
PRODUTO CARTESIANO

Intuitivamente, um **par ordenado** é um conjunto de dois elementos, no qual cada elemento ocupa uma posição bem definida. Se os elementos são a e b, o par ordenado é simbolizado por $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, onde $\{a\}$ determina que a é o primeiro elemento ou primeira coordenada do par e $\{a, b\}$ determina o segundo elemento ou segunda coordenada do par.

Teorema 1 *Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.*

Definição 1 *Dados dois conjuntos A e B, definimos o produto cartesiano de A por B, nessa ordem, denotado por $A \times B$, ao conjunto formado pelos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$.*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}, \qquad (a, b) \in A \times B \longleftrightarrow a \in A \quad e \quad b \in B$$

Se os conjuntos A eB são finitos, então $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Quando $A = B$, escrevemos $A^2 = A \times A$ e de forma geral $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n vezes A), para $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2 *A diagonal de um conjunto A, define-se por $D(A) = \{(a, b) \in A^2 / a = b\}$.*

PROPRIEDADES:

1. Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$;
2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, para todo A, B, C;
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, para todo A, B, C;
5. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$, para todo A, B, C;
6. $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$, para todo A, B, C;
7. Se $A \subset B$, então $A \times C \subset B \times C$, para todo C;
8. Se $A \subset B$ e $C \subset D$, então $A \times C \subset B \times D$, para todo A, B, C, D;
9. $[A^c \times B^c] \subset (A \times B)^c$, para todo A, B;
10. Se $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$, então $A = B$;
11. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, para todo A, B, C, D;
12. $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, para todo A, B, C, D;

Exemplo 1 *Para $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 3\}$. Determinar $(A \times B) \cap B^2$ e $(A - B) \times (A \cap B)$.*

Note que $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$. Logo, $A - B = \{-1, 0\}$ e $A \cap B = \{1\}$. Assim, $A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$ e $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Portanto, $(A \times B) \cap B^2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$ e $(A - B) \times (A \cap B) = \{(-1, 1), (0, 1)\}$

Exemplo 2 *Os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ são iguais? Justifique sua resposta.*

Para dar resposta distinguimos dois casos:

1. *Se $A = B$, então a igualdade se cumpre.*
2. *Se $A \neq B$, como por exemplo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3\}$, temos $A \times B = \{(1, 3), (2, 3)\}$ e $B \times A = \{(3, 1), (3, 2)\}$. Claramente $A \times B \neq B \times A$*

Exemplo 3 *Determinar o número de elementos de $A \times B$.*

Para fazer isto, estamos pensando em conjuntos finitos A e B. Suponha que $n(A) = k$, $n(B) = m$ e $(a, b) \in A \times B$. Temos k formas de escolher o primeiro elemento do par ordenado e para cada escolha desse primeiro elemento temos m escolhas possíveis para o segundo elemento do par ordenado. No total temos $k \times m$ pares ordenados, isto nos dá $n(A \times B) = km$.

Exemplo 4 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{(w, z) : w = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, w) : x \in \mathbb{R},\ w = (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exemplo 5 *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Sabendo que:*
(i) $n(C - B^c) \leq 0$, (ii) $n[A \times (B \cup C)] = 60$, (iii) $n(A \times B) = 2n(A \times C)$. Determinar $n(A \times C)$.

Notamos que $C - B^c = C \cap (B^c)^c = C \cap B$. Logo, como o número de elementos de um conjunto é maior ou igual do que zero temos:

De (i) que $n(C \cap B) = 0$ e daqui $B \cap C = \emptyset$.

De (ii) e pela propriedade distributiva resulta $n[A \times (B \cup C)] = n(A \times B) + n(A \times C) = 60$, pois $B \cap C = \emptyset$. E, usando (iii) temos $n(A \times B) + n(A \times C) = 2n(A \times C) + n(A \times C) = 60$, de onde $n(A \times C) = 20$.

Exemplo 6 *Considerando $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $\quad A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$. Determinar o número de elementos de $\mathscr{C}_{U^2}(A \times \mathscr{C}B)$.*

Como $B = \{2, 4\}$, $\mathscr{C}B = \{1, 3\}$, de onde $n(A \times \mathscr{C}B) = 4$ e $n(U^2) = 16$. Portanto,
$n(\mathscr{C}_{U^2}(A \times \mathscr{C}B) = 16 - 4 = 12$

Exemplo 7 *Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Mostre que se $(A \times B) \subset (C \times D)$, então $A \subset C$ e $B \subset D$.*

De fato, sejam $x \in A$ e $y \in B$, então $(x, y) \in A \times B$. Usando a hipótese dada temos que $(x, y) \in C \times D$, de onde $x \in C$ e $y \in D$. Assim, conseguimos $x \in A \longrightarrow x \in C$ e $y \in B \longrightarrow y \in D$.

Exemplo 8 *Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Estabelecer a validade das seguintes afirmações:*

1. *Se $(A \times B) \subset (C \times D)$, então $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$.*
2. *$A^c \times B^c = (A \times B)^c$.*
3. *Se $A \subset B \subset D$, então $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.*
4. *Se $A \subset D \subset B$, então $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.*

Vejamos cada um dos itens.

1. Do exemplo anterior temos que $A \subset C$ e $B \subset D$, logo $A \cup C = C$ e $B \cap D = B$. Assim, $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

2. Se $(x, y) \in A^c \times B^c$, temos $x \in A^c \quad e \quad y \in B^c$, de onde $x \notin A \quad e \quad y \notin B$.

   Por outro lado, se $(x, y) \in (A \times B)^c$, temos $(x, y) \notin (A \times B)$ de onde, $x \notin A$ ou $y \notin B$.

   Claramente, ($x \notin A \quad e \quad y \notin B$) e ($x \notin A$ ou $y \notin B$) não são equivalentes. Portanto, $A^c \times B^c \neq (A \times B)^c$ e a afirmação é falsa.

   (OBS. Pode verificar que essa igualdade não é verdade considerando $U = \{1, 3\}$, $A = \{1\}$ e $B = \{3\}$)

3. A afirmação é falsa. De fato, como $A \subset B \subset D$ então $B - D = \emptyset$ e $(B - D) \cap A = \emptyset$. De onde

   $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = [(B - D) \cap A] \times C = \emptyset \times C = \emptyset \neq A \times C$

4. A afirmação é falsa. De fato, como $A \subset D \subset B$ temos $(B - D) \cap A = \emptyset$. De onde

   $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = [(B - D) \cap A] \times C = \emptyset \times C = \emptyset \neq A \times C$

RELAÇÕES

Definição 3 *Dados dois conjuntos A e B. Uma relação de A em B é um subconjunto de $A \times B$. Denotamos a relação por R e escrevemos $R = \{(x, y) \in A \times B / p(x, y)\}$.*

Observações:

1. Para saber se R é uma relação de A em B, é necessário e suficiente verificar que $R \subset A \times B$ $(R : A \longrightarrow B \Longleftrightarrow R \subset A \times B)$;

2. Se $(x, y) \in A \times B$ é tal que $(x, y) \in R$, a proposição $p(x, y)$ é verdadeira$x$ e escrevemos xRy, que se lê x está relacionado com y;

3. Se $(x, y) \in A \times B$ é tal que $(x, y) \notin R$, a proposição $p(x, y)$ é falsa. Nesse caso escrevemos $x\not{R}y$, que se lê x não está relacionado com y;

4. Quando $A = B$ e R é uma relação de A em B, dizemos que R é uma relação em A;

5. Usamos letras maiúsculas, R, T, S para denotar as relações. Também usamos letras com subíndices para fazer diferencia uma da outra, como por exemplo $R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots$.

6. Quando $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$ (são finitos), a representação da relação R pode ser feita:

   (a) Mediante diagrama de Venn;

   (b) Mediante grafos dirigidos (dígrafos);

   (c) Mediante uma matriz, $M_R = (m_{ij})$, de ordem $n \times m$, onde $m_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0, & se \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

Exemplo 9 *Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Verificar qual dos seguintes conjuntos é uma relação de A em B*

1. $R_1 = \emptyset$

2. $R_2 = A \times B$

3. $R_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$

4. $R_4 = \{(1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

Vamos a analisar cada um desses conjuntos.

1. *R_1 se é uma relação de A em B, pois $\emptyset \subset A \times B$;*

2. *R_2 é uma relação de A em B, uma vez que $A \times B \subset A \times B$;*

3. *Claramente $(1, 2) \in R_3$, mas $(1, 2) \notin A \times B$. Assim, $R_3 \not\subset A \times B$. Portanto, R_3 não é uma relação de A em B;*

4. *Todos os elementos de R_4 são também elementos de $A \times B$. Assim, $R_4 \subset A \times B$. Portanto, R_4 é uma relação de A em B.*

Exemplo 10 *Seja L o conjunto de todas as retas do plano. Os conjuntos $R_1 = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ e $R_2 = \{(L_1, L_2)/L_1 \perp L_2\}$ são relações em L.*

R_1 é uma relação em L. De fato, se $L_1, L_2 \in L$ e $L_1//L_2$, então $(L_1, L_2) \in R_1$ e também $(L_1, L_2) \in L^2$. Assim, $R_1 \subset L^2$.

R_2 é uma relação em L. De fato, se $L_1, L_2 \in L$ e $L_1 \perp L_2$, então $(L_1, L_2) \in R_1$ e também $(L_1, L_2) \in L^2$. Assim, $R_2 \subset L^2$.

Exemplo 11 *Seja U o conjunto formado por todos os conjuntos, isto é, $U = \{X/A \quad \text{é um conjunto}\}$. A inclusão de conjuntos é uma relação definida em U.*

De fato, definamos a relação R por $R = \{(A, B)/A \subset B\}$. Claramente, se $(A, B) \in R$ temos $(A, B) \in U^2$. Logo, $R \subset U^2$ e daqui R é uma relação em U.

Exemplo 12 *O conjunto $\{(x, y)/ \quad x \text{ é divisor de y}, \quad x, y \in \mathbb{N}\}$ é uma relação em $\mathbb{N}$.*

De fato, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{N}\}$. Seja $R = \{(x, y)/ \quad x \text{ é divisor de y}, \quad x, y \in \mathbb{N}\}$. Se $(x, y) \in R$ então $x, y \in \mathbb{N}$ e daqui $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, $R \subset \mathbb{N}^2$.

Exemplo 13 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 100\}$ e $B = \mathcal{P}(A)$. Para $X, Z \in B$ quaisquer, define-se $R = \{(X, Z)/X - Z \in B\}$. Verificar se R é uma relação em B.*

De fato, seja $(X, Z) \in R$, da forma como foi definida R, $X, Z \in B$, logo $(X, Z) \in B$. Desse modo, $R \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$. Portanto, R é uma relação em B.

Exemplo 14 *Sejam $A = \{a, b, c, d\}, \quad b = \{x, y, z\}$. Representar mediante uma matriz a relação $R = \{(a, x), (a, y), (b, z), (c, y), (d, z)\}$*

R	x	y	z
a	1	1	0
b	0	0	1
c	0	1	0
d	0	0	1

ou

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA RELAÇÃO

Definição 4 *Seja R uma relação de A em B, definimos o domínio de R como o conjunto de todas as primeiras coordenadas dos pares ordenados da relação R e denotamos por $Dom(R)$. Isto é,*

$$Dom(R) = \{x \in A / \exists y \in B, \quad (x, y) \in R\}$$

Assim, $\boxed{x \in Dom(R) \Longleftrightarrow \exists y \in B \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in R}$ $\boxed{x \notin Dom(R) \Longleftrightarrow \forall y \in B, \quad (x, y) \notin R}$

Definição 5 *Seja R uma relação de A em B, definimos a imagem de R como o conjunto de todas as segundas coordenadas dos pares ordenados da relação R e denotamos por $Im(R)$. Isto é,*

$$Im(R) = \{y \in B / \exists x \in A, \quad (x, y) \in R\}$$

Assim, $\boxed{y \in Im(R) \Longleftrightarrow \exists x \in A \quad \text{tal que} \quad (x, y) \in R}$ $\boxed{y \notin Im(R) \Longleftrightarrow \forall x \in A, \quad (x, y) \notin R}$

PROPRIEDADES Sejam R_1 e R_2 duas relações de A em B. Valem as seguintes propriedades:

Para o Domínio	**Para a Imagem**
(1) $Dom(R_1 \cup R_2) = Dom(R_1) \cup Dom(R_2)$	(1) $Im(R_1 \cup R_2) = Im(R_1) \cup Im(R_2)$
(2) $Dom(R_1 \cap R_2) \subset Dom(R_1) \cap Dom(R_2)$	(2) $Im(R_1 \cap R_2) \subset Im(R_1) \cap Im(R_2)$
(3) $Dom(R_1) - Dom(R_2) \subset Dom(R_1 - R_2)$	(3) $Im(R_1) - Im(R_2) \subset Im(R_1 - R_2)$

Exemplo 15 *Seja $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e $R = \{(x, y) \in M \times M / 2x - y = 5\}$. Determinar $n(Dom(R)) \cdot n(Im(R))$*

Da relação R dada, temos $p(x, y) : 2x - y = 5$. Os valores de $x, y \in M$ que tornam verdadeira $p(x, y)$, são tais que $x \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Assim, $Dom(R) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $Im(R) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Daqui, $n(Dom(R)) \cdot n(Im(R)) = (5)(5) = 25$

Exemplo 16 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / y = 2x^2 - 5\}$. Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações: (a) $(2, 4) \in R$ (b) $4 \in Dom(R)$ e $5 \in Im(R)$ (c) $-5 \in Im(R)$ ou $5 \in Im(R)$*

(a) Note que $p(x, y) : y = 2x^2 - 5$. Assim, $p(2, 4)$ é falsa, pois $4 \neq 2(2)^2 - 5$.

(b)Note que $4 \in Dom(R)$ é verdadeira, já que existe $y = 27$ tal que $(4, 27) \in R$. Mas $5 \in Im(R)$ falsa, já que $5 = 2x^2 - 5$ implica $x \in \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\} \not\subset \mathbb{Z}$. Portanto, a afirmação (b) é falsa.

(c) Note que $-5 \in Im(R)$ é verdadeira, pois existe $x = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $(0, -5) \in R$ e $5 \in Im(R)$ é falsa conforme visto no item (b). Portanto, a afirmação (c) é verdadeira.

RELAÇÃO INVERSA OU RECÍPROCA OU DUAL

Definição 6 *Dada uma relação R de A em B, $R = \{(x, y) \in A \times B / \quad p(x, y)\}$. A relação inversa ou recíproca de R, é o conjunto definido por* $R^* = R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A / \quad (x, y) \in R\}$.

Note que $Dom(R^{-1}) = Im(R)$ e $Im(R^{-1}) = Dom(R)$.

PROPRIEDADES: Sejam as relações $R, S \subset A \times B$. Então vale:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} \\ \\ (2)\ (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \\ \\ (3)\ (R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1} \end{array}}$$

Exemplo 17 *Seja $R = \{(1, 2), (3, 4), (3, 5), (6, 5)\}$. Determinar a relação inversa R^{-1}.*

De acordo com a definição de relação inversa temos $R^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (5, 3), (5, 6)\}$.

Exemplo 18 *Sejam R e T relações de A em B. Mostre que $(R - T)^{-1} = R^{-1} - T^{-1}$.*

(a) Mostremos que $(R - T)^{-1} \subset R^{-1} - T^{-1}$.

Seja $(y, x) \in (R - T)^{-1}$, então $(x, y) \in (R - T)$ e daqui, $(x, y) \in R$ e $(x, y) \notin T$. Segue que $(y, x) \in R^{-1}$ e $(y, x) \notin T^{-1}$. Portanto, $(y, x) \in [R^{-1} - T^{-1}]$.

(b) Mostremos que $R^{-1} - T^{-1} \subset (R - T)^{-1}$.

Seja $(y, x) \in R^{-1} - T^{-1}$, então $(y, x) \in R^{-1}$ e $(y, x) \notin T^{-1}$ e, daqui $(x, y) \in R$ e $(x, y) \notin T$. Segue, $(x, y) \in (R - T)$. Portanto, $(y, x) \in (R - T)^{-1}$.

Exemplo 19 *Sejam R, T e S relações de A em B. Mostre que $[(R \cup T) \cap S]^{-1} = (R \cap S)^{-1} \cup (T \cap S)^{-1}$.*

Note que $[(R \cup T) \cap S] = (R \cap S) \cup (T \cap S)$. Logo, aplicando a propriedade 1 da relação inversa, temos $[(R \cup T) \cap S]^{-1} = [(R \cap S) \cup (T \cap S)]^{-1} = (R \cap S)^{-1} \cup (T \cap S)^{-1}$.

Exemplo 20 *Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B / x \leq y\}$. Determinar o valor de verdade das seguintes afirmações:*

(a) $Dom(R) \cap Dom(R^{-1}) = \emptyset$ *(b)* $n(R \cap R^{-1}) = 12$ *(c)* $n(R \cup R^{-1}) = 12$

(d) $n(Dom(R)) = 4$ *(e)* $n(Im(R)) = 2$

$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}$, $Dom(R) = Im(R^{-1}) = \{1, 2, 3, 4\}$, $Im(R) = Dom(R^{-1}) = \{1, 3, 5\}$, $R^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2), (3, 3), (5, 3), (5, 4)\}$. *Com isto, (a), (b), (c) e (e) são falsas e, (d) é verdadeira.*

Exemplo 21 *Mostrar ou dar um contraexemplo para o seguinte enunciado: Se R^{-1} é uma relação de B em A tal que $D(B) \subset R^{-1}$, então $B \subset A$.*

Como $D(B) \subset R^{-1}$ concluímos que $B \subset Dom(R^{-1})$ e $B \subset Im(R^{-1}) = Dom(R) \subseteq A$. Portanto, $B \subset A$.

Exemplo 22 *Mostrar ou dar um contraexemplo para o seguinte enunciado: Se R é uma relação de A em B tal que $D(A) = R$, então $B = A$.*

Como $D(A) = R$, temos $A = Dom(R) = Im(R) \subseteq B$. Asim $A \subseteq B$.

Mas, não é possível concluir que $B \subset A$. Para ver isto, basta tomar $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Claramente, $D(A) = R$ e $A \neq B$.

COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

Sejam $R_1 \subset A \times B$ e $R_2 \subset B \times C$ duas relações. A composta de R_2 e R_1, simbolizado por $R_2 \circ R_1$, é a relação dada por

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in A \times C / \exists y \in B, (x, y) \in R_1 \quad e \quad (y, z) \in R_2\}$$

$$\boxed{(x, z) \in (R_2 \circ R_1) \Longleftrightarrow \exists y \in B, \quad (x, y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y, z) \in R_2}$$

$$\boxed{(x, z) \notin (R_2 \circ R_1) \Longleftrightarrow \forall y \in B, \quad (x, y) \notin R_1 \quad \text{ou} \quad (y, z) \notin R_2}$$

Observações:

1. Para a composta existir e ser não vazia, devemos verificar que $Dom(R_2) \cap Im(R_1) \neq \emptyset$;
2. $Dom(R_2 \circ R_1) = \{x \in A / \exists y \in B, \exists \in C, (x, y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y, z) \in R_2 \ \}$
3. $Im(R_2 \circ R_1) = \{z \in C / \exists x \in A, \exists y \in B, (x, y) \in R_1 \quad \text{e} \quad (y, z) \in R_2\}$

PROPRIEDADES: A composta de duas relação, quando ela existe, satisfaz:

(1) $(R_1 \circ R_2) \neq (R_2 \circ R_1)$
(2) $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
(3) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

RELAÇÕES SOBRE UM CONJUNTO A

Já sabemos que se R é uma relação em A, $R \subset A \times A$. Assim, $R \subset A \times A \Longleftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times A)$

Observe que se $n(A) = m$, então $n(A \times A) = m^2$ e $n(\mathcal{P}(A \times A)) = 2^{m^2}$. E daqui, concluímos que sobre um conjunto finito A podem ser definidas 2^{m^2} relações.

CLASSES DE RELAÇÕES SOBRE UM CONJUNTO A

1. **Relação Reflexiva**: Uma relação R é reflexiva se, e somente se, todo elemento de A está relacionado com ele mesmo. Isto é, para todo $x \in A$, $(x, x) \in R$.

$$\boxed{R \text{ é reflexiva} \Longleftrightarrow [\forall x \in A; x \in A \longrightarrow (x, x) \in R] \Longleftrightarrow D(A) \subset R}$$

$$\boxed{R \text{ não é reflexiva} \Longleftrightarrow [\exists x \in A; x \in A \quad e \quad (x, x) \notin R] \Longleftrightarrow D(A) \not\subset R}$$

Exemplo 23 *Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$. A relação R é uma relação reflexiva.*

De fato, note que $D(A) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subset R$. Portanto, R é reflexiva.

Exemplo 24 *A relação $R = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano é uma relação reflexiva.*

De fato, seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e seja $L \in \mathbb{P}$, sabemos que $L//L$, assim $(L, L) \in R$ para todo $L \in \mathbb{P}$. Portanto, R é reflexiva.

Exemplo 25 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x - y \leq 0\}$. R é uma relação reflexiva.*

De fato, sabemos que para qualquer número real x, vale $x - x = 0 \leq 0$. Logo, $(x, x) \in R$. Assim, R é reflexiva.

Exemplo 26 *Seja R a relação sobre $\mathbb{Q}$, definida por $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2/x \cdot y = 1\}$. É R uma relação reflexiva?*

Não, não é reflexiva, pois para $x = 0 \in \mathbb{Q}$ não é verdade que $0 \cdot 0 = 1$ e daqui $(0, 0) \notin R$.

Exemplo 27 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/|x| = |y + 1|\}$. R é reflexiva?*

Não, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos $|x| \neq |x + 1|$, de onde $(x, x) \notin R$.

2. **Relação Simétrica**: Uma relação R é simétrica se, e somente se, para qualquer $(x,y) \in R$ tem-se $(y,x) \in R$.

$$\boxed{R \text{ é simétrica} \Longleftrightarrow [\forall (x,y) \in R; (x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R]}$$

$$\boxed{R \text{ não é simétrica} \Longleftrightarrow [\exists (x,y) \in R; (x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \notin R]}$$

Exemplo 28 *Seja $A = \{1,2,3\}$ e $R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3)\}$. A relação R é simétrica.*

De fato, como pode ser visto rapidamente, para qualquer $(x,y) \in R$, tem-se também $(y,x) \in R$.

Exemplo 29 *As relações $R_1 = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ e $R_2 = \{(L_1, L_2)/L_1 \perp L_2\}$ definidas sobre o conjunto de todas as retas do plano são relações simétricas.*

De fato, seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e $L_1, L_2 \in \mathbb{P}$. Sabemos que se $L_1//L_2$, então $L_2//L_1$. E, que se $L_1 \perp L_2$, então $L_2 \perp L_1$. Portanto, as relações dadas são simétricas.

Exemplo 30 *É simétrica a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x-y) \in \mathbb{Z}\}$?*

Sim, pois se $(x,y) \in R$, é verdade que $(x-y) \in \mathbb{Z}$ e também é verdade que $(y-x) = -(x-y) \in \mathbb{Z}$. Com isto, $(y,x) \in R$.

Exemplo 31 *Seja A um conjunto finito com k elementos. E, seja $R = D(A)$. Afirmamos que R é simétrica.*

De fato, sejam $a \neq b$ elementos de A. Como $R = D(A)$, $(b,a) \notin R$ implica que $(a,b) \notin R$. Portanto, R é simétrica.

Exemplo 32 *Mostrar ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se $R \subset R^{-1}$, então R é simétrica.*

Seja $(x,y) \in R$, então pela hipótese temos $(x,y) \in R^{-1}$. Agora, pela definição da relação inversa temos que $(y,x) \in R$. Portanto, R é simétrica.

Exemplo 33 *Mostrar ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se $R^{-1} \subset R$, então R é simétrica.*

Seja $(x,y) \in R$, então $(y,x) \in R^{-1}$. Como $R^{-1} \subset R$, temos que $(y,x) \in R$. Portanto, R é simétrica.

Exemplo 34 *É simétrica a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y = x-1\}$?*

Não. Observe que $(2,1) \in R$, pois $1 = 2-1$. Mas, $(1,2) \notin R$, já que $2 \neq 1-1$.

Exemplo 35 *Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 = 1\}$ é simétrica.*

A relação não simétrica já que $(1,0) \in R$, mas $(0,1) \notin R$.

3. **Relação Transitiva**: Uma relação R é transitiva se, e somente se, a partir de $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ tem-se $(x,z) \in R$.

$$\boxed{R \text{ é transitiva} \Longleftrightarrow \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,z) \in R] \longrightarrow (x,z) \in R\} \Longleftrightarrow (R \circ R) \subset R}$$

$$\boxed{R \text{ não é transitiva} \Longleftrightarrow \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,z) \in R] \quad e \quad (x,z) \notin R\} \Longleftrightarrow (R \circ R) \not\subset R}$$

Exemplo 36 *Seja $A = \{1,2,3\}$. A relação $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ é transitiva, como pode ser verificado sem dificuldade.*

Exemplo 37 *A relação $R = \{(L_1, L_2)/L_1//L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano é transitiva.*

De fato, denotemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e sejam $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}$, tais que $(L_1, L_2), (L_2, L_3) \in R$. Sabemos que se $L_1//L_2$ e $L_2//L_3$ então $L_1//L_3$. Isto é $(L_1, L_3) \in R$.

Exemplo 38 *A relação $R = \{(L_1, L_2)/L_1 \perp L_2\}$ definida sobre o conjunto de todas as retas do plano não é transitiva.*

De fato, denotemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as retas do plano e sejam $L_1, L_2, L_3 \in \mathbb{P}$, tais que $(L_1, L_2), (L_2, L_3) \in R$. Sabemos que se $L_1 \perp L_2$ e $L_2 \perp L_3$, então $L_1//L_3$. Isto é $(L_1, L_3) \notin R$.

Exemplo 39 *Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x < y\}$ é transitiva.*

De fato, se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, temos $x < y$ e $y < z$. Pela propriedade transitiva de desigualdades, temos que $x < z$. Isto é, $(x,z) \in R$.

Exemplo 40 *Verificar se é transitiva a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y = x - 1\}$*

Sejam $(x,y),(y,z) \in R$, então $y = x-1$ e $z = y-1$, mas $z \neq x-1$, já que $z = (x-1)-1 = x-2$. Assim, $(x,z) \notin R$. Portanto, R não é transitiva.

Exemplo 41 *Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 = 1\}$ é transitiva.*

Sejam $(x,y),(y,z) \in R$, então $x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - z^2 = 1$, mas $x^2 - z^2 \neq 1$, já que $x^2 = y^2 + 1 = (z^2+1)+1 = z^2+2 \Longrightarrow x^2 - z^2 = 2$. Portanto, R não é transitiva.

Exemplo 42 *Mostra ou dar um contraexemplo para a seguinte afirmação: Se R é reflexiva e simétrica, então R é transitiva.*

Considere $A = \{1,2,3,4\}$ e $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$. Claramente, R é reflexiva, pois $D(A) \subset R$. Também, R é simétrica. No entanto, R não é transitiva, já que $(1,3),(3,4) \in R$, mas $(1,4) \notin R$.

4. **Relação Antissimétrica**: Uma relação R é antissimétrica se, e somente se, a partir de $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, concluí-se que $x = y$.

$$\boxed{R \text{ é antissimétrica} \Longleftrightarrow \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \longrightarrow x = y\} \Longleftrightarrow (R \cap R^{-1}) \subset D(A)}$$

$$\boxed{R \text{ não é antissimétrica} \Longleftrightarrow \{[(x,y) \in R \quad e \quad (y,x) \in R] \quad e \quad x \neq y\} \Longleftrightarrow (R \cap R^{-1}) \not\subset D(A)}$$

Exemplo 43 *A relação $R = \{(A, B)/A \subset B\}$, definida sobre o conjunto $\mathbb{F}$ de todos os conjuntos é antissimétrica.*

De fato, se $(A, B) \in R$ e $(B, A) \in R$ temos $A \subset B$ e $B \subset A$. Por definição de igualdade de conjuntos concluímos que $A = B$.

Exemplo 44 *Verifique que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \leq y\}$ é antissimétrica.*

Sejam $(x, y), (y, x) \in R$. Pela definição de R temos $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. Portanto, R é antissimétrica.

Exemplo 45 *Seja $A = \{1, 2, 3\}$. A relação $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ é antissimétrica?*

Observe que mostrar que $[(x, y) \in R \quad e \quad (y, x) \in R] \longrightarrow x = y$ equivale a mostrar que $x \neq y \longrightarrow [(x, y) \notin R \quad ou \quad (y, x) \notin R]$.

Claramente, para $1 \neq 2$ temos $(1, 2) \in R$, mas $(2, 1) \notin R$. Para $1 \neq 3$ temos $(1, 3) \in R$, mas $(3, 1) \notin R$. Para $2 \neq 3$ temos $(2, 3) \notin R$ e $(3, 2) \notin R$. Portanto, R é antissimétrica.

Exemplo 46 *Seja $R = D(A)$, para $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. R é antissimétrica?*

Note que A é um conjunto finito com k elementos. Isto implica que $a_i \neq a_j$, para todo $i \neq j$. Desse modo, para $a_i \neq a_j$, temos que nem $(a_i, a_j) \in R$ e nem $(a_j, a_i) \in R$. Portanto, R é antissimétrica.

Exemplo 47 *A relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2/a \quad divide \quad b\}$ é antissimétrica?*

Sim. Sejam $(a, b), (b, a) \in R$, então $b = ma$ e $a = nb$, para alguns $m, n \in \mathbb{N}$. Logo, $b = ma = m(nb) = (mn)b$. Para isto último ser verdade, devemos ter $mn = 1$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Assim, $m = n = 1$. Portanto, $a = b$.

Exemplo 48 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. Seja R a relação definida em A, tal que $(a, b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia. R é uma relação antissimétrica?*

Não, pois se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, temos que a e b nasceram no mesmo dia, mas não necessariamente $a = b$. O que torna falsa a implicação $[(a, b) \in R \quad e \quad (b, a) \in R] \longrightarrow a = b$.

Exemplo 49 *Seja R a relação definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in R$ se, e somente se $y = 2x$. É R antissimétrica?*

Não, já que se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, temos $y = 2x$ e $x = 2y$, e isto ocorre somente se $x = y = 0$. Assim, se $x \neq y$, não temos simultaneamente $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$.

5. **Relação de Equivalência**: Uma relação R é de equivalência se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva.

   Assim, uma relação R deixa de ser de equivalência se, e somente se, R não é reflexiva ou R não é simétrica ou R não é transitiva.

Exemplo 50 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. A relação R definida em A por: $(a, b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia, é de equivalência.*

De fato, para qualquer $a \in A$, tem-se que a e a nascem no mesmo dia, logo $(a, a) \in R, \forall a \in A$. R é reflexiva.

Agora se a nasce no mesmo que b, b nasce no mesmo dia que a, assim $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$. R é simétrica.

Por último, se a nasce no mesmo dia que b e b nasce no mesmo dia que c, sem dúvida a nasce no mesmo dia que c. Assim, $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$. R é transitiva.

Portanto, R é uma relação de equivalência.

Exemplo 51 *Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / xy \quad \text{é par}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(a) R é reflexiva (b) R é simétrica (c) R é transitiva (d) R é de equivalência

Vejamos, para R ser reflexiva, para cada $x \in \mathbb{N}$ deve-se ter $(x, x) \in R$. Mas, para $x = 3$, $(3, 3) \notin R$, já que $3 \cdot 3 = 9$ não é par. Logo, R não reflexiva.

Se $x \cdot y$ é par, então $y \cdot x$ também é par. Assim, $(x, y) \in R \longrightarrow (y, x) \in R$. Segue que R é simétrica.

Agora, $(3, 2) \in R$ e $(2, 5) \in R$, mas $(3, 5) \notin R$ já que $3 \cdot 5 = 15$ não é par. Logo, R não é transitiva.

Portanto, somente a afirmação (b) é verdadeira.

Exemplo 52 *Analisar se a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x - y = 3k, \quad \text{para algum} k \in \mathbb{Z}\}$ é de equivalência.*

Como $x - x = 3(0)$, segue que $(x, x) \in R, \forall x \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.

Agora, se $(x, y) \in R$, temos $x - y = 3k$ e daqui $y - x = -(x - y) = 3(-k)$. Assim, R é simétrica.

Finalmente, se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, temos $x - y = 3k_1$ e $y - z = 3k_2$, de onde $x - z = 3(k_1 + k_2)$. Assim, e $(x, z) \in R$ e R é transitiva. Portanto, R é uma relação de equivalência.

Exemplo 53 *Seja R a relação definida em A. Estabelecer a validade das afirmações abaixo:*

(a) Se R é reflexiva, então $Dom(R) = Dom(R^{-1})$;

(b) Se R é simétrica e transitiva, então R é reflexiva;

(c) *Se $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a,a),(b,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$, então R é uma relação de equivalência.*

(a) *Note que se R reflexiva temos $A = Dom(R) = Im(R)$ e como $Dom(R^{-1}) = Im(R)$, concluímos que $Dom(R) = Dom(R^{-1})$. Portanto, esta afirmação é verdadeira.*

(b) *Esta afirmação é falsa. Veja o contraexemplo: para $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, claramente R é simétrica e transitiva, porém R não é reflexiva, pois $(3,3) \notin R$.*

(c) *Como $D(A) \subset R$, R é reflexiva. Por outro lado, R não é simétrica, já que $(b,c) \in R$, mas $(c,b) \notin R$. Assim, R não é relação de equivalência. Portanto, a afirmação é falsa.*

Exemplo 54 *Seja R uma relação definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por*

$$((a,b),(c,d)) \in R \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

De fato,

R é reflexiva: Seja $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qualquer, então $((a,b),(a,b)) \in R$, pois $a + b = a + b$.

R é simétrica: Seja $((a,b),(c,d)) \in R$, então $a + d = b + c$, logo $c + b = d + a$. Isto é, $((c,d),(a,b)) \in R$.

R é transitiva: Sejam $((a,b),(c,d)) \in R$ e $((c,d),(e,f)) \in R$, então $a+d = b+c$ e $c+f = d+e$. Assim, $a + d + c + f = b + c + d + e$ e daqui $a + f = b + e$. Logo, $((a,b),(e,f)) \in R$.

Exemplo 55 *Seja A o conjunto formado pelos alunos da disciplina $MAT131$. Defina a relação R em A por aRb se, e somente se, a veste camisa ou blusa da mesma cor que b. É R uma relação de equivalência?*

R é reflexiva: Seja $a \in A$ qualquer, claramente a veste camisa ou blusa da mesma cor que a.

R é simétrica: Se aRb, a veste a mesma cor de camisa ou blusa que b, logo b veste a mesma cor de camisa ou blusa que a. Assim, bRa.

R é transitiva: Se aRb e bRc, a veste a mesma cor de blusa ou camisa que b e b veste a mesma cor de blusa ou camisa que c. Logo, a veste a mesma cor de blusa ou camisa que c.

Portanto, R é relação de equivalência.

Exemplo 56 *Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^e / |x - y| < 1\}$. É R uma relação de equivalência?*

Não, pois embora $|x - x| = 0 < 1$ implique $(x,x) \in R$, garantindo a reflexividade e $|x - y| = |y - x| < 1$ nos garanta que $(x,y) \in R$ implique que $(y,x) \in R$. Com isto, que R seja simétrica. Não é verdade, R seja transitiva, pois para $x = \sqrt{2}, y = 2, z = \sqrt{7}$, temos $|x - y| < 1$ e $|y - z| < 1$, mas $|x - z| > 1$

6. **Relação de Ordem ou Ordem Parcial**: Uma relação R é de ordem se, e somente se, R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

   Assim, uma relação R deixa de ser de ordem se, e somente se, R não é reflexiva ou R não é antissimétrica ou R não é transitiva.

Exemplo 57 *A relação $R = \{(A, B)/A \subset B\}$, definida sobre o conjunto $\mathbb{F}$ de todos os conjuntos é uma relação de ordem.*

Exemplo 58 *Verifique que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \leq y\}$ é uma relação de ordem.*

Exemplo 59 *A relação $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2/a \quad divide \quad b\}$ é uma relação de ordem?*

Exemplo 60 *Seja A o conjunto de todas as pessoas que moram em Viçosa. Seja R a relação definida em A, tal que $(a, b) \in R$ se, e somente se a e b nasceram no mesmo dia. R é uma relação de ordem?*

Exemplo 61 *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, \}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 4)\}$. É R uma relação de ordem?*

Exemplo 62

EXERCÍCIOS

1. Se $A = \{x \in \mathbb{N} : x = \dfrac{1}{3}(2k-1), k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + 1 \leq 12\}$. Determinar $(A \cap B) \times (B - A)$.

2. Se $n(A) = 3$, $n(B) = 8$, $n(C) = 9$ e $n(B \cap C) = 2$. Determinar $n[P(A \times B) \cap P(A \times C)]$

3. Sejam $A = \{2, 3, 5\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Z}/0 \leq x \leq 3\}$, $\quad C = \{x \in \mathbb{Z}/-1 \leq x \leq 2\}$. Estabelecer a validade ou falsidade das seguintes afirmações:
   (a) $(A \times B) \cup (B \times A)$ possui 24 elementos;
   (b) $(A \cap B)^2$ possui 4 elementos;
   (c) $A^2 \cap B^2 \cap C^2$ é um conjunto unitário.

4. Considerando conjuntos A, B, C e D quaisquer. Pede-se:
   (a) Usando intervalos, fazer uma representação geométrica de $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.
   (b) Mostrar que $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

5. Sejam A, B, C e D conjuntos quaisquer. Decidir quais das afirmações a seguir são verdadeiras.
   (a) Se $(A \times B) \subset (B \times D)$, então $[B \cap (C \cup A)] \times [A \cup (B \cap D)] = (B \cap C) \times (A \cup B)$.
   (b) Se $A = B \cap C$, então $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$.
   (c) Se $A \subset B \subset C$, então $[(B - D) \times C] \cap (A \times C) = A \times C$.

6. Mostrar ou dar um contraexemplo para as seguintes afirmações:
   (a) Se $A \subset B$ e $(B \times C) \subset (A \times C)$ então $B = A$.
   (b) Para quaisquer conjuntos A e B não vazios $n[(A \cup B) \times C] = n(A \times C) + n(B \times C)$.
   (c) $(A \triangle B) \times C \subset (A \cup B) \times C$, para para quaisquer conjuntos A, B e C.
   (d) Existem conjuntos $A \neq B \neq F \neq G$ tais que $(A \cup B) \times (F \cup G) = (A \times F) \cup (B \times G)$.

7. Mostrar que $P[A \times (B \cap C)] = P(A \times B) \cap P(A \times C)$

8. Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $A \cap C^c = \emptyset$ e $B^c \cap D = \emptyset$. Mostrar que $[A \times (B - D)] \cup (A \times D) \cup [(C - A) \times D] \subset C \times B$

9. Considerando U o conjunto universo. Mostrar ou dar um contraexemplo para
$(A^c \times B^c) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B) = (U \times U - U \times B) \cup (U \times B - A \times B)$

RELAÇÕES

1. Para $A = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ : x \leq 9\}$, definem-se as relações:
$R = \{(x, y) \in A^2 : y = x^2\}$, $S = \{(x, y) \in A^2 : y = 2x\}$ e $T = \{(x, y) \in A^2 : x < 4 \,\text{e}\, y > 7\}$.
Encontrar $n(R) + n(S) + n(T)$.

2. Sobre $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, definem-se: $R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (5, 4), (1, 2), (4, 5), (2, 3)\}$, $R_2 = \{(x, y) \in A^2 : x^2 + y^2 = 25\}$ e $R_3 = \{(x, y) \in A^2 : xy > 0\}$. Determinar quais dessas relações são simétricas.

3. Sobre $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definem-se as relações $R_1 = \{(x, y) \in Z^2 : y - x = 0\}$, $R_2 = \{(x, y) \in Z^2 : y^2 = 4x\}$, $R_3 = \{(x, y) \in Z^2 : |y - x| = 3\}$, $R_4 = \{(x, y) \in Z^2 : y^2 - x^2 = 0\}$, $R_5 = \{(x, y) \in Z^2 : |x| + y = 1\}$, $R_6 = \{(x, y) \in Z^2 : |x| + |y| = 1\}$. Determinar quais dessas relações são reflexivas, simétricas, transitivas e antissimétricas.

4. Sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ definem-se as relações: $S = \{(a, d), (d, e), (e, a), (e, e)\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (d, e), (e, d), (a, c), (d, d), (e, e), (c, c)\}$ e $T = \{(b, a), (a, b)\}$. Determinar quais dessas relações são transitivas. Adicionalmente, para as que não são transitivas, completar com os elementos necessários para torná-la transitiva.

5. Se $R = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x - y \geq 3,\ y - x \geq 4\}$. Determinar quais das afirmações a seguir são verdadeiras:
   (a) R não é reflexiva.
   (b) R é simétrica.
   (c) R é transitiva.
   (d) R é uma relação de equivalência.
   (e)R é antissimétrica
   (f) R não é uma relação de ordem.

6. Sobre $\mathbb{Z}$, definem-se: $R_1 = \{(x, y) : x^2 + y = y^2 + x\}$, $R_2 = \{(x, y) : x \leq |y|\}$ e $R_3 = \{(x, y) : xy = n^2$, para algum $n \in \mathbb{Z}\}$. Estabelecer a validade das afirmações a seguir:
   (a) As três relações são reflexivas.
   (b) Somente R_1 e R_2 são simétricas.
   (c) Somente R_1 e R_3 são transitivas.
   (d) Pelo menos uma das relações é de ordem.

7. Sejam R_1 e R_2 relações definidas no conjunto A. Mostrar ou dar um contraexemplo:
   (a) Se R_1 e R_2 são reflexivas, então $(R_1 \cup R_2)$ e $(R_1 \cap R_2)$ são também reflexivas.
   (b) Se $(x, y) \in (R_1 \cup R_1^{-1})$, então $(y, x) \in (R_1^{-1} \cap R_1)$.
   (c) Se R_1 e R_2 são simétricas, então $R_1 \cap R_2$ é simétrica.
   (d) Se R_1 é reflexiva e R_2 é simétrica, então $R_1 \cup R_2$ é antissimétrica.
   (e) Se R_1 e R_2 são transitivas, então $R_1 \cup R_2$ é transitiva.
   (f) Se R_1 e R_2 são transitivas, então $R_1 - R_2$ é transitiva.
   (g) Se R_1 e R_2 são antissimétricas, então $R_1 \cap R_2$ é reflexiva.

(h) Se R_1 é transitiva e antissimétrica, então R_1 é reflexiva.

(i) Se $R_1 \cap R_2$ é reflexiva, então R_1 e R_2 são reflexivas.

(j) Se $R_1 \cup R_2$ é simétrica, então R_1 e R_2 são simétricas.

(k) Se $(R_1 \cup R_2)^{-1}$ é transitiva, então R_1 ou R_2 é transitiva.

(l) Se $(R_1 \cup R_2)^{-1}$ é transitiva, então R_1 e R_2 são transitivas.

(m) Se $(R_1 \cap R_2)^{-1}$ é simétrica, então R_1 e R_2 são simétricas.

8. Seja $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (xy)^2 \text{ é par}\}$. Verificar se T é uma relação de equivalência.

9. Sejam $A = \{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{N},\ 5 < x < 25\}$ e R uma relação definida em A. Analisar a validade das seguintes afirmações:

(a) Se $n(R) < 10$, então R é reflexiva.

(b) Se $n(R) \geq 10$, então R é reflexiva.

(c) Se R é transitiva, então $n(R) \geq 3$.

10. Sejam $A = \{a, b, c\}$, $W = \{R \subset A^2 : R \text{ é simétrica}\}$ e $V = \{R \subset A^2 : R \text{ é reflexiva}\}$. Das seguintes afirmações, quais são verdadeiras?

(a) $\{(a, b), (b, a)\} \subset W$.

(b) $\{(a, a)\} \in (W \cap V)$.

(c) $\{(a, c), (c, a)\} \in W$.

11. Sejam R_1, R_2 e R_3 relações definidas em $\mathbb{Z}$ tais que "Se $(a, b) \in R_1$ e $(c, d) \in R_2$ então $(a - c, b - d) \in R_3$". Mostrar ou dar um contraexemplo de que se R_1 e R_2 são relações de equivalência, então R_3 é uma relação de equivalência.

12. Encontrar o domínio, imagem e esboçar o gráfico das relações dadas a seguir:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : -2 \leq x < 5,\ -3 < y < 6\}$

(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y > \sqrt{9 - x^2},\ -6 \leq x \leq 6\}$

(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0,\ y - x - 2 < 0\}$

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + 2y) > 0\}$

(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x - y)(x + 5y) < 0\}$

(f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x\}$

(g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 6xy + 5y^2 \geq 0\}$

(h) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ |y| \leq x^2\}$

(i) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |x| \leq |y|\}$

(j) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y^2,\ |x| \geq |y|\}$

(k) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| = |y - 1|\}$

(l) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 10x \geq 24,\ x + y - 6 < 0\}$

(m) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - 5y + 11 = 0,\ -4 < x \leq 1\}$

(n) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 2\}$

(o) De R^{-1} sabendo que $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y - 1,\, y \leq x + 3,\, 1 \leq x \leq 3\}$

(p) De $R_1 \cap R_2$ sabendo que $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 8\}$.Adicionalmente encontrar a área de $R_1 \cap R_2$.

(q) De $R_1^c \cap R_2$ sabendo que $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

13. Verificar se a relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x \leq y\}$ é uma relação de ordem parcial.

14. Sobre a família de conjuntos $\mathfrak{F}$ define-se $R = \{(A,B) \in \mathfrak{F}^2 : A \subset B\}$. R é uma relação de ordem parcial?

15. Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é dito:

    (i) limitado inferiormente se existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 \leq x$, para todo $x \in A$. E, x_0 é dito *cota inferior*.
    (ii) limitado superiormente se existe um $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq x_1$, para todo $x \in A$. E, x_1 é dito *cota superior*
    (iii) limitado se é limitado superior e inferiormente.

    (a) Verificar se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

    (b) Verificar se o conjunto $A = \{x : x = \dfrac{n+2}{n+3},\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

    (c) Mostrar que o conjunto $A = \{x : x = \dfrac{3+2n}{3-2n},\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

    (d) Mostrar que o conjunto $A = \{x : x^2 - 4x - 12 \leq 0\}$ é limitado.

    (e) Verificar o conjunto $A = \{x^2 - 4x - 12 : -5 < x \leq 3\}$ é limitado.

16. A menor das cotas inferiores de um conjunto limitado superiormente é o *Supremo* de A, denotado por $\sup(A)$. E, a maior de todas as cotas inferiores é o *Ínfimo* de A, denotado por $\inf(A)$.

    Determinar, caso seja possível, o ínfimo e o supremo dos seguintes conjuntos:
    $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x : x = \dfrac{n+2}{n+3},\, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x : x = \dfrac{3+2n}{3-2n},\, n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x : x^2 - 4x - 12 \leq 0\}$, $E = \{x^2 - 4x - 12 : -5 < x \leq 3\}$

17. Dizemos que $x_0 \in A$ é o máximo de A se $x \leq x_0$, para todo $x \in A$. Denotamos por $\max(A) = x_0$. Dizemos que x_1 é o mínimo ou elemento mínimo de A se $x_1 \leq x$ para todo $x \in A$. Denotamos por $\min(A) = x_1$.

    (a) Determinar, caso seja possível, o $\max(A)$ e o $\min(A)$, se $A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \leq 2\}$.

    (b) Encontrar, caso seja possível, o $\max(A)$ e o $\min(A)$, se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 12 \leq 0\}$.

    (c) É verdade que sempre $\sup(A) = \max(A)$? E no caso do ínfimo e o mínimo?

(d) Sejam $A \subset B$ tais que $\sup(A) = a$ e $\sup(B) = b$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguintes desigualdades $\sup(A) \leq \sup(B)$; $\inf(A) \geq \inf(B)$.

(e) Sejam A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\sup(A) = a$, $\sup(B) = b$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguinte igualdade $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

(f) Sejam A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\inf(A) = c$, $\inf(B) = d$. Dar um argumento válido ou um contraexemplo para a seguinte igualdade $\inf(A \cap B) \geq \sup\{\inf(A), \inf(B)\}$.

FUNÇÕES

1. Num triângulo ABC de base $AB = 10$ e altura $H = 6$ se inscreve um retângulo $PQRS$, tal que o lado RS esteja contido no lado AB. Se y representa a área desse retângulo, expressar y em função de sua base $RS = x$. Adicionalmente determinar o domínio da função resultante.

2. Uma esfera de raio R tem inscrito um cilindro cujo eixo central passa pelo diâmetro da esfera. Expressar o volume V do cilindro em função de sua altura. Adicionalmente, determinar o domínio da função resultante.

3. Encontrar o domínio e a imagem da função f, onde $f(x)$ representa a área de um triângulo de base x e cujo perímetro é igual a $2b$ ($b > 0$).

4. No primeiro quadrante do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ é desenhado um trapézio isósceles com dois de seus vértices em $(0,0)$ e $(6,0)$. Os ângulos iguais a $\dfrac{\pi}{4}$ e lado menor igual a 3 unidades. Se os lados não paralelos e lado paralelo menor representa o gráfico de uma função f. Determinar a regra de correspondência de f.

5. Dada a função f definida por $f(x) = x^2$. Considere os pontos $A = (-2, f(-2))$, $B = (3, f(3))$ e $C = (0, p)$. Determinar o valor de p.

6. O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas $AB = 10$ e $AC = 10$. O ponto P sobre o lado AB está a uma distância x de A. O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC. Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC. A união dos paralelogramos $PBRQ$ e $PSCQ$ determina uma região de área $f(x)$ no interior do triângulo ABC. Determinar $f(2)$, $f(8)$ e $f(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.

7. Um quadrado $ABCD$ tem $8cm$ de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP. Seja x a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Esboçar o gráfico da função f que representa a área do quadrilátero $BPDC$ em função de x.

8. Verificar se as funções, cujas regras de correspondência são dadas a seguir, são bijetivas e, em caso afirmativo determinar a inversa:

(a) $f(x) = e^{x+1}$

(b) $g(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad x \in [0,2]$

(c) $f(x) = 1 - x^3$

(d) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

(e) $f(x) = \dfrac{9-x^2}{4-x^2}$, $x \geq 0$

(f) $g(x) = 4\sqrt{x} - x$, $x \in [0,1]$

(g) $f(x) = \begin{cases} 3-2x, \ x \in [-2,1[\\ 4x - x^2 - 3, \ x \in [2,4[\end{cases}$

(h) $g(x) = \begin{cases} (x-3)^3, \ x \in [3,9] \\ 5x - 9, \ x > 9 \end{cases}$

(i) $f(x) = \dfrac{4x}{1+|x|}$

(j) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x - x^2 + 2} + 1, \ x \in [-1, 1/2] \\ 2 - \dfrac{7}{x+1}, \ x \in]2,4[\end{cases}$

9. Verificar se a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ é sobrejetiva.

10. Seja $f : A \longrightarrow [-9,-1[$, dada por $f(x) = \dfrac{10+3x}{10-2x}$. Determinar A para que: (i) f seja injetiva e (ii) f seja sobrejetiva.

11. Seja $f :]1,2] \longrightarrow B$, dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. Determinar B para que f seja sobrejetiva.

12. Quantas funções injetivas de $A = \{0,1,2\}$ em $B = \{a,b,c\}$ podem ser definidas?

13. Se $B = \{a,b,c\}$, quantas funções bijetivas $f : B \longrightarrow B$ podem ser definidas?

14. Encontrar a e b para que a função $f : [a,b] \longrightarrow [-1,5]$, dada por $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ seja bijetiva.

15. Encontrar a e b para que a função $f : [2,5] \longrightarrow [2,5]$, dada por $f(x) = \dfrac{ax+b+1}{ax+b}$ seja bijetiva.

16. Encontrar a e b para que a função $f : [b,-2] \longrightarrow [a, \dfrac{-1}{24}]$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{6x+6}$ seja bijetiva.

17. Encontrar uma função linear tal que $f = f^{-1}$.

18. Se f é dada por $f(x) = ax + b$. Determinar os valores de a e b de tal modo que $f^{-1}(2) = 4$ e $f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 2$.

19. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = ax + 1$, com domínios apropriados para que ambas sejam bijetivas. Se $(f^{-1} \circ g^{-1})(3/2) = 1/2$, encontrar $(g \circ f)(2)$.

20. Determinar $(g \circ f)$, caso exista, para $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.

21. Se $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x - 1$. Determinar $f(x)$.

22. Se $f(x) = x^2$, determinar duas funções g tais que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

23. Encontrar funções f e g tais que $h = f \circ g$, onde $h(x) = \sqrt{3x-1}$.

24. Encontrar funções f e g tais que $h = f \circ g$, onde $h(x) = \dfrac{1}{|x|+3}$

25. Determinar $f \circ g$ e $g \circ f$, caso seja possível, para f de (8g) e g de (8h).

26. Determinar $f \circ g$ e $g \circ f$, caso seja possível, para f de (8i) e g de (8j).

27. Esboçar o gráfico da função dada em (8i).

28. Esboçar o gráfico da função dada em (8d).