Universidade Federal de Viçosa
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

1ª Lista de Exercícios - MAT 241 - Cálculo III 2022/I

1) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule $\|\vec{v} \times \vec{u} - \vec{v}\|$.

2) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários ortogonais. Determine $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

3) Seja $\vec{u}$ um vetor ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Sabendo-se que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam um ângulo de 30° e que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\|\vec{w}\| = 3$, calcule $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$.

4) De um vértice de um cubo traçam-se uma diagonal do cubo e uma diagonal de uma face.

   (a) Calcular o ângulo entre as duas diagonais.

   (b) Calcular a área do triângulo definido por estas diagonais e uma aresta do cubo.

5) Em cada item abaixo, determine $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, $\|\vec{v}\|, \|\vec{u}\|$, o cosseno do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$, a componente escalar de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ (isto é, $\|\vec{u}\| \cos\theta$, com θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$) e o vetor $proj_{\vec{v}} \vec{u}$.

   (a) $\vec{v} = (2, -4, \sqrt{5})$ e $\vec{u} = (-2, 4, -\sqrt{5})$.

   (b) $\vec{v} = (0, 5, -3)$ e $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

6) Os ângulos diretores α, β e γ de um vetor não nulo $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ são definidos da seguinte maneira:

$$\alpha \text{ é o ângulo entre } \vec{v} \text{ e o eixo } x \text{ positivo } (0 \leq \alpha \leq \pi)$$
$$\beta \text{ é o ângulo entre } \vec{v} \text{ e o eixo } y \text{ positivo } (0 \leq \beta \leq \pi)$$
$$\gamma \text{ é o ângulo entre } \vec{v} \text{ e o eixo } z \text{ positivo } (0 \leq \gamma \leq \pi)$$

   (a) Mostre que
   $$\cos\alpha = \frac{a}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\|\vec{v}\|}$$
   e $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Esses cossenos são chamados cossenos diretores de $\vec{v}$.

   (b) Mostre que, se $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ é um vetor unitário, então a, b e c são cossenos diretores de $\vec{v}$.

7) Suponha que AB seja o diâmetro de um circulo com centro O e que C seja um ponto sobre um dos arcos que ligam A e B. Mostre que $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são ortogonais.

8) Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

   (a) Use o fato de que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ para mostrar a desigualdade
   $$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

   (b) Sob quais circunstâncias, se existirem, $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|$ é igual a $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. Justifique sua resposta.

9) Se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_1\rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}_2\rangle$ e $\overrightarrow{u} \neq 0$, podemos concluir que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$? Justifique sua resposta.

10) Encontre, em cada item abaixo, o comprimento e a direção (quando definida) de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.

(a) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$
(b) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$

11) Dados os pontos $P = (2, -2, 1)$, $Q = (3, -1, 2)$ e $R = (3, -1, 1)$,

(a) encontre a área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e R;
(b) encontre um vetor unitário perpendicular ao plano que contém os pontos P, Q e R.

12) Sejam $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{w} = -15\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$. Quais vetores, se é que existem, são:

(a) perpendiculares? Justifique.
(b) paralelos? Justifique.

13) Quais das igualdades a seguir são sempre verdadeiras? Quais nem sempre são verdadeiras? Justifique.

(a) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
(b) $\overrightarrow{u} \times (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.
(c) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$.
(d) $\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$.

14) Se $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} \neq 0$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$? Justifique.

15) Julgue a veracidade das afirmações abaixo, assinalando (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique cada uma de suas respostas.

(a) ( ) Se os vetores $\overrightarrow{u} = (x, 1, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (x, -1, -1)$ são ortogonais, então $x = 2$ ou $x = -2$.
(b) ( ) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ tem a mesma norma, então $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ são ortogonais.
(c) ( ) O triângulo determinado pelos pontos $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, -1, -3)$ e $C = (7, 0, 2)$ é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.
(d) ( ) Se $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle$, com $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.
(e) ( ) A área do triângulo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ é 4.

16) Sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = -2$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\rangle = 1$ e $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle = 7$, calcule:

(a) $\langle 4\overrightarrow{u}, 2\overrightarrow{v} + 3\overrightarrow{w}\rangle$.
(b) $\langle 5\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}\rangle$.

17) Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores, com ângulo entre si medindo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ e tais que $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 2$. Determine a área do triângulo que tem os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como lados adjacentes.

18) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores tais que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 10$ e $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 8$, determine $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$.

19) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários tais que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \dfrac{1}{2}$. Determine $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle$ e $\| \vec{u} + \vec{v} \|$.

20) Seja $\vec{v} = (1, -5, 3)$. Determine o vetor $\vec{w}$, tal que $\| \vec{w} \| = 10$, e que tem a mesma direção e o sentido contrário de $\vec{v}$.

21) Obtenha $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \times \vec{j} = \vec{k}$ e $\| \vec{v} \| = \sqrt{5}$.

22) Sejam $\vec{u} = a\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}$. Sabendo-se que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{i}$ é obtuso, determine o valor de a de modo que a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $\sqrt{50}$.

23) Determine o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (5, 4, 5)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 10, 6)$, $C = (1, 8, 7)$ e $D = (2, 6, 9)$.

24) Mostre que para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tem-se:

(a) $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \| \vec{v} \|^2$.
(b) $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \| \vec{v} \|^2$.
(c) $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 + \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = 2(\| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2)$.
(d) $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
(e) $\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$ (Identidade de Lagrange).

25) Sejam $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ e $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$. Mostre que:

(a) $|x - a| \leq \| \vec{u} - \vec{v} \|$.
(b) $|y - b| \leq \| \vec{u} - \vec{v} \|$.
(c) $\| \vec{u} - \vec{v} \| \leq |x - a| + |y - b|$.

26) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Explicitar o valor de x na igualdade $x\vec{v} = \vec{u}$.

27) Suponha que uma força constante F move uma partícula de um ponto P até um ponto Q. O trabalho realizado pela partícula é dado por:

$$W = \langle \vec{F}, \overrightarrow{PQ} \rangle.$$

Se a unidade de comprimento é dada em metros e a força em Newtons, o trabalho é dado em Joules (J). Calcule o trabalho considerando:

(a) $\vec{F} = 2\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $P = (1, 2, -2)$ $\quad e \quad$ $Q = (3, -1, 1)$
(b) $\vec{F} = -c\,\vec{k}$, $P = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad e \quad$ $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

28) Determine o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e $\vec{w} = (3, k, 5)$ sejam coplanares.

29) Demonstrar que o vetor $\vec{w} = \vec{v} - \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u}$. Dê uma interpretação geométrica.

30) Escrever uma equação do plano tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ no ponto $P = (1, 2, -1)$.

31) Dados $A = (2, 3, 6)$ e $B = (4, 1, -2)$, escrever uma equação do plano mediador do segmento AB. O plano mediador de um segmento é formado por todos os pontos equidistantes aos extremos desse segmento.

32) Determinar os valores de a e b para que as retas

$$r: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

sejam

(a) paralelas;

(b) concorrentes;

(c) reversas.

33) Determinar a posição relativa entre as retas $r: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

34) (a) Mostre que a distância entre um ponto S e uma reta passando por P paralela a $\overrightarrow{v}$ é

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

(b) Encontre a distância do ponto $S = (1, 1, 5)$ à reta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

35) Se P é um ponto no plano com normal $\overrightarrow{n}$, então a distância de qualquer ponto S até o plano é o comprimento da projeção ortogonal de $\overrightarrow{PS}$ em $\overrightarrow{n}$. Mostre que a distância de S até o plano é

$$d = \left| \left\langle \overrightarrow{PS}, \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \right\rangle \right| = \frac{|\langle \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{n} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

36) Sejam os planos paralelos

$$ax + by + cz = d_1 \quad \text{ e } ax + by + cz = d_2.$$

(a) Mostre que a distância entre os planos é

$$d = \frac{|d_1 - d_2|}{\|ai + bj + ck\|}.$$

(b) Encontre a distância entre os planos $2x + 3y - z = 6$ e $2x + 3y - z = 12$.

37) Encontre equações paramétricas para a reta

(a) que passa pela origem e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

(b) que passa por $(0, -7, 0)$ e é perpendicular ao plano $x + 2y + 5z = 13$.

38) Encontre a equação do plano

(a) que passa por $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$ e $(0, -2, 1)$.

(b) que passa por $P_0 = (2, 4, 5)$ e é perpendicular à reta $r: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t \end{cases}$.

39) Encontre o ponto de interseção das retas $r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = s + 2 \\ y = 2s + 4, \quad s \in \mathbb{R} \\ z = -4s - 1 \end{cases}$. Determine a equação geral do plano determinado por estas retas.

40) Encontre um plano que passa por $P_0 = (2, 1, -1)$ e é perpendicular à reta dada pela interseção dos planos $2x + y - z = 3$ e $x + 2y + z = 2$.

41) Encontre a distância do ponto $(2, 1, 3)$ à reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 6t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$.

42) Encontre a distância do ponto $(0, -1, 0)$ ao plano $2x + y + 2z = 4$.

43) Encontre a distância do plano $x + 2y + 6z = 1$ ao plano $x + 2y + 6z = 10$.

44) Encontre as equações paramétricas para as retas dadas pela interseção dos planos

(a) $x + y + z = 1$ e $x + y = 2$
(b) $x - 2y + 4z = 2$ e $x + y - 2z = 5$.

45) Julgue a veracidade das afirmações abaixo assinalando (V) para verdadeiro ou (F) para falso. Justifique sua resposta.

(a) ( ) Existe um plano que contém os pontos $A = (1, 0, -1)$, $B = (0, 2, 3)$, $C = (-2, 1, 1)$ e $D = (4, 2, 3)$.
(b) ( ) O ponto $A = (7, 6, 5)$ pertence ao segmento de reta $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$, onde $0 \leq t \leq 1$.

46) Verifique se os pontos $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_3 = (1, 0, 1)$ e $P_4 = (0, 1, 0)$ são coplanares.

47) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (1, 5, 4)$ e

(a) é paralela à reta de equações paramétricas $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 20 + 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.
(b) é paralela à reta determinada pelos pontos $B = (1, 1, 1)$ e $C = (0, 1, -1)$.

48) Determine a equação do plano α que contém os pontos $A = (2, 0, 5)$ e $B = (0, 2, -1)$ e é perpendicular ao plano $\beta : x + 3y - z = 0$.

49) Escreva as equações paramétricas da interseção dos planos abaixo

(a) $2x + y - z = 0$ e $x + y + z = 1$
(b) $x + 2y = 1$ e $z = 2$

50) Determine a interseção da reta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ com cada um dos planos

(a) $x - 2y + 3z = 8$

(b) $2x + z = 5$

(c) $x = 2$.

51) Verifique que a reta $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$ está contida no plano $2x + y - z = 0$.

52) Verifique que a reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ não intercepta o plano $x + y - z = 3$.

53) Determine os valores de a, b e d para que o plano $ax + by + 3z = d$ seja:

(a) paralelo ao plano $2x + y - 5z = 4$

(b) represente o mesmo plano que $2x + y - 5z = 4$.

54) Verifique que as retas $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -5 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ são concorrentes e determine uma equação do plano por elas definido.

55) Determine a distância do ponto $A = (2, 1, 3)$ a cada um dos planos

(a) $x - 2y + z = 1$

(b) $x + y - z = 0$

(c) $x - 5z = 8$

56) Determine

(a) a distância do ponto $(5, 4, 7)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

(b) a distância do ponto $(1, 2, -1)$ à reta $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

(c) a distância do ponto $(2, 3, 5)$ a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.

57) Escreva uma equação do plano que contém o ponto $A = (1, -2, 3)$ e é perpendicular a cada um dos planos $2x + y - z = 2$ e $x - y - z = 3$.

58) Escreva uma equação da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 2, 1)$ e que é paralela aos planos α e β de equações

$$\alpha : x - 2y + z = 3 \quad \text{e} \quad \beta : 5x - 4y + z = 1.$$

59) Seja α o plano $2x + y - z + 1 = 0$ e r a reta que contém os pontos $A = (0, 0, 2)$ e $B = (2, 3, 6)$. Determine as equações da reta m que contém o ponto $C = (1, 2, 3)$, é perpendicular à reta r e paralela ao plano α.

60) Mostre que a distância entre as retas reversas r e s é dada por

$$d(r,s) = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|},$$

onde $P \in r$, $Q \in s$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vetores diretores de r e s, respectivamente.

61) Determine se as retas r e s são paralelas, concorrentes ou reversas e calcule a distância entre elas.

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$$

62) Sejam $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$. Determine equações paramétricas para a reta r que passa pelo pontos $A = (1, 2, -1)$ e é ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

63) Considere as retas $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$ e $s : x = y + 1 = z - 2$.

(a) Verifique que as retas r e s são reversas.

(b) Prove que existem um plano α que contém r e um plano β que contém s tais que α e β são paralelos, exibindo as equações destes planos. Verifique que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$.

(c) Use o item anterior para determinar a distância entre as retas r e s.

64) Escreva uma equação do plano paralelo a $2x - y + 6z = 4$ e tangente à esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 4$.

65) Determine o centro e o raio da circunferência de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ com o plano $2x + y + z = 4$.

66) Seja r a interseção dos planos $x + z = 4$ e $y - 2z + 4 = 0$. Encontre uma equação da reta s definida pela projeção ortogonal de r no plano $x - y + z = 2$.

67) Escreva as equações simétricas da reta s, traçada pelo ponto $P = (1, 3, 1)$, que seja concorrente com a reta $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$ e seja ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, 0, -1)$.

68) Determinar a equação geral dos planos nos seguintes casos

(a) passa pelo ponto $D = (1, -1, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$

(b) possui o ponto $A = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$

(c) passa pelos pontos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 1, 3)$ e $C = (4, 2, 3)$

(d) passa pelo ponto $E = (1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u} = (2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 1, 2)$

(e) possui o ponto $P = (2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano xz

(f) contém as retas $r : \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{1-z}{2}$ e $s : \dfrac{x-1}{2} = -\dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{4}$

(g) contém as retas $r : \dfrac{x}{2} = y + 1 = z + 3$ e $s : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$

(h) contém as retas $r : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$ e $s : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{2-y}{2}$, $z = 0$.

(i) contém a reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = z - 1$ e é paralelo à reta $s : \dfrac{x-3}{2} = 2 - y = \dfrac{z-2}{4}$.

69) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $A = (-1, 4, 5)$ e que é perpendicular à reta $r : (-2, 1, 1) + t(1, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

70) Determine os pontos da reta r, definida pela interseção dos planos $\alpha : x + y = 2$ e $\beta : x = y + z$, que distam 3 unidades do ponto $P = (0, 2, 1)$.

71) Dada a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e os pontos $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (2, 2, 3)$,

(a) verifique que o ponto P está no interior e Q está no exterior da esfera.

(b) determine as interseções da esfera com a reta definida pelos pontos P e Q

72) Encontre o centro e o raio das esferas

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$

(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$

73) Identifique cada superfície

(a) $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

(b) $9y^2 + z^2 = 16$

(c) $x = y^2 - z^2$

(d) $x^2 + 2z^2 = 8$

(e) $x = z^2 - y^2$

(f) $x^2 + 4z^2 = y^2$

74) Julgue a veracidade das afirmações abaixo assinalando (V) para verdadeiro e (F) para falso. Justifique sua resposta.

(a) (   ) A equação da esfera de centro $C = (-2, 4, 1)$ e tangente ao plano yz é

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z + 17 = 0$$

(b) (   ) O raio da esfera que contém os pontos $A = (3, 1, 4)$, $B = (0, 5, 3)$ e $C = (4, 4, 0)$ e tem seu centro no plano xy é igual a 3.

75) Faça um esboço das superfícies

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $z = y^2 - 1$

(c) $x^2 + 4z^2 = 16$

(d) $z^2 - y^2 = 1$

(e) $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

(f) $z = 8 - x^2 - y^2$

(g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

(h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

76) Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 0, 3)$ e $C = (0, 3, -1)$.

77) Forneça uma descrição geométrica do conjunto dos pontos no espaço cujas coordenadas satisfazem os pares de equações dadas

(a) $x = 2$, $y = 3$
(b) $y = 0$, $z = 0$
(c) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$
(d) $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$
(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$
(f) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$, $z = 0$

78) Descreva os conjuntos de pontos no espaço cujas coordenadas satisfazem as desigualdade ou as combinações de equações e desigualdades dadas:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$
(d) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$

79) Descreva o conjunto dado com uma única equação ou com um par de equações

(a) O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano xy.
(b) O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano yz.
(c) O plano contendo o ponto $(3, -1, 1)$ paralelo ao plano xz.
(d) O círculo de raio 2 centrado em $(0, 2, 0)$ e posicionado sobre o plano xy
(e) O círculo de raio 2 centrado em $(0, 2, 0)$ e posicionado sobre o plano yz
(f) O círculo de raio 2 centrado em $(2, 0, 0)$ e posicionado sobre o plano xz
(g) A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo x.
(h) A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo y.
(i) A reta que passa pelo ponto $(1, 3, -1)$ paralela ao eixo z.
(j) O círculo no qual o plano que passa pelo ponto $(1, 1, 3)$ perpendicular ao eixo z encontra a esfera de raio 5 centrada na origem.

80) Verifique que $2x - 2z - y = 10$ intercepta $2z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ em um único ponto e determine o ponto.

81) Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

82) Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos y é $\dfrac{3}{4}$ da distância de P ao plano xz. Identifique a superfície.