RETO 3 – Métodos Numéricos

Diciembre 2019

Antonio Ferreras Extremo

1 Justificación de las observaciones

Resolución del problema de Cauchy:

$$W'(t) = L \cdot W(t) + W(t) \cdot R, \qquad W(0) = W_0 \in \mathbb{M}_{m,n} \qquad (1)$$

1.1 Dimensiones matriciales

Debemos comprobar que las dimensiones de la solución propuesta son compatibles con (1):

$$W(t) = \exp(tL) \cdot W_0 \cdot \exp(tR) \qquad (2)$$

Si tenemos en cuenta que:

- $L \in M_{m,m}$
- $R \in M_{n,n}$

Y que, para las regiones de convergencia correspondientes, el desarrollo de la exponencial nos indica las dimensiones de las matrices correspondientes:

- $\exp(tL) = L^0 + t \cdot L + \frac{t^2}{2!} * L^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot L^3 + \cdots \in M_{m,m}$
- $\exp(tR) = R^0 + t \cdot R + \frac{t^2}{2!} * R^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot R^3 + \cdots \in M_{n,n}$

ya que:

- $\mathrm{L}^0 = I_{m,m}$ y $\dim(L^i) = m \times m \;\forall\, i$
- $\mathrm{R}^0 = I_{n,n}$ y $\dim(R^i) = n \times n \;\forall\, i$

y, por tanto:

- $L * W(t) \in \mathbb{M}_{m,n}$
- $W(t) * R \in \mathbb{M}_{m,n}$

Con lo que se comprueba fácilmente que los dos términos de la ecuación (1) son de dimensión

$$m \times n$$

1.2 Solución de rango 1

Si $W_0 \in \mathbb{M}_{m,n}$ es una matriz de rango 1 del tipo $W_0 = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0^*$ con $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{C}^m$ y $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{C}^n$, entonces comprobamos que $W(t) = \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{u}^*(t)$ es solución del sistema. En efecto, sustituyendo:

$$W'(t) = L * W(t) + W(t) * R$$

$$\left(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t)\right)' = L\cdot\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t) + \boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t)\cdot R =$$

$$\boldsymbol{v}'(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t) + \boldsymbol{v}(t)\cdot\left(\boldsymbol{u}'(t)\right)^* = L\cdot\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t) + \boldsymbol{v}(t)\cdot\left(R^*\cdot\boldsymbol{u}(t)\right)^*$$

Identificando términos vemos que podemos obtener los vectores $\boldsymbol{u}(t)$ y $\boldsymbol{v}(t)$ resolviendo los problemas de Cauchy unidimensionales:

$$\boldsymbol{v}'(t) = L\cdot\boldsymbol{v}(t) \qquad y \qquad \boldsymbol{u}'(t) = R^*\cdot\boldsymbol{u}(t)$$

Si además imponemos las condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \qquad y \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

Entonces:

$$W_0 = \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}_0^*$$

y obtenemos una solución de (1), de la forma $W(t) = \boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{u}^*(t)$, siempre que se cumplan las hipótesis de partida.

1.3 Superposición de Matrices de rango 1

Con el resultado anterior podemos calcular la solución de (1) para una $W_0 \in \mathbb{M}_{m,n}$, genérica, aplicando *single value decomposition* a W_0, para obtener dicha matriz como suma de una serie de matrices de rango 1[1]:

$$[Q,\sigma,P] = \mathrm{mysvd(W_0)}$$

con:

$$Q \in \mathbb{M}_{m,r} \qquad \sigma \in \mathbb{C}^r \qquad P \in \mathbb{M}_{n,r}$$

se obtiene:

$$W_0 = \sum_{i=1}^{r}\sigma_r\cdot q_i\cdot p_i^* \qquad con\ \ q_i = Q(:,i)\ \ y\ p_i = P(:,i) \qquad (2)$$

Con lo que tenemos descompuesto a W_0, como una suma de matrices de rango 1:

$$W_0 = \sum_{i=1}^{r}\sigma_r\cdot W_i = \sum_{i=1}^{r}\sigma_r\cdot q_i\cdot p_i^* \qquad con\ W_i = q_i\cdot p_i^* \quad i\in(1..r)$$

Por la linealidad de las ecuaciones diferenciales podemos resolver (1) para cada una de las condiciones iniciales W_i de rango 1, obteniendo como un conjunto de soluciones:

$$W_i(t) = \boldsymbol{v}_i(t)\cdot\boldsymbol{u}_i^*(t)$$

Y la solución final que buscamos será:

[1] Véase "Tema 5: Método QR de diagonalización y SVD. Apartados 3 y 4"

$$W(t) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_r \cdot W_i(t) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_r \cdot \boldsymbol{v}_i(t) \cdot \boldsymbol{u}_i^*(t)$$

2 Análisis de rendimiento

2.1 Análisis de tiempos

El resultado de introducir una tolerancia es el número de soluciones de la *single value decomposition*, que retenemos en la solución, el parámetro r de la ecuación (2). Por la teoría sabemos que los primeros valores que se retienen son los que tienen mayor peso, por lo que el error decrece exponencialmente con el número de vectores retenidos.

Utilizando la función "*Run and Time*" de Matlab para unas tolerancias relativas de 0, 0.001 y 0.01 obtenemos:

Tolerancia	Número de vectores (r)	Tiempo ejecución (s.)
0.	264	356.385
0.001	33	44.707
0.01	4	7.313

La diferencia de tiempos es muy significativa, creciendo casi de forma lineal con el número de vectores retenidos en la solución.

2.2 Análisis de resultados

En las simulaciones de la evolución con el tiempo del problema de la difusión planteados, la diferencia de resultados no es significativa, excepto en la reproducción del instante inicial, donde los errores de la solución se concentran en los bordes como podemos ver en las imágenes que se acompañan.

- Para una tolerancia de 0., $W(0)$ es exactamente igual a W_0, sin errores apreciables (en el límite de la resolución de MatLab).
- Para una tolerancia de 0.001, se aprecian unos pequeños errores en los bordes de $W(0)$.
- Para una tolerancia de 0.01, los errores ya son significativos, como corresponde a haber eliminado las "altas frecuencias" de la solución.

En la evolución con el tiempo, debido al carácter lento de la evolución con el tiempo de este problema de difusión, no se observan diferencias significativas entre las simulaciones a partir de los primeros cuadros.

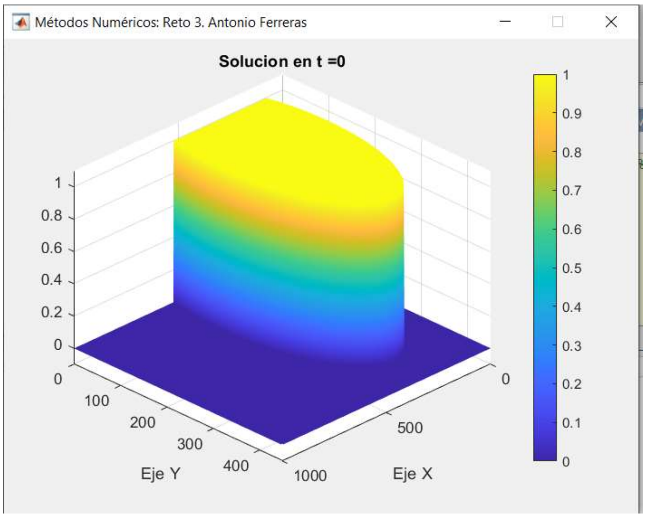

Ilustración 2-1. W(0) para tolerancia de 0.

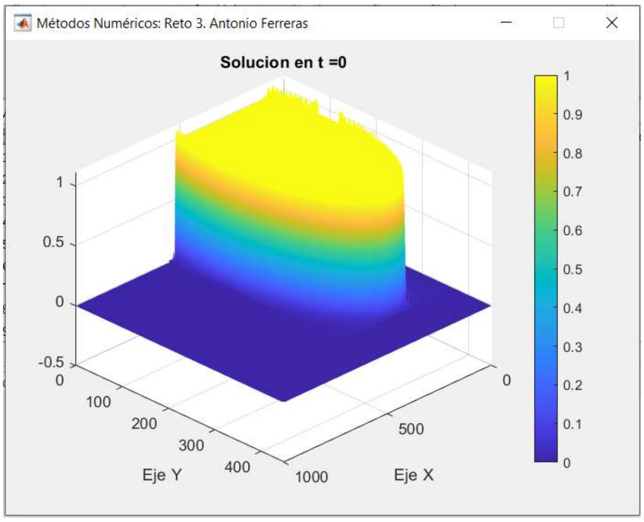

Ilustración 2-2. W(0) para tolerancia de 0.001

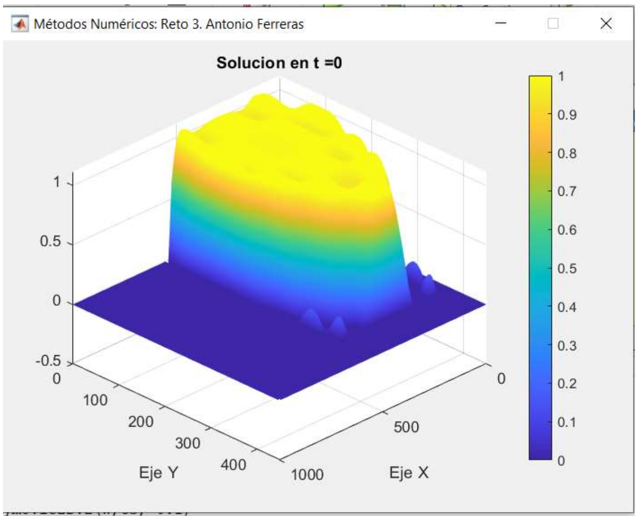

Ilustración 2-3. W(0) para tolerancia de 0.01