Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Кочуров Максим Вадимович

Эконометрическое моделирование динамики корреляций доходностей финансовых стратегий

Выпускная квалификационная работа
Бакалавр Экономики

Научный руководитель:
доцент, кандидат экономических наук
Лукаш Евгений Николаевич

Москва — 2018

Оглавление

Введение

Составление портфеля из рыночных инструментов – задача, которую решает любой крупный инвестиционный фонд. Из-за меняющейся рыночной и политической ситуации не вся историческая информация адекватно описывает настоящую динамику доходностей активов.

В недавнее время появились компании, составляющие портфели не из рыночных инструментов, а из торговых стратегий. Торговая стратегия заключается в использовании исторических данных о доходностях активов для выбора оптимальной структуры портфеля активов на каждый следующий период времени. Результат работы алгоритма выражается в получаемой доходности, а портфель из торговых стратегий – это набор алгоритмов, которые будут в заданных долях делить имеющиеся для инвестирования средства. Этот подход имеет свои преимущества и недостатки:

– Стратегия может реагировать на экзогенные шоки, (+)
– База стратегий очень большая, (+/−)
– Присутствуют транзакционные издержки, (−)
– Есть риск непредсказуемого поведения стратегии, (−)

В связи с этим, традиционные подходы портфельной оптимизации неприменимы: большое количество компонент портфеля (порядка сотен тысяч) не сопоставимо с периодом доступных наблюдений, при этом, сами алгоритмы придумываются людьми не находящимися в штате на соревновательной основе, создавая проблемы оценки истинной доходности. Последние исследования показали существование не только динамики волатильности доходностей торговых активов, но и корреляций между ними. Ведущие компании[1] заинтересованы в адаптации существующих методов к специфике задачи оптимизации портфеля торговых стратегий для достижения желаемого соотношения риск–доходность. Эта задача очень новая, на практике к ней выдвигаются особые требования к методу портфельной оптимизации:

– Учет специфики динамики доходностей алгоритмов для оценки будущих рисков
– Способность метода работать с большой базой алгоритмов при составлении портфеля
– Учитывать специфику происхождения алгоритмов

Однако в научной литературе специфика построения портфеля именно из торговых стратегий не освещена. В связи с интересом индустрии и недостатком теоретических исследований, эта тема является актуальной и востребованной.

Цель исследования – разработка процедуры составления портфеля биржевых торговых стратегий, учитывающих априорные знания о распределении их доходностей.

Таким образом необходимо решить следующие задачи:

[1] Например **Quantopian LLC** (Официальный сайт: https://www.quantopian.com)

1. Сформировать общую схему моделирования динамики торговых стратегий, которая учитывает особенности, связанные с их доходностями: возможная динамика корреляций, стохастическая волатильность, различные законы распределения до и после момента создания алгоритма
2. Предложить конкретные спецификации модели динамики доходностей торговых стратегий, отражающие указанные особенности
3. Предложить метод оценивания параметров модели, и, ввиду отсутствия готовых решений, реализовать его в виде программного продукта
4. Разработать процедуру составления портфеля на основе модели динамики
5. Основываясь на реальных данных выбрать адекватную спецификацию модели и оценить ее параметры
6. Сравнить разработанную процедуру с существующей, используемой на практике

Сформулированные цели и задачи определили струтктуры работы. В первой главе на основе обзора литературы делается критический анализ методов формирования портфеля торговых стратегий. Во второй главе проводится выбор адекватного инструментария моделирования динамики доходностей, в частности, обосновываются преимущества использования байесовского подхода. Предлагаются различные модификации модели динамики доходности торговых стратегий, соответствующие альтернативным предпосылки (наличие или отсутствие корреляций между доходностями и их постоянство или изменчивость во времени). Предлагается общая общая схема составления портфеля торговых стратегий на основе модели динамики доходностей. Третья глава носит практический характер. На языке `Python` реализуется предложенная модель динамики доходностей и на основе предварительного анализа данных выбирается адекватная спецификация модели. Сравнение результатов использования модели для построения портфеля торговых стратегий с традиционной процедурой делается на основе процедур бутстрап и монте–карло.

Успешность проведения исследования во многом определилась информационной поддержкой компании **Quantopian LLC**, которая предоставила доступ к своей базе алгоритмов торговли и вычислительным мощностям. В соответствии с соглашением, авторские права на использование программного кода, созданного автором, принадлежат компании **Quantopian LLC**.

Глава 1. Проблема построения портфеля торговых стратегий на финансовом рынке

Составление портфеля из торговых стратегий (алгоритмов[1]) – задача, которой стали активно заниматься крупные хедж-фонды. В отличии от финансовых активов, которые традиционно используются для составления портфеля, число алгоритмов, из которых можно составлять портфель, практически не ограничено. Причем алгоритмы рассматриваются как источник стохастического денежного потока, доходностей, что делает работу с ними неотличимой от работы с привычными финансовыми инструментами.

Разнообразие алгоритмов открывает возможности для диверсификации при составлении портфеля, однако, для этого необходима исследовательская работа. Свойства распределения доходностей алгоритмов не поддаются интерпретации, мотивация, которая стоит за идеей использования алгоритмов в качестве компонент портфеля – возможность найти стабильные алгоритмы, которые минимально подвержены специфичным для компаний шокам, распределение доходности которых стационарно. Из стабильных алгоритмов можно составлять портфель с предсказуемыми свойствами.

1.1 Торговые стратегии и диверсификация рисков

На рынке присутствует огромное количество активов с разными свойствами. Все активы в большей или меньшей степени подвержены рискам, например:

1. рыночный риск – непредсказуемое поведение рынка, влияющее на все или часть секторов
2. риск ликвидности – несоответствие ожидаемых и действительных сроков сделок
3. риски компаний – асимметрия информации инвестора и менеджмента компании

Инвестора будем рассматривать как рационального агента, который имеет некоторую функцию предпочтений относительно активов, так как целью является практическое применение модели для формирование портфеля.

Дискретный выбор одного единственного актива (как и алгоритма) может не быть оптимальным выбором с точки зрения инвестора. Поскольку разные активы имеют разное соотношение риска и доходности, имеет смысл выбирать тот взвешенный набор активов, который бы максимизировал заданную функцию предпочтений, диверсифицируя риск (Markowitz, 1959). С математической точки зрения всевозможные

[1] В работе понятия торговой стратегии и алгоритма – синонимичны

выпуклые комбинации активов в портфеле образуют допустимое множество соотношений риск-доходность. Выбор оптимальной – задача портфельной оптимизации. При этом, учитываются особенности совместного распределения доходностей активов.

Существуют различные работы подтверждающие факт непостоянства рыночной ситуации (Billio & Pelizzon, 2003; Koutmos, 2012). Меняются ожидаемые доходности активов и риски связанные с каждым из них. Таким образом, может быть полезным периодически переоценивать ситуацию на рынке и менять структуру портфеля.

Заранее заданные правила пересмотра называют торговой стратегией (алгоритмом). В течении периода работы алгоритм составляет динамически меняющийся портфель. Есть надежда, что торговая стратегия позволит диверсифицировать риски, связанные с изменением рыночной конъюнктуры и, в тоже время, риски, связанные с отдельными компаниями (Lorenz, 2008).

Автономность алгоритма и абстракция от специфики отрасли или отдельной компании дают надежду на то, что в какой-то степени получится этих рисков избежать. Стоит заметить, что возникают риски специфичные именно для алгоритмов:

– риск непредсказуемого поведения
– риск смещенной оценки статистических показателей

Эти риски возникают по причине того, что каждый алгоритм создается человеком, наблюдающим результат процесса своей деятельности (создание алгоритма). Будущее поведение алгоритма не определено.

Отдельно стоит отметить, что не стоит цели обыграть рынок отдельным алгоритмом, напротив, важно разнообразие, которое получается благодаря бесконечному числу возможных торговых стратегий. Стратегии могут быть любые (возможно даже случайные), главное, чтобы они были не похожи друг на друга по поведению и реакции на шоки рынка. Это разнообразие особенно интересно с точки зрения портфельной теории, однако вопрос этот плохо изучен в литературе. Большинство работ посвящены анализу одной стратегии, но не портфелю из них (Lorenz, 2008; Nuti et al., 2011). В этой работе будет предпринята попытка изучить эту сторону вопроса и попробовать учесть специфику алгоритмической торговли при составлении портфеля.

1.2 Особенности распределения доходностей торговых стратегий

Первая важная особенность торговых стратегий состоит в том, что они создаются человеком, автором. Автору доступна информация о том, как бы действовал алгоритм на исторических данных. Эта процедура называется «бэктест», с ее помощью можно получить огромное количество статистик для дальнейшего анализа эффективности стратегии. Ориентируясь на эту информацию, можно составить стратегию, которая хорошо работает на исторических данных.

К сожалению, на последующем периоде поведение алгоритма непредсказуемо. Это является структурным сдвигом для торговой стратегии. Все, что было до момента создания, принимать во внимание, конечно, стоит, но с большой осторожностью. Доверять следует статистикам, полученным на периоде после создания. В противном случае, получится ситуация, когда на новых данных наилучшая стратегия ведет себя исключительно плохо в будущем, и, что хуже всего, мы были бы уверены в ее надежности и качестве.

Алгоритмов может быть бесконечно много, все их невозможно использовать для построения портфеля, есть необходимость выбирать, какие алгоритмы участвуют в оптимизации, а какие – нет. Механизмы селекции алгоритмов добиваются того, чтобы поведения «до» и «после» были близки хотя бы приблизительно, доходности которых хотя бы стационарны. На практике таких алгоримов очень немного.

(Dumas et al., 1998) рекомендует учитывать непостоянство волатильности при анализе финансовых рядов. Оснований утверждать, что для стратегий волатильность доходностей постоянна во времени – нет. Корректная оценка рисков, связанных с непостоянной волатильностью, требует модели волатильности.

В ряде исследований (Vaga, 1990; Oral & Unal, 2017) был выявлен факт непостоянства корреляций между доходностями компаний во времени. Так, например, в период кризисов корреляции усиливается. Рынок сильно влияет на эти связи непредсказуемым образом, похожие эффекты могут наблюдаться и для торговых стратегий. Моделирование динамики взаимосвязей поможет должным образом учесть эти риски.

1.3 Основные подходы формирования портфеля торговых стратегий

Портфельная теория Марковица (Markowitz, 1959) – большой прорыв в решении задачи портфельной оптимизации. Тем не менее, у нее есть ряд недостатков(Lorenz, 2008):

- инвестирование однопериодное
- модель не учитывает особенности распределения, только первый и второй центральные моменты
- инвестор не меняет состав портфеля

Lorenz (2008); Alessandro & Raffaele (2006) предлагают использовать идеи Neumann & Morgenstern (1944) и максимизировать ожидаемую функцию полезности инвестора. Это позволяет обобщить портфельную теорию, оптимальный портфель Марковица выступает частным случаем при определенных предпосылках. Этот подход позволяет производить оптимизацию портфеля методом Монте–Карло.

Последний подход позволит учесть особенности распределения торговых стратегий, он и будет использован для составления оптимального портфеля. Задачи, которые необходимо решить в рамках этого подхода:

1. составить модель динамики доходностей торговых стратегий и учесть:
    а) структурные сдвиги
    б) динамику волатильности
    в) динамику корреляций
2. оценить вероятностную модель динамики доходностей
3. сформировать портфель используя метод Монте–Карло

Глава 2. Моделирование динамики доходности торговых стратегий

2.1 Выбор парадигмы моделирования: частотный и байесовский подходы

Существует две парадигмы для моделирования – частотный подход и байесовский. Каждая из них обладает своими преимуществами и недостатками (Gelman, 2008):

Таблица 1 — Сравнение байесовской и частотной парадигмы

	Байесовский	Частотный
Трактование вероятности	мера знания	частота события
Параметры модели	случайные величины	неизвестные константы
Данные	из неизвестного распределения	
Учет априорных знаний	да	нет
Необходимость большой выборки	нет	да

Составление портфеля торговых стратегий – практическая задача, решаемая инвестиционным фондом. Существуют процессы создания алгоритмов вовлекающие посторонних людей, они участвуют на конкурсной основе и результатом их работы являются торговые стратегии. Конкурсная основа мероприятия смещает стимулы участников, как следствие, создаются алгоритмы хорошо работающие на бэктесте, но в реальной ситуации ведут себя непредсказуемо. Следуя байесовскому подходу это можно выразить в априорном распределении на доходности «до» и «после» создания алгоритма. Традиционный частотный подход не способен в полной мере отразить существенную разницу между этими периодами, кроме как структурно.

База стратегий огромная, для применения портфельной теории необходимо выбрать подмножество и работать с ним. Этот отбор так же влияет на то, какие алгоритмы участвуют в построении портфеля, меняются и предположения о распределении доходностей торговых стратегий, их волатильности и динамике. Частотный подход не способен учесть экспертные знания о влиянии процедуры отбора на финальную выборку.

Байесовский подход является предпочтительным, он позволяет учесть экспертные знания в модели и неопределенность в параметрах как самой модели, так и ее предсказаний относительно будущей динамики.

2.2 Учет специфики динамики доходностей в рамках байесовского подхода

2.2.1 Моделирование сдвигов доходностей

Для учета структурных сдвигов с известной точкой перехода можно использовать две различные модели «до» и «после» (Salazar, 1982). Этот подход – естественная идея, кроме того, есть свобода учитывать структурные изменения лишь в тех частях модели, которые в этом нуждаются, как например средние доходности.

2.2.2 Моделирование волатильности доходностей во времени

Для учета стохастической волатильности используется класс моделей имеющих скрытый марковский процесс (Ghahramani, 2001):

– GARCH (Engle, 1982)

– Gaussian Process Volatility Model (GPVol) (Han et al., 2016)

Семейство GPVol гораздо богаче чем GARCH – оно непараметрическое. К тому же модель GPVol относительно проста в реализации и встраивается в байесовский подход.

Гауссовский процесс – непараметрическое априорное распределение над функциями. Оно широко используется при байесовском моделировании и позволяет оценить неизвестную функцию. В контексте задачи моделирования временных рядов, такой функцией будет скалярная функция от времени, описывающая динамику временного ряда. Важным достоинством гауссовского процесса над другими моделями временных рядов являются его интерпретируемость, легкость имплементации и оценки. Что важно для приложения к задаче построения модели и учета априорных знаний, это интерпретируемость параметров. В ней главными являются значения среднего и магнитуды. В них можно учесть предположения о безусловном распределении доходностей алгоритмов.

$$f \sim \mathcal{GP}(m, k) \iff \mathbb{E}f(x) = m(x), \quad \mathbb{E}(f(x) - m(x))(f(x') - m(x')) = k(x, x'), \tag{2.1}$$

Где m – функция от x, но так же может быть и константой. Если считать, что доходности распределены по гаусовскому процессу, то параметр среднего можно интерпретировать, как среднюю доходность, магнитуду как средний риск. В работе будет рассмотрен гауссовский процесс с гауссовским ядром $k(x, x') = exp(-\frac{||x-x'||^2}{2\sigma^2})$.

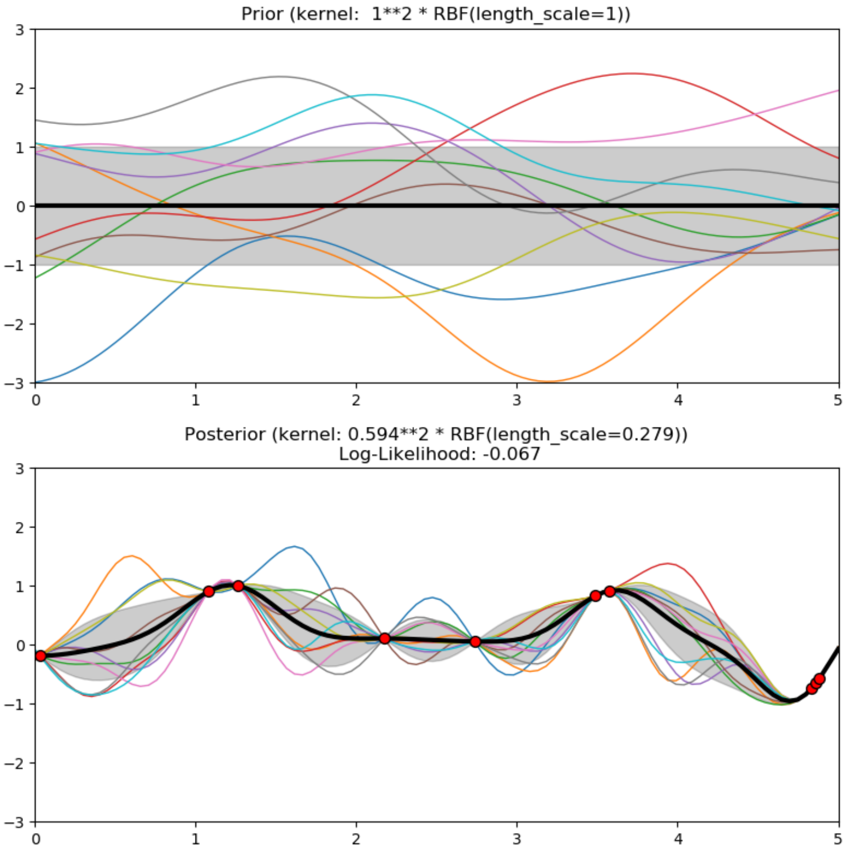

Рисунок 2.1 — Пример Гауссовского Процесса

Но в постановке GPVol, волатильность – непостоянный параметр, этого можно добиться дополнительно введя шум на доходности, дисперсия которого подчиняется гауссовскому процессу.

$$r_m(t) \sim GP_m \tag{2.2}$$

$$r_v(t) \sim GP_v \tag{2.3}$$

$$r(t) = r_m(t) + t_v(t) \tag{2.4}$$

Волатильность – косвенный показатель, и он не учитывается автором в явном виде. Поэтому процесс стохастической волатильности будем считать неизменным до и после структурного сдвига. Тем временем параметры среднего для процесса на средние доходности будут различаться «до» и «после» структурного сдвига.

2.2.3 Моделирование динамики корреляций доходностей во времени

Моделирование динамики корреляций – сложная задача, это скрытый марковский процесс с большим количеством скрытых состояний, квадратичным по количеству рядов. Без априорных предположений о структуре матрицы корреляций, вычислительная сложность слишком велика. Существует несколько основных подходов для моделирование динамики корреляций.

– Dynamic Conditional Correlation (DCC) (Engle, 2000)

– Dynamic Equicorrelation Stochastic Volatility (DECO) (Kurose & Omori, 2016)

DCC модель моделирует динамику всей ковариационной матрицы, но не работает уже при хоть сколько нибудь значимой размерности. DECO модель берет свои истоки из DCC с дополнительной предпосылкой: существуют группы временных рядов, для которых парные корреляции одинаковы. Это позволяет снизить вычислительную сложность и уменьшить количество оцениваемых параметров.

$$u_t = \frac{\sum_{i \neq j} r_i r_j}{(n-1)\sum_i r_i^2} \tag{2.5}$$

$$\rho_{t+1} = w + \alpha u_t + \beta \rho_t, \quad w/(1-\alpha-\beta) \in \left(\tfrac{-1}{n-1}, 1\right) \tag{2.6}$$

Сложность задания параметрической модели состоит в недостаточно подробном руководстве авторов статьи к имплементации. Более того, рекуррентные соотношения в вычислительном графе будут негативно сказываться на скорость вычислений. Естественным продолжением этой модели является гауссовский процесс для ρ_t используя соответствующее биективное преобразование $T : \mathbb{R} \to \left(\tfrac{-1}{n-1}, 1\right)$. Из-за гибкости и удобства моделирования этот метод и будет использован в итоговой спецификации. На основании вышеизложенных причин, было решено использовать модификацию с гауссовским процессом, который не страдает от изложенных недостатков.

$$\kappa_t = logit((\rho_t + \tfrac{1}{n-1})/\tfrac{n}{n-1}) \sim \mathcal{GP}, \tag{2.7}$$

где статистика $\kappa_t \in \mathbb{R}$ и распределена согласно гауссовскому процессу. Такая параметризация крайне удобна, так как лишает необходимости задавать параметрический процесс.

2.3 Формирование модели динамики доходностей торговых стратегий: анализ различных спецификаций

Объединяя части в одно целое, получим генеративную модель, учитывающую динамику корреляций торговых стратегий:

Расширенная спецификация с динамикой корреляций (DynCorr)

$$
\begin{aligned}
\mu_{\text{is}} &\sim p(\mu_{\text{is}}); \in \mathbb{R}^k && \text{ожидаемая доходность в обучающем периоде}\\
\mu_{\text{oos}} &\sim p(\mu_{\text{oos}}); \in \mathbb{R}^k && \text{ожидаемая доходность в тестовом периоде}\\
\nu &\sim p(\nu); \in \mathbb{R}^k && \text{ожидаемый логарифм дисперсии}\\
\kappa &\sim p(\kappa); \in \mathbb{R} && \text{ожидаемая статистика корреляции}\\
\theta_{\mathcal{GP}} &\sim p(\theta_{\mathcal{GP}}) && \text{параметры многомерного гауссовского процесса}\\
\varphi_{\mathcal{GP}} &\sim p(\varphi_{\mathcal{GP}}) &&\\
\psi_{\mathcal{GP}} &\sim p(\psi_{\mathcal{GP}}) &&\\
\Delta\mu &\sim \mathcal{GP}(\theta_{\mathcal{GP}}); f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k && \text{изменение доходности во времени}\\
\Delta\nu &\sim \mathcal{GP}(\varphi_{\mathcal{GP}}); f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k && \text{изменение логарифма дисперсии во времени}\\
\Delta\kappa &\sim \mathcal{GP}(\psi_{\mathcal{GP}}); f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} && \text{изменение статистики корреляции во времени}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_t &= \begin{cases} \mu_{\text{is}} + \Delta\mu(t), t \in \{\text{обучающий период}\} \\ \mu_{\text{oos}} + \Delta\mu(t), t \in \{\text{тестовый период}\} \end{cases} && \text{среднее доходностей в момент t}\\
\sigma_t^2 &= \exp(\nu + \Delta\nu(t)) && \text{дисперсия доходностей в момент t}\\
\rho_t &= \tfrac{k}{k-1}(\text{sigmoid}(\kappa + \Delta\kappa(t)) - \tfrac{1}{k-1}) && \text{корреляция доходностей в момент t}\\
\Sigma_t &= ((1-\rho_t)\mathbb{I} + \rho_t) \odot \sigma_t\sigma_t^\top && \text{ковариационная матрица в момент t}\\
R_t &\sim \mathcal{N}(\mu_t, \Sigma_t) && \text{наблюдаемые доходности в момент t}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

где k – количество алгоритмов. Априорные распределения задаются исходя из природы данных и не могут быть указаны на этом этапе.

Априорные распределения играют важную роль в моделировании, их подбор субъективная задача. Она выполняется совместно с экспертами в области. В частности, большую поддержку оказали в Quantopian при проведении экспериментальной части. Благодаря экспертным знаниям получается учесть не только структурную составляющую зависимостей в модели, но также и априорные знания о параметрах. Это позволяет на малом наборе данных получать качественную модель, игнорировать выбросы, избегать эффекта переобучения. Так, априорное распределение на ожидаемые доходности формируется с учетом этапа селекции, который, как ожидается, отбирает наиболее стабильные алгоритмы из общей массы.

Обычной практикой является введение гиперaприорного распределения – арпиорное распределение на параметры априорного распределения. Оно позволяет сгладить возможно неудачный выбор фиксированных параметров априорного распределения и выражает неуверенность в изначальных предположениях. Эти подходы хорошо описаны например в Simpson et al. (2014). В этой работе гиперприоры – широко используются еще и для моделирования некоторых других параметров, например стандартного отклонения для априорного распределения на средние доходности. Для упрощения выкладок гипераприорные распределения опущены в выкладках.

Несмотря на гибкость байесовского подхода остается проблематичным учесть неопределенность в структуре самой модели. Введение компоненты нестабильности корреляций во времени существенно усложняет модель как структурно, так и вычислительно. Гипотеза о необходимости динамики корреляций была сформирована на основании работ по рыночным активам (Vaga, 1990; Oral & Unal, 2017), подтверждается ли такое наблюдение на данных о доходностях алгоритмических стратегий – вопрос, который подлежит изучению.

Гауссовский процесс является центральной частью модели. Этот непараметрический метод, тем не менее, требует подбора ядра для каждой отдельной задачи. Временные ряды – особый вид данных, часто требуется учитывать сезонность или тренд (Taylor & Letham, 2017). Одним из бизнес процессов в компании является предварительный отбор алгоритмов, его проходят около 0.05%. Успешно отобранные алгоритмы, что самое главное, имеют стационарное распределение доходностей. Таким образом, основной предпосылкой о структуре временного ряда будет его стационарность. Гауссовское ядро выражает вводимые предпосылки функционально, поэтому я буду использовать его в своей работе, более того, оно позволяет оптимизировать некоторые вычисления.

Возможны альтернативные спецификации модели, которые учитывают не динамику корреляций, а наоборот, статику.

Спецификация со статическими корреляциями (Corr). Расширенная спецификация допускает упрощения. В случае, если не будет выявлено динамической корреляции в данных, осмысленно использовать спецификацию, которая вводит дополнительную предпосылку о неизменности корреляций. Более жесткие предпосылки не делают модель беднее. Напротив, предыдущая спецификация не позволяла иметь корреляции между подгруппами алгоритмов, и ковариационная матрица имеет блок диагональный вид. Эта же, напротив, позволяет оценивать полную ковариационную матрицу, хоть и постоянную во времени.

$$\begin{aligned}
&L \sim p(L); \in R^{k\times k} : \ L_{ii} > 0 && \text{нижняя треугольная матрица}\\
&\tilde{\Sigma} = LL^\top && \text{«средняя» ковариационная матрица}\\
&\Sigma_t = \tilde{\Sigma} \odot \sigma_t \sigma_t^\top && \text{ковариационная матрица в момент t}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Стоит отметить, что априорное распределение задается сразу в виде $p(\tilde{\Sigma})$, причем возможно одновременно контролировать как корреляции, так и дисперсии. Основным инструментом здесь является LKJ распределение (Lewandowski et al., 2009) на параметры корреляций. Оно позволяет контролировать число скоррелированных компонент: от диагональной ковариационной матрицы до плотной, где корреляций много. Это распределение рекомендовано использовать вместо Inverse Wishart (Haff, 1979), которое не обладает хорошими свойствами интерпретируемости.

Априорное распределение на дисперсии задается отдельно, как правило оно логнормальное, что и было использовано в данной работе. Альтернативой являются распределения с тяжелыми хвостами, как Half Cauchy или Half StudentT (Gelman, 2006).

Спецификация без корреляций (Diag). Принцип «Бритвы Оккама» – лучше та модель, что максимально просто объясняет природу данных. Следуя этому принципы вводится в рассмотрение дополнительная спецификация, которая вообще исключает корреляции. Она более устойчива, проста в оценке. Не исключено, что более простая модель хорошо подойдет для практических задач.

$$\Sigma_t = diag(\sigma_t^2) \tag{2.10}$$

У каждой спецификации есть свои достоинства и недостатки. Так, даже расширенная спецификация (2.8) в некоторых случаях может уступать более простой модели без динамики корреляций (2.9). Связано это с тем, что моделировать динамику полной ковариационной матрицы чрезвычайно трудная задача и приходится вводить предпосылку о структуре ковариационной матрицы.

Вычислительные ресурсы, требуемые на оценку модели так же различаются. Модель (2.9) слабо масштабируется по числу алгоритмов k, для которых производится оценка динамики, из-за требуемых объемов памяти: $\mathcal{O}(k^2)$ для хранения ковариационной матрицы. Модель учитывающая динамику корреляций избегает этой проблемы, однако требует большого количества вычислительных ресурсов.

Таблица 2 — Сравнение спецификаций модели динамики доходностей финансовых стратегий по ключевым показателям

	DynCorr (2.8)	Corr (2.9)	Diag (2.10)
Динамика корреляций	+	−	−
Полная ковариационная матрица	−	+	−
Динамика волатильности	+	+	+
Сложность оценки, ч. работы сервера	10	3	< 1
Масштабируемость по числу алгоритмов	Низкая	Средняя	Высокая

Необходимая спецификация будет определяться исходя из предварительного эмпирического анализа. Итоговая модель, ее апостериорное распределение, будет оцениваться с помощью Markov Chain Monte Carlo метода NUTS (Hoffman & Gelman, 2011) семейства Hamiltonian Monte Carlo с имплементацией на языке `Python` в пакете PyMC3 (Salvatier et al., 2016)[1].

Hamiltonian Monte Carlo (HMC) – семейство методов, использующая информацию второго порядка (градиенты) для построения марковской цепи. Основной принцип заключается в использовании гимильтоновой динамики (понятие пришло из физики)

[1]К сожалению, из-за соглашения NDA, код проекта не публикуется

чтобы получать симуляции из распределения, не имеющего нормализующей константы в явном виде. Обычно такая сложность возникает ввиду невозможности численного интегрирования по многим переменным.

$$p(x) \propto exp(-\frac{U(x)}{T}) \tag{2.11}$$

Модель представлена системой от позиции и скорости. Вместе они формируют энергию потенциальную и кинетическую:

$$E(x, v) = U(x) + K(v), \quad K(v) \sum_i \frac{mv^2}{2} \tag{2.12}$$

Совместное же распределение $p(x, v)$ раскладывается на два независимых

$$p(x, v) \propto exp(-\frac{E(x,v)}{T}) = exp(-\frac{U(x)}{T})exp(-\frac{K(v)}{T}) = p(x)p(v) \tag{2.13}$$

Используя гамильтонову динамику мы можем сэмплировать из $p(x)$. Для этого необходимо сэмплировать $v \sim p(v)$, а далее, используя тождества из физики, преобразовать x по следующей динамике:

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = \frac{\partial U(x)}{\partial x} \tag{2.14}$$

Однако, используя исключительно динамику, так не получится по-настоящему сэмплировать из-за закона сохранения энергии. Поэтому траектории ограничены и скорость обновляется перед каждой симуляцией динамики. Но и тут не все гладко, необходимо проводить траектории (2.14), обычно используют leapfrog метод для этого.

No U-Turn Sampler (NUTS) – модификация обычного HMC, с поиском оптимальной длины интегрирования (2.14). На сегодняшний день он остается надежным методом, способным решать среднего размера задачи байесовского вывода. Существуют уже готовые реализации этого метода и ими удобно пользоваться (Salvatier et al., 2016).

Альтернативные методы вывода , например вариационные методы (Kucukelbir et al., 2015; Rezende & Mohamed, 2015; Louizos & Welling, 2017), вряд ли будут адекватно подходить под эту задачу, их основное преимущество состоит в том, что они работают в условиях большой размерности параметров и больших данных; это не наш случай. У нас данных мало и количество параметров не огромно. Более того, вариационные методы не всегда хорошо улавливают связи в распределении, что зачастую приводит к нежелательным последствиям. В работе не используются вариационные методы, поскольку основная рекомендация использовать HMC, пока он работает, иначе – вариационные методы.

2.4 Составление портфеля торговых стратегий на основе модели динамики доходностей

Вероятностная модель задает распределение над возможными траекториями доходностей группы алгоритмов. С помощью байесовского вывода возможно оценить распределение на параметры, по реальным данным $p(\Theta \mid r_{1:T})$, после чего можно производить симуляции будущих траекторий

$$r_{T+1:T'} \sim p(r_{T+1:T'} \mid r_{1:T}) = \int p(r_{T+1:T'} \mid \Theta, r_{1:T}) p(\Theta \mid r_{1:T}) d\Theta$$

Это позволяет учесть неопределенность реального поведения доходностей в будущем для формирования портфеля из торговых стратегий.

Используя выпуклую оптимизацию будем составлять портфель, который максимизирует изоэластичную функцию полезности:

$$U_\rho(r) = \begin{cases} \frac{r^{1-\rho}-1}{1-\rho}, & \rho \neq 1 \\ \ln r, & \rho = 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

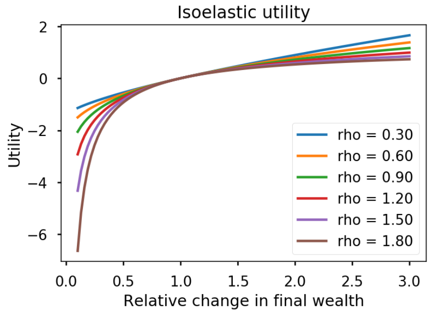

Рисунок 2.2 — Изоэластичная функция полезности, При $\rho = 0$ она риск нейтральна, при $\rho \to \infty$ достигается абсолютное избегание риска.

Для составления портфеля максимизируется матожидание полезности. Выбранная функция обладает свойством избегания риска: потери учитываются в большей степени, чем выигрыши. Оптимальный портфель будет учитывать эти предпочтения.

$$r_{T+1:T'} \sim p(r_{T+1:T'} \mid r_{1:T}) \tag{2.16}$$

$$r^w = -1 + \prod_{t=T+1}^{T'} w^\top (r_t + 1) \tag{2.17}$$

$$\mathbb{E}_{r^w}[U_\rho(r^w)] \to \max_w, \quad w > 0, \quad \sum w = 1 \tag{2.18}$$

Глава 3. Практическое применение модели

Понимание того, как будет работать модель на практике, важная часть исследовательской деятельности. На основе экспериментов можно будет давать практические рекомендации по подбору параметров, спецификации при использовании. Правильная постановка эксперимента позволит сравнить предложенный метод с бейзлайном.

3.1 Описание данных

Инфраструктура, созданная в компании, предусматривает взаимодействие с широким кругом лиц, которые внештатно создают торговые стратегии, получая за это небольшое вознаграждение. При написании алгоритма можно:

1. выбрать торгуемые активы
2. задать периодичность, с которой работает алгоритм
3. собирать любые статистики с предыдущих периодов
4. произвольным образом реструктурировать портфель основываясь на прошлой информации

Обладая навыками программирования на `Python`, можно написать любую стратегию, которая использует только рыночные данные. Алгоритмов огромное количество, более 700 000, большинство из этих алгоритмов написаны энтузиастами. В отличие от рыночных активов, которых ограниченное количество, алгоримов гораздо больше. Это открывает широкие возможности для применения портфельной теории для создания диверсифицированного портфеля.

Тем не менее, применять портфельную теорию проблематично. Для такого количества временных рядов длина ряда слишком мала. Расчет даже ковариационной матрицы требует огромных вычислительных мощностей и памяти. Для решения этой проблемы существует этап предварительного отбора алгоритмов, этап селекции. В инфраструктуре разработана модель, которая выбирает наиболее стабильные из совокупности[1]. После этого этапа остается около 150 торговых стратегий, которые и были использованы для тестирования модели динамики.

[1] Детали реализации защищены NDA

3.2 Проверка предпосылок и выбор спецификации модели

Перед непосредственно оценкой спецификаций модели динамики доходностей, был проведен эмпирический анализ алгоритмов, отобранных после селекции. Основной его задачей было выяснить, какие предпосылки себя оправдывают и какая спецификация наиболее полно описывает распределение доходностей во времени.

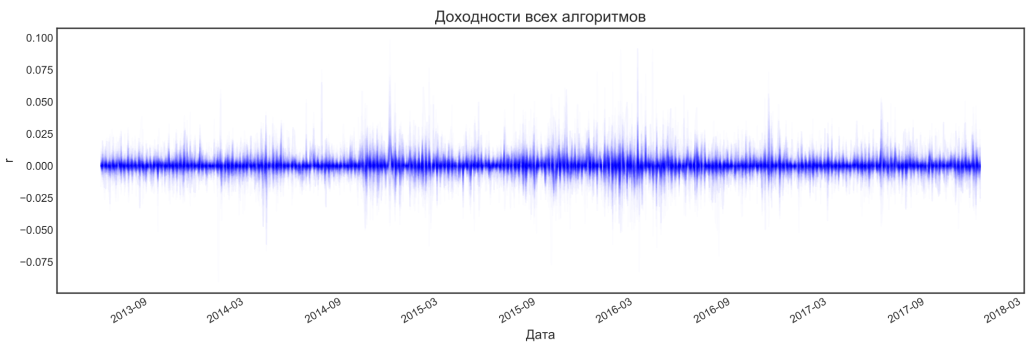

Рисунок 3.1 — Доходности всех алгоритмов, на графике наблюдается непостоянная волатильность

Гипотеза о непостоянстве волатильности находит свое подтверждение в графике распределения доходностей всех алгоритмов во времени (Рисунок 3.1). На нем видны периоды с высокой волатильностью. Более того, эффект наблюдается во многих алгоритмах в рамках одного периода.

Первичный анализ наличия сезонности в общем поведении алгоритмов не дал результатов: распределение доходностей, сгруппированных по месяцам выглядит однородно (Рисунок 3.2).

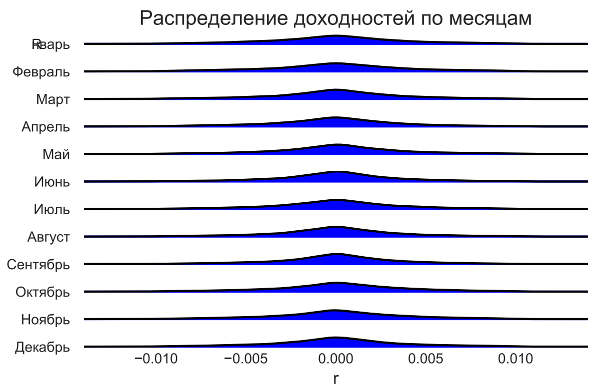

Рисунок 3.2 — Распределение доходностей всех алгоритмов, сгруппированные по месяцам

Этап селекции имел важные последствия на спецификацию модели. Предположение о динамике корреляций оказалось не состоятельным (Рисунок 3.3)[2]. В данных не наблюдается существенного изменения корреляций для большой группы торговых стратегий. Значительное количество траекторий значительно отдалены от нуля. Тем не менее, на основе этого графика сделать вывод о структуре ковариационной матрицы (блочная/плотная) нельзя. В сложившейся ситуации

[2] Теста

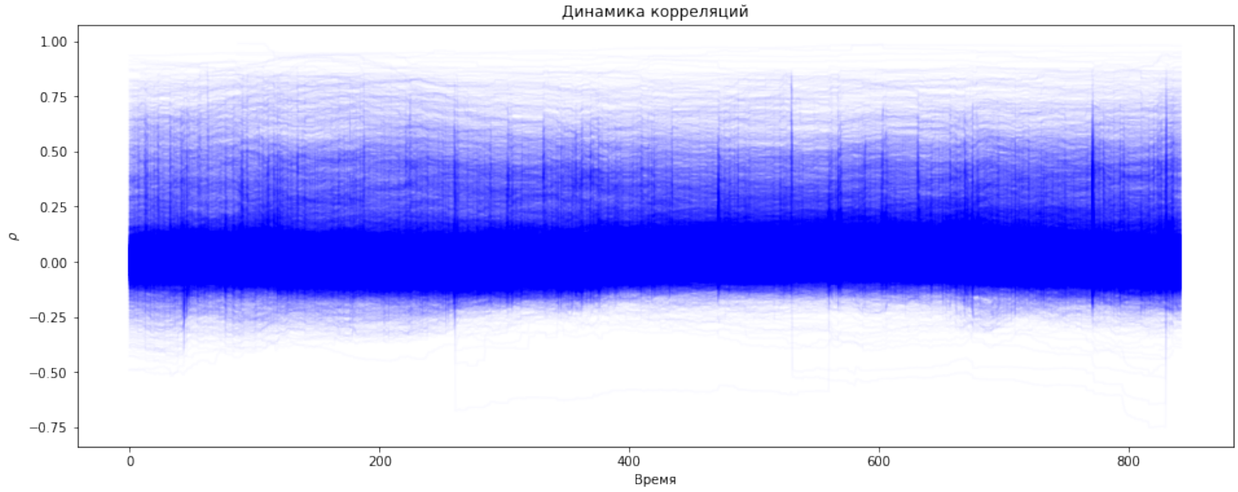

Рисунок 3.3 — График динамики корреляций между торговыми стратегиями. Попарные корреляции были посчитаны за период 2013-2017 с окном 300 дней. Не наблюдается существенного изменения корреляций за этот период.

этот анализ избыточен, так как семейство моделей с плотной матрицей ковариации включает в себя подмножество тех, что имеют блочную структуру.

Выводы, которые можно сделать на основе проведенного анализа:

– присутствует стохастическая волатильность
– сезонность в данных отсутствует или незначительна
– корреляции относительно стабильны во времени
– большинство корреляций околонулевые

Основываясь на них, остается сфокусироваться на двух спецификациях, которые не учитывают динамику корреляций:

– модель без корреляций (2.10)
– модель со статичными корреляциями (2.9)

Корреляционная матрица стабильна во времени, существуют негативные корреляции, много корреляций отличных от нуля, она имеет плотную структуру, которую невозможно учесть, используя блочной структуры матрицу. Модель, учитывающая динамику корреляций, не подходит для моделирования стохастического процесса доходностей торговых стратегий. Более того, в экспериментах модель страдала от ряда проблем:

– Долгая фаза адаптации ковариационной матрицы «пропозал»[3] распределения
– Долгая сходимость марковской цепи (более 10000 итераций)
– Продолжительные расчеты для оценки модели (около 12 ч.)
– Модель не работала для моделирования динамики большой группы алгоритмов

[3] В английской литературе оно называется proposal distribution

3.3 Реализация моделей и сравнительный анализ в рамках портфельной оптимизации

Для качественных выводов о работе предложенного метода составления портфеля недостаточно оценить одну модель на подвыборке алгоритмов, так как это может быть случайный успех или неудача. Для проведения эксперимента на реальных данных, был использован метод бутстрап (Grimshaw et al., 1995) и разделение выборки на обучающую и тестовую.

Постановка эксперимента:

- Всего 4 года наблюдений
- Обучающая выборка – первые два года
- Тестовая выборка – последние два года
- Сгенерировано 400 выборок алгоритмов размера 20 из 150 без повторений
- Тремя методами: предложенными (2.9), (2.10) и по Марковицу, строятся портфели основываясь на данных обучающей выборки
- Считается критерий качества (коэффициент Шарпа) на тестовой выборке

Для оценки апостериорных распределений параметров модели использовался алгоритм NUTS (Hoffman & Gelman, 2011), при этом генерировалась выборка размера 3000 из этого распределения. Для оценки потребовались большие вычислительные мощности. Так, расчет модели на динамику 20-ти алгоритмов со статическими корреляциями (2.9) занимает около 3х часов на 32х-ядерном сервере. Оценка модели без корреляций (2.10) занимает менее получаса. Весь эксперимент длился более месяца.

Результаты эксперимента предствлены на на рисунке 3.4. На первой строчке изображены распределения коэффициентов Шарпа, получаемые разными методами: методом Марковица (Mark, всегда черным цветом), через модель со статическими корреляциями (Corr) и без корреляций (Diag) соответственно. На второй строчке изображены распределения разности коэффициентов Шарпа полученных с помощью модели Corr и Diag, Corr и Mark, Diag и Mark. На третьей строчке изображена разность волатильности портфеля для Corr и Diag и далее плотности волатильности моделей Corr, Diag и Mark. Цветовая шкала означает значение параметра ρ в функции полезности (2.15). Распределение коэффициента Шарпа на тестовом периоде находится значительно правее, что означает преимущество предложенного метода над ранее используемым аналогом.

Из экспериментов следует, что предложенный алгоритм более устойчив при обучении, обладает необходимой обобщающей способностью для улучшения качества портфеля по ряду показателей. В целом не важно, какую спецификацию модели выбирать: дополнительное моделирование корреляций не принесло большой пользы, разница волатильности и коэффициентов Шарпа между моделью (2.9) и (2.10) имеет сконцентрированное в нуле распределение.

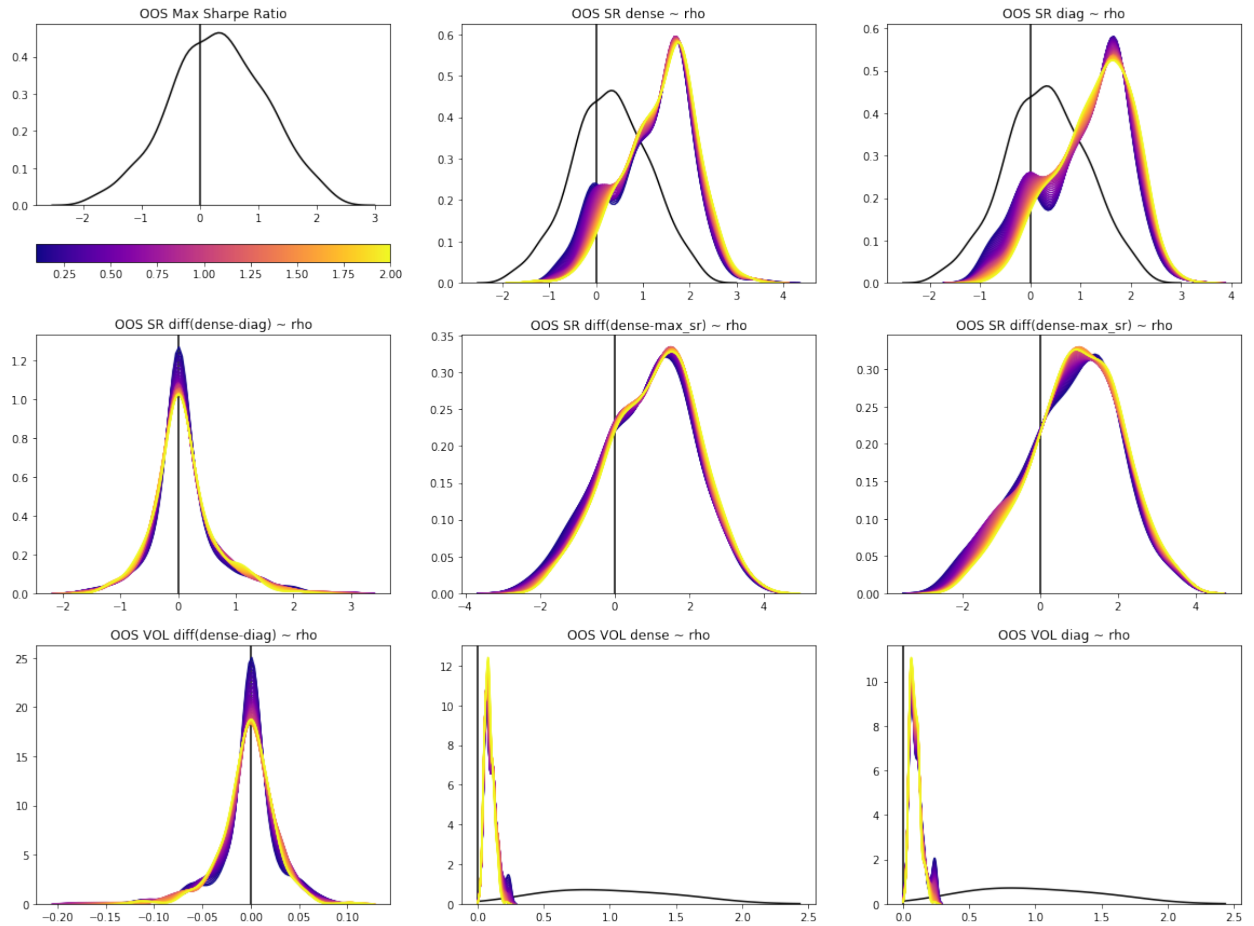

Рисунок 3.4 — Сравнение коэффициента Шарпа на тестовой выборке байесовского (выделен цветом) и оптимального портфеля Марковица (черным) полученного методом бутстрап. Распределение коэффициента Шарпа на тестовом периоде находится значительно правее, что означает преимущество предложенного метода над ранее используемым аналогом.

Основные выводы

– Коэффициент Шарпа: в 70% случайно выбранных портфелях коэффициент Шарпа больше полученного методом Марковица
– Дисперсия получаемого портфеля новым способом ниже
– Моделирование корреляций не дает существенного преимущества перед моделью без них

Заключение

В ходе проведенного исследования решены следующие задачи:

1. Предложена общая схема моделирования динамики торговых стратегий, которая учитывает особенности, связанные с их доходностями. Результаты исследования включают в себя реализацию трех спецификаций модели с учетом, без учета динамики корреляций и упрощенная – без корреляций. Для оценки модели динамики корреляций предложена модификация базового метода DECO с использованием гауссовского процесса
2. Все три спецификации модели динамики доходностей торговых стратегий реализованы на языке `Python` с использованием специализированных библиотек для байесовского моделирования
3. Реализована процедура составления портфеля торговых стратегий методом монте–карло
4. Проведенный эмпирический анализ позволил сделать вывод о непостоянстве волатильности и постоянстве корреляций доходностей торговых стратегий
5. С помощью сравнения методом бутстрап показана практическая значимость предложенного подхода для использования его в качестве инструмента для составления портфеля торговых стратегий. Портфель, основанный на предложенной модели оказывается эффективнее модели Марковица по ряду критериев (имеет большую обобщающую способность, более высокий коэффициент Шарпа на экзаменационной выборке). Предложенная позволяет получить более устойчивый во времени портфель.

Проведенное исследование подтверждает целесообразность использования байесовских методов в формировании портфеля торговых стратегий. Такой подход позволяет учесть априорные знания о модели. Портфель, построенный на симуляциях из нее, получается более устойчивым во времени и, как следствие, более доходным на экзаменационном периоде.

Список литературы

Bucciol Alessandro and Miniaci Raffaele. Optimal asset allocation based on utility maximization in the presence of market frictions. (0012), 2006. URL https://EconPapers.repec.org/RePEc:pad:wpaper:0012.

Monica Billio and Loriana Pelizzon. Contagion and interdependence in stock markets: Have they been misdiagnosed? *Journal of Economics and Business*, 55(5):405 – 426, 2003. ISSN 0148-6195. doi: https://doi.org/10.1016/S0148-6195(03)00048-1. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0148619503000481. Globalization in the New Millennium: Evidence on Financial and Economic Integration.

Bernard Dumas, Jeff Fleming, and Robert E. Whaley. Implied volatility functions: Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53(6):2059–2106, dec 1998. doi: 10.1111/0022-1082.00083. URL https://doi.org/10.1111%2F0022-1082.00083.

Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987, jul 1982. doi: 10.2307/1912773. URL https://doi.org/10.2307%2F1912773.

Robert F. Engle. Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate GARCH models. *SSRN Electronic Journal*, 2000. doi: 10.2139/ssrn.236998. URL https://doi.org/10.2139%2Fssrn.236998.

Andrew Gelman. Prior distributions for variance parameters in hierarchical models (comment on article by browne and draper). *Bayesian Analysis*, 1(3):515–534, sep 2006. doi: 10.1214/06-ba117a. URL https://doi.org/10.1214%2F06-ba117a.

Andrew Gelman. Objections to bayesian statistics. *Bayesian Analysis*, 3(3):445–449, sep 2008. doi: 10.1214/08-ba318. URL https://doi.org/10.1214%2F08-ba318.

Zoubin Ghahramani. An introduction to hidden markov models and bayesian networks. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 15 (01):9–42, feb 2001. doi: 10.1142/s0218001401000836. URL https://doi.org/10.1142%2Fs0218001401000836.

Scott D. Grimshaw, Bradley Efron, and Robert J. Tibshirani. An introduction to the bootstrap. *Technometrics*, 37(3):341, aug 1995. doi: 10.2307/1269918. URL https://doi.org/10.2307%2F1269918.

L.R Haff. An identity for the wishart distribution with applications. *Journal of Multivariate Analysis*, 9(4):531–544, dec 1979. doi: 10.1016/0047-259x(79)90056-3. URL https://doi.org/10.1016%2F0047-259x%2879%2990056-3.

Jianan Han, Xiao-Ping Zhang, and Fang Wang. Gaussian process regression stochastic volatility model for financial time series. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 10(6):1015–1028, sep 2016. doi: 10.1109/jstsp.2016.2570738. URL https://doi.org/10.1109%2Fjstsp.2016.2570738.

Matthew D. Hoffman and Andrew Gelman. The no-u-turn sampler: Adaptively setting path lengths in hamiltonian monte carlo. *arxiv:1111.4246v1*, 2011. URL http://arxiv.org/abs/1111.4246v1.

Dimitrios Koutmos. Time-varying behavior of stock prices, volatility dynamics and beta risk in industry sector indices of the shanghai stock exchange. *Accounting and Finance Research*, 1(2), jun 2012. doi: 10.5430/afr.v1n2p109. URL https://doi.org/10.5430%2Fafr.v1n2p109.

Alp Kucukelbir, Rajesh Ranganath, Andrew Gelman, and David M. Blei. Automatic variational inference in stan. *arxiv:1506.03431v2*, 2015. URL http://arxiv.org/abs/1506.03431v2.

Yuta Kurose and Yasuhiro Omori. Dynamic equicorrelation stochastic volatility. *Computational Statistics & Data Analysis*, 100:795–813, aug 2016. doi: 10.1016/j.csda.2015.01.013. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.csda.2015.01.013.

Daniel Lewandowski, Dorota Kurowicka, and Harry Joe. Generating random correlation matrices based on vines and extended onion method. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(9):1989–2001, oct 2009. doi: 10.1016/j.jmva.2009.04.008. URL https://doi.org/10.1016%2Fj.jmva.2009.04.008.

J.M. Lorenz. *Optimal Trading Algorithms: Portfolio Transactions, Multiperiod Portfolio Selection, and Competitive Online Search*. ETH, 2008. URL https://books.google.ru/books?id=WHXMSAAACAAJ.

Christos Louizos and Max Welling. Multiplicative normalizing flows for variational bayesian neural networks. Mar 2017. URL http://arxiv.org/abs/1703.01961v2.

Harry M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press, 1959. ISBN 9780300013726. URL http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h.

John Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944. URL https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.215284.

Giuseppe Nuti, Mahnoosh Mirghaemi, Philip Treleaven, and Chaiyakorn Yingsaeree. Algorithmic trading. *Computer*, 44(11):61–69, nov 2011. doi: 10.1109/mc.2011.31. URL https://doi.org/10.1109%2Fmc.2011.31.

Emrah Oral and Gazanfer Unal. Dynamic correlation of eastern and western markets and forecasting: Scale-by-scale wavelet-based approach. *International Journal of Financial Engineering*, 04(04):1750040, dec 2017. doi: 10.1142/s2424786317500402. URL https://doi.org/10.1142%2Fs2424786317500402.

Danilo Jimenez Rezende and Shakir Mohamed. Variational inference with normalizing flows. May 2015. URL http://arxiv.org/abs/1505.05770v6.

Diego Salazar. Structural changes in time series models. *Journal of Econometrics*, 19(1): 147–163, may 1982. doi: 10.1016/0304-4076(82)90055-0. URL https://doi.org/10.1016%2F0304-4076%2882%2990055-0.

John Salvatier, Thomas V. Wiecki, and Christopher Fonnesbeck. Probabilistic programming in python using PyMC3. *PeerJ Computer Science*, 2:e55, apr 2016. doi: 10.7717/peerj-cs.55. URL https://doi.org/10.7717%2Fpeerj-cs.55.

Daniel P. Simpson, Håvard Rue, Thiago G. Martins, Andrea Riebler, and Sigrunn H. Sørbye. Penalising model component complexity: A principled, practical approach to constructing priors. *arxiv:1403.4630v4*, 2014. URL http://arxiv.org/abs/1403.4630v4.

Sean J Taylor and Benjamin Letham. Forecasting at scale. sep 2017. doi: 10.7287/peerj.preprints.3190v2. URL https://doi.org/10.7287%2Fpeerj.preprints.3190v2.

Tonis Vaga. The coherent market hypothesis. *Financial Analysts Journal*, 46(6):36–49, nov 1990. doi: 10.2469/faj.v46.n6.36. URL https://doi.org/10.2469%2Ffaj.v46.n6.36.