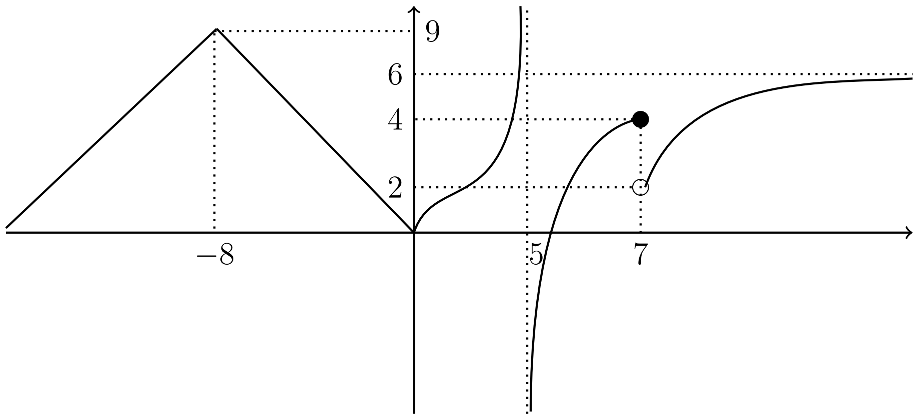
Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática
Lista 3 de Mat 140 – Derivada

Resolva todas as questões propostas, justificando bem suas respostas.

1. Seja f uma função real com gráfico dado a seguir:



   Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável. **Resp: -8, 0, 5, 7**

2. Encontre constantes a e b de modo que a função $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$. **Resp: a = 1, b = -2**

3. Mostre que $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x < 2 \\ 4x - 1 & \text{se } x \geq 2, \end{cases}$ não é derivável em $x = 2$. Desenhe o gráfico de f.

4. Seja $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \text{ se } x < 1 \\ 2x + 1 \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$

   a) Mostre que g é derivável em $x = 1$ e calcule $g'(1)$. **Resp:** $g'(1) = 2$
   b) Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, g(1))$

5. $f(x) = x|x|$ é derivável em $x = 0$? Justifique. **Resp: Sim**

6. Decida se cada uma das funções a seguir é diferenciável em x_0.

   a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, **Resp: Não**
   b) $f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, **Resp: Não**

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$, **Resp: Sim**

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{\sqrt{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1 \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ **Resp: Não**

7. Calcule $f'(a)$ pela definição e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, sendo dados:
a)$f(x) = x^2 - x + 1$ e $a = 1$ **Resp:** $f'(1) = 1$ $y = x$
b)$f(x) = \frac{1}{x^3}$ e $a = 2$ **Resp:** $f'(2) = -\frac{3}{16}$; $y = -\frac{3}{16}x + \frac{1}{2}$
c)$f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $a = 1$ **Resp:** $f'(1) = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
d)$f(x) = \frac{x}{x+1}$ e $a = 2$ **Resp:** $f'(2) = \frac{1}{9}$; $y = \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}$

8. Sejam $f(x) = a^x$ e $g(x) = log_a(x)$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$. Mostre que $f'(x) = a^x ln(a)$ e $g'(x) = \frac{1}{xln(a)}$

9. Seja f uma função diferenciável. Mostre que:

   a) $(ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

   b) $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$

   c) $(sen(f(x)))' = f'(x)cos(f(x))$

   d) $(cos(f(x)))' = -f'(x)sen(f(x))$

10. Determine $f'(x)$ em cada caso:
a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ b)$f(x) = cossec(x)$ c) $f(x) = sec(x)$

d) $f(x) = \frac{sec(x)}{x+2}$ e) $f(x) = (3x^4 + 2x^2 - x + 1)^{1000}$

f) $f(x) = \frac{x+sen(x)}{x-cos(x)}$ g) $f(x) = cos(x) + (\sqrt{x} + x^3 - 2)sen(x)$

h) $f(x) = \frac{x+e^x}{x\ln(x)}$ i) $f(x) = sen(sen(sen(x)))$

j) $f(x) = \log_8(1 + e^{-x}) + 2x^2 - 1$ k) $f(x) = \frac{\ln(2x)+\sqrt[3]{x}}{x^2+2}$

l) $f(x) = cotg(x^2 + \ln(x))$ m) $f(x) = \frac{\sqrt{x}sen(x)}{x^3cos(2x-1)}$

n) $f(x) = sen^3(x)cos^{20}(2x)\sqrt[4]{x+1}$ o) $f(x) = \frac{(x^3+2x)^{20}}{cos(x)+sen(x)}$

p) $f(x) = \sqrt[5]{x^3sec^4(x)}$ q) $f(x) = \frac{x^2tg(x^3-x^2)}{sec(x)}$

11. Determine f', f'' e f''' para:

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 2$ b) $f(x) = \ln(2x + 8)$

c) $f(x) = \sqrt{x+2} + e^{3x-1}$ d) $f(x) = sen(x)e^{-x}$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $g(x) = f(x)e^{f(x)+sen(x)}$. Calcule $g'(0)$ supondo $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $g(x) = e^{x^2}f(x^3 + x - 1)$. Calcule $g'(1)$ supondo $f(1) = 4$ e $f'(1) = 2$.

14. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + x$. Encontre o ponto de tangência.

15. Dertermine $f'(x)$ em cada caso:

   a) $f(x) = arctg(x-1)$
   b) $f(x) = arcsen(\sqrt{x}) + arccos(x^2 - x)$
   c) $f(x) = 3^x - 5^{-x}$
   d) $f(x) = x^x$
   e) $f(x) = (3x)^{x^2-1}$
   f) $f(x) = \log_2(x^3 - 3)$
   g) $f(x) = \left(arctg(\sqrt{x+1})\right)^2$
   h) $f(x) = x^{x\sqrt{x}}$

16. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y, onde $y = f(x)$ é uma função diferenciável definida implicitamente por:

   a) $xy + y^3 = 3x$
   b) $5y + cos(y) = xy$
   c) $x^2 - y^2 = 4$
   d) $y + \ln(x^2 + y^2) = 4$

17. Determine a reta tangente à curva $x^2 + 4y^4 = 2$ no ponto de abscissa 1.

18. Determine a reta tangente ao gráfico definido implicitamente por $xy + \ln(xy) = 1$ no ponto $(1, 1)$.

19. Considere $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^2 - xy + y^2 = 12$. Determine os pontos x onde $y'(x) = 0$. Calcule $y''(x)$ nestes pontos.

20. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função f cuja derivada é dada por $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 2)(x + 3)$.

21. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

   a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$
   b) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$
   c) $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$

22. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função cujo gráfico é dado no Exercício 1.

23. Em cada item, dada a função f, faça o que se pede:

   i) Determine os pontos críticos;
   ii) Exiba os intervalos de crescimento e decrescimento;
   iii) Determine os pontos de inflexão;
   iv) Estude a concavidade de f;
   v) Determine as assíntotas verticais e horizontais;
   vi) Esboce o gráfico de f.

   a) $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$;

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$;

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = 8x^3 + 30x^2 + 24x + 10$

e) $f(x) = \frac{3x^2+4x}{1+x^2}$

f) $f(x) = xe^x$

g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

h) $f(x) = \frac{4x+5}{x^2-1}$

i) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-x-2}$

24. Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de comprimento 1 que contenha tal raiz.

25. Mostre que $e^x > x$ para todo $x \geq 0$.

26. Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$ e $-4 \leq f'(x) \leq 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $-16 \leq f(5) - f(1) \leq 12$.

27. Ache os pontos de máximo e mínimo globais das seguintes funções nos intervalos dados:

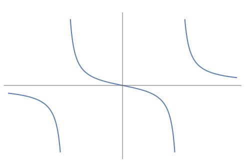
a) $f(x) = x^3 + 5x - 4$; $[-3, -1]$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$; $[-4, 4]$

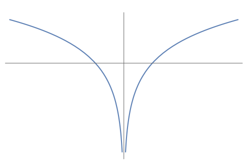
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$; $[-4, 0]$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 \text{ se } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - x^2 \text{ se } 2 < x \leq 4; \end{cases} \qquad [-1, 4]$.

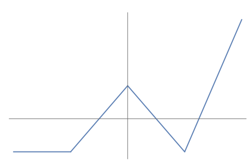
28. Associe os gráficos de cada função de (a) a (e) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (f) a (j).



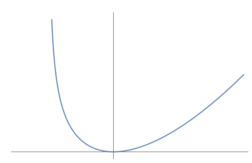
(a)



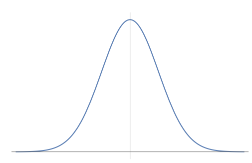
(b)



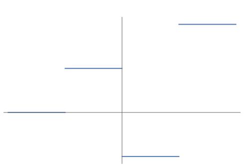
(c)



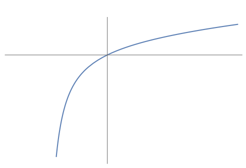
(d)



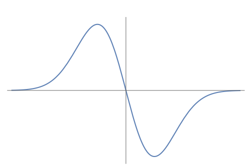
(e)



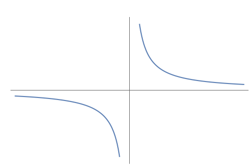
(f)



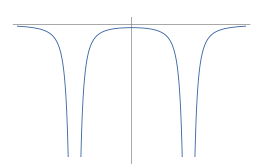
(g)



(h)



(i)



(j)

Resp: (a)-(j), (b)-(i), (c)-(f), (d)-(g) e (e)-(h).

29. Dois carros estão caminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de $90km/h$ e outro seguindo a direção sul a $60km/h$. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a $0,2km$ do cruzamento e o segundo a 0,15km? **Resp:** $-108km/h$

30. Uma lâmpada está pendurada a $4,5m$ de um piso horizontal. Se um homem de $1,8m$ de altura caminha afastando-se da luz com uma velocidade de $1,5m/s$, qual a velocidade de crescimento da sombra? **Resp:** $1m/s$.

31. Um automóvel aproxima-se de um cruzamento a uma velocidade de $30m/s$. Quando o automóvel está $120m$ do cruzamento, um caminhão a uma velocidade de $40m/s$ atravessa o cruzamento. O automóvel e o caminhão estão em ruas que se cruzam em ângulo reto. Com que velocidade o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2s após o caminhão ter passado pelo cruzamento? **Resp:** $14m/s$.

32. Uma escada de $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a deslizar horizontalmente, à razão de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede, quando está a $4m$ do solo? **Resp:** $-3\sqrt{5}/10\ m/s$.

33. Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de $1m/min$. Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando quando o raio é de $20m$. **Resp:** $40\pi\ m^2/min$.

34. Suponha que uma bola de neve esférica é formada de tal maneira que seu volume aumenta à taxa de $8dm^3/min$. Determine a taxa a qual o raio é aumentado quando a bola de neve tem $4dm$ de diâmetro. **Resp:** $0,5\pi\ dm/min$.

35. Um fabricante de caixas de papelão de base quadrada deseja fazer caixas abertas de pedaços de papelão de $12m$ de lado, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados. Encontre o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível. **Resp:** $2m$.

36. Um campo retangular vai ser cercado ao longo da margem de um rio, e não se exige cerca ao longo do rio. Se o material da cerca custa 2 reais por metro para os extremos e 3 reais por metro para o lado paralelo ao rio, encontre as dimensões do campo de maior área possível que pode ser cercado com um custo de 480 reais. **Resp:** O lado paralelo ao rio deve ser de $80m$ e os outros dois de $60m$.

37. Os pontos A e B são opostos um ao outro nas margens de um rio reto que mede $3km$ de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas a $6km$ rio abaixo de B. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A a C. Se o custo por km de cabo é 25 porcento mais caro sob a água do que em terra, que linha de cabo seria menos cara para a companhia? **Resp:** $5km$ por água e $2km$ por terra.

38. Se uma lata fechada de estanho, de volume específico, deve ter a forma de um cilíndro circular reto, encontre o quociente da altura pelo raio da base se em sua fabricação será usada a menor quantidade de material possível. **Resp:** $h/r = 2$

39. Uma folha de papel para um cartaz tem 1 metro quadrado de área. As margens superior e inferior valem $10cm$ e as margens laterais $5cm$. Determine as dimensões da folha, sabendo que a área impressa é máxima. **Resp:** $100\sqrt{2}cm$ e $50\sqrt{2}cm$

40. Um chalé tem a forma de um triângulo isósceles de $12m$ de altura e $9m$ de base. A iluminação na parede dos fundos é feita através de uma única janela retangular que vai até o chão. Ache as dimensões para que a área da janela seja a maior possível. **Resp:** $9/2m$ e $6m$.