Conceptos básicos de matemáticas y estadística

Semana 1: Matemática Analítica

Rafael Zambrano
rafazamb@gmail.com

Introducción

PARTE I: ÁLGEBRA LINEAL

1.1 Matrices y vectores
1.2 Suma, resta y multiplicación por escalares
1.3 Operaciones con vectores
1.4 Representación vectorial de objetos
1.5 Multiplicación de matrices
1.6 Matriz inversa y traspuesta

PARTE II: CÁLCULO

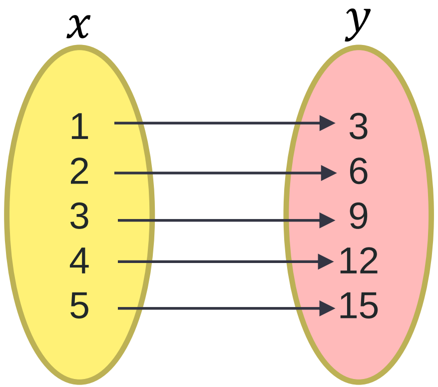
1.7 Funciones
1.8 Derivadas
1.9 Optimización

1. Matemática Analítica

1.7. Funciones

Funciones

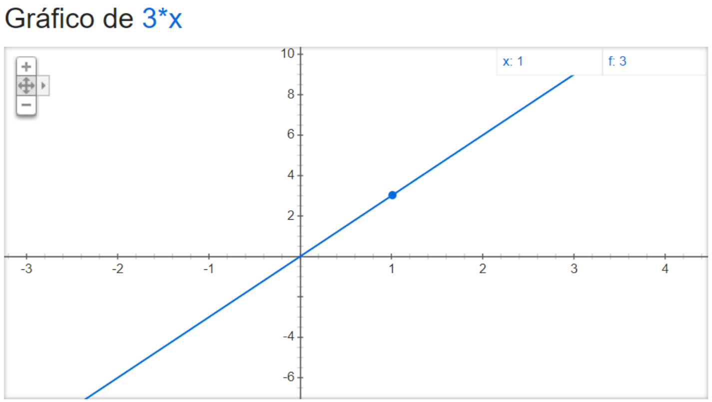
Una función es la relación que existe entre dos conjuntos de valores



$$f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$y = 3x$$

$$f(x) = 3x$$



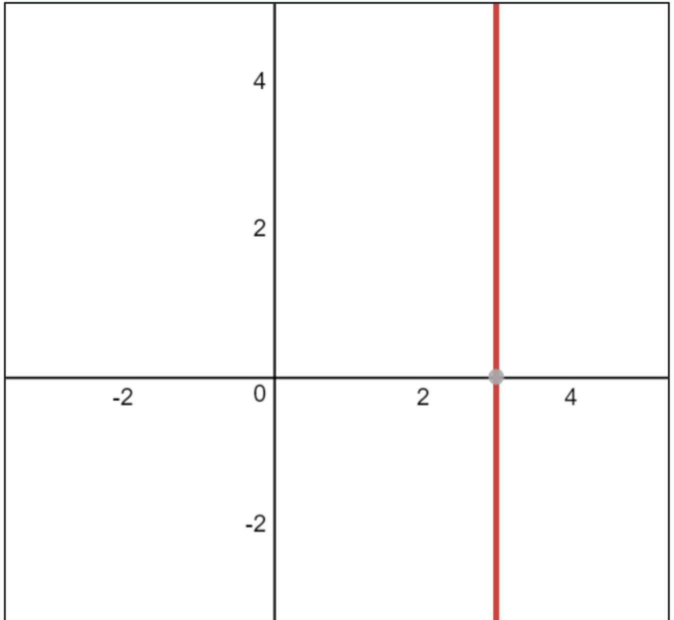
Tipos de funciones

- **Constantes $f(x) = k$**

$f(x) = 2$

Las rectas paralelas al eje y no son funciones

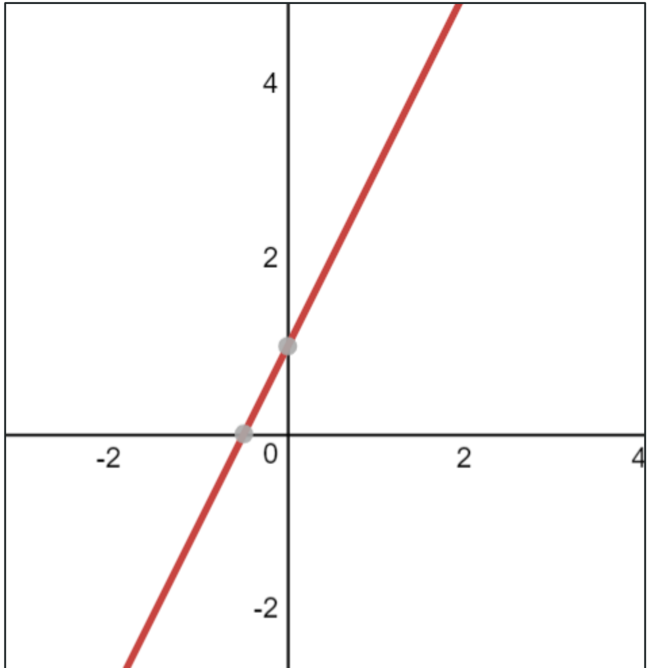
$x = 3$



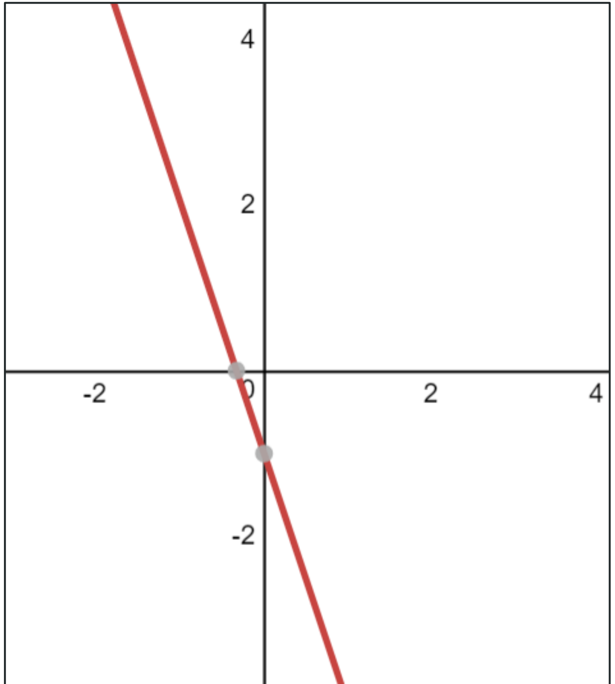
Tipos de funciones

- **Lineal** $f(x) = ax + b$

$f(x) = 2x + 1$



$f(x) = -3x - 1$

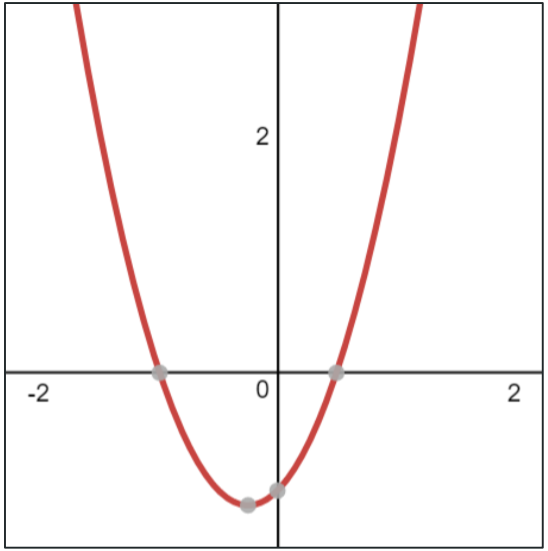


a es la pendiente de la recta (inclinación), y b es el punto donde corta en $x = 0$

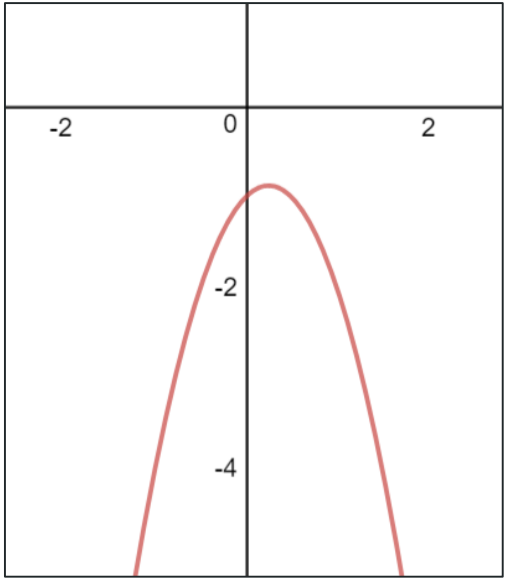
Tipos de funciones

- **Cuadráticas** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

$f(x) = 2x^2 + x - 1$

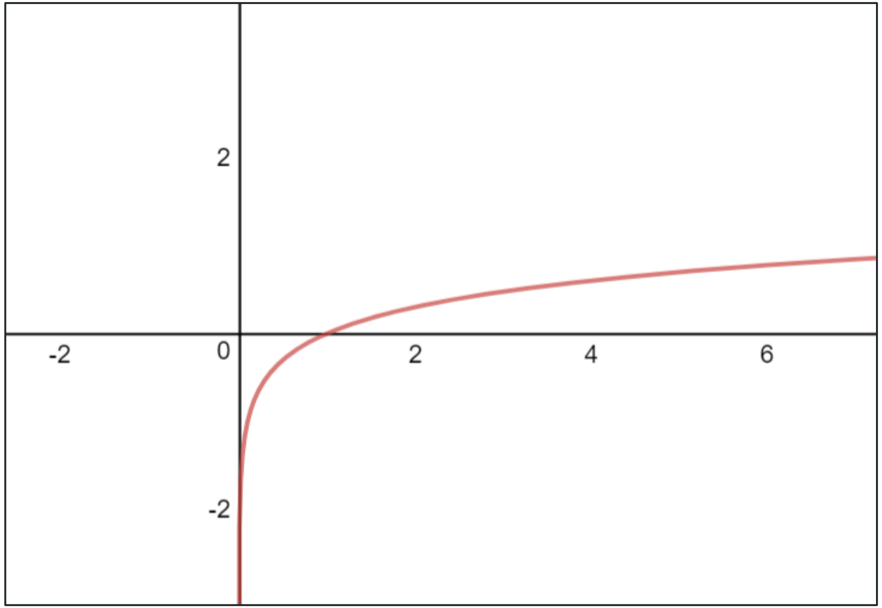


$f(x) = -2x^2 + x - 1$



Tipos de funciones

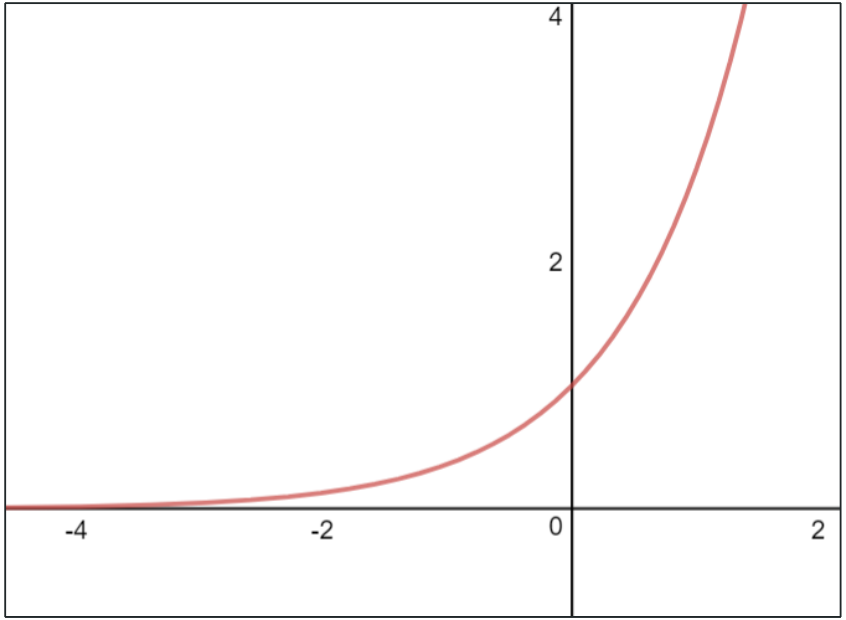
- **Logaritmo** $f(x) = log(x)$



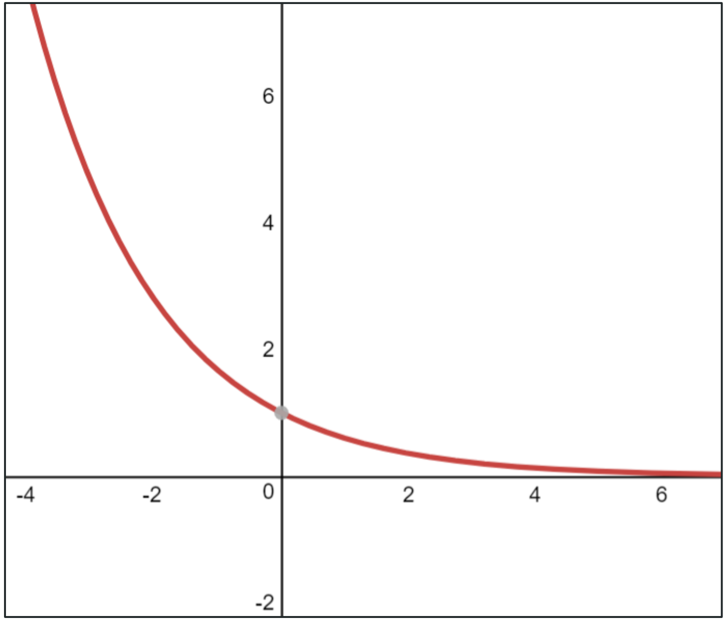
Tipos de funciones

- **Exponencial** $f(x) = a^x$

$f(x) = e^x$



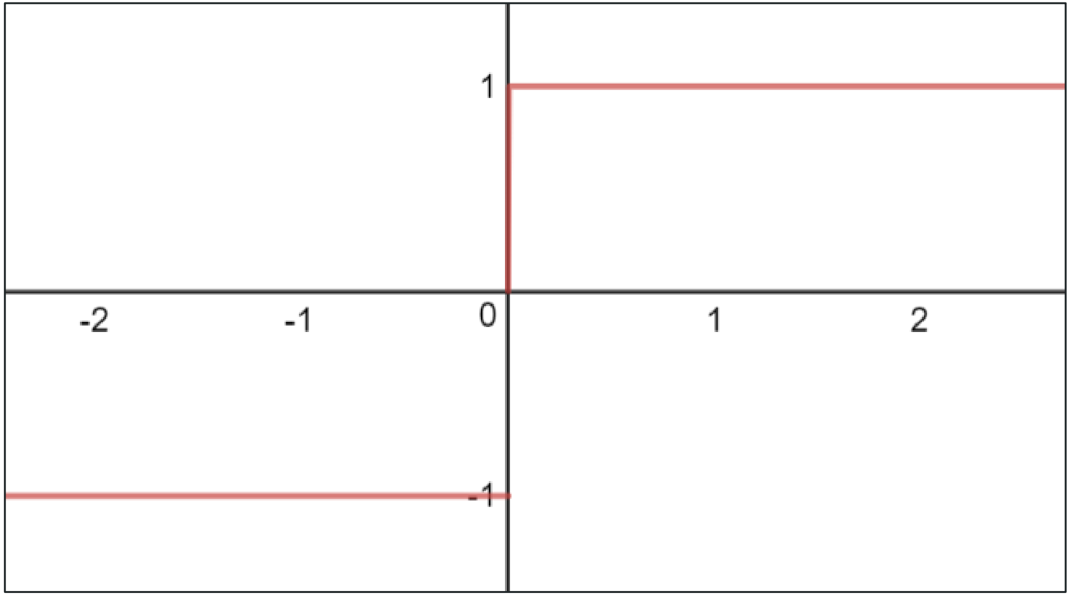
$f(x) = 0.6^x$



Tipos de funciones

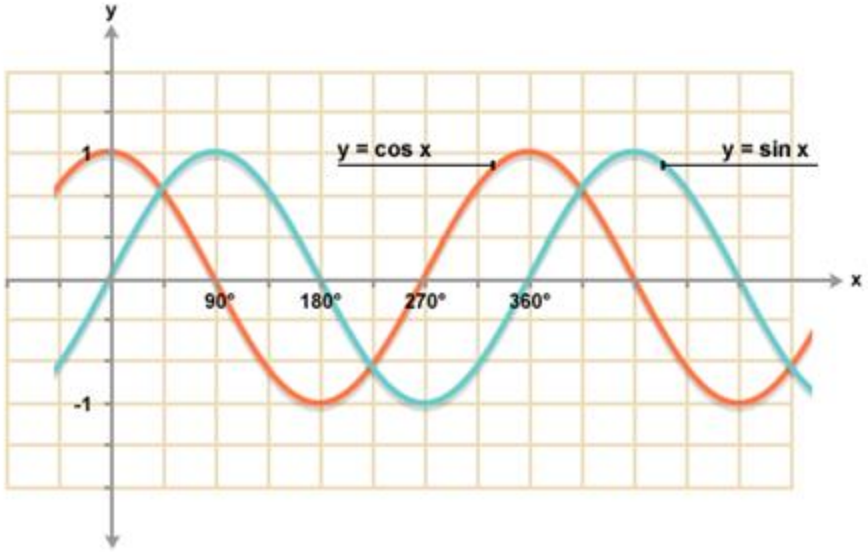
- **Función signo**

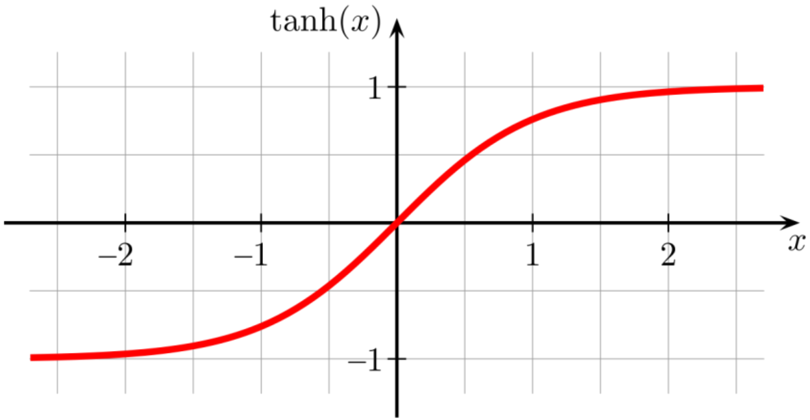
$$f(x) = \begin{cases} -1 \; si \; x < 0 \\ 0 \quad si \; x = 0 \\ 1 \quad si \; x > 0 \end{cases}$$



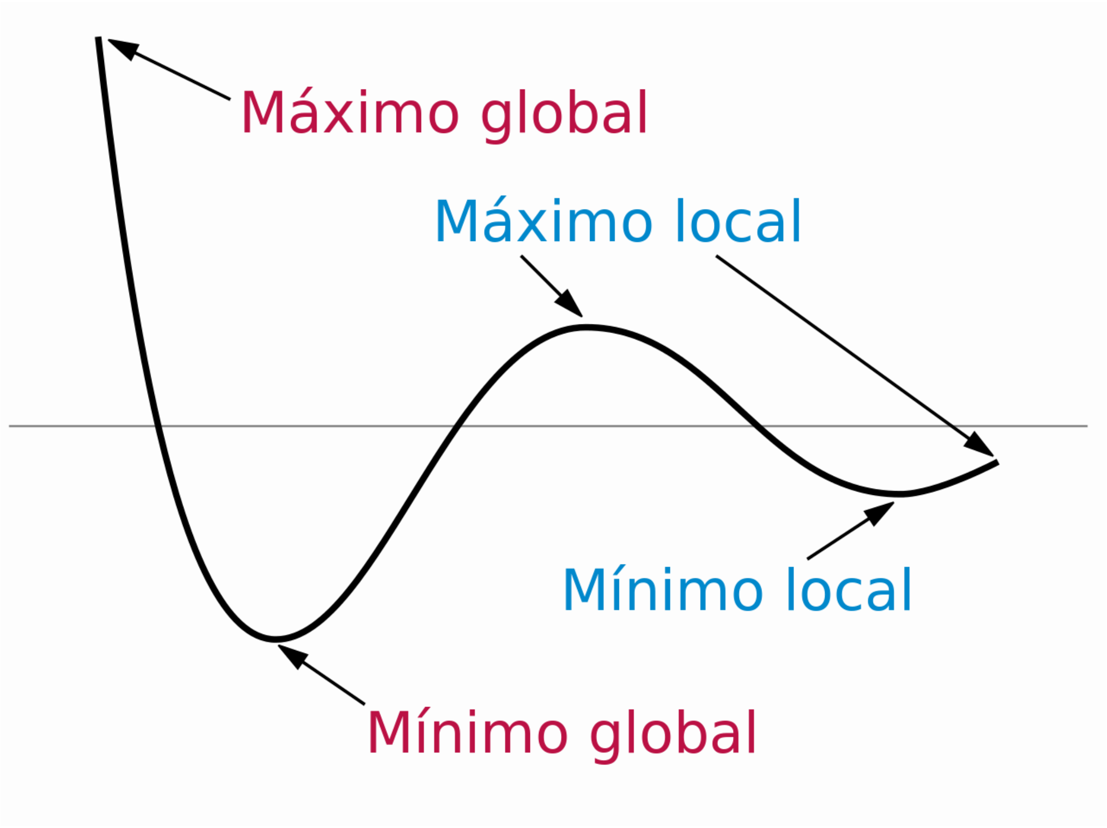
Tipos de funciones

- **Trigonométricas**



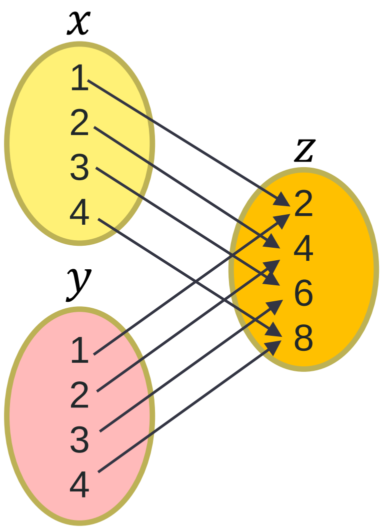


Máximos y mínimos de una función



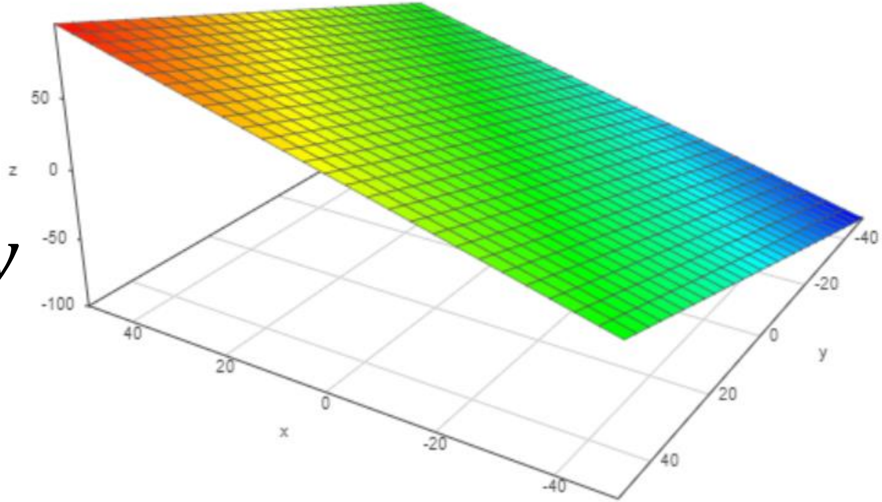
Funciones de varias variables

- Su entrada consiste en varios números



$$z = x + y$$

$$f(x, y) = x + y$$



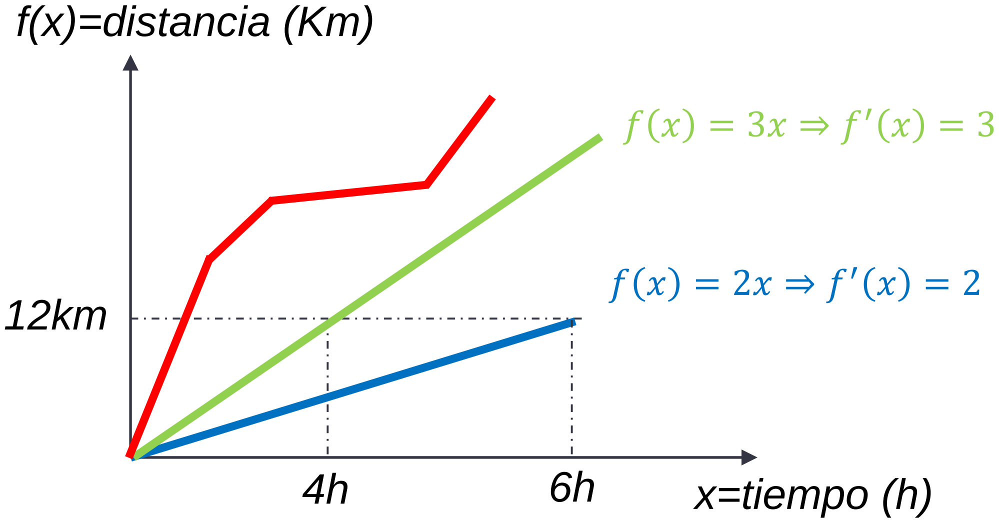
$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

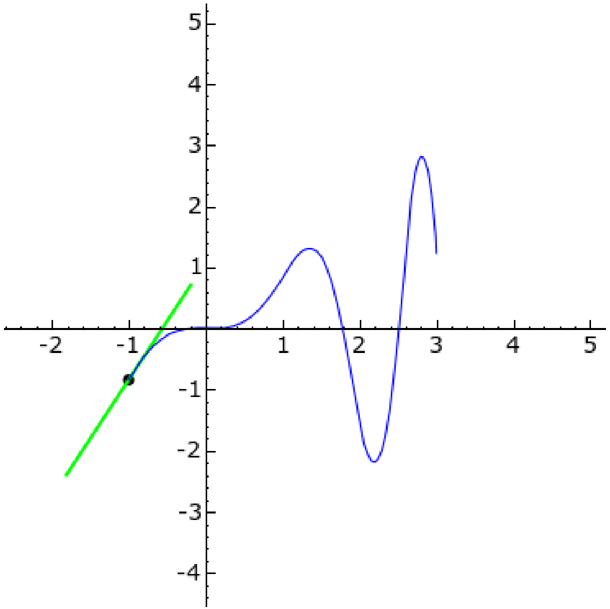
1. Matemática Analítica

1.8. Derivadas

Derivadas

- La derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto





Derivadas de funciones de una variable

- Sea $f(x)$ una función. Expresamos su derivada como $f'(x)$ ó $\frac{df}{dx}$

- Tabla de derivadas más comunes $\Rightarrow$

- **Regla de la cadena**
  (para funciones compuestas):

Si $\boldsymbol{y = f(u)}$ es una función derivable de u y $\boldsymbol{u = g(x)}$ es una función derivable de x, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x (a > 0)$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = (x^n)^{-1} = x^{-n}$	$f'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \mathrm{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\mathrm{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Regla de la cadena: ejemplos

- $y = (x^2+1)^3 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$
  $u = (x^2+1)$
  $y = u^3$

- $y = \ln(x^4) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3$
  $u = (x^4)$
  $y = \ln u$

- $f(x) = ax$
- $J(a) = (f(x) - y)^2 \quad \Rightarrow \frac{dJ}{da} = \frac{dJ}{df} \cdot \frac{df}{da} = 2(f(x) - y) \cdot x$

Derivadas de funciones de varias variables

- El **Gradiente** es la generalización de derivada a funciones de más de una variable
- Sea $f(x,y)$ una función de dos variables. Su gradiente es un vector compuesto por las derivadas parciales:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Ejemplo: $f(x,y) = 3x^2 + y^3$

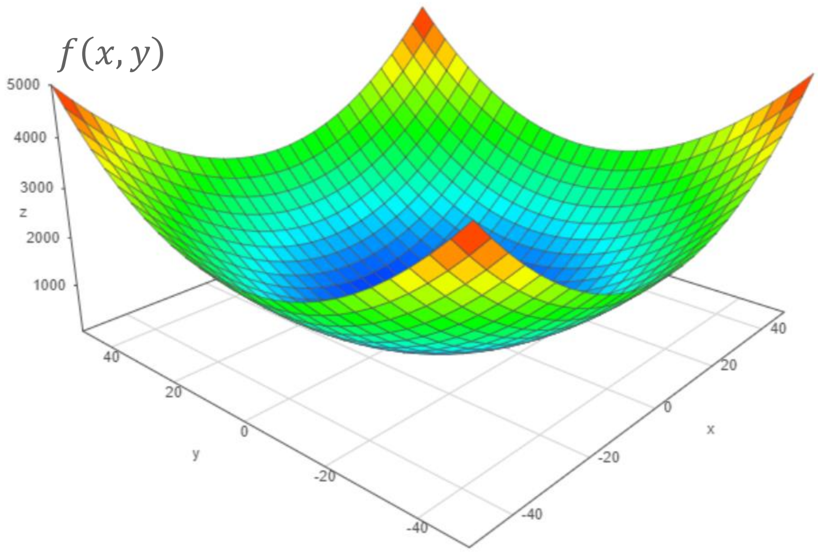
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \qquad \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x \\ 3y^2 \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

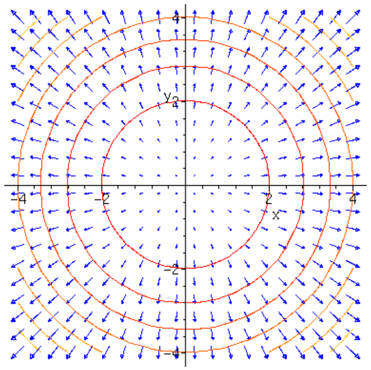
Interpretación del gradiente

- Ejemplo

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$





En cada punto del plano XY, el vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de $f(x,y)$

1. Matemática Analítica

1.9. Optimización

Optimización

- Consiste en obtener el máximo o mínimo de una función sujeta a posibles restricciones

- Ejemplo: El Levante vende 1000 camisetas cada mes a un precio de 12 euros. Tras realizar una encuesta, se estima que por cada incremento de 1 euro en el precio, se venderían 10 camisetas menos. ¿A qué precio debe vender el Levante las camisetas para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el nuevo beneficio esperado?

$$Beneficio(B) = Precio(P) \times Cantidad(C)$$

$$B = (12 + 1x) \times (1000 - 10x)$$

x representa el número de incrementos de 1€

$$B = -10x^2 + 880x + 12000$$

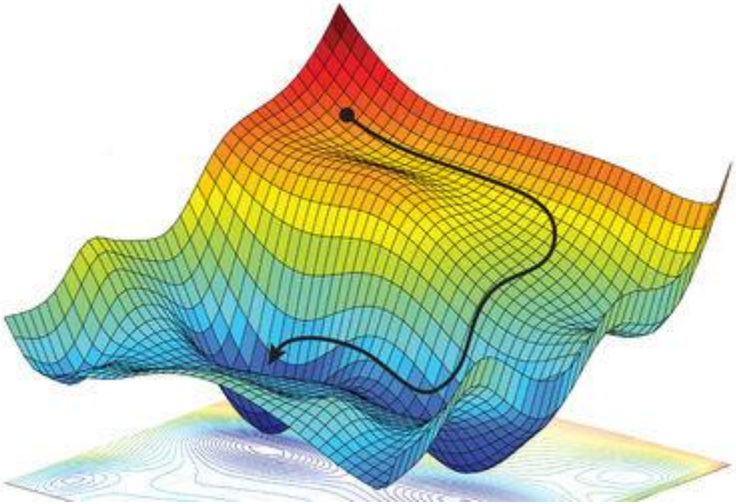
$$B' = -20x + 880 = 0 \quad \Rightarrow x = 44$$

⇒ El precio que maximiza los beneficios será: $P = 12 + 1 \times 44 = \mathbf{56}$ euros

⇒ El beneficio esperado será: $B = 56 \times (1000 - 10 \times 44) = \mathbf{31.360}$ euros

Optimización: gradiente descendiente

- El algoritmo del gradiente descendiente es muy utilizado en problemas de Inteligencia Artificial, cuando tenemos funciones multivariables

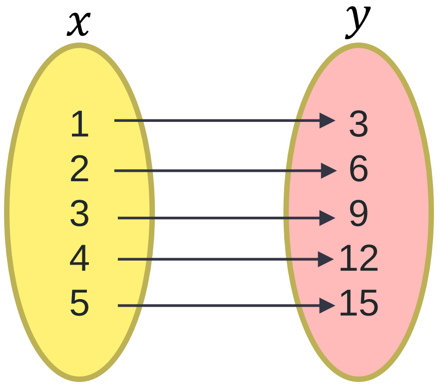


Conclusiones Cálculo

1.7 Funciones

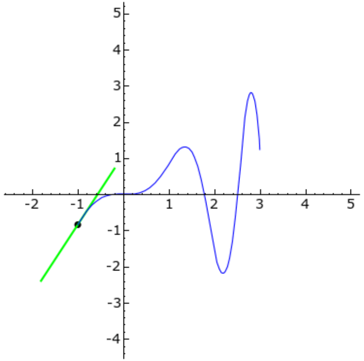
1.8 Derivadas

1.9 Optimización

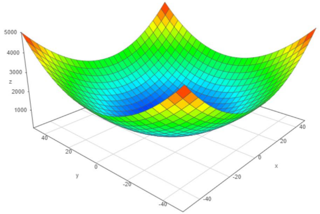


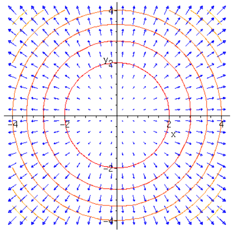
$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

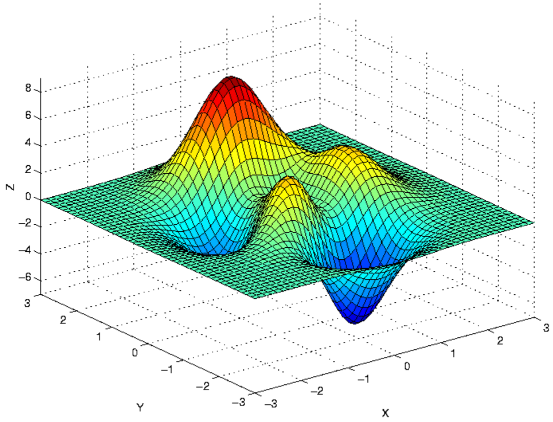
$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$



$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$







¡Gracias!

Contacto: Rafael Zambrano

rafazamb@gmail.com