UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Gabarito da 1^a Lista - MAT 138 - Noções de Álgebra Linear (Matrizes) II/2005

1. (a) AE tem ordem 4×5, mas não é possível somar com B^T, pois têm ordens distintas.
   (b) Não é possível somar D^T e B pois têm ordens distintas.
   (c) $AC + B$ tem ordem 4×5.

2. A ordem 5×6, B ordem 3×6, C ordem 3×4, D ordem 4×3 e E ordem 3×5.

3. (a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 11 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

   (e) $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & -8 \\ 1 & -8 & 2 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 9 & 6 \\ 2 & 0 & -11 & -4 \\ -9 & 11 & 0 & -13 \\ -6 & 4 & 13 & 0 \end{bmatrix}$.

4. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$; $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$; $B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$;

   $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$; $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$.

   (b) e (c) Não valem as identidades. (d) A e B devem comutar, ou seja, $AB = BA$.

5. São as matrizes $B \in M_2(I\!R)$ da forma $B = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais.

6. $(A \cdot B)_{12} = -16$ e $(B \cdot A)_{23} = 65$.

7. (a) $x = 0$ e $y = 4$ (b) Não. (c) Sim, pois neste caso existe C^{-1} e temos:

   $AC = BC \overset{\exists C^{-1}}{\Rightarrow} (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} \overset{\text{prop. assoc.}}{\Rightarrow} A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}) \Rightarrow AI = BI \Rightarrow A = B.$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

9. (a) Sim, $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (b) Sim, é única pois o sistema montado para cálculo dos termos é possível e determinado e $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) O sistema encontrado é impossível, pois não existem números reais b e d que satisfaçam o sistema $\begin{cases} 2b + 4d = 3 \\ b + 2d = -1 \end{cases}$

10. $p = 2$

11. $x = 9$.

12. (a) $\det A = ad - bc = \det A^T$.

(b) $i.$ $\det(kA) = k^2ad - k^2bc$, $\qquad ii.$ $\det(kA) = k^2 \det A$.

(c) $i.$ M for de ordem 2, então $M = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ e, exceto quando $x = 0$, M é inversível, pois $\det M = -x^2$.

$ii.$ M for de ordem 3, então $M = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{bmatrix}$ e M não é inversível, pois $\det M = -xyz + xyz = 0$.

13. $\det C = -2$, C é inversível; $\qquad \det D = 0$, D não é inversível, $\qquad \det E = -12$, E é inversível.

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, A não é singular; $\qquad B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, B não é singular; $\det C = 0$, C é singular.

15. (a) $p(x) = -x^3+2x^2-x+1$; $\qquad (b)$ $p(A) = -A^3+2A^2-A+I = 0$; $\qquad (c)$ $A^{-1} = A^2-2A+I$.

16. Sendo A e B matrizes inversíveis de ordem n, isolar a matriz X de cada equação abaixo:

(a) $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$; $\qquad (b)$ $X = A^{-1} \cdot B^T$; $\qquad (c)$ $X = A^{-1}$;

(d) $X = B^T - A$; $\qquad (e)$ $X = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot B^{-1}$; $\qquad (f)$ $X = (B^{-1})^T \cdot A$.

17. $|\det A| = 1/16$.

18. $\det Q = 16$.

19. $$\det\begin{pmatrix} a+c & b+c & 2c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} c & c & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + c\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + c \cdot 0 = 0.$$

20. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$; $\qquad (b)$ $X_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 30 \end{bmatrix}$ e $X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -10 \end{bmatrix}$

21. Os elementos de $A \cdot B$ representam o custo total de produção de cada elemento na sua respectiva cidade.

22. O custo diário total para remover os poluentes originados de cada produto P e Q em suas respectivas fábricas X e Y.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fábrica } X & \text{Fábrica } Y & \\ \text{AB}= & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Produto P} \\ \text{Produto Q} \end{array} \end{array}$$

, por exemplo, b_{11} é o custo para remover todos os poluentes de P na fábrica X.

23. (a) 2.800g $\qquad (b)$ 6.000g.

24. (a) $\begin{bmatrix} 145400 & 213200 & 164850 & 239850 \end{bmatrix}$ $\qquad (b)$ $\begin{bmatrix} 232640 & 341120 & 263760 & 383760 \end{bmatrix}$.

25. (a) $\begin{bmatrix} 14500 & 555 & 405 & 3200 & 2150 \end{bmatrix}$.

(b) A primeira coluna indica quanto foi gasto com material em cada tipo de casa (em cada linha dessa coluna aparece o valor gasto com cada tipo) e na segunda coluna quanto foi gasto para o transporte desses materiais, para cada tipo de casa.

26. (a) $\begin{bmatrix} 780 & 555 & 1455 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (b) $R\$154,50$.

27. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1,5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1,5 \\ 1 & 1,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$.

    (b) Na primeira coluna, o preço de fabricação de cada produto (mandioca, milho e trigo) em Cacha Pregos e na segunda coluna, o preço de fabricação de cada produto em Cacimba de Dentro.

28. Os elementos da diagonal dessa matriz.

29. (a) (F) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 2 = \det(-A) \neq -\det A$.

    (b) (F) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det A = 1$, $\det B = -2$ e $\det(A+B) = -4 \neq \det A + \det B$.

    (c) (F) $\det B = \det(P^T \cdot A \cdot P) = \det P^T \det A \det P = (\det P)^2 \det A$.
    A menos que $\det P = \pm 1$ os determinantes das matrizes A e B são diferentes.

    (d) (V) $X^2 + 2X = 0 \overset{\exists A^{-1}}{\Rightarrow} X^{-1} \cdot (X^2 + 2X) = X^{-1} \cdot 0 \Rightarrow X + 2I = 0 \Rightarrow X = -2I$.

    (e) (F) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ temos que $A \cdot B = 0$ (matriz nula), mas $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ que não é matriz nula.

    (f) (F) No exemplo acima $A \neq 0$ e $B \neq 0$, no entanto $A \cdot B = 0$ (matriz nula).

    (g) (V) Se A e B são simétricas, então $A = (a_{ij}) = (a_{ji}) = A^T$ e $B = (b_{ij}) = (b_{ji}) = B^T$.
    Logo, $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (A+B)^T$.
    Portanto, $A + B$ é simétrica.

    (h) (F) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ são simétricas, mas $A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ não é simétrica.

    (i) (V) Se um sistema quadrado $Ax = 0$ tem somente a solução trivial, então A é inversível, logo o sistema $Ax = b$ tem a única solução $x = A^{-1}b$.

    (j) (F) Se o sistema não é homogêneo o resultado é falso, de fato, consideremos o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ tem soluções $x = 2,\ y = -1, z = 0$ e $x = 2,\ y = -2, z = 1$, no entanto $x = 4,\ y = -3, z = 1$, a soma das soluções anteriores, não é uma solução.

    (k) (V) $A \cdot C = B \cdot C \overset{\exists C^{-1}}{\Rightarrow} (A \cdot C) \cdot C^{-1} = (B \cdot C) \cdot C^{-1} \overset{\text{prop. assoc.}}{\Rightarrow} A \cdot (C \cdot C^{-1}) = B \cdot (C \cdot C^{-1}) \Rightarrow A \cdot I = B \cdot I \Rightarrow A = B$.

    (l) (V) $A \cdot B = 0 \overset{\exists B^{-1}}{\Rightarrow} (A \cdot B) \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \overset{\text{prop. assoc.}}{\Rightarrow} A \cdot (B \cdot B^{-1}) = 0 \Rightarrow A \cdot I = 0 \Rightarrow A = 0$.

    (m) (V) Se existem A^{-1} e B^{-1}, então $C^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
    Se existem A^{-1} e C^{-1}, então $B = A^{-1} \cdot C$ e daí que $B^{-1} = C^{-1} \cdot A$.
    Se existem B^{-1} e C^{-1}, então $A = C \cdot B^{-1}$ e daí que $A^{-1} = B \cdot C^{-1}$.

    (n) (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ então $A \cdot B = C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. As matrizes A e C são singulares, no entanto B é não-singular.

30. Use o fato de que $A^2 = I$.

31. $x = 32$.

32. $S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$.