dizemos que V é soma direta de U e W, e representamos por $V = U \oplus W$, se $V = U + W; U \cap W = \emptyset$.

Exemplo. Sejam $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\}$. a) Mostre que U e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$. b) Mostre que $V = U \oplus W$.
(a) Notemos que $U = \{(x, y, -x - y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Temos:

$$U \in \emptyset, pois\ 0 = (0,0,0) = (0,0,-0-0) \in U \tag{3}$$
$$Dados\ u = (x_1, y_1, -x_1, -y_1), v = (x_2, 2, -x_2, -2) \in U \tag{4}$$
$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -x_1 - x_2) = \tag{5}$$
$$(x_1 + x_2, 1 + y_2, -(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2)) \in U \tag{6}$$
$$Dados\ \lambda \in \mathbb{R}\ e\ u = (\lambda x, \lambda y, -\lambda x - \lambda y) \in U \tag{7}$$

Teorema 5. Se V é soma direta de U e W, então todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único na forma $v = u + w$, com $u \in U, w \in W$.

Demonstração. Como $V = U \oplus W$, todo vetor $v \in V$ é da forma $v = u + w$, com $u \in U, w \in W$.
Suponhamos que v também possa ser expresso na forma $v = u_1 + w_1$, com $u_1 \in U, w_1 \in W$. Então, $u + w = u_1 + w_1$. Somando o oposto de w e o oposto de u_1 a ambos os lados dessa igualdade, obtemos: $u - u_1 = w_1 - w$. Com U é subespaço de V, $u - u_1 \in U$ e, como W é subespaço de V, $w1 - w \in W$. Daí

$$u - u_1 = w - w_1 \in U \cap W = \emptyset$$

. Logo, $u = u_1$ e $w = w_1$, ou seja, v se escreve de modo único vomo soma de elementos de U e de W.

17 Combinação Linear, Espaços Finitamente Gerados

Definição 7. Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores $\dim V e a_1, a_2, \cdots, a_n$ escalares. Então o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ é um elemento de V, o qual chamamos combinação linear de $v1, v_2, \cdots, v_n$.

Exemplo. a) Em $\mathbb{R}^3$, o vetor $v = (2, 0, 1)$ é uma combinação linear dos vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)\ e\ (0, 0, 1)$. De fato, $v = (2, 0, 1) = 2(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$.
b) Em $\mathbb{R}^3$, o vetor $v = (1, 0, 1)$ é uma combinação linear dos vetores
$(1, 0,), (1, 1, 0)\ e\ (1, 1, 1)$.
De fato, sejam a_1, a_2, a_3 escalares tais que

$$v = (1, 0, 1) = a_1(1, 0, 0) + a_2(1, 1, 0) + a_3(1, 1, 1)$$

. Daí: $(1,0,1) = (a_1 + a_2 + a_3, a2 + a_3, a_3)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Substituindo $a_3 = 1$ na segunda equação, obtemos $a_2 = -a_3 = -1$ Substituindo $a_3 = 1 \ e \ a_2 = -1$ na primeira equação, obtemos: $a_1 = 1 - a_2 - a_3 = 1 + 1 - 1 = 1$. Logo, $v = 1(1,0,0) - 1(1,1,0) + 1(1,1,1)$.

Observação. Uma vez fixados vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de v que são combinações lineares de $v_1, v2, \cdots, v_n$ é um subespaço vetorial de V.
a) O subespaço $W = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\} \ de \ \mathbb{R}^3$ é gerado pelo vetor $(1,2)$.
De fato, todo vetor $w = (x, 2x)$ é uma combinação linear de $(1,2)$.

$$w = (x, 2x) = x(1,2).$$

Assim, $W = [(1,2)]$. b) Mostremos que, se $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$.
Seja $v \in [v_1, v_2, v_3]$. Então existem a_1, a_2, a_3 escalares tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3.$$

Como $v_3 \in [v_1, v_2]$, existem b_1, b_2 escalares tais que $v_3 = b_1v_1 + b_2v_2$. Daí:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3(b_1v_1 + b_2v_2) = (a_1 + a_3b_1)v_1 + (a_2 + a_3b_2)v_2.$$

Ou seja, v é uma combinação linear de $v1 \ e \ v_2$. Assim, $v \in [v_1, v_2]$. Logo, $[v1, v_2, v_3] \subset [v_1, v_2]$.
Agora, suponhamos que $v \in [v_1, v_2]$. Então existem escalares a_1, a_2 tais que $v = a_1v_1 + a_2v_2$. Mas podemos escrever:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + 0v_3$$

, ou seja, v é uma combinação linear de v_1, v_2, v_3. Assim, $v \in [v_1, v_2, v_3]$ e, portanto, $[v_1, v_2] \subset [v_1, v_2, v_3]$. Assim, $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$.

18 Dependência e Independência Linear

Definição 8. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores em V. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente (L.I.), ou que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são L., se a equação vetorial

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

admite apenas a solução trivial, isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Caso contrário, isto é, se existir algum escalar não nulo satisfazendo a equação anterior, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é linearmente dependente (L.D.), ou que os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são L.D.

Exemplo. a) Verifique se os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$ são LI ou LD. Para verificarmos se $\{v_1, v_2\}$ é LI ou LD, resolvemos a equação vetorial.

$$\begin{gathered} a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \\ a_1(1, 0) + a_2(1, 1) = (0, 0) \\ (a_1 + a_2, a_2) = (0, 0) \\ \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ \qquad a_2 = 0 \end{cases} \end{gathered}$$

Substituindo $a_2 = 0$ na 1ª equação, obtemos:

$$a_1 = -a_2 \to a_1 = 0.$$

Assim, como o sistema admite apenas a solução trivial, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.

b) Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é LI. De fato, sejam a_1, a_2, a_3 sejam escalares tais que

$$a_1(1, 0, 1) + a_2(0, 1, 1) + a_3(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Daí:

$$(a_1 + a_3, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3) = (0, 0, 0),$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} a_1 \qquad + a_3 = 0 \\ \qquad a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; L_3 \to -L_1 + L_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; L_2 \to L_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_3 \to L_2 + L_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \to -L_3 + L_1 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Assim, $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ é LI.
c) Verifique se o conjunto $\{(1,3,3),(0,1,4),(5,6,3),(7,2,-1)\}$ de vetores de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto LI ou LD. Sejam, a_1, a_2, a_3, a_4 escalares tais que
$a_1(1,3,3) + a_2(0,1,4) + a_3(5,6,3) + a_4(7,2,-1) = (0,0,0)$. Então

$$\begin{cases} a_1 + 5a_3 + 7a_4 = 0 \\ 3a_1 + \ \ a_2 + 6a_3 + 2a_4 = 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 3a_3 - \ \ a_4 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $S = \left\{\left(\frac{17}{4}a_4, -\frac{5}{4}a_4, -\frac{9}{4}a_4\right) | a_4 \in \mathbb{R}\right\}$. Como o sistema admite solução não trivial, o conjunto dado é LD.
d) Mostre que, se u, v, w são vetores LI, então $u+v, u+w, v+w$ são vetores LI.
Sejam a_1, a_2, a_3 escalares tais que

$$a_1(u+) + a_2(u+w) + a_2(v+w).$$

Daí:

$$(a_1 + a_2)u + (a_1 + a_3)v + (a_2 + a_3)w = 0.$$

Como $\{u, v, w\}$ é LI, segue que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}.$$

A matriz do sistema linear homogêneo acima é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(A) = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(1) = -1 \neq 0$.
Assim, A é invertível e o sistema linear homogêneo $AX = 0$ tem solução única, dada por $X = A^{-1} \times 0 = 0$. Assim, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e, portanto, $\{u+v, u+w, v+w\}$ é LI.

18.1 Propriedades

1. Um conjunto finito de vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ que contém o vetor nulo é LD. De fato, se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é tal para $v_j = 0$, para algum $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então:

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_{j-1} + 0v_j + 0v_{j+1} + \cdots + 0v_n = 0.$$

Assim, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é LD.

2. Um conjunto formado por um único vetor não nulo v é LI. Com efeito, se $av = 0$, então $a = 0$ ou $v = 0$. Mas, por hipótese, $v \neq 0$. Logo, $a = 0$. Assim $\{v\}$ é LI.

3. Se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto LD, então qualquer conjunto que contenha $v_1, v_2, \cdots, v_n$ também é LD. Suponhamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ é um conjunto LD. Então existem escalares não nulos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Assim,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + 0w_1 + 0w_2 + 0w_k = 0$$

também admite solução não trivial. Logo, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ é LD.

4. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD se, e somente se, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Inicialmente, suponhamos que $\{v_1, v_2\}$ seja LD. Então existem escalares não nulos a_1 e a_2 tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0.$$

Se $a_1 \neq 0$, então $v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2$ e, se $a_2 \neq 0$, então $v_2 = -\frac{a_1}{a_2}v_1$. Logo, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Reciprocamente, suponhamos, sem perda de generalidade, v_2 um múltiplo escalar de v_1. Então, $v_2 = \lambda v_1$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\lambda v_1 - 1v_2 = 0.$$

Logo, $\{v_1, v_2\}$ é LD.

5. O conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um dos vetores é uma combinação linear dos outros. Suponhamos $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ LD. Então existem escalares não todos nulos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tais que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Suponhamos $a_j \neq 0$ Então a equação vetorial acima pode ser reescrita como

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \cdots - \frac{aj_{-1}}{a_j} - \cdots .$$

Portanto, v_j é uma combinação linear dos outros vetores de $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Agora, suponhamos que v_j possa ser escrito como combinação linear dos outros vetores de $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Então

$$v_j = b_jv_1 + \cdots + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + \cdots + b_nv_n.$$

Daí,

$$b_1v_1 + \cdots + b_{j-1}v_{j-1} - 1v + j + b_{j+1}v_{j+1} + \cdots + b_nv_n = 0.$$

Logo, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Observação. Para verificarmos se um conjunto de vetores é LI ou LD podemos proceder da seguinte forma:
Colocamos os vetores um abaixo do outro, obtendo uma matriz, a qual reduziremos à forma escada. Se a forma escada apresentar linhas nulas, o conjunto será LD. Além disso, as linhas não nulas representarão vetores LI.

Exemplo. a) Considere $\beta = \{(1,0),(1,1),(1,-1)\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^2$. Colocando os vetores um abaixo do outro obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cuja forma escada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} L_3 \to -L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L_3 \to L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, β é um conjunto LD. Além disso, $\beta' = \{(1,0),(1,1)\}$ é LI.

b) Os vetores $(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)$ formam um conjunto LI. Daí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \to -L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_4 \to -L_3 + L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} L_4 \to \tfrac{1}{2} L_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19 Base de um Espaço Vetorial

Definição 9. Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é uma base de V:

1. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é LI;

2. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ gera V ($V = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$, isto é, todo vetor $v \in V$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_n$).

Exemplo. **a)** Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$. Temos:

1. β é um conjunto LI, pois um vetor não é um múltiplo do outro.

2. β gera $\mathbb{R}^2$, pois todo vetor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de β: $v = (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.

Assim, β é uma linha base de $\mathbb{R}^2$, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^2$.
b) O conjunto $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de $\mathbb{R}^2$.

1. β' é um conjunto LI.
   De fato, sejam a_1, a_2 escalares tais que
   $$a_1(1,1) + a_2(0,1) = (0,0).$$
   Daí,
   $$(a_1, a_1 + a_2) = (0,0),$$
   que é equivalente a
   $$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}.$$
   Substituindo $a_1 = 0$ na 2ª equação, obtemos:
   $$a_2 = -a_1 \to a_2 = 0.$$
   Assim, β' é um conjunto LI.

2. β' gera $\mathbb{R}^2$
   Seja $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor qualquer e a, b escalares tais que
   $$v = (x,y) = a(1,1) + b(0,1).$$
   Daí:
   $$(x,y) = (a, a+b),$$
   que é equivalente a
   $$\begin{cases} a = x \\ a + b = y \end{cases}$$
   Substituindo $a = x$ na 2ª equação, obtemos:
   $$b = y - a \to b = y - x.$$
   Assim,
   $$v = (x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1).$$
   Portanto, β' gera $\mathbb{R}^2$.

c) O conjunto $\beta = \{(1,0),(2,0)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois, como um vetor é um múltiplo do outro, β é LD.
d) O conjunto $\gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^3$.
De fato,

1. γ é um conjunto LI, uma vez que a forma escada da matriz obtida colocando - se os vetores de γ um abaixo do outro é a matriz I_3, que não apresenta linhas nulas.

2. γ gera $\mathbb{R}^3$, pois todo vetor $v = (x,y,x) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear dos vetores de γ.
$$v = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$
Assim, γ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

e) O conjunto $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$. Notemos que α é LI, mas não gera $\mathbb{R}^3$. De fato,
$$[(1,0,0),(0,1,0)] = \{x(1,0,0) + y(0,1,0)|x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,0)|x,y \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^3.$$
f) Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
Então
$$U = \{(x,y,-x-y)|x,y \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,-x) + (o,y,-y)|x,y \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{x(1,0,-1) + y(0,1,-1)|x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,-1),(0,1,-1)]\,.$$
Seja $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$. Notemos que β é LI, pois um vetor não é um múltiplo do outro. Como β gera U e é LI, β é uma base de U.

Teorema 6. Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então dentre estes vetores podemos extrair uma base V.

Demonstração. Se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são vetores LI, então formam uma base V e a demonstração fica terminada. Caso contrário, existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ nem todos nulos tais que
$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$
Suponhamos que $a_n \neq 0$. Então
$$v_n = -\frac{a_1}{a_n}v_1 - \frac{a_2}{a_n}v_2 - \cdots - \frac{a_n - 1}{a_n}v_n - 1,$$
ou seja, v_n é uma combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$. Assim, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ ainda geram V. Se $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ forem LI, então formam uma base do meu espaço. Caso contrário, um destes vetores é uma combinação linear dos demais e então, podemos

desconsiderá - lo. Prosseguindo desta forma, após uma quantidade finita de passos, chegamos a um subconjunto de $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ formado por vetores LI que geram V, ou seja, a uma base de V.

Teorema 7. Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Então todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo n vetores.

Demonstração. Vamos mostrar que todo conjunto de elementos de V que contenha mais do que n vetores é LD.
Seja $A = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$, com $m > n$. Como V é gerado por $\{v_1, v_2 \cdots, v_n\}$, podemos extrair uma base de V deste conjunto, digamos $\{v1, v_2, \cdots, v_r\}$, com $r \leqslant n$. Logo, existem escalares $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{r1}v_r \tag{8}$$
$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{r1}v_r \tag{9}$$
$$\vdots \tag{10}$$
$$u_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{rm}v_2 \tag{11}$$

Sejam $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$. Substituindo as duas equações temos:

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1m}\lambda_m)v_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2m}\lambda_m)v_2 + \cdots + (a_{r1}\lambda_1 + a_{r2}\lambda_2 + \cdots + a_{rm}\lambda_m)v_r = 0$$

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ é LI, segue que

$$a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m = 0$$
$$a_{r1}\lambda_1 + \cdots + a_{rm}\lambda_m = 0$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo nas variáveis $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, com mais equações que incógnitas

Corolário 1. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado, então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos. Este número é chamado de *dimensão de* V e é denotado por $\dim V$

Exemplo. a) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Como $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1), (0,1)\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$, concluímos que $dim\mathbb{R}^2 = 2$.

b) Seja $V = \mathbb{R}^3$, vimos que $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo, $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

c) Se $V = \mathbb{R}^n$, então $\beta = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ é a base canônica e, portanto, $dim\mathbb{R}^n = n$.

d) Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + +z = 0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Vimos que $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ é uma base de U e, portanto, $dimU = 2$.

Observação. Quando um espaço vetorial V admite uma base finita de vetores, dizemos que V é um espaço de dimensão finita.

Teorema 8. Seja V um espaço vetorial e considere $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto LI.
Se existe $v \in V$ que não seja combinação linear de β, então $v_1, v_2, \cdots, v_m, v$ é LI.

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$ escalares tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1} = 0.$$

Se $a_{m+1} \neq 0$, então:

$$v = -\frac{a_1}{a_m + 1} v_1 - \cdots - \frac{a_m}{a_{m+1}} v_m,$$

o que contradiz a hipótese de v não ser uma combinação linear dos elementos de β. Então $a_{m+1} = 0$ e, portanto,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0.$$

Como β é LI, segue que $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$. Assim, $\{v_1, v_2, \cdots, v_m, v\}$ é LI.

Teorema 9. Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então V possui um conjunto gerador finito com m elementos, $m \geqslant 1$. Seja agora $v_1 \in V$ um vetor não nulo. Então $\beta = \{v_1\}$ é LI. Se β_1 gerar V, então β_1 é uma base de V. Caso contrário, existe $v_2 \in V$ que não é um múltiplo escalar de v_1. Logo, pelo teorema anterior, $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ é LI.
Se β_2 gerar V, então β_2 é uma base de V. Caso contrário, existe $v_3 \in V$ tal que $\beta_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ seja LI. Repetindo esse processo, como V é finitamente gerado, chegaremos a uma base.

Teorema 10. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e W um subespaço de V. Então todo subespaço de W que é LI é finito e é parte de uma base de W.

Demonstração. Suponhamos S_0 um subconjunto LI de W. Como $S_0 \subset V$ e V tem dimensão finita, S_0 tem no máximo $dimV = n$ elementos.
Estendemos S_0 a uma uma base de W da seguinte forma: Se S_0 gerar W, então S_0 será uma base de W e a demonstração está terminada. Se S_0 não gera W, podemos encontrar $v_1 \in W$ tal que $S_1 = S_0 \cup \{v_1\}$ seja LI. Se S_1 gerar W, então S_1 é uma base de W. Caso contrário, existirá $v_2 \in W$ tal que $S_2 = S_1 \cup \{v_2\}$ seja LI. Prosseguindo dessa forma, chegaremos a um conjunto

$$S_m = S_0 \cup \{v_1, v_2, \cdots, v_m\},$$

que é uma base de W.

Corolário 2. Se W é um subespaço próprio de um espaço vetorial V de dimensão finita, então W é de dimensão finita e $dimW < dimV$.

Demonstração. Se $W = \{0\}$, a demonstração está terminada ($\beta = \emptyset$ é uma base de W e $dimW = 0$). Suponhamos que W contenha um vetor não nulo v. Pelo teorema anterior, existe uma base de W que contém v e tem no máximo $dimV = n$ elementos. Logo, W tem dimensão finita e $dimW \leqslant dimV$. Como W é um subespaço próprio de V, existe $u \in V$ tal que $u \notin W$. Acrescentando u a uma base de W obtemos um conjunto LI. Portanto, $dimW < dimV$.

Corolário 3. Num espaço vetorial V de dimensão finita, todo conjunto de vetores LI é uma parte de uma base de V.

Corolário 4. Se $dimV = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

Teorema 11. Se W_1, W_2 são subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial V, então $W_1 + W_2$ tem dimensão finita e

$$dim(W_1, W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2).$$

Demonstração. Suponhamos que $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1 e de W_2, $W_1 \cap W_2$ tem uma base finita $\alpha = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ que é parte de uma base $\beta = \{u_1, u_2, \cdots, u_k, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de W_1 e é parte de uma base $\gamma = \{u_1, u_2, \cdots, u_k, w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ de W_2. O subespaço $W_1 + W_2$ é gerado pelos vetores $u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n$ e estes vetores formam um conjunto LI. De fato, se $w \in W_1 + W_2$, então $w = u + v$, com $u \in W_1$ e $v \in W_2$. Daí,

$$\begin{aligned} w = u + v = (a_1u_1 + \cdots + a_ku_k, a_{k+1}v_1 + \cdots + a_{k+m}v_m) + \\ (b_1u_1 + \cdots + b_ku_k + b_{k+1}u_{k+1} + \cdots + b_{k+n}w_n) \,. \end{aligned}$$

Logo,

$$w = (a_1 + b_1)u_1 + \cdots + (a_k + b_k)u_k + \cdots + a_{k+m}v_m + b_{k+1}w_1 + \cdots + b_{k+n}w_n.$$

Assim,

$$W_1 + W_2 = [u_1, u_2, \cdots, u_k, v_1, v_2, \cdots, v_k, w_1, w_2, \cdots, w_k] \,.$$

Agora, suponhamos $\sum_{i=1}^{k} a_iu_i \sum_{i=1}^{m} b_iv_i \sum_{i=0}^{n} c_iw_i = 0$. Então existem $d_1, d_2, \cdots, d_k$ escalares tais que

$$\sum i = 1^n - c_iw_i = \sum_{i=1}^{k} d_ku_k.$$

Daí:

$$\sum_{i=1}^{k} d_iu_i \sum_{i=1}^{n} c_iw_i = 0.$$

Como γ é LI, segue que $d_1 = \cdots = d_k = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Voltando ao somatório anterior, temos que β é LI, segue que $a_1 = \cdots = b_m = 0$. Assim, $u_1, u_2, \cdots, v_1, \cdots, w_1, \cdots, w_m$ é LI e, portanto, uma base de $W_1 + W_2$. Finalmente,

$$dimW_1 + dimW_2 = (k+m) + (k+n) = k + (m+k+n) = dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2).$$

Teorema 12. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $m \geq 1$ e seja $\beta \subset V$. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. β é uma base de V;
2. Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de β.

Demonstração. (1) $\rightarrow$ (2)
Seja $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Em particular, β gera V e, portanto, todo vetor $v \in V$ se escreve como combinação linear dos elementos de β.
Suponhamos

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.
Então,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) v_i.$$

Como β é LI, segue que $a_i - b_i = 0$ para todo i. Logo, $a_i = b_i$ para todo i, o que mostra que v se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos de β.
(2) $\rightarrow$ (1)
Suponhamos que cada elemento de V seja escrito de modo único como combinação linear dos elementos de β. Em particular, β gera V. Para verificar que β é uma base de V, resta mostrar que β é LI.
Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \beta$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0.$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} 0 v_i = 0,$$

segue da condição em (2) que $\lambda_i = 0$ para cada i. Portanto, β é LI e, assim, uma base de V.

Definição 10. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e seja $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Vamos fixar a ordem dos elementos de β e chamá-la de **base ordenada** de V. O teorema anterior garante que, dado $v \in V$, existem únicos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

Dizemos que $ai, a_2, \ldots, a_n$ são as coordenadas de v em relação à base (ordenada) β e denotamos por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo. a) Consideremos $V = \mathbb{R}^3, v = (1,3) \in \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. As coordenadas de v em relação à base β serão.

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

pois $v = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$.
b) Consideremos $= \mathbb{R}^2, v = (1,3) \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma = \{(1,1),(1,0)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$. As coordenadas de v em relação à γ serão

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

onde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ satisfazem:

$$v = (1,3) = a_1(1,1) + a_2(1,0).$$

Daí: $(1,3) = (a1 + a_2, a_1)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 \qquad\; = 3 \end{cases}.$$

Substituindo $a_1 = 3$ na 1ª equação, obtemos $a_2 = 1 - a_1 \to a_2 = 1 - 3 \to a_2 = -2$.
Assim,

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Observação. É importante notar que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de uma vetor em relação a essa base. Por exemplo,

$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\gamma = \{(0,1),(1,0)\}$, então:

$$[(1,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \ e \ [(1,3)]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em virtude disso, ao considerarmos β uma base de um espaço vetorial V estamos sempre subentendendo que ela seja ordenada.

20.1 Matriz de Mudança de Base

Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases ordenadas de V. Dado um vetor $v \in V$ podemos escrever:

$$(*) \begin{cases} v = \sum_{i=1}^n x_i u_i \\ v = \sum_{i=1}^n y_i v_i \end{cases} .$$

Vamos relacionar as coordenadas de v em relação a base β, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, com as coordenadas de v em relação à base γ, $[v]_\gamma = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

$$(**) \begin{cases} v_1 = \sum_{i=1}^n {}^n a_{1i} u_i \\ v_2 = \sum_{i=1}^n {}^n a_{2i} u_i \\ \vdots \\ v_n = \sum_{i=1}^n {}^n a_{in} u_i \end{cases} .$$

Substituindo (**) em (*), considerando que $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$, como v se escreve de modo único como combinação linear dos vetores de β, temos:

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i \\ x_2 = \sum_{i=1}^n a_{2i} y_i \\ \vdots \\ x_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} y_i \end{cases} .$$

Em forma matricial,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{[v]_\beta} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{[I]^\gamma_\beta} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{[v]_\gamma}.$$

A matriz denotada por $[I]^\gamma_\beta$ é chamada *matriz mudança da base γ para a base β*

Exemplo. Sejam $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(2,0),(0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,0),(1,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Queremos encontrar escalares $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ Tais que:

$$(1,0) = a_{11}(2,0) + a_{21}(0,1)$$
$$(1,1) = a_{12}(2,0) + a_{22}(0,1)$$

Daí,

$$\begin{cases} 2a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \\ 2a_{12} = 1 \implies a_{12} = \frac{1}{2} \\ a_{22} = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$[I]^\gamma_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação. Na descoberta da matriz $[I]^\gamma_\beta$, se começarmos escrevendo os vetores u_i em função dos v_j, resultará:

$$[v]_\gamma = [I]^\beta_\gamma [v]_\beta.$$

Logo, podemos perceber que $[I]^\gamma_\beta$ e $[I]^\beta_\gamma$ são invertíveis e que $([I]^\gamma_\beta)^{-1} = [I]^\beta_\gamma$ De fato,

$$[v]_\gamma = [I]^\beta_\gamma [v]_\beta = [I]^\beta_\gamma [I]^\gamma_\beta [v]_\gamma.$$

Daí,

$$[I]^\beta_\gamma [I]^\gamma_\beta = I_n,$$

e, portanto,

$$([I]^\gamma_\beta)^{-1} = [I]^\beta_\gamma.$$

Exemplo. Para o exemplo anterior,

$$[I]^\beta_\gamma = ([I]^\gamma_\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21 Produto Interno

Definição 11. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores, v_1 e v_2, associa um número real, denotado por $\langle v1, v_2\rangle$, satisfazendo as propriedades:

1. $\langle v, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in V$ e $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.
2. $\langle \alpha v_1, v_2\rangle = \alpha \langle v1, v_2\rangle$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $v \in V$
3. $\langle v_1 + v_2, v_3\rangle = \langle v1, v_3\rangle + \langle v2, v_3\rangle$
4. $\langle v1, v_2\rangle = \langle v_2, v1\rangle$

Exemplo. a) Sejam $V = \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v1, v_2, \ldots, v_n) \in V$. O produto interno usual para $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

b) Sejam $V = \mathbb{R}^2, u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in V$. Então

$$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1y_2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.
De fato, sejam $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle u, u\rangle = 2x_1x_1 - x_1y_1 - x_1y_1 + y1y_1 \tag{12}$$

$$= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 \tag{13}$$

$$= x_1^2 + (x_1 - y_1)^2 \geq 0 \tag{14}$$

$$\langle u, u\rangle = 0 \implies x_1^2 + (x_1 - y_1)^2 = 0 \tag{15}$$

$$\begin{cases} x_1^2 & = 0 \\ (x_1 & - y_1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = y_1 \end{cases} \implies x_1 = y_1 = 0 \implies u = 0.$$

Definição 12. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que dois vetores u e v de V são ortogonais (em relação a esse produto interno) se $\langle u, v\rangle = 0$. No caso em que u e v são ortogonais, escrevemos $u \perp v$

21.1 Propriedades

- $0 \perp v$
- $u \perp v \implies v \perp u$
- Se $u_1 \perp v, u_2 \perp v$, então $(u_1 + u_2) \perp v$
- $u \perp v, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda u \perp v$

Demonstração. 1. Como $0 = 0v$ para todo $v \in V$, temos:

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0v, v \rangle = 0 \langle v, v \rangle = 0.$$

Logo, $0 \perp v$.

2. Como $u \perp v$, temos $\langle u, v \rangle = 0$. Mas $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. Logo, $\langle v, u \rangle = 0$, ou seja, $v \perp u$.

3. Suponhamos que $u \perp v$ para odo $v \in V$. Então $\langle u, v \rangle$. Em particular, se $v = u$:

$$0 = \langle u, u \rangle .$$

Assim, $u = 0$.

4. Suponhamos que $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v$. Então $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle = 0$. Então

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_2, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = 0 + 0 = 0,$$

ou seja, $(u_1 + u_2) \perp v$

5. Suponhamos $u \perp v$. Então $\langle u, v \rangle = 0$. Assim, se $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle = \alpha \cdot 0 = 0,$$

ou seja, $\alpha u \perp v$.

Teorema 13. Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Então $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

Definição 13. Uma base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é dita uma base ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para $i \neq j$.

Observação. Se tivermos um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais em um espaço de dimensão n, esse conjunto será uma base ortogonal.

22 Coeficientes de Fourier

Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de V e v um vetor qualquer de V. Vamos calcular as coordenadas de v em relação à base β, $[v]_\beta$.

Como $v \in V$, existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n.$$

Fazendo o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i, obtemos:

$$\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle,$$

donde

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle},$$

para odo $i = 1, 2, \ldots, n$

Essa coordenada é chamada *coeficiente de Fourier* de v em relação a v_i

Exemplo. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ com o produto usual e $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$ uma base de V.

Notemos que β é uma base ortogonal, pois

$$\langle (1,1), (-1,1) \rangle = 1(-1) + 1 \cdot 1 = 0.$$

Vamos calcular $[(2,3)]_\beta$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, ais que

$$(2,3) = a(1,1) + b(-1,1).$$

Então

$$\begin{aligned} \langle (2,3), (1,1) \rangle &= \langle a(1,1) + b(-1,1), (1,1) \rangle \\ 5 &= a \langle (1,1), (1,1) \rangle \\ 5 &= a \cdot 2 \\ a &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \langle (2,3), (-1,1) \rangle &= \langle a(1,1) + b(-1,1), (-1,1) \rangle \\ 1 &= b \langle (-1,1), (-1,1) \rangle \\ 1 &= 2b \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$[(2,3)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Definição 14. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Definimos a norma de um vetor v em relação a esse produto interno por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Se $\|v\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle = 1$ é chamado vetor unitário. Dizemos também que, nesse caso, v está *normalizado*

Observação. $\frac{v}{\|v\|}$ é um veor unitário, para odo $v \neq 0$.

Exemplo. Sejam $V = \mathbb{R}^2, u = (a_1, b_1), v = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle u, v \rangle_1 = a_1 a_2 + b_1 b_2$$
$$\langle u, v \rangle_2 = 2a_1 a_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_1 b_2$$

produtos internos em $\mathbb{R}^2$ e $v = (1, 0)$ Logo:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle_1} = \sqrt{\langle (1,0), (1,0) \rangle} = \sqrt{1} = 1$$
$$\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v \rangle_2} = \sqrt{\langle (1,0), (1,0) \rangle_2} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{2}$$

22.1 Propriedades

1. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$
2. $\|\alpha v\| = \|\alpha\| \|v\|$ (Desigualdade de Cauchy - Schuarz)
3. $\|u + v\| \leq \|u\| v\|$ (Desigualdade Triangular)

Definição 15. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que uma base $\beta = \{v1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é ortonormal se for ortogonal e cada vetor for unitário

$$\langle v_i, v_j \rangle \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Definição 16. Sejam u e v vetores de um espaço vetorial V, com $v \neq 0$. Definimos a *projeção orogonal* de u sobre v por

$$proj_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Proposição 1. Seja $v \in V$ um vetor não nulo . Então $u - proj_v u$ é ortogonal a v para qualquer $u \in V$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle u - proj_v u \rangle &= \langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v, v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle i}{\|v\|^2} \langle v, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $u - proj_v u$ é ortogonal a v.

Proposição 2. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores não nulos, ortogonais entre si. Então, para qualquer $v \in V$, $v - proj_{v1}v - proj_{v2}v - \ldots - proj_{vk}v$ é ortogonal a v_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} &\langle v + \sum_{i=1}^{k} -proj_{vi}v, v_i\rangle = \\ &\langle v, v_i\rangle + \sum_{j=1}^{k} - \langle proj_{vj}v, v_i\rangle \qquad . \\ &\langle v, v_i\rangle + \sum_{j=1}^{k} - \frac{\langle 1, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} \langle v_j, v_i\rangle = 0 \end{aligned}$$

23 Processo de Ortogonalização de Gram - Schmidt

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle , \rangle$. Considere $\beta = \{v1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Vamos construir um outro conjunto $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_2\} \subset V$ que seja ortogonal e tal que os subespaços gerados por β e β' sejam os mesmos.
Esta construção é feita indutivamente, como segue:

$$\begin{aligned} &w_1 = v_1 \\ &w_2 = v_2 - proj_{w1}v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \end{aligned} \; .$$

Observe que $w_2 \neq 0$ (pois $\{v_1, v_2\}$) é LI e que $w_1 \perp w_1$.
O conjunto $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ definido acima é ortogonal e, em particular, linearmente independente. Observe também que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $w_1 \in W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ (é uma combinação linear dos n vetores). Como $\dim W = n$, segue que β' é uma base de W, o que mostra a igualade dos subespaços gerados por β e por β'.

Teorema 14. Todo espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno possui uma base ortonormal.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e seja $\beta = \{v_1, v2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Pelo processo de Ortogonalização de Gram - Schmidt, existe um conjunto ortogonal $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ que gera V. Como todo conjunto ortogonal é LI, segue que $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V. Por fim, $\{u_1 =$

$\frac{w_1}{\|w_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots, u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}\}$ é uma base ortonormal de V, como queríamos.

Exemplo. a) Seja $\beta = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos obter uma base ortonormal em relação ao produto interno usual a partir de β.
Façamos:

$$\begin{aligned} v_1 &= (2,1) \\ v_2 &= (1,1) \end{aligned}.$$

Uilizando o Processo de Ortogonalização de Gram - Schmidt, emos:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (2,1) \\ \|w_1\| &= \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ w_2 &= v_2 - proj_{w1}v_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|} \\ &= (1,1) - \frac{\langle (1,1),(2,1) \rangle}{\|(2,1)\|^2} = (1,1) - \frac{3}{5}(2,1) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \\ \|w_2\| &= \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}/5}{\|w_1\|^2} w_1 \end{aligned}.$$

Agora, façamos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \end{aligned}.$$

Assim, $\beta' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ obdtida a partir de β.

Observação. Para conferir o resulado, o produto interno de duas em duas deve ser igual a 0, e cada norma deve ser igual a 1.

Observação. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e com uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Se $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n$, então

$$\langle u, v \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n,$$

pois $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases} = \delta_{il}$

Proposição 3. Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\beta\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases ortonormais de V. Se $M = [I]^{\beta}_{\beta'}$, é a matriz mudança de base β para β', então $M \cdot M^T = I_n = M^T \cdot M$ (M é ortogonal).

Demonstração. Seja $M = [I]_{\beta'}^{\beta} = (a_{ij})_{n\times n}$. Então:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j \\ u_j &= \sum_{i=i}^{n} a_{ij} v_i \end{aligned}.$$

Como $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$, segue que

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij},$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$.
Daí, $M \cdot M^T = I_n = M^T \cdot M$ (M é ortogonal).

24 Mudança de Coordenadas

Se as coordenadas de um ponto P no espaço são (x, y, z), então as componentes do vetor $\vec{OP}$ também são (x, y, z) e podemos escrever

$$\vec{OP} = (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{i} = (0, 0, 1)$.
Ou seja, as coordenadas de um pono P são iguais aos escalares obtidos ao escrevermos $\vec{OP}$ como combinação linear dos vetores canônicos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Assim, o ponto $O = (0, 0, 0)$ e os vetores anteriores determinam um sistema de coordenadas ortogonal $S = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Consideramos um sistema de coordenadas ortogonal $S' = \{0', u_1, u_2, u_2\}$, onde o' é um ponto (origem) e u_1, u_2, u_3 são vetores ortonormais.
As coordenadas de um ponto P no sistema de coordenadas S' são definidas como sendo os escalares obtidos ao escrevermos $\vec{OP}$ como combinação linear dos vetores u_1, u_2, u_3, ou seja, se

$$\vec{OP} = x'u_1 + y'u_2 + z'u_3,$$

então as coordenadas de P são dadas por

$$[P]_{S'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Consideremos, inicialmente, o caso em que $0' = 0 = (0, 0, 0)$. Assim, se $\vec{OP} = (x, y, z)$, então $\vec{OP} = x'u_1 + yu_2 + zu_3$ é equivalente ao sistema linear

$$QX' = X,$$

em que

$$Q = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

.

Como a matriz Q é invertível, a solução deste sistema é dada por

$$X' = Q^{-1}X.$$

Mas como u_1, u_2, u_3 formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, então.

$$Q^t \cdot A = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^t u_1 & u_1^t u_2 & u_1^t u_3 \\ u_2^t u_1 & u_2^t u_2 & u_2^t u_3 \\ u_3^t u_1 & u_3^t u_2 & u_3^t u_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_3, u_1 \rangle & \langle u_3, u_2 \rangle & \langle u_3, u_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, Q é ortogonal, ou seja, $Q^{-1} = Q^t$.
Desta forma, as coordenadas de um ponto P no espaço em relação ao sistema $S' = \{0' = 0, u_1, u_2, u_3\}$ estão unicamente determinadas e

$$[P]_{S'} = Q^T [P]_S,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

De modo análogo, as coordenadas de um ponto P no plano em relação ao sistema ortogonal $S' = \{0', u_1, u_2, u_3\}$ são dadas por

$$[P]_{S'} = Q^t [P]_S,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

onde $Q = [u_1, u_2], S = \{0, l_1 = (1, 0), l_2 = (0, 1)\}$.
Exemplo. Digitar depois

25 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas $S' = \{0, u_1, u_2\}$ seja obtido do sistema original $S = \{0, l_1, l_2\}$ por uma rotação de um ângulo θ.
Desenho
Observando a figura, obtemos:

$$u_1 = (\cos\theta, \sin\theta), u_2 = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

Vamos determinar as coordenadas de um ponto P do plano em relação ao novo sistema de coordenadas.
A matriz

$$Q = \begin{bmatrix} u_1, u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_\theta$$

é chamada *matriz de rotação.*
As coordenadas de P em relação ao nosso sistema de coordenadas são dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

26 Translação

Vamos considerar o caso que $0' \neq 0 = (0, 0)$, ou seja, em que ocorre uma translação dos eixos coordenadas.
Inserir desenho
Observando a figura acima, obtemos:

$$\vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{00'}..$$

Assim, se $\vec{OO'} = (h, k)$, então

$$\vec{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k).$$

Logo, as coordenadas de P em relação ao novo sistema são dados por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - h & y - k \end{bmatrix}.$$

O eixo x' tem equação $y' = 0$, ou seja, $y = k$ e o eixo y' tem equação $x' = 0$, ou seja, $x = h$.

27 Diagonalização de Matrizes

Definição 17. Dizemos que uma matriz A, $n \times n$, é *diagonalizável* se existem matrizes P invertível e D diagonal tais que

$$A = PDP^{-1},$$

ou equivalentemente,

$$P^{-1}AP = D.$$

Exemplo. Toda matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, pois $A = I_n A (I_n)^{-1}$.

Suponhamos, inicialmente, que a matriz $A_{n \times n}$ seja diagonalizável. Então existem matrizes P invertível e D diagonal tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

Multiplicando à esquerda por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD.$$

Sejam D $= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ e P $= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ em que v_j é a coluna j de P. Por um lado,

$$AP = A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \end{bmatrix},$$

e, por outro lado,

$$PD = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}.$$

Assim, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Av_j = \lambda_j v_j,$$

para cada $j = 1, 2, \dots, n$, ou seja, as colunas de P e os elementos da diagonal de D satisfazem a equação

$$AX = \lambda X,$$

em que λ e X são incógnitas. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 18. Seja a matriz $A_{n\times n}$, um número real λ é chamado *autovalor* de A se existe um vetor *não nulo* tal que

$$Av = \lambda v.$$

Um vetor não nulo que satisfaça a equação acima é chamado de *autovetor* associado ao autovalor λ.
Observe que, usando o fato de que a matriz identidade I_n é tal que $I_n v = v$, a equação anterior pode ser escrita como

$$Av = \lambda I_n v,$$

ou ainda,

$$(A - \lambda I_n)v = 0.$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de λ para os quais $(A - \lambda I_n)X = 0$ tem solução não trivial. Mas este sistema linear homogêneo tem soluções não triviais se, e somente se, $\det(A - xI_n) = 0$.

Proposição 4. Seja a matriz $A_{n\times n}$.

- Os autovalores de A são as raízes do polinômio

  $$p(x) = \det(A - xI_n),$$

  denominado *polinômio característico* de A.

- Para cada autovalor de λ, os autovetores associados a λ são os vetores não nulos da solução do sistema

  $$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Exemplo. a) Vamos determinar os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para esta matriz, o polinômio característico é:

$$p(x) = \det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -4 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3.$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.
Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores. Para isto, resolvemos os sistemas $(A - \lambda_1 I)X = 0$ e $(A - \lambda_2 I)X = 0$.

$$(A - 3I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2x - \ \ y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$Aut(\lambda_1) = \{(x, -2x)/x \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$, acrescentado o vetor nulo.

$$(A + 1I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$Aut(\lambda_2) = \{(x, 2x)/x \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores de A associados a $\lambda_2 = -1$, acrescentado do vetor nulo.

Proposição 5. Uma matriz P é ortogonal se, e somente se, as suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores.

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n$ as colunas de P, isto é,

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}.$$

A inversa de P é P^t se, e somente se, $P^t \cdot P = I = P \cdot P^t$.
Mas

$$P^t = \begin{bmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \ldots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Logo, $P^t P = I$ se, e somente se, $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$.
Assim, $P^t \cdot P = I$ se, e somente se, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são vetores ortonormais.

Observação. Pela proposição acima, vemos que A é diagonalizável por uma matriz ortogonal se, e somente se, ela possui um conjunto ortogonal de autovetores. As matrizes simétricas têm essa propriedade.

Proposição 6. Para uma matriz simétrica A, os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração. Sejam v_1 e v_2 autovetores de A associados, respectivamente, aos autovalores distintos λ_1 e λ_2. Então $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$.
Se escrevermos os vetores como matrizes colunas, obtemos:

$$\langle Av_1, v_2 \rangle = (Av_1)^t \cdot v_2 = v_1^t (A^t v_2) = \langle v_1, A^t v_2 \rangle.$$

Como A é simétrica, $A^t = A$. Daí:

$$\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle .$$

Como v_1 e v_2 são autovetores de A, obtemos:

$$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle .$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluímos que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ou seja, v_1 e v_2 são ortogonais.

Exemplo. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4),$$

Portanto os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$, cujos respectivos autoespaços associados são dados por

$$(A - 2I)X = 0 \text{ e } (A - 4I)X = 0.$$

Resolvendo o sistema

$$(A - 2I)X = 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtemos: $y = -x$.
Logo, $Aut(\lambda_1) = \{(x, -x)/x \in \mathbb{R}\}$
Como $(x, -x) = x(1, -1)$, temos que $v_1 = (1, -1)$ gera $Aut(\lambda_1)$ e, como, $v_1 \neq 0$, $\{v_1\}$ é LI e, portanto, uma base de $Aut(\lambda_1)$
Fazendo $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, temos $\{u_1\}$ base ortonormal de $Aut(\lambda_1)$.
Repetindo o processo para λ_2 temos o vetor ortonormal $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, que é uma base ortonormal de $Aut(\lambda_2)$. Como A é simétrica, u_1 e u_2 são ortogonais. Assim:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^t.$$

Observação. Se a matriz A é diagonalizável através de uma matriz ortogonal, isto é, se $A = PDP^t$, com P ortogonal e D diagonal, então A é simétrica.

Definição 19. Uma matriz B é dita semelhante à matriz A se existe uma matriz P invertível tal que

$$A = PBP^-1.$$

Notação: $B \sim A$.

Observação. A é uma relação de equivalência:

1. $\sim$ é reflexiva, isto é, $A \sim A$ para toda matriz A.
   De fato, existe I matriz invertível tal que:
   $$A = IAI^{-1} = IAI.$$

2. $\sim$ é simétrica, isto é, $A \sim B \to B \sim A$.
   De fato, suponhamos $A \sim B$. Então existe P invertível tal que $B = PAP^{-1}$. Multiplicando esta igualdade por P à direita e por P^{-1} à esquerda, obtemos $A = P^{-1}BP$. Fazendo $Q = P^{-1}$, podemos escrever $A = QBQ^{-1}$, com Q invertível. Logo, $B \sim A$.

3. $\sim$ é transitiva, isto é, se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$.
   Suponhamos $A \sim B$ e $B \sim C$. Então existem P, Q invertíveis tais que $B = PAP^{-1}$ e $C = QBQ^{-1}$
   Logo,
   $$C = Q(PAP^{-1})Q^{-1} = (QP)A(P^{-1}Q^{-1}) = (QP)A(QP)^{-1} = RAR^{-1}.$$
   com $R = PQ$. Logo, $A \sim C$

27.1 Propriedades

1. Matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.
2. Se $A \sim B$, então A é invertível se, e somente se, B é invertível.
3. Matrizes semelhantes possuem o mesmo traço.
4. Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.
5. Matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

28 Cônicas

Definição 20. Uma cônica no plano é definida como um conjunto de pontos $P = (x, y)$ que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais com a, b, c não simultaneamente nulos.

Definição 21. A elipse é o conjunto de planos P tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2, chamados focos, é constante. Ou seja, se $D(F_1, F_2) = 2c$, então a elipse é o conjunto dos pontos P tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

onde $a > c$.

Proposição 7. A equação da elipse cujos focos são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A equação da elipse cujos focos são $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ é

$$\frac{x^2}{b^2} = \frac{y^2}{a^2} = 1$$

.

Em ambos os casos, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

29 Superfície Cilíndrica

Definição 22. Sejam C uma curva plana e l uma reta fixa não contida nesse plano. *Superfície Cilíndrica* é a superfície gerada por uma reta r que se move paralelamente à reta fixa l em contato permanente com a curva plana C. A reta r que se move é denominada *geratriz* e a curva C é a *diretriz* da superfície.

Estamos interessados em superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva em um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano.
Conforme a diretriz seja uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada circular, elíptica, hiperbólica ou parabólica.
Exemplo. a) A equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

representa uma superfície cilíndrica com geratriz paralela ao eixo dos y e com diretriz sendo a elipse

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

no plano xz.

b) A equação

$$y = 8x^2.$$

representa um cilindro cuja diretriz é a parábola $\begin{cases} y = 8x^2 \\ z = 0 \end{cases}$ e cuja geratriz é uma reta paralela ao eixo z.

c) A equação

$$s = \sin(y)$$

representa um cilindro cuja diretriz no plano yz tem equação $\begin{cases} z = \sin(y) \\ x = 0 \end{cases}$ e a geratriz é uma reta paralela ao eixo x.

30 Superfície Cônica

Definição 23. *Superfície Cônica* é a superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva. A reta é denominada *geratriz*, a curva plana é a *diretriz* e o ponto fixo é o vértice da superfície cônica.
Vamos considerar agora o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse co, vértice na origem e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados.
A superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z tem equação

$$(*)\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Seu traço no plano xy é o ponto $O=(0,0,0)$ e o traço no plano yz tem equação

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & =0 \\ x & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & =\pm\frac{b}{c}z \\ x & =0 \end{cases},$$

ou seja, retas que passam pela origem.
O traço no plano xz também é um par de retas tais que passam pela origem $\begin{cases} x & =\pm\frac{a}{c}z \\ y=0 \end{cases}$.
Os traços nos planos z = k são elipses

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} & =\frac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}.$$

Se $a=b$, são circunferências e, neste caso, temos o cone circular reto.
Os traços nos planos $x=k$ e $y=k$ são, respectivamente, as hipérboles

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} & =-\frac{k^2}{a^2} \\ x & =k \end{cases}, \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} & -\frac{z^2}{c^2}=-\frac{k^2}{b^2} \\ y & =k \end{cases},.$$

31 Aplicação da Diagonalização na Identificação de Cônicas e Quádricas

Consideremos o problema de identificar uma cônica representada pela equação

$$3x^2+2xy+3y^2=4.$$

Usando matrizes, esta equação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 3x+y & x+3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

ou

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=4,$$

ou ainda,

$$X^T A X = 4$$

em que $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Vimos que A é tal que $A = PDP^T$, com $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Assim, a equação dada pode ser escrita como

$$(X^T P) D (P^T X) = 4$$

$(\mathrm{P}^T X)^T D(P^T X) = 4$Se fazemos a mudança de coordenadas $X = PX'(X'P^T X)$, então como $P^T P = I$, teremos $(X')^T D X' = 4$. Se $X' = \begin{bmatrix} x'y' \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = 4,$$

que pode ser escrita como

$$2(x')^2 + 4(y')^2 = 4.$$

ou ainda,

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{1} = 1$$

que é a equação de uma elipse.

Exemplo. Identificar a cônica de equação

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

Podemos escrever a equação dada como

$$X^t A X + KX + 4 = 0,$$

em que $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $K = \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. O polinômio característico de A é:

$$p_A = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 5 - x & -2 \\ -2 & 8 - x \end{vmatrix} = (5 - x)(8 - x) - 4 = (x - 4)(x - 9).$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$.

Calculemos os autoespaços associados. Para $\lambda_1 = 4$, temos:

$$(A - 4I)X = 0 \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução geral é

$$Aut(\lambda_1) = \{(2y, y)/y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1)/y \in \mathbb{R}\} = [(2,1)].$$

Assim, se $v_1 = (2,1)$, $\{v_1\}$ é LI, pois é unitário e não nulo. Logo, $\{v_1\}$ é uma base de $Aut(\lambda_1)$.
Pegando $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, temos $\{u_1\}$ uma base ortonormal de $Aut(\lambda_1)$.
Como A é uma matriz simétrica, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim,

$$Aut(\lambda_2) = \{(-x, 2x)/x \in \mathbb{R}\} = \{(x(-1,2)/x \in \mathbb{R}\} = [(-1,2)].$$

Se $v_2 = (-1,2)$, então $\{v_2\}$ é LI e, portanto, uma base de $Aut(\lambda_2)$.
Tomando $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, temos $\{u_2\}$ uma base ortonormal de $Aut(\lambda_2)$.
Tomando $P = \begin{pmatrix} u_1 u_2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, temos $A = PDP^T$.
Substituindo na primeira equação, obtemos:

$$(X^T P) D (P^T X) + KX + 4 = 0.$$

Substituindo - se $X = PX'$ (ou seja, $P^T X = X'$), temos:

$$(X')^T D X'' + KPX' + 4 = 0,$$

ou

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + 4 = 0.$$

$$\begin{aligned} 4(x')^2 + 9(y')^2 - 8x' - 36y' + 4 &= 0 \\ 4[((x')^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[((y')^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 &= 0 \\ 4(x'-1)^2 + 9(y'-2)^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x'' &= x' - 1 \\ y'' &= y' - 2 \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{gathered} 4(x'')^2 + 9(y'')^2 = 36 \\ \frac{(x'')^2}{9} + \frac{(y'')^2}{4} = 1 \end{gathered}$$

uma elipse.
Exemplo. Considere a quádrica de equação

$$x^2 = 2yz.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^T A X = 0,$$

em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. O polinômio característico de A é

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

Logo, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ (pode - se escolher o autovalor que possui multiplicidade maior).
Para $\lambda_1 = 1$ temos:

$$(A - I)X = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução geral é

$Aut(\lambda_1) = \{(x, -z, z)/x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + z(0,-1,1)/x, z \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0), (0,-1,1)]$.

Se $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,-1,1)$, então são ortogonais entre si e, portanto, $\{v_1, v_2\}$ é LI, logo, uma base de $Aut(\lambda_1)$.
Tomando $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (1,0,0)$ e $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de $Aut(\lambda_1)$. Como autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz simétrica são ortogonais, podemos tomar

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \vec{k} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Assim, fazendo $P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, obtemos $A = PDP^t$.

Logo,

$$(X^t P) D (P^t X + = 0,$$

fazendo $X' = P^T X$, temos:

$$(X')^T D X' = 0$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0,$$

que é um cone circular.
Transformações Lineares

Definição 24. Sejam U e V dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* de U e V é uma função $T : U \to V$ que satisfaz, para quaisquer $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ as condições

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

No caso especial em que $U = V$, dizemos que $T : U \to U$ é um *operador linear*. As condições 1 e 2 podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v).$$

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 4x$. Dados $u, v \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

1. $f(u + v) = 4(u + v) = 4u + 4v = f(u) + f(v)$
2. $f(\alpha u) = 4(\alpha u) = \alpha(4u) = \alpha f(u)$

Logo, f é uma transformação linear.
EXEMPLOS

Observação. Decorre da definição que uma transformação linear $T : U \to V$ leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V, isto é,

$$T(O_u) = O_v.$$

De fato, se T é uma transformação linear, temos:

$$\begin{aligned} T(O_u) &= T(O_u + O_v) = T(O_u) + T(O_u) = 2T(O_u) \\ 2T(O_u) - T(O_u) &= O_v \\ T(O_u) &= O_v \end{aligned}$$

Assim, se $T(O_u) \neq O_v$, concluímos que T não é uma transformação linear. Mas $T(O_u) = O_v$ não é suficiente para que T seja uma transformação linear.

Teorema 15. Seja $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de um espaço vetorial U. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores de um espaço vetorial V. Então existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Tomemos $u \in U$. Como α é uma base de U, u se escreve de modo único como combinação linear dos vetores de α, digamos:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

Defina $T\colon U \to V$ por:

$$T(u) = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n.$$

A função T está bem definida, pois os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são unicamente determinados a partir de u.
Além disso, T é uma transformação linear. De fato, dados $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n, u = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$T(\lambda u + v) = T((\lambda a_1 + b_1)u_1 + \ldots + (\lambda a_n + b_n)u_n) = \quad (\lambda a_1 + b_1)v_1 + \ldots + (\lambda a_n + b_n)v_n = \lambda(a_1v_1 + \ldots a_nv_n) + (b_1v_1 + \ldots + b_nv_n) = \lambda T(u) + T(v)$

Notemos que, para todo $j, i \leq j \leq n$,

$$u_j = Ou_1 + \ldots + Ou_{j-1} + 1u_j + Ou_{j+1} + \ldots + Ou_n,$$

e, portanto,

$$T(u_j) = v_j.$$

Agora, vamos verificar que T é a única transformação linear com as propriedades desejadas. Para isto, suponhamos $S\colon U \to V$ uma transformação linear tal que $S(u_i) = v_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
Se $u \in U$, então $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ e, portanto,

$$\begin{aligned} S(u) &= S(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots a_nu_n) \\ &= S(a_1u_1) + S(a_2u_2 + \ldots + S(a_nu_n) \\ &= a_1S(u_1) + a_2S(u_2) + \ldots a_nS(u_n) \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = T(u) \end{aligned}$$

Como $u \in U$ foi tomado de forma arbitrária, segue que $S = T$.

Exemplo. Vamos determinar uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (0,2,1)$ e $T(0,2) = (1,0,1)$.
Notemos, inicialmente, que $\alpha = \{(1,1),(0,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. De fato, como um vetor não é um múltiplo do outro, α é um conjunto LI. Daí, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e α contém dois vetores LI, segue que α é uma base de $\mathbb{R}^2$.
Assim, para qualquer $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = (x,y) = a_1(1,1) + a_2(0,2),$$

ou seja,

$$(x, y) = (a_1, a_1 + 2a_2).$$

Daí,

$$\begin{cases} a_1 & = x \\ a_1 + 2a_2 & = y \end{cases} \implies a_2 = \frac{y - x}{2}.$$

Logo,

$$u = (x, y) = x(1, 1) + \frac{y - x}{2}(0, 2),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(x(1, 1) + \frac{y - x}{2}(0, 2)\right) \\ &= xT(1, 1) + \frac{y - x}{2}T(0, 2) \\ &= x(0, 2, 1) + \frac{y - x}{2}(1, 0, 1) \\ &= \left(\frac{y - x}{2}, 2x, \frac{x + y}{2}\right) \end{aligned}$$

32 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Definição 25. Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. O conjunto $\{u \in U / T(u) = 0\}$ é chamado *núcleo* de T e será denotado por $Ker(T)$.

2. O conjunto $\{v \in V / v = T(u)$ para algum $u \in U\}$ é chamado *imagem* de T e será denotado por $Im(T)$.

3. T é injetora se dados $u, v \in U$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou igualmente, T é injetora se dados $u, v \in U$, com $u \neq v$, tivermos $T(u) \neq T(v)$.

4. T é sobrejetora se dado $v \in V$ existir $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Em outras palavras, T é sobrejetora se $Im(T) = V$.

Proposição 8. Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então,

1. $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de U.

2. $Im(T)$ é um subespaço vetorial de V.

3. T é injetora se, e somente se, $Ker(T) = \{0\}$

Demonstração. 1. $Ker(T) \neq \emptyset$, pois $O_u \in U$ é tal que $T(O_u) = O_v$. Logo, $O_u \in Ker(T)$.

2. Dados $u, v \in Ker(T)$, temos $u, v \in U$ e $T(u) = T(v) = 0$. Daí, $u + v \in U$ e

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, $u + v \in Ker(T)$

3. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in Ker(T)$, temos $u \in U$ e $T(u) = 0$. Daí, $\lambda u \in U$ e

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0 = 0.$$

Logo, $\lambda u \in Ker(T)$.

4. ($\implies$) Suponhamos T injetora e seja $u \in Ker(T)$. Então $u \in U$ e $T(u) = 0$. Mas $T(0) = 0$ e, como T é injetora, segue que $u = 0$. Logo, $Ker(T) \subset \{0\}$. Como, $\{0\} \subset Ker(T)$ temos $Ker(T) = \{0\}$.
(<=) Suponhamos $Ker(T) = \{0\}$. Sejam $u, v \in U$ tais que $T(u) = T(v)$. Então

$$T(u) - T(v) = 0 \implies T(u - v) = 0 \implies u - v \in Ker(T) = \{0\} \implies u - v = 0 \implies u = v.$$

Exemplo. Considere a transformação linear $T \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (x, y, z - w)$.
Seja $u = (x, y, z, w) \in Ker(T)$. Então $T(u) = 0$, ou seja,

$$T(x, y, z, w) = (0, 0, 0)$$
$$(x, y, z - w) = (0, 0, 0)$$

Daí,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -w + z = 0 \end{cases} \implies w = z.$$

Logo, $u = (0, 0, z, z), z \in \mathbb{R}$.
Portanto, $Ker(T) = \{(0, 0, z, z)\}/z \in \mathbb{R} = \{z(0, 0, 1, 1)/z \in \mathbb{R}\} = [(0, 0, 1, 1)]$. Notemos que $\beta = \{(0, 0, 1, 1)\}$ gera $Ker(T)$ e é um conjunto LI, pois é unitário e não nulo.
Assim, β é uma base de $Ker(T)$ e $dim\ Ker(T) = 1$. T não é injetora, pois $Ker(T) \neq \{0\}$.
Além disso, a imagem de T é formada pelos vetores da forma

$$(x, y, z - w) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0).$$

Proposição 9. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\gamma = \{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ gera $Im(T)$.

Demonstração. Seja $v \in Im(T)$. Existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Como β é uma base de U existem escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$u = a_1u_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n.$$

Daí:

$$v = T(u) = T(a_1u_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + a_nT(u_n),$$

o que significa que v é uma combinação linear dos elementos de γ e, portanto, γ gera $Im(T)$.

33 Teorema do Núcleo e da Imagem

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, com U de dimensão finita, e $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Então

$$dim\ U = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T).$$

Demonstração. Suponhamos que $Ker(T) \neq \{0\}$ e seja $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de $Ker(T)$. Como $Ker(T) \subset U$ é um subespaço de U, podemos estender o conjunto β a uma base $\beta' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de U. Vamos mostrar que $\gamma = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_m)\}$ é uma base de $Im(T)$.
Pela proposição anterior, $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n), T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_m)\}$ gera $Im(T)$.
Como $u_i \in Ker(T), T(u_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Logo, $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_m)\}$ gera $Im(T)$. Resta mostrar que γ é LI. De fato, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ escalares tais que

$$\lambda_1T(v_1) + \lambda_2T(v_2) + \ldots + \lambda_mT(v_m) = 0.$$

Como

$$T(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_mv_m) = 0,$$

segue que $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_mv_m \in Ker(T)$.
Como β é uma base de $Ker(T)$, temos

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_mv_m = a_1u_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nu_n,$$

para certos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Daí:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n - \lambda_1v_1 - \lambda_2v_2 - \ldots - \lambda_mv_m = 0.$$

Como β' é LI, segue que $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Portanto, γ é LI.
Assim,

$$dim\ U = n + m = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T).$$

Se $Ker(T) = \{0\}$, consideramos $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ base de U e, de modo análogo, mostramos que $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de $Im(T)$.

34 Isomorfismos

Definição 26. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

1. Seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Se T for bijetora, então dizemos que ela é um *isomorfismo*.
2. Se existir um isomorfismo $T\colon U \to V$, dizemos que U e V são *isomorfos* e indicaremos por $U \cong V$.

35 Transformações Inversas

Seja $F\colon U \to V$ uma bijetora. Em particular, para cada $v \in V$, existe um único $u \in U$ tal que $F(u) = v$. Com isso, podemos definir $G\colon V \to U$ por $G(v) = u$. Temos $F \circ G = Id_v$ e $G \circ F = Id_u$. Chamamos G de *função inversa* de F.
Se F for uma transformação linear, então G também será linear. De fato, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_1 \in U$ e $v_1, v_2 \in V$ tais que $F(u_i) = v_i$ para cada $i = 1, 2$.
Logo,

$$G(\lambda v_1 + v_2) = G(\lambda F(u_1) + F(u_2)) = G(F(\lambda u_1 + u_2)) = (G \circ F)(\lambda u_1 + u_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda G(v_1) + G(v_2).$$

Portanto, G é linear.
Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 10. A inversa de uma transformação linear bijetora é também uma transformação linear.

Denotaremos a inversa de uma transformação linear $T\colon U \to V$ por $T\colon V \to U$.

Proposição 11. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de mesma dimensão finita $n \geq 1$ e $T: U \to V$ uma transformação linear. São equivalentes:

1. T é um isomorfismo.

2. T é injetora.

3. é sobrejetora

Demonstração. As implicações (1) $\implies$ (2) e (1) $\implies$ (3) são claras.
(2) $\implies$ (i): Suponhamos T injetora. Então $Ker(T) = \{0\}$ e $dim\ Ker(T) = 0$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$dim\ V = dim\ U = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T)$$

$$dim\ V = dim\ Im(T).$$

Como $Im(T) \subset V$ é subespaço de V e $dim\ Im(T) = dim\ V$, segue que $Im(T) = V$ e, portanto T é sobrejetora.
Assim, T é um isomorfismo.
(3) $\implies$ (1): Suponhamos T sobrejetora. Então $Im(T) = V$ e $dim\ Im(T) = dim\ V = dim\ U$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$dim\ U = dim\ Ker(T) + dimIm(T) = dim\ Ker(T) + dim\ U.$$

Logo, $dim\ Ker(T) = 0$ e, portanto, $Ker(T) = \{0\}$. Daí, T é injetora e, assim, T é um isomorfismo.

Proposição 12. Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T: U \to V$ uma transformação linear injetora. Se $dim\ U = dim\ V$, então T leva base em base.

Demonstração. Seja $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ escalares tais que

$$a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_nT(u_n) = 0.$$

Daí,

$$T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) = 0,$$

ou seja,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n \in Ker(T) = \{0\},$$

uma vez que T é injetora. Logo,

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n = 0.$$

Como β é LI, segue que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Portanto, γ é LI e, como contém $n = dim\ V$ elementos, γ é uma base de V.

Teorema 16. Dois espaços vetoriais de mesma dimensão finita são isomorfos.

Demonstração. Se ambos os espaços forem nulos, não há nada a demonstrar.
Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n \geq 1$. Para definirmos um isomorfismo $T\colon U \to V$ consideremos $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Sabemos que existe uma única transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$. Vamos mostrar que tal transformação é sobrejetora.
Dado $v \in V$, $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, precisamos encontrar $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Basta considerarmos $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nv_n \in U$ e teremos:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_nT(u_n) \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = v \end{aligned}$$

Portanto, T é sobrejetora e, assim, T é um isomorfismo.

Exemplo. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por
$T(x, y, z) = (z - 2y, z, x + y)$. Vamos mostrar que T é um isomorfismo e calcular sua inversa T^{-1}.
Seja $u = (x, y, z) \in Ker(T)$. Então $T(u) = T(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ou seja,

$$(x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0).$$

Daí, temos

$$\begin{cases} x - 2y &= 0 \\ \qquad\quad z &= 0 \\ x + \ \ y &= 0 \end{cases}$$

Isolando y em (3), obtemos $y = -x$ e, substituindo em (1) resulta:

$$x + 2x = 0 \implies 3x = 0 \implies x = 0.$$

Logo, $y = 0$.
Portanto, $u = (0, 0, 0)$ e, assim, $Ker(T) = \{0\}$. Logo, T é injetora e, portanto, um isomorfismo.
Tomando $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ base canônica de $\mathbb{R}^3$, sua imagem pela T é
$\gamma = \{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. também é uma base de $\mathbb{R}^3$.
Queremos calcular $T^{-1}(x, y, z)$ como combinação linear da base γ.

Sejam a_1, a_2, a_3 escalares tais que

$$(x, y, z) = a_1(1, 0, 1) + a_2(-2, 0, 1) + a_3(0, 1, 0).$$

Então

$$\begin{cases} a_1 - 2a_2 & = x \\ \qquad\quad a_3 & = y \\ a_1 + \ \ a_2 & = z \end{cases},$$

cuja solução é $S = \left\{\left(\frac{x+2z}{3}, \frac{-x+z}{3}, y\right)\right\}$.
Portanto

$$(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3}(1, 0, 1) + \frac{z - x}{3}(-2, 0, 1) + y.$$

Assim,

$$T(x, y, z) =$$

36 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com dimensões n e m, respectivamente. Seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Vamos associar a T uma matriz $m \times n$.
Sejam $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $\gamma = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente.
Cada um dos vetores $T(u_i)$ pode ser expresso de modo único como combinação linear dos elementos de γ, digamos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Se $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \in U$ temos:

$$\begin{aligned} T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots + \alpha_n T(u_n) &= \sum_{i,j=1}^{n,m} \alpha_i(a_{ij}v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} (\alpha_i a_{ij})v_j \end{aligned}$$

Se escrevermos $\lambda_j = \alpha_1 a_{j1} + \ldots + \alpha_n a_{jn}$ para $j = 1, 2, \ldots, m$, então

$$T(u) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m,$$

isto,

$$[T(u)]_\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo em termos de multiplicação de matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix},$$

isto é, $[T(u)]_\gamma = A[u]_\beta$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Definição 27. A matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ definida acima é chamada *matriz da transformação linear* com relação às bases β e γ e é denotada por $[T]^\beta_\gamma$. Se $U = V$ e $\beta = \gamma$, denotamos simplesmente $[T]_\beta$

Exemplo. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (zx + y, y - x, 3x)$. Sejam $\beta = \{(1, 2),(2, -1)\}$ e $\gamma = \{(1, 1, 1),(0, 1, 1),(0, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Vamos determinar $[T]^\beta_\gamma$. Calculando T nos elementos da base β e escrevendo o resultado como combinação linear da base γ, temos:

$$T(1, 2) = (4, 1, 3) = a_{11}(1, 1, 1) + a_{21}(0, 1, 1) + a_{31}(0, 0, 1)$$
$$T(2, -1) = (3, -3, 6) = a_{12}(1, 1, 1) + a_{22}(0, 1, 1) + a_{32}(0, 0, 1)$$

Daí:

$$\begin{cases} a_{11} & = 4 \\ a_{11} + a_{21} & = 1 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} & = 3 \end{cases}, \begin{cases} a_{12} & = 3 \\ a_{12} + a_{22} & = -3 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} & = 6 \end{cases}.$$

Observação. Como as duas matrizes são $AX = B$ com as mesmas matrizes A, pode - se colocar as duas juntas no escalonamento.

Portanto,

$$[T]^\beta_\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Se $[u]_\beta$, então $[T(u)]_\gamma$ é:

$$[T(u)]_\gamma = [T]_\gamma^\beta [u]_\beta$$
$$[T(u)]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Proposição 13. Seja U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com dimensões n e m, respectivamente. Dadas β e γ de U e V, respectivamente, e uma matriz M de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, então existe uma *única* transformação linear $T\colon U \to V$ tal que $[T]_\gamma^\beta = M$.

Teorema 17. Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}, T_1\colon V \to V$ e $T_2\colon V \to W$ transformações lineares. Então a função composta $T_2 \circ T_1\colon U \to W$ também é uma transformação linear.

Demonstração. Dados $u, v \in$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\lambda u + v) &= T_2(T_1(\lambda u + v)) \\ &= T_2(\lambda T_1(u) + T_1(v)) \\ &= \lambda T_2(T_1(u)) + T_2(T_1(v)) \\ &= \lambda (T_2 \circ T_1)(u) + (T_2 \circ T_1)(v)\end{aligned}$$

Portanto, $T_2 \circ T_1$ é uma transformação linear.

Teorema 18. Sejam U, V e W espaços vetoriais com dimensões n, m e r, respectivamente. $, T_1\colon V \to V$ e $T_2\colon V \to W$ transformações lineares. Fixe α, β, γ bases de U, V, W, respectivamente. Então

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha.$$

Corolário 5. Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{R}$ e consideremos β e γ bases de U e V, respectivamente. Uma transformação linear $T\colon U \to V$ é um isomorfismo se, e somente se, a matriz $[T]_\gamma^\beta$ for invertível. Além disso, neste caso $[T^{-1}]_\beta^\gamma = ([T]_\gamma^\beta)^{-1}$.

Observação. Dado um operador linear $T\colon V \to V$, com $\dim V = n$ se conseguirmos uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de T, então, como

$$
\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\
T(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots 0v_n \\
&\vdots \\
T(v_n) &= \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_n v_n
\end{aligned}
$$

a matriz $[T]_\beta$ será diagonal e os elementos da diagonal principal serão os autovalores λ_i

$$
[T]_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.
$$

Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de V tal que

$$
[T]_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.
$$

então γ é uma base formada por autovetores de T. De fato, pela definição de $[T]_\gamma$, temos

$$
\begin{aligned}
T(v_1) &= a_1 v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n \\
T(v_2) &= 0v_1 + a_2 v_2 + \ldots 0v_n \\
&\vdots \\
T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \ldots + a_n v_n
\end{aligned}
$$

ou seja, u_i é um autovetor de T associado ao autovalor a_i para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definição 28. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear com $\dim V = n$. Dizemos, que T é um operador diagonalizável se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Exemplo. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é

$$
[T]_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

O polinômio característico de T é

$$p_T(x) = \det([T]_\beta - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -4 \\ 0 & 3-x & 5 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -(3-x)^2(1+x).$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Para $\lambda_1 = 3$, temos

$$([T] - 3I)[v]_\beta = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cuja solução é

$$Aut(\lambda_1) = \{(x, y, 0)/x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)].$$

Se $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$, então $\{v_1, v_2\}$ é LI, pois um vetor não é múltiplo do outro.

Para $\lambda_2 = -1$, temos

$$([T]_\beta + I)[v]_\beta = 0 \implies \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

cuja solução é

$$Aut_T(\lambda_2) = \{z, -\frac{5}{4}z, z)/z \in \mathbb{R}\} = [(4, -5, 4)].$$

Se $v_3 = (4, -5, 4)$, então $\{v_3\}$ é um conjunto LI, pois é unitário e não nulo.

Como os autovetores associados a autovalores distintos são LI, $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LI. E, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, γ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Portanto, T é diagonalizável e

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$