Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

8ª Lista (Identificação de Cônicas e quádricas) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 2 de maio de 2021

Use o produto escalar (produto interno usual) do $\mathbb{R}^n$ e as seguintes definições:

- Sejam A e B matrizes quadradas. Diz-se que A e B são ortogonalmente semelhantes se existe P ortogonal (isto é, $PP^T = I$) tal que $B = P^T AP$. Se A for ortogonalmente semelhante a uma matriz diagonal, dizemos que A é ortogonalmente diagonalizável e que P diagonaliza A ortogonalmente.
- Uma forma quadrática $x^T Ax$ é definida:
  (i) **positiva** se $x^T Ax > 0$, para todo x não nulo.
  (ii) **negativa** se $x^T Ax < 0$, para todo x não nulo.
  (iii) **indefinida**, se existe x não nulo em que $x^T Ax > 0$ e existe x não nulo em que $x^T Ax < 0$.

---

1) Determine P que ortogonalmente diagonaliza A e calcule $P^{-1}AP$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) Julgue se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

(a) Seja A diagonalizável em que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Então A é simétrica.

(b) Se A é uma matriz quadrada, então $A^T A$ e AA^T são ortogonalmente diagonalizável.

(c) Se u e v são autovetores associados a autovalores distintos, então $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(d) Qualquer matriz ortogonal é ortogonalmente diagonalizável.

(e) Qualquer autovalor de uma matriz ortogonal tem módulo igual a 1.

3) Expresse a forma quadrática na notação matricial $x^T Ax$.

(a) $3x^2 + 7y^2$

(b) $4x^2 - 9y^2 - 6xy$

(c) $9x^2 - y^2 + 4z^2 + 6xy - 8xz + yz$

4) Expresse a forma quadrática $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sem envolver matrizes.

5) Determine uma mudança de variáveis ortogonal que elimine os termos mistos da forma quadrática Q e expresse Q em função das novas variáveis.

(a) $Q(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy$

(b) $Q(x,y,z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$

6) Escreva a equação quadrática na notação matricial $x^T Ax + kx + F$.

(a) $2x^2 + xy + x - 6y + 2$

(b) $y^2 + 7x - 8y - 5 = 0$

7) Identifique o tipo de cônica pela equação.

(a) $2x^2 + 5y^2 = 20$

(b) $x^2 - y^2 - 8 = 0$

(c) $7y^2 - 2x = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

8) Identifique o tipo de quádrica pela equação.

(a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

(b) $-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + (z+1)^2 = 1$

(c) $x^2 + y^2 - 3(z+1)^2 = 1$

(d) $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

9) Identifique o tipo de cônica pela equação, gire os eixos coordenados a fim de coloca-la em posição canônica. Encontre a equação da cônica no sistema de coordenadas.

(a) $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

(b) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

10) Determine se a matriz é definida positiva, negativa, indefinida, não negativa ou não positiva.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

11) Mostre que a matriz A é definida positiva.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

12) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) Uma matriz simétrica com autovalores positivos é positiva.

(b) $x^2 - y^2 + z^2 + 4xyz$ é uma forma quádrica.

(c) $(x - 3y)^2$ é uma forma quádrica.

(d) Uma matriz positiva é invertível.

(e) Se A é positiva, então $-A$ é negativa.

(f) Se A é invertível e $x^T Ax$ é uma forma quádrica, então $x^T A^{-1}x$ também é.

(g) Se A só tem autovalores positivos, então $x^T Ax$ é uma forma quádrica positiva.

(h) Se $x^T Ax$ for uma forma quádrica sem termos mistos, então A é uma matriz diagonal.

13) Em cada item, identifique a cônica, determine a equação no novo sistema de coordenadas.

(a) $9x^2 + 6y^2 - 30 = 0$

(b) $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$

(c) $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$

(d) $xy + x + y = 0$

(e) $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{1}0x + 10\sqrt{1}0y + 90 = 0$

14) Em cada item, identifique as quádricas.

(a) $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$

(b) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$

(c) $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

(d) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

(e) $2x^2 + 4yz + 6z + 2y - 4x + 5 = 0$

(f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz + 4x - 8y + 12z + 4 = 0$

Gabarito

1) (a) $P = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$ e $P^1AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

(b) $P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix}$

(c) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1//\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ e $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) (a) V

(b) V

(c) V

(d) F

(e) V

3) (a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1/2 \\ -4 & 1/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

4) $2x^2 + 5y^2 - 6xy$

5) (a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ $\quad Q(x_2, y_2) = 3x_2^2 + y_2^2$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ $\quad Q(x_2, y_2, z_2) = x_2^2 + 4y_2^2 + 7z_2^2$

6) (a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 = 0$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0$

7) (a) elipse

(b) hipérbole

(c) parábola

(d) círculo

8) (a) elipsoide

(b) hiperboloide de duas folhas

(c) hiperboloide de uma folha

(d) paraboloide hiperbólico

9) (a) hipérbole, $2y^2 - 3x^2 = 8$
   (b) hipérbole, $4x^2 - y^2 - 3$

10) (a) positiva
   (b) negativa
   (c) indefinida

11)

12) (a) V
   (b) F
   (c) V
   (d) V
   (e) V
   (f) F
   (g) V
   (h) F

13) (a) elipse, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$
   (b) hipérbole, $13\frac{y^2}{81} - 4\frac{x^2}{81} = 1$
   (c) parábola, $y^2 + \frac{x^2}{8} = 0$
   (d) hipérbole, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$
   (e) parábola, $y^2 - 4x^2 = 0$

14) (a) hiperboloide de duas folhas
   (b) elipsoide
   (c) paraboloide hiperbólico
   (d) paraboloide elíptico
   (e) cone elíptico
   (f) plano