Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

6ª Lista (Produto Interno) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 30 de abril de 2021

Use o produto escalar (produto interno usual) do $\mathbb{R}^n$ nos exercícios (3)–(9), (20)–(24).

1) Determine $w = 3u + 2v$, sendo $u = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e $v = -5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$.

2) Sejam $A = (2x + 1, 3y - 2)$ e $B = (x, y)$. Determine x e y para que sejam equivalentes $\overrightarrow{AB}$ e $v = (-4, 12)$ (vetor com ponto inicial na origem).

3) Determine o valor de m se a norma do vetor $v = (2m + 2, m - 1, 2m - 7)$ é $\|v\| = 13$.

4) Dados $u = (1, 4, 5), v = (3, 3, -2)$ e $w = (-5, 7, 1)$, determine:

(a) $\langle u, v\rangle$

(b) $\langle w, u\rangle$

(c) $\langle 2u, 2w\rangle$

(d) $\langle 3u - 4v, 5w\rangle$

5) Determine as coordenadas do ponto P', simétrico ao ponto $P = (1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M = (1, 2, -1)$?

6) Determine a projeção ortogonal de $v = (3, -2, 1)$ sobre $u = (1, 2, -2)$ e escreva $v = v_1 + v_2$, em que $v_1 \| u$ e $v_2 \perp u$.

7) Os ângulos diretores α, β e γ de um vetor $v = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ são tais que:

- α é o ângulo entre v e o eixo x positivo $(0 \le \alpha \le \pi)$
- β é o ângulo entre v e o eixo y positivo $(0 \le \beta \le \pi)$
- γ é o ângulo entre v e o eixo z positivo $(0 \le \gamma \le \pi)$

Mostre que $\cos(\alpha) = \frac{a}{\|v\|}, \cos(\beta) = \frac{b}{\|v\|}, \cos(\gamma) = \frac{c}{\|v\|}$ e $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.
Estas cossenos são chamados cossenos diretores de v.

8) Determine $\langle u, v\rangle$ sabendo que $\|u + v\| = 10$ e $\|u - v\| = 8$.

9) Determine $\langle u + v, v - v\rangle$ e $\|u + v\|$ sabendo que $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\langle u, v\rangle = 1/2$.

10) Verifique se as seguintes aplicações definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$

(b) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3$

11) Relativamente aos produtos internos do exercício (10), determine $\langle u, v\rangle$.

(a) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, 3)$

(b) $u = (-1, 0, 1)$ e $v = (-1, -2, 0)$

12) Determine as condições que devem satisfazer os vetores u e v para que o vetor $u+v$ divida o ângulo formado por eles em dois ângulos iguais.

13) Determine as condições que devem satisfazer os vetores u e v para que sejam válidas as relações:

(a) $\|u+v\| = \|u-v\|$

(b) $\|u+v\| > \|u-v\|$

14) Seja V um espaço vetorial V com produto interno. Mostre que para todo $u, v \in V$, vale:

(a) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$

(b) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$

(c) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$

(d) $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2)$

15) Determine quais das funções são produtos internos em $\mathbb{R}^2$.

(a) $\langle (x, y), (a, b)\rangle = xa - xb - ya + 2yb$

(b) $\langle (x, y), (a, b)\rangle = 2xa - xb + ya + yb$

(c) $\langle (x, y), (a, b)\rangle = 3xa + xb + ya + 2yb$

16) Verifique quais funções são produtos internos no espaço vetorial V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, com $\langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle = xa + 2xb + 2ya + 5yb + 3zc$

(b) $V = \mathbb{R}^3$, com $\langle (x, y, z), (a, b, c)\rangle = 2xa + xb - 3ya + 2yc - 5zc$

17) Seja o $\mathbb{R}^2$ com produto interno $\langle (x, y), (a, b)\rangle = xa+xb+ya+3yb$. Calcule o ângulo entre os vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$.

18) Seja $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle a_0+a_1x+a_2x^2, b_0+b_1x+b_2x^2\rangle = a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$. Sejam $u = 1+x+x^2$ e $v = 1-x$. Calcule:

(a) $\|u\|, \|v\|$

(b) $proj_v u$

(c) o ângulo entre u e v

19) Mostre que as funções são produtos internos no espaço vetorial V. Para cada item, dados $u, v \in V$, calcule $< u, v >$.

(a) $V = P_2(\mathbb{R})$, com $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + q(1)p(1)$, $p(x) = -x+1$ e $q(x) = x^2+1$.

(b) $V = \mathcal{F}([a, b]$ (espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$), com $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x).g(x)\mathrm{d}x, f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 1$, no intervalo $[0, 1]$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A)$, em que $\mathrm{tr}(B^T A)$ é o traço da da matriz $B^T A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20) Mostre que $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, -2, 1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

A base β é ortonormal? Caso não, obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de β.

21) Utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ a partir de $\alpha = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

22) Utilize o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de $\alpha = \{(1,1,1),(-1,0,-1),(-1,2,3)\}$.

23) Determine uma base ortonormal para o subespaço $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ x - y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

24) Seja o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) Se os vetores $u = (x,1,3)$ e $v = (x,-1,-1)$ são ortogonais, então $x = 2$ ou $x = -2$.

(b) O triângulo determinado pelos pontos $A = (1,0,-1); B = (2,-1,-3)$ e $C = (7,0,2)$ é retângulo, com ângulo reto no vértice A.

25) Seja V um espaço vetorial com produto interno e $u,v,w \in V$. Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique.

(a) Se $\|u\| = \|v\|$, então $u+v$ e $u-v$ são ortogonais.

(b) Se $u \neq 0$ e $\langle u,v\rangle = \langle u,w\rangle$, então $u = w$.

(c) A fórmula $\langle x,y,z),(a,b,c)\rangle = xa + 2yb + zc - xb - ya + yc + zb$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(d) Suponha que esteja definido um produto interno em $\mathbb{R}^2$ no qual $\langle (0,2),(-1,3) = 2\rangle$. Então a base $\{(1,1),(1,-1)\}$ é ortonormal.

26) Seja V um espaço vetorial com produto interno e $u,v,w \in V$. Mostre que são verdadeiras as afirmações.

(a) Se u é ortogonal a $v-w$ e v é ortogonal a $w-u$, então w é ortogonal a $u-v$.

(b) Se $u+v$ é ortogonal a $u-v$, então $\|u\| = \|v\|$.

(c) $w = v - \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ e u são perpendiculares.

27) Seja $\mathbb{R}^3$ com um produto interno não-usual. Calcule $\langle (2,1,0),(-1,2,1)\rangle$ sabendo que a base α é ortonormal.

(a) $\alpha = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$

(b) $\alpha = \{(-1,1,1),(1,-1,0),(-1,0,0)\}$

28) Em $\mathbb{R}^2$, determine a fórmula do produto interno, sabendo que a base α é ortonormal.

(a) $\alpha = \{(1,2),(-1,1)\}$

(b) $\alpha = \{(1,1),(-1,1)\}$

Para a resolução dos exercícios (29)–(34), são necessários os seguintes conceitos e teoremas.
Considere V um espaço vetorial euclidiano.

- Seja S um subconjunto não vazio de V. O conjunto $S^\perp = \{v \in V : \langle v,u\rangle = 0, \forall u \in S\}$ é nomeado **complemento ortogonal** de S. *Teorema:* Se W um subespaço de V, então $W \oplus W^\perp = V$.
- Seja B uma base ortonormal de V. Diremos que um operador linear T de V é **simétrico (ou auto adjunto)** se $[T]_B$ for uma matriz simétrica.
- Seja B uma base ortonormal de V. Diremos que um operador linear T de V é **ortogonal** se $[T]_B$ for ortogonal (isto é $[T]_B.[T]_B^{-1} = I$) *Teorema:* Se uma matriz A é ortogonal, então as colunas de A são ortonormais.

29) Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno.

(a) Dado $S \subset V$ não vazio, mostre que $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

(b) Mostre que se W é um subespaço vetorial de V, então $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

30) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}$. Determine:

(a) $W^{\perp}$.

(b) uma base do $\mathbb{R}^3$ com vetores de W e $W^{\perp}$.

31) Determine o complemento ortogonal dos subespaços do $\mathbb{R}^4$, com o produto interno usual.

(a) $W = [(1, 0, 1, 1), (1, 1, 2, 1)]$

(b) $W = [(1, -1, 1, 1), (1, 2, 1, 2)]$

32) Seja $V = \mathbb{R}^2$ e T um operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, em que α é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

(a) Considere o produto interno $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + 9bd$ sobre $\mathbb{R}^2$. Mostre que a base α não é ortonormal em relação a este produto interno. Determine uma base β a partir de α que seja ortonormal.

(b) Determine $[T]_\beta$, em que β é a base obtida em (32a).

(c) Verifique se o operador linear T do $\mathbb{R}^2$ é auto-adjunto.

33) Considere o espaço $V = P_1(\mathbb{R})$ com o produto interno

$$\langle a_0 + a_1 x, b_0 + b_1 x \rangle = \int_0^1 (a_0 + a_1 x)(b_0 + b_1 x) \mathrm{d}x$$

Seja $W = [1]$ um subespaço de V. Determine.

(a) Determine uma base para $W^{\perp}$, o complemento ortogonal de W.

(b) Determine uma base ortonormal para V unindo bases de W e $W^{\perp}$.

(c) Determine o ângulo entre os polinômios $p = 1$ e $q = x$.

34) Seja $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$. Determine:

(a) $W^{\perp}$

(b) Uma base ortogonal de V a partir de W e $W^{\perp}$.

35) Seja α uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ em relação a um produto interno de $\mathbb{R}^2$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 4/5 & a \\ b & -4/5 \end{pmatrix}$.

(a) Determine a e b para que T seja um operador auto adjunto.

(b) Determine a e b para que T seja ortogonal.

36) Encontre a reta de ajuste linear de mínimos quadrados dos quatro pontos $(0, 1), (2, 0), (3, 1)$ e $(3, 2)$.

37) Um empresário verifica que nos 5 primeiros meses do ano as vendas (em milhares de reais) foram R\$ 4,00, R\$ 4,40, R\$5,20, R\$ 6,40 e R\$ 8,00. Observando os dados em um gráfico ele conjectura que, pelo resto do ano, a curva de vendas pode ser aproximada por uma parábola. Encontre o polinômio de grau 2 de melhor ajuste de mínimos quadrados para a curva de vendas e use-o para projetar as vendas no último mês do ano.

Gabarito

1) $(-1, 6, 9)$

2) $(x, y) = (3, -5)$

3) $m = 5$ ou $m = -2,55$

4) (a) $\langle u, v\rangle = 5$
   (b) $\langle w, u\rangle = 28$
   (c) $\langle 2u, 2w\rangle = 112$
   (d) $\langle 3u - 4v, 5w\rangle = 340$

5) $(1, 4, -5)$

6) $v_1 = \frac{-1}{3}(1, 2, -2)$ e $v_2 = \frac{1}{3}(10, -4, 1)$

8) $\langle u, v\rangle = 9$

9) $\langle u + v, u - v\rangle = 0$ e $\|u + v\| = \sqrt{3}$

10) (a) Sim
    (b) Sim

11) Em relação aos produtos internos definidos em (10), obtemos, respectivamente:
    (a) $\langle u, v\rangle = 11$, $\langle u, v\rangle = 19$
    (b) $\langle u, v\rangle = 3$, $\langle u, v\rangle = 1$

12) $\|u\| = \|v\|$

13) (a) $\langle u, v\rangle = 0$
    (b) $\langle u, v\rangle > 0$

15) (a) V
    (b) F
    (c) V

16) (a) V
    (b) F

17) $\arccos(1/\sqrt{3})$

18) (a) $\|u\| = \sqrt{3}, \|v\| = \sqrt{2}$
    (b) 0
    (c) $\pi/2$

19) (a) 5
    (b) 0
    (c) 0

20) A base β não é ortonormal. Como β é ortogonal, para obter uma base ortonormal, basta dividir cada vetor de β pela sua norma, obtendo assim a base $\beta' = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\}$.

21) $\alpha' = \{(1,0),(0,1)\}$

22) $\alpha' = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\}$

23) $\alpha' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\}$

24) (a) V (b) V

25) (a) V (b) F (c) F (d) F

27) (a) $-3/2$ (b) 4

28) (a) $1/9(5xa - xb - ya + 2yb)$
(b) $1/2(xa + yb)$

30) (a) $W^\perp = \{(2x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}$
(b) Como $B_W = \{(-2,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de W e $B_{W^\perp} = \{(1,2,0)\}$ é uma base de $W^\perp$, então a base $\{(-2,1,0),(0,0,1),(1,2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ com vetores de W e $W^\perp$.

31) (a) $W^\perp = [(-1,-1,0,0),(-1,0,0,1)]$
(b) $W^\perp = [(4,1,0,-3),(-1,0,1,0)]$

32) (a) $\beta = \{(1,0), 1/3(0,1)\}$
(b) $[T]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
(c) Como $[T]_\beta$ não é simétrica em relação β que é uma base ortonormal, então T não é um operador auto-adjunto.

33) (a) Seja $p(x) = a + bx \in W^\perp$. Como $\langle p(x), 1\rangle = 0$ implica em $2a + b = 0$, $W^\perp = [1 + 2x]$. Logo, uma base para $W^\perp$ é $\alpha = \{1 - 2x\}$.
(b) $\beta = \{1, 1-2x\}$ é uma base ortogonal de V mas não é ortonormal pois $\langle 1-2x, 1-2x\rangle = 1/3$. Portanto, $\beta' = \{1, \sqrt{3}(1-2x)\}$ é uma base ortonormal de V.
(c) Como $\langle 1,1\rangle = 1$ e $\langle x,x\rangle = 1/2$, $\cos(\theta) = \dfrac{\langle 1,x\rangle}{\|1\|\|x\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\theta = 30°$.

34) (a) $W^\perp = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$
(b) Como $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é ortogonal e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal aos vetores de S, o conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base ortogonal de $M_2(\mathbb{R})$.

35) (a) $a = b$
(b) $a = b = \pm 3/5$

36) $y = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6}x$

37) $y(x) = 0,2(20 - x + x^2)$. Como $y(12) = 30,4$, o valor procurado é R$30.400,00.