Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

3^a Prova de Geometria Analítica e Álgebra Linear - 2021/I

Profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Matrícula: 102017

1. (10 pontos) Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, use o procedimento de Gram-Schmidt para obter uma base **ortogonal** de $\mathbb{R}^3$, a partir da base $B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,2,0), v_3 = (1,0,-1)\}$.

2. (10 pontos) Considere nesta questão o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^2$:
$$\langle (x,y),(a,b)\rangle = xa - xb - ya + 2yb$$
Dado $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$, determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial $W^\perp$, em que
$$W^\perp = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(a,b)\rangle = 0, \forall (a,b) \in W\}$$

3. (24 pontos) Seja T um operador do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) (4 pontos) Mostre que as raízes do polinômio característico de T são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.
   (b) (10 pontos) Determine o autoespaço de T associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.
   Determine a dimensão e uma base para este subespaço.
   (c) (10 pontos) Mostre que T é diagonalizável.
   Determine uma base **ortogonal** do $\mathbb{R}^3$ de autovetores de A.

4. (20 pontos) Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual. Seja a quádrica cuja equação na base canônica é:
$$-x^2 + 2yz - y + z = 1 \qquad (*)$$
   (a) (4 pontos) Escreva a equação $(*)$ na forma matricial: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + C = 0$, em que $\mathbf{x}^T = (x,y,z)$.
   Observe que a matriz A da equação matricial é a matriz A da questão anterior. Por isso, pode usar (sem ter que refazer os cálculos) qualquer informação que julgar útil e que tenha obtido na questão anterior.
   (b) (6 pontos) Determine uma matriz ortogonal P que diagonaliza ortogonalmente a matriz A.
   (c) (10 pontos) Reescreva a equação $(*)$ na forma reduzida (sem termos mistos e sem os termos lineares). Classifique a quádrica.

5. (20 pontos) Sejam os pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (0, -1, 1)$.

   (a) Determine a equação geral do plano que contenha os pontos A e B e seja perpendicular ao plano $x - 2y = 0$.

   (b) Seja r a reta definida pelos pontos A e B. Determine a equação vetorial de uma reta s, ortogonal a r tais que r e s sejam reversas.

6. (16 pontos) Mostre que as afirmações são verdadeiras.

   (a) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear sobre um espaço vetorial V e $v \in V$ um autovetor de T associado ao autovalor λ. Se v é também autovetor de $T \circ T$ (transformação composta de T com T) associado ao mesmo autovalor λ, então $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.

   (b) Seja V um espaço vetorial euclidiano e $u, v \in V$. Se B é uma base ortonormal de V, então $\langle u, v\rangle = \langle [u]_B, [v]_B\rangle$.