EST 105 - Exercícios de Somatório e Produtório [1]

1 (II/2001). Sabendo-se que $\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(1+n)}{2}$, calcule $\sum_{x=1}^{200} \frac{(x-100)}{2}$.

2 (II/2001). A variância (S^2) de uma amostra com n observações de uma variável aleatória X pode ser definida por,

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 \qquad (1)$$

Pede-se:

a. Utilize propriedades de somatório na equação (1) para obter a fórmula dada por,

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}{n} \right]$$

b. Seja $Y_i = KX_i$, em que K é uma constante qualquer. Utilize propriedades de somatório na equação (1) para mostrar que $S_Y^2 = K^2 S_X^2$.

3 (I/2002). Considere os seguintes valores X_i e Y_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	2	5	7	9	8	6	4	5	2	10
Y_i	1	5	7	2	4	4	6	6	8	8

Calcule:

[*a.*] $\sum_{i=1}^{10} \frac{\left(X_i - \overline{X} \right)^2}{9}$ [*b.*] $\sum_{i=1}^{10} \left[\left(X_i - \overline{X} \right) \left(Y_i - \overline{Y} \right) \right]$ [*c.*] $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2,3}}^{6} \left(\frac{X_i - Y_i}{2} \right)$

4. Verifique por indução matemática que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5 (II/2002). Dados $\sum_{i=1}^{5} X_i = 2,6$ $\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = 1,84$ e $\sum_{j=3}^{8} Y_j = 11$ $\sum_{j=3}^{8} Y_j^2 = 31$

Calcule $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=3}^{8} (2X_i - Y_j)^2$.

[1] Exercícios das avaliações dos semestres indicados. Contém 20 exercícios em páginas numeradas de 1 a 6.

6 (I/2003). Utilize as **propriedades** para calcular os somatórios e produtórios a seguir:

a. Dado que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e também $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ calcule,

$$\sum_{\substack{x=1 \\ x\neq 2,4}}^{20} x(x+1)$$

b. $\sum_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{2} i^{2j-1}$

c. Se $\sum_{i=1}^{3} X_i = 6$, $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 20$, $\sum_{j=1}^{2} Y_j = 4$ e $\sum_{j=1}^{2} Y_j^2 = 10$ calcule, $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left[(X_i-2)(Y_j-1)^2\right]$

d. $\prod_{k=1}^{5}\frac{(k+1)}{2}$

7 (I/2003). Considere os elementos a_{ij} da matriz A, com $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$ para indicar o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 9 & -2 & 3 \\ 3 & 13 & 10 & 2 & 6 \\ 11 & -9 & 0 & -3 & 2 \\ -6 & -8 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

calcule: **a.** $\sum_{i=1}^{3} a_{i2}$ **b.** $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{4}\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq 4}}^{5} a_{ij}$ **c.** $\prod_{i=1}^{4} 2^{a_{i4}}$

8 (II/2003). Utilize propriedades de somatório e produtório.

a. Calcule $\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{10} 3\,(X_i - Y_j)$ dados $\sum_{i=1}^{20} X_i = 20$ e $\sum_{j=1}^{10} Y_j = 5$.

b. Calcule $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} (Y_{ij}-8)^2$, considerando-se a seguinte notação: $Y_{i.} = \sum_{j=1}^{4} Y_{ij}$ e $Y_{i.}^2 = \sum_{j=1}^{4} Y_{ij}^2$ com,

$$Y_{1.} = 30, \quad Y_{2.} = 32, \quad Y_{3.} = 38, \quad \text{e} \quad Y_{1.}^2 = 225, \quad Y_{2.}^2 = 256, \quad Y_{3.}^2 = 360$$

c. Calcule $\prod_{\substack{x=1\\x\neq 3}}^{5} \frac{(x-3)^2}{2}$

9 (II/2003). Considere os seguintes valores,

$$m = 50 \quad n = 30 \quad k = 3 \quad \sum_{j=1}^{m} Y_j = 80 \quad \sum_{i=1}^{n} X_i = 100 \quad \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 600$$

Aplique propriedades de somatório e utilize os valores informados para calcular:

$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} Y_j \left(X_i - k\right)^2$

10 (I/2004) Utilize as propriedades de somatório e produtório e os valores a seguir.

$$\sum_{i=1}^{3} X_{1i} = 6 \qquad \sum_{i=1}^{3} X_{2i} = 8 \qquad \sum_{j=1}^{5} Y_{1j} = 10 \qquad \sum_{j=1}^{5} Y_{2j} = 12.$$

Calcule,

a. $\sum_{k=1}^{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(X_{ki}-3\right)\left(Y_{kj}-2\right)\right]$.

b. $\sum_{i=1}^{2}\prod_{k=1}^{3}\left(2^k-1\right) i$

c. $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=4}^{6}\left(2i-3j\right)^2$

11 (II/2004). Considere as seguintes somas: $\sum_{j=1}^{10} Y_j = 8$ e $\sum_{\substack{i=3\\i\neq 5,9,11}}^{20} X_i = 20$.

Calcule : $\sum_{\substack{i=3\\i\neq 5,9,11}}^{20}\ \sum_{j=1}^{10}\left(X_i + Y_j - 2\right)$.

12 (II/2004). Dados os seguintes valores e as respectivas somas,

$$X_1 = 2 \quad X_2 = 4 \quad X_3 = 6 \quad X_4 = 8 \quad X_5 = 10 \longrightarrow \sum X = 30 \quad \sum X^2 = 220$$

$$\begin{array}{ccccc} Y_1 = 1 & Y_2 = 3 & Y_3 = 5 & Y_4 = 7 & Y_5 = 9 \\ Y_6 = 11 & Y_7 = 13 & Y_8 = 15 & Y_9 = 17 & Y_{10} = 19 \end{array} \longrightarrow \sum Y = 100 \quad \sum Y^2 = 1330$$

$$Z_1 = 12 \quad Z_2 = 20 \quad Z_3 = 30 \quad Z_4 = 40 \longrightarrow \sum Z = 102 \quad \sum Z^2 = 3044$$

Calcule: $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{4}\left[(X_i - Y_j)^2 - Z_k\right]$.

13 (II/2004). Calcule: $\displaystyle\prod_{k=1}^{3}(3k-1)\,k^3$.

14 (I/2005). Utilize as propriedades de somatório e produtório .

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{50}\left[(X_i - 2)(Y_j - 3) + Z_{ij}\right]$; $\displaystyle\sum_{i=1}^{20} X_i = 80$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{50} Y_j = 30$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\sum_{j=1}^{50} Z_{ij} = 5520$.

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{60}\sum_{k=5}^{12}(Z_k - 5)^2$; $\displaystyle\sum_{k=5}^{12} Z_k^2 = 412$ e $\displaystyle\sum_{k=5}^{12} Z_k = 60$.

c. $\displaystyle\prod_{k=1}^{5}\left(\frac{2k+2}{2}\right)$.

15 (II/2005). Utilize as propriedades de somatório e produtório , dado:

$n = 50$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = 20$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 285$ e $e \approx 2,7183$ (base do logarítmo neperiano)

a. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\{e^{\left(2X_i + 5 - X_i^2\right)}\}$.

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - 2)^2\right]$.

16 (I/2006). Utilize as propriedades de somatório e produtório.

a. $\prod_{k=1}^{5}\left(\frac{2^{k-1}}{2}\right)$.

b. $\sum_{j=1}^{5}\sum_{\substack{k=2\\k\neq 3}}^{8}\left[(k-3)(j+1)\right]$.

c. $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{10}\left[(2X_i-1)^2-15\right]$, dado $\sum_{i=1}^{10}X_i=15$ e $\sum_{i=1}^{10}X_i^2=50$.

17. Seja $SQD(a)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$, $0<a<\infty$. Mostre por propriedades de somatório que,

$$min_a \;\; SQD(a)=SQD(\overline{X})$$

18 (II/2006). Calcule:

a. $\prod_{x=2}^{6}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right)$.

b. $\sum_{k=9}^{11}\sum_{\substack{x=1\\x\neq 4,5}}^{6}\left[(x-1)(x+1)-k\right]$.

19 (I/2007). Dados os seguintes somatórios,

$$\sum_{i=1}^{50}X_i=100 \qquad \sum_{i=1}^{50}X_i^2=125 \qquad \sum_{j=5}^{12}Y_j=18 \qquad \sum_{\substack{k=3\\k\neq 6,10,12}}^{25} Z_k=22$$

calcule:

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=5}^{12}\sum_{\substack{k=3\\k\neq 6,10,12}}^{25}\left[(X_i-2)^2-Y_j\;Z_k\right].$$

20 (II/2007). Calcule os itens abaixo sabendo-se que,

$$\sum_{i=1}^{20}X_i=11 \quad , \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a. $\sum_{k=1}^{4}\prod_{i=1}^{20}\left(k^{2X_i-1}\right)$.

b. $\prod_{k=1}^{2}\sum_{x=1}^{4}\left(k^{2x-2}\right)$.

c. $\sum_{x=1}^{60}\{(x-1)^2 - 1161\}$.

RESPOSTAS

1. 50

2. **a.** $\sum\left(X-\overline{X}\right)^2 = \sum X^2 - 2\overline{X}\sum X + n\overline{X}^2 = \sum X^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2 = \ldots$.

b. $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(Y-\overline{Y}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(KX - K\overline{X}\right)^2 = \ldots$.

3. **a.** $\approx 7,51$ **b.** $4,2$ **c.** $\approx 3,5$

4. Verifique que para $n = 2$ é verdadeiro e assuma que para n é verdadeiro e então prove que para $n+1$ também é!

5. $24\sum X^2 - 4\sum X\sum Y + 5\sum Y^2 = 84,76$.

6. **a.** 3054 **b.** 98

c. $\sum X\sum Y^2 - 2\sum X\sum Y + 2\sum X - 6\sum Y^2 + 12\sum Y - 12 = 0$ **d.** $6!/32 = 22,5$

7. **a.** 21 **b.** 20 **c.** 2

8. **a.** 300 **b.** 9 **c.** 1

9. 21600

10. **a.** -2 **b.** 189 **c.** 1425

11. $10\sum X + 15\sum Y - 10.15.2 = 20$.

12. $10.4\sum X^2 - 2.4\sum X\sum Y + 5.4\sum Y^2 - 5.10\sum Z = 6300$.

13. $2.40.216 = 17280$.

14. **a.** $\sum X\sum Y - 2.20\sum Y - 3.50\sum X + 6.20.50 + \sum\sum Z = 720$ **b.** $60\{\sum Z^2 - 10\sum Z + 8.25\} = 720$ **c.** $6! = 720$.

15. **a.** $e^5 \approx 148,41$ **b.** 1215

16. **a.** 32 **b.** 280 **c.** 0

17. basta mostrar que $\sum(X-a)^2 = \sum(X-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-a)^2$.

18. **a.** $1/21$ **b.** 18.

19. =20000-64000+32000-19800= - 31800

20. **a.** 30 **b.** $4 \times 85 = 340$ **c.** 550