Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

# $3^a$ Prova de Geometria Analítica e Álgebra Linear - 2021/I

*Profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos*

Matrícula: 102026

1. (18 pontos) Utilize o seguinte produto interno não usual do $\mathbb{R}^2$ nesta questão:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2$$

Dados $u = (2, 0)$ e $v = (2, 1)$:

(a) calcule o ângulo $\theta$ entre os vetores $u$ e $v$.

(b) calcule $\text{proj}_u v$, isto é, a projeção do vetor $v$ sobre o vetor $u$.

(c) faça $w_1 = u$. Aplique o algoritmo de Gram-Schmidt para obter uma base **ortogonal** $C = \{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, a partir da base $B = \{u, v\}$.

2. (24 pontos) Seja $T$ um operador do $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) (4 pontos) Mostre que as raízes do polinômio característico de $T$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.

(b) (10 pontos) Determine o autoespaço de $T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.
Determine a dimensão e uma base para este subespaço.

(c) (10 pontos) $T$ é diagonalizável? Justifique sua resposta.
Em caso afirmativo, determine uma base do $\mathbb{R}^3$ de autovetores de $T$.

3. (20 pontos) Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno usual. Seja a cônica cuja equação na base canônica é:

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0 \qquad (*)$$

(a) (4 pontos) Escreva a equação $(*)$ na forma matricial: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + b = 0$, em que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

(b) (6 pontos) Assuma (sem precisar provar) que $v_1 = (2, 1)$ é um autovetor de $A$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$ e $v_2 = (-1, 2)$ é um autovetor de $A$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 9$. Use estes dados para determinar uma matriz ortogonal $P$ que diagonaliza ortogonalmente a matriz $A$.

(c) (10 pontos) Reescreva a equação $(*)$ na forma reduzida (sem termos mistos) e classifique a cônica.

4. (20 pontos) Sejam a reta $r$, interseção dos planos $\pi: -y+z=0$ e $\gamma: x+2y=1$, e o ponto $A=(1,0,1)$.

   (a) Determine a equação vetorial da reta $s$ que passa por $A$ e intercepta a reta $r$ ortogonalmente.

   (b) Calcule a distância do ponto $A$ ao plano $\pi$.

5. (18 pontos) Verifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

   (a) Seja $A$ uma matriz diagonalizável e com polinômio característico $p(x)=(x-2)^2(x+3)$.
   Então $\det A=-12$.

   (b) A fórmula $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax+by$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Seja $V$ um espaço vetorial euclidiano e $u,v\in V$. Se $\|u+v\|=\|u-v\|$, então $u\perp v$.