Universidade Federal de Viçosa
Departamento de Matemática

MAT 135 – Geometria Analítica e Álgebra Linear

3ª Lista (Espaços Vetoriais) – 2021/1

profa. Lana Mara Rodrigues dos Santos

Atualizada em: 8 de março de 2021

1) Em cada item, verifique se os conjunto V com as operações de adição e produto por escalar definidas são espaços vetoriais. Para aquele que não for, cite os axiomas violados.

   (a) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, 0)$ e a multiplicação escalar usual.

   (b) $V = I\!R^2$; $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$.

2) Mostre que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais com a soma e produto por escalar usuais.

   (a) Matrizes quaisquer de ordem 3×2.

   (b) Polinômios de grau menor ou igual a 4.

   (c) Conjunto das funções contínuas de $I\!R$ em $I\!R$.

3) Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços do $\mathbb{R}^3$.

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\}$

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 4\}$

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + c = 0\}$, em que a, b e c números reais.

   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z \leq 0\}$

   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y + z = 0\}$

4) Em cada item deste exercício são dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V. Verifique se W é subespaço vetorial V.

   (a) $V = \left(I\!R^3, +, ., I\!R\right) \quad W = \left\{(x, y, z) \in I\!R^3; x + y + z = 0\right\};$

   (b) $V = \left(I\!R^3, +, ., I\!R\right) \quad W = \left\{(x, y, z) \in I\!R^3; x + y + z \leq 1\right\};$

   (c) $V = (M_{3\times3}(I\!R), +, ., I\!R) \quad W = \left\{A \in M_{3\times3}; A = A^T\right\};$

   (d) $V = (M_{2\times2}, +, ., I\!R) \quad W = \{A \in M_{2\times2}; \det A = 0\}.$

5) Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços de $\mathbb{R}^4$.

   (a) $U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 3z = 0\right\};$

   (b) $W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z = 0 \text{ e } t = 0\right\}.$

   (c) Determine $U \cap W$.

   (d) Determine $U + W$. Esta soma é direta? Justifique.

6) Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais de $M_{3\times3}$?

   (a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} : d = a + b + c \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} : d < a+b+c \right\}$.

7) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) Escreva $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

(b) O vetor $t = (2, -5, 4)$ pode ser escrito como combinação linear de u e v? Por que?

(c) Encontre condições sobre x, y, z de modo que (x, y, z) seja uma combinação linear de u e v.

(d) Escreva o vetor nulo como combinação linear de u e v.

(e) Escreva o vetor nulo como combinação linear de u, v e w.

(f) Escreva o vetor nulo como combinação linear de u, v e t.

8) Sejam os vetores $u = (-1, 2, 1), v = (1, 2, 0)$ e $w = (-2, -1, 0)$.
Escreva os vetores $v_1 = (-8, 4, 1), v_2 = (0, 2, 3)$ e $v_3 = (0, 0, 0)$ como combinação linear de $u, v,$ e w.

9) Para qual valor de k o vetor $u = (1, -2, k)$ é combinação linear dos vetores $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

10) Escreva E como combinação linear, se possível de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, em que

(a) $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

11) Seja W o subespaço do definido por $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$. Pergunta-se:

(a) $(-1, 2, 3, 0)$ pertence a W?

(b) $(3, 1, 4, 0)$ pertence a W?

(c) Determine dois vetores que geram W. Eles são os únicos? Se não, apresente outros!

12) Mostre que os conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço do $\mathbb{R}^3$.

13) Determine um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + z = 0 \text{ e } x + 2y = 0\}$

(c) $U \cap W$

(d) $U + W$. Esta soma é direta? Justifique.

14) Encontre um vetor em $\mathbb{R}^3$ que gere a interseção de V e W, em que V é o plano xy e W é o espaço gerado pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, -1, 1)$.

15) Determine $[S]$, em que $S = \{(1, -2, 5, 4), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$.

16) Mostre que o plano yz, isto é $W = \{(0, b, c), b, \ c \in \mathbb{R}\}$ pode ser gerado por:

(a) $\{(0, 1, 1), (0, 2, -1)\}$

(b) $\{(0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 1)\}$

17) Verifique se o vetor $(1,2,3)$ poder ser obtido como combinação linear dos vetores $(0,1,2)$ e $(1,0,1)$.

18) Verifique se o conjunto $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ gera o espaço vetorial $M_2(I\!R)$.

19) Verifique se o vetor $p(t) = t^3 - 2t$ pertence ao subespaço de $\mathbb{P}_3$ gerado por $\{t^3 - 1, t^2 + 1, t\}$.

20) Verifique se os conjuntos são linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD).

(a) $\{(1,3),(2,6)\}$

(b) $\{(2,-1,3)\}$

(c) $\{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\}$

(d) $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

(e) $\{(2,1,1,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)\}$

(f) $\{(0,1,0,-1),(1,1,1,1),(-1,2,0,1),(1,2,1,0)\}$

21) Para cada item abaixo, determine os valores de k para que os conjuntos sejam LI ou LD.

(a) $S_1 = \{(1,1,2),(-1,2,3),(k,-1,1)\}$

(b) $S_2 = \{(-1,0,7),(-4,5,-3k),(0,4,-2),(2k,3,1)\}$

22) Mostre que:

(a) Se u, v, w são L.I. então $u+v, u+w, v+w$ são L.I.

(b) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é L.D.

(c) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é L.D. então A é L.D.

23) Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ os vetores $u = (1-a, 1+a)$ e $v = (1+a, 1-a)$, onde $a \neq 0$. Mostre que $\{u, v\}$ é L.I.

24) Quais dos seguintes conjuntos formam uma base de $\mathbb{R}^3$? Nestes casos, escreva um vetor genérico (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos elementos desse conjunto.

(a) $S_1 = \{(1,0,1),(0,-1,2),(-2,1,-4)\}$

(b) $S_2 = \{(2,1,-1),(-1,0,1),(0,0,1)\}$

(c) $S_3 = \{(2,3,-1),(-2,1,1),(2,0,1)\}$

25) Mostre que os vetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (3,0,2)$ e $v_4 = (2,-1,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base dentre esses vetores.

26) Determine uma base e a dimensão dos subespaços vetoriais.

(a) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$.

(b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y = 0, x + t = z\}$.

27) Sendo $u = (1,2)$, encontre um vetor v tal que $\{u, v\}$ seja base do $\mathbb{R}^2$.

28) Determine uma base do $\mathbb{R}^4$ que contenha os seguintes vetores $(1,1,1,0)$ e $(1,1,2,1)$.

29) Determine se o vetor $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ é combinação linear das colunas da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

O que se pode concluir a respeito do sistema linear representado pela equação matricial $AX = b$, em que X é um vetor coluna?

30) Verifique como o posto da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ varia com t.

31) Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

(a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = 0, x + 2y + t = 0\}$.

(b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x - y + z = 0\}$.

(c) $U \cap W$.

(d) $U + W$. Esta soma é direta? Justifique.

32) Sejam os subespaços $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2z = 0\}$. Determine uma base e a dimensão dos subespaços U, V, $U \cap V$ e $U + V$.

33) Seja um espaço V de dimensão 5. Responda as perguntas abaixo, justificando sua resposta:

(a) Um conjunto de vetores de V com 8 vetores, pode ser LI?

(b) Um conjunto de vetores de V com 5 vetores, pode ser LD?

(c) Se S é um conjunto LD, pode existir um conjunto que contenha S e que seja LI?

34) Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4)$ e $(3, 8, -3, -5)$.

(a) Encontre uma base e a dimensão de W.

(b) Estenda a base de W a uma base do $\mathbb{R}^4$.

(c) Faça agora o caminho inverso. Encontre os vetores da base canônica do que geram W. Qualquer combinação de três vetores da base canônica do vai gerar W?

35) Sejam $B = \{(1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x + y - z + 3t = 0\}$.

(a) B é um conjunto linearmente independente? Justifique.

(b) Escreva o vetor $v = (1, 0, 5, 1)$ como combinação linear dos vetores de B.

(c) O vetor v do item (b) pertence a W?

(d) Usando apenas as respostas dos itens (a), (b) e (c) e sem fazer qualquer conta adicional é possível garantir que B é uma base de W? Justifique!

(e) Encontre uma base para o subespaço W.

36) Determine:

(a) Um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ com 3 de vetores e que não é base do $\mathbb{R}^3$.

(b) Um conjunto do $\mathbb{R}^3$ linearmente independente e que não é base do $\mathbb{R}^3$.

(c) Um conjunto de vetores do $\mathbb{R}^3$ que gera o $\mathbb{R}^3$ mas não é base do $\mathbb{R}^3$.

37) Determinar as coordenadas do vetor $v = (6, 2)$ em relação às bases:

(a) $\alpha = \{(3, 0), (0, 2)\}$

(b) $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$

(c) $\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}$

38) Seja $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de v em relação a B se:

(a) $v = (2, -3, 4)$

(b) $v = (3, 5, 6)$

(c) $v = (1, -2, 1)$

39) Determine as coordenadas do vetor $u = (4, 5, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ em relação às seguintes bases:

(a) canônica;

(b) $\alpha = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;

(c) $\beta = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

40) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. A matriz da mudança da base $\gamma = \{(1, 1), (-2, 2)\}$, para a base $\alpha = \{v_1, v_2\}$ é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a base α.

(b) Determine o vetor $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

41) Considere as bases $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $I\!R^3$, relacionadas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} w_1 & = & u_1 & - & u_2 & - & u_3 \\ w_2 & = & & & 2u_2 & + & 3u_3 \\ w_3 & = & 3u_1 & & & + & u_3 \end{array} \right. .$$

Pede-se:

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]_\gamma^\beta$ e $[I]_\beta^\gamma$.

(b) Sabendo que

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine o vetor u com relação à base γ.

42) Considere a seguinte matriz de mudança de base $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Encontre:

(a) $[v]_\beta$, onde $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $[v]_{\beta'}$, onde $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Gabarito

1) Não são espaços vetoriais.

2)

3) (a) sim
   (b) não
   (c) sim
   (d) não
   (e) não

4) (a) e (c) são espaços vetoriais, mas (b) e (d) não são espaços vetoriais.

5) (c) $\{(x, x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$
   (d) $\mathbb{R}^4$

6) somente o item (a)

7) (a) $w = 3u - 1v$
   (b) Não.
   (c) $c = 16a + 10b$
   (d) $0 = 0u + 0v$
   (e) $0 = 3u - v - w$, dentre outras infinitas possibilidades.
   (f) $0 = 0u + 0v + 0t$

8) $v_1 = u + \frac{11}{3}v + \frac{16}{3}w$, $v_2 = 3u - \frac{11}{3}v - \frac{10}{3}w$, $v_3 = 0u + 0v + 0w$.

9) $k = -8$

10) (a) $E = 2A - B + 2C$;
    (b) Não é possível.

11) (a) sim
    (b) não
    (c) Escreva um vetor genérico do conjunto para obter um conjunto gerador de W. Verifique que não são únicos.

12) Ambos geram o espaço vetorial $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 5y + 3z\}$

13) (a) $\{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
    (b) $\{(-2, 1, 2)\}$
    (c) $\{(0, 0, 0)\}$
    (d) $\mathbb{R}3$. A soma é direta pois $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$

    A resposta não é única.

14) $\{(-2, 5, 0)\}$.

15) $[S] = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; -17x + 9y + 7z = 0\}$.

16) Mostre que W pode ser gerado pela combinação linear dos vetores do conjunto.

17) não

18) sim

19) não.

20) (a) linearmente dependente
   (b) linearmente independente
   (c) linearmente dependente
   (d) linearmente dependente
   (e) linearmente independente
   (f) linearmente dependente

21) (a) somente para $k = 8$ o conjunto é linearmente dependente.
   (b) qualquer que seja k o conjunto é linearmente dependente.

22) Use a definição de conjunto LI para mostrar os itens.

23)

24) (a) Não é base.
   (b) $(x, y, z) = -y(2, 1, -1) + (2y - x)(-1, 0, 1) + (x - y + z)(0, 0, 1)$.
   (c) $(x, y, z) = \frac{1}{16}(x + 4y - 2z)(2, 3, -1) + \frac{1}{16}(-3x + 4y + 6z)(-2, 1, 1) + \frac{1}{4}(x + 2z)(2, 0, 1)$

25)

26) (a) dim$U$=1, $B = \{(1, 1)\}$
   (b) dim$W$=2, $B = \{(1, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$

27) Por exemplo, $v = (2, 3)$.

28) $B = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (2, 1, 0, 3), (0, 0, 0, 1)\}$

29) $b = -26a_1 + 13a_2 - 7a_3 + 4a_4$ em que $a_1, ..., a_4$ são as colunas da matriz A.

30) $t = 1$, $posto(A) = 1$; $t = -2$, $posto(A) = 2$. Para $t \notin \{-2, 1\}$, $posto(A) = 3$.

31) (a) $B_U = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 0, -2)\}$, dim$U = 2$.
   (b) $B_W = \{(1, 2, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, dim$W = 3$.
   (c) $B_{U\cap W} = \{(1, 1, -1, -3)\}$, dim$(U \cap W) = 1$.
   (d) Como $U + W = \mathbb{R}^4$, qualquer base do $\mathbb{R}^4$ serve. A soma não é direta pois dim$U$+dim$W >$ dim$(U + W)$.

32) $B_U = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, dim $= 2$;
$B_V = \{(1, 0, 0), (0, 2, 1)\}$, dim $= 2$;
$B_{U\cap V} = \{(0, 2, 1)\}$, dim $= 1$.
$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$, então $dim(U + V) = 3$. Logo, $U + V = \mathbb{R}^3$.

33) (a) não (b) sim (c) não

34) (a) $B = \{(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4)\}$, dim=2

(b) $\{(1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$

(c) não

35) (a) sim

(b) $v = 1(1, 2, 1, -1) + 2(0, -1, 2, 0) + 0(-1, 0, 1, 0)$

(c) sim

(d) não

(e) $B_w = \{(1, 0, 2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 3, 1)\}$

36) (a) $\{(1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

(b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

(c) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, -1), (-3, 2, 1)\}$

37) (a) $[(6, 2)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $[(6, 2)]_B = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$

(c) $[(6, 2)]_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

38) (a) $[(2, -3, 4)]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) $[(2, -3, 4)]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c) $[(2, -3, 4)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

39) (a) $[(4, 5, 3)]_C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $[(4, 5, 3)]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $[(4, 5, 3)]_C = \begin{bmatrix} 41/11 \\ -10/11 \\ 3/11 \end{bmatrix}$

40) (a) $\alpha = \{(-3, 5), (1, -1)\}$

(b) $u = (-1, 3)$

41) $[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $[I]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $[u]_\gamma = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

42) (a) $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$