

Байесовское моделирование

Максим Кочуров

МГУ им. М.В. Ломоносова

Лекция 2



- ① НМС
- ② Модель Кобба-Дугласа
- ③ Базовая модель
 - Настройка
 - Априорные распределения
- ④ Проверка априорного предиктивного распределения
- ⑤ Иерархии
 - Введение
 - Байесовский подход
 - Параметризация
 - Априорные распределения
- ⑥ Обсуждение



Сэмплирование из распределения

Сопряженные модели

- Ограниченная применимость
- Недостаточная гибкость
- Хорошая масштабируемость

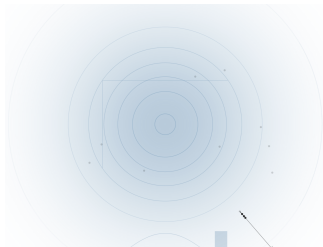


Рис.: Простое распределение

Большинство моделей

- Нет аналитического решения
- Апостериорные распределения сложные
- Плохая масштабируемость
- Гибкость

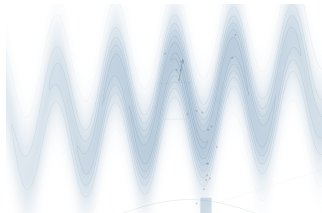


Рис.: Сложное распределение

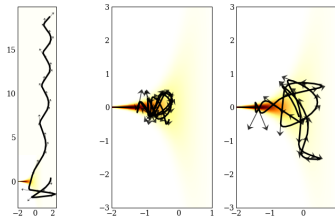
Метод Монте-Карло с механикой Гамильтона (НМС)



В НМС сэмплирование происходит из сложных распределений

- 1 Берем идеи из физики
- 2 Считаем градиенты
- 3 Численно интегрируем

Откалиброванная модель НМС сходится к целевому распределению



Предупреждение

Мы обещали курс без сложной математики. Но НМС нужен для отладки ваших моделей.

Рис.: интегрирование методом Leapfrog



Построение распределений через НМС

- $p(\Theta)$ - Целевое распределение, $\Theta \in \mathbb{R}^d$ (Θ или **Координаты**)
- $p(\Delta | \Theta)$ - Распределение импульса, $\Delta \in \mathbb{R}^d$ (Δ или **Ускорение**)

Гамильтониан вычисляется как

$$H(\Delta, \Theta) = -\log p(\Delta, \Theta)$$

Заметка

- $p(\Delta | \Theta) = \text{Normal}(0, M)$
- Δ и Θ имеют одинаковые размерности

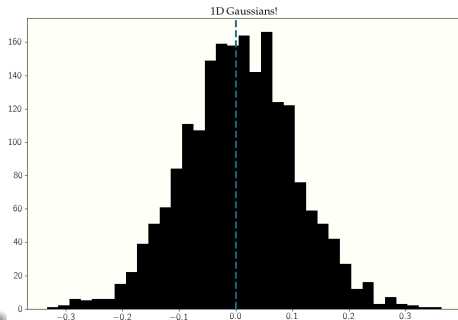


Рис.: $p(\Theta) = \text{Normal}(0, 1)$



Система дифференциальных уравнений HMC

$$\begin{aligned}
 H(\Delta, \Theta) &= -\log p(\Delta, \Theta) \\
 &= -\log p(\Delta \mid \Theta) - \log p(\Theta) \\
 &= \underbrace{K(\Delta, \Theta)}_{\text{Kinetic E}} + \underbrace{V(\Theta)}_{\text{Potential E}}
 \end{aligned}$$

Физическая система, задающая движение

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial \Delta} \\
 \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial \Theta}
 \end{aligned}$$

Движение содержит полную энергию $H(\Delta, \Theta)$



Рис.: скейт-парк и HMC



Дивергенции в НМС

Дивергенции возникают при крупной ошибке численного интегрирования в ходе решения дифференциального уравнения.

Когда НМС не работает

Неудачный выбор геометрического распределения вероятностей для гамильтониана

Почему геометрическое распределение неудачно

- 1 Мультиколлинеарность
- 2 Распределения вида воронки
- 3 Сильное влияние функции правдоподобия
- 4 Неоднородные апостериорные распределение

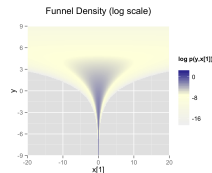


Рис.: Воронка Нила



Что почитать по НМС

Для дальнейшего погружения

- 1 Интерактивное демо
- 2 Пособие от Colin Carrol
- 3 Статья Michael Betancourt
- 4 Статья про NUTS от Matthew D. Hoffman, Andrew Gelman

Пример



Простой пример - функция Кобба-Дугласа

Скорее всего, вы знакомы с производственной функцией вида

$$Y \approx A \cdot L^{\beta}$$

Имеем:

- ❶ 6 различных групп (иерархия)
- ❷ Группы различимы
- ❸ Мы знаем, что факторная производительность A различается между ними
- ❹ Производительность труда β различается не сильно

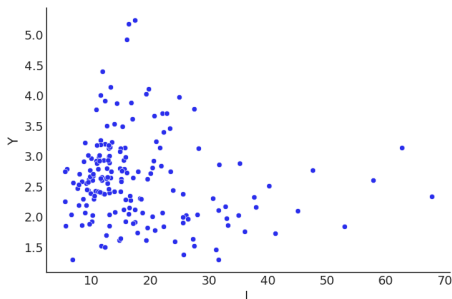


Рис.: Пример агрегированных данных



Простой пример - производство ковров

Уточним пример

$$Y_g \approx A_g \cdot L^\beta$$

Пусть есть ателье, шьющее ковры, с 6 рабочими:

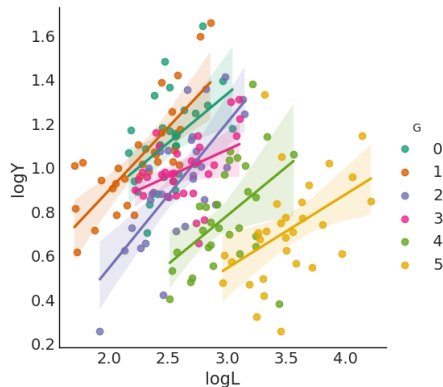
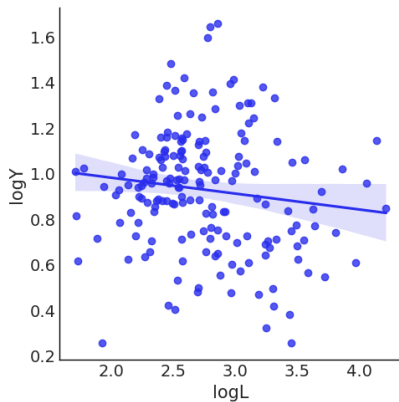
- 1 Работники делают разные ковры с различной факторной производительностью A
- 2 Производительность труда β можно воспринимать как сосредоточенность, со временем работники устают
- 3 Работник шьет ковер один, без чужой помощи



Рис.: Пример продукта (Y)



Парадокс Симпсона





Модель с одной группой

Несколько советов для моделирования.

- Начинать стоит с простой модели
- Убедитесь, что модель сходится
- Усложните модель



Модель с одной группой

Несколько советов для моделирования.

- Начинать стоит с простой модели
 - Рассмотрите модель с 1 группой
 - Проверьте, что априорные распределения выбраны корректно
- Убедитесь, что модель сходится
- Усложните модель



Модель с одной группой

Несколько советов для моделирования.

- Начинать стоит с простой модели
 - Рассмотрите модель с 1 группой
 - Проверьте, что априорные распределения выбраны корректно
- Убедитесь, что модель сходится
 - Если не сойдется модель с одной группой – модели с множеством групп тоже не сойдутся
 - Проведите проверку, что модель семплируется корректно
- Усложните модель



Модель с одной группой

Несколько советов для моделирования.

- Начинать стоит с простой модели
 - Рассмотрите модель с 1 группой
 - Проверьте, что априорные распределения выбраны корректно
- Убедитесь, что модель сходится
 - Если не сойдется модель с одной группой – модели с множеством групп тоже не сойдутся
 - Проведите проверку, что модель семплируется корректно
- Усложните модель
 - Попробуйте сделать параметризацию
 - Проверьте семплирование модели
 - Сравните модели (про это – поговорим далее по курсу)



Простая модель: с чего начать?

Для начала зададим себе несколько вопросов

$$Y_{g=0} \approx A_{g=0} \cdot L^\beta$$

- ❶ Какое апостериорное распределение взять для A ?
- ❷ Какое апостериорное распределение взять для β ?
- ❸ Какое апостериорное предиктивное распределение для $Y_{g=0}$?



Формулируем модель

$$Y_{g=0} \approx A_{g=0} \cdot L^\beta$$

$$\log Y_{g=0} \approx \log A_{g=0} + \log L \cdot \beta$$

Предполагаем следующие распределения

$$\log Y_{g=0} \sim \text{Normal}(\log A_{g=0} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim ???$$

$$\beta \sim ???$$

$$A_{g=0} \sim ???$$



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- 1 Может ли она быть < 0 ?
- 2 Может ли она принимать большие значения?
- 3 Может ли она быть > 1 ?



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- 1 Может ли она быть < 0 ? Нет
- 2 Может ли она принимать большие значения?
- 3 Может ли она быть > 1 ?



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- 1 Может ли она быть < 0 ? Нет
- 2 Может ли она принимать большие значения? Нет
- 3 Может ли она быть > 1 ?



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- 1 Может ли она быть < 0 ? Нет
- 2 Может ли она принимать большие значения? Нет
- 3 Может ли она быть > 1 ? Нет



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- ❶ Может ли она быть < 0 ? Нет
- ❷ Может ли она принимать большие значения? Нет
- ❸ Может ли она быть > 1 ? Нет

Заключение: она лежит в промежутке $(0, 1)$

Данные априорные предположения – субъективны!

Есть у кого-то замечания по нашим ограничениям?



Априорное распределение для β

Какие свойства мы предполагаем для производительности (или эластичности) труда β ? Подумайте

- 1 Может ли она быть < 0 ? Нет
- 2 Может ли она принимать большие значения? Нет
- 3 Может ли она быть > 1 ? Нет

Заключение: она лежит в промежутке $(0, 1)$

Данные априорные предположения – субъективны!

Есть у кого-то замечания по нашим ограничениям?

Мы пока еще не вывели априорное распределение

Нужно подобрать распределение, которое удовлетворяет нашим условиям



Априорное распределение для β

Что имеем:

- $\beta \in (0, 1)$
- Маловероятно, что истинное значение близко к границам
- Ничего не знаем о том, где конкретно в интервале оно лежит.

Заметка

Посмотрим распределения, которые удовлетворяют требованиям



Априорное распределение для β

Что имеем:

- $\beta \in (0, 1)$
- Маловероятно, что истинное значение близко к границам
- Ничего не знаем о том, где конкретно в интервале оно лежит.

Заметка

Посмотрим распределения, которые удовлетворяют требованиям

- 1 Beta(a, b), $a > 0, b > 0$ где a, b удовлетворяют ограничениям



Априорное распределение для β

Что имеем:

- $\beta \in (0, 1)$
- Маловероятно, что истинное значение близко к границам
- Ничего не знаем о том, где конкретно в интервале оно лежит.

Заметка

Посмотрим распределения, которые удовлетворяют требованиям

- 1 Beta(a, b), $a > 0, b > 0$ где a, b удовлетворяют ограничениям
- 2 LogitNormal(μ, σ) - всегда удовлетворяет ограничениям



Априорное распределение для β

Что имеем:

- $\beta \in (0, 1)$
- Маловероятно, что истинное значение близко к границам
- Ничего не знаем о том, где конкретно в интервале оно лежит.

Заметка

Посмотрим распределения, которые удовлетворяют требованиям

- 1 Beta(a, b), $a > 0, b > 0$ где a, b удовлетворяют ограничениям
- 2 LogitNormal(μ, σ) - всегда удовлетворяет ограничениям
- 3 Uniform(0, 1) - частный случай Beta(1, 1)



Априорное распределение для β

Что имеем:

- $\beta \in (0, 1)$
- Маловероятно, что истинное значение близко к границам
- Ничего не знаем о том, где конкретно в интервале оно лежит.

Заметка

Посмотрим распределения, которые удовлетворяют требованиям

- 1 Beta(a, b), $a > 0, b > 0$ где a, b удовлетворяют ограничениям
- 2 LogitNormal(μ, σ) - всегда удовлетворяет ограничениям
- 3 Uniform(0, 1) - частный случай Beta(1, 1)
- 4 Kumaraswamy(a, b), $a > 0, b > 0$ но лучше обойтись без него



Визуализируем априорное распределение

Перед написанием изобразите распределения. Какое лучше?

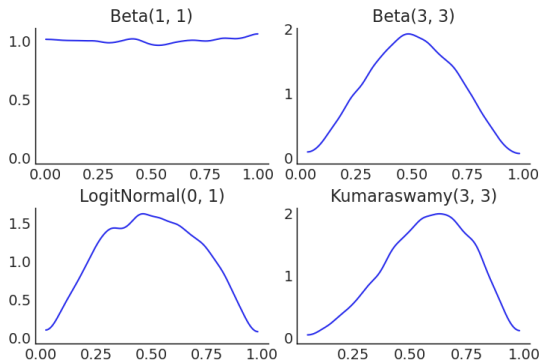


Рис.: Распределения с прошлого слайда

Выбирайте то, которое нравится и согласуется с теорией



Настраиваем априорное распределение

Для этой задачи я выберу $\text{LogitNormal}(0, 1)$. У него удобная функциональная форма

Помните

- Априорное распределение при моделировании выбираете **вы**
- Этот выбор должен быть обоснован
- Выбор должен быть разумным, учитывать накопленное знание
- Вы должны иметь возможность защитить свой выбор
- **Априорное распределение – источник неопределенности**



Простая модель: что имеем на данный момент

$$\log Y_{g=0} \sim \text{Normal}(\log A_{g=0} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim ???$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_{g=0} \sim ???$$



Априорное распределение ϵ

Эмпирическое наблюдение

Ошибка обычно не велика. Но при этом не равна нулю.

В нашем случае;

- "маленькая ошибка" означает отклонение в 10-50%

Пусть

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 1)$$

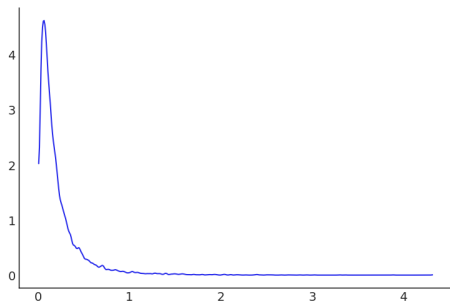


Рис.: Априорное распределение для ϵ



Априорное распределение ϵ

Эмпирическое наблюдение

Ошибка обычно не велика. Но при этом не равна нулю.

В нашем случае;

- "маленькая ошибка" означает отклонение в 10-50%

Пусть

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 1)$$

Примечание

В логарифмических моделях ошибка – величина относительная

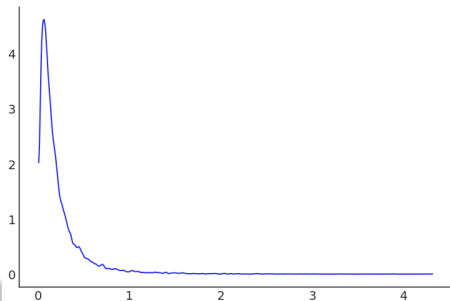


Рис.: Априорное распределение для ϵ



Простая модель: что имеем на данный момент

$$\log Y_{g=0} \sim \text{Normal}(\log A_{g=0} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

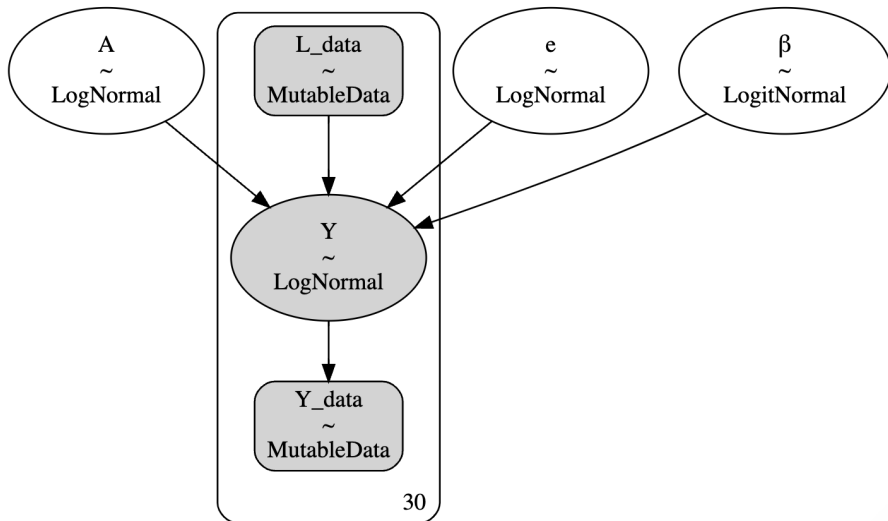
$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_{g=0} \sim ???$$



Визуализируем модель





Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информации об априорном распределении



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информацией об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информации об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y
- Y положительно, соответственно A тоже положительно



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информации об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y
- Y положительно, соответственно A тоже положительно
- Есть наблюдаемые значения для Y , значит можно вывести значения для A ?



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информации об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y
- Y положительно, соответственно A тоже положительно
- Есть наблюдаемые значения для Y , значит можно вывести значения для A ?
- Степени 10 подойдут как значения для Y



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информации об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y
- Y положительно, соответственно A тоже положительно
- Есть наблюдаемые значения для Y , значит можно вывести значения для A ?
- Степени 10 подойдут как значения для Y
- Для проверки – построим априорное предиктивное распределение



Априорное предиктивное распределение

Подобрать априорное распределение β было несложно. А для $A_{g=0}$?

- Нет никакой информацией об априорном распределении
- Но кое-что знаем про Y
- Y положительно, соответственно A тоже положительно
- Есть наблюдаемые значения для Y , значит можно вывести значения для A ?
- Степени 10 подойдут как значения для Y
- Для проверки – построим априорное предиктивное распределение

Определение

Априорное предиктивное распределение строится как симуляция распределения без учета данных.

Горькая правда

Подбор априорных распределений – основа нашей непростой работы



Подбор распределения "наобум"

Почему бы не предположить,
например

$$A \sim \text{LogNormal}(0, 1)$$



Подбор распределения "наобум"

Почему бы не предположить,
например

$$A \sim \text{LogNormal}(0, 1)$$

Контринтуитивный результат

Никакой работник не пошьет
вручную 800 ковров за неделю

Потому что (см. график ниже)

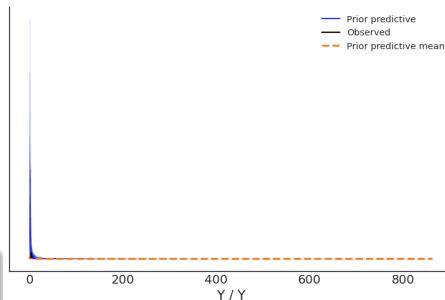


Рис.: Априорное предиктивное
распределение Y и распределение
реальных значений



Анализируем априорные предиктивные распределения

Еще раз взглянем на нашу модель

$$\log Y_{g=0} \sim \text{Normal}(\log A_{g=0} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_{g=0} \sim \text{LogNormal}(0, 1)$$

- Наблюдаем избыточную дисперсию
- Она может возникать из-за A или ϵ

Что делать?

- 1 Попробуем уменьшить дисперсию A
- 2 Попробуем уменьшить дисперсию ϵ

Что получаем

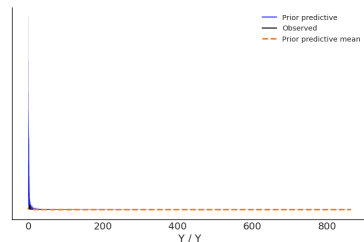


Рис.: Априорное предиктивное распределение Y и распределение реальных значений



Пример хорошего априорного предиктивного распределения

На семинаре

Разберем схожий пример на семинаре.

Хорошее априорное предиктивное можно задать следующим образом:

$$\log Y_{g=0} \sim \text{Normal}(\log A_{g=0} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_{g=0} \sim \text{LogNormal}(-0.5, 0.1)$$

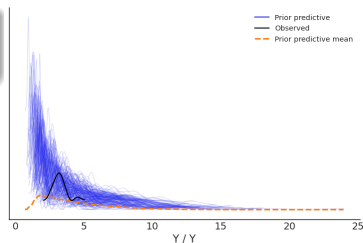


Рис.: Априорное предиктивное распределение Y и распределение реальных значений



Как понять, что априорное предиктивное распределение удачное?

- Распределение **достаточно** соответствует данным.
- Данные – ориентир, не самоцель

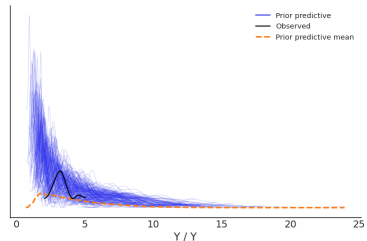


Рис.: Априорное предиктивное распределение Y и распределение реальных значений



Как понять, что априорное предиктивное распределение удачное?

- Распределение **достаточно** соответствует данным.
 - нет астрономических скоростей
 - нет маленьких расстояний
 - нет очень больших расстояний
 - нет работников-стахановцев
- **Данные – ориентир**, не самоцель

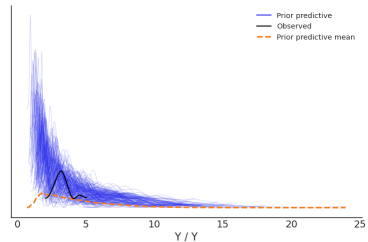


Рис.: Априорное предиктивное распределение Y и распределение реальных значений



Как понять, что априорное предиктивное распределение удачное?

- Распределение **достаточно** соответствует данным.
 - нет астрономических скоростей
 - нет маленьких расстояний
 - нет очень больших расстояний
 - нет работников-стахановцев
- **Данные – ориентир**, не самоцель
 - не стоит подгонять распределение точь в точь под данные
 - в 90% данные не нужны
 - в 90% достаточно здравого смысла
 - в 10% можно спросить у экспертов
 - смотреть на данные – крайняя мера

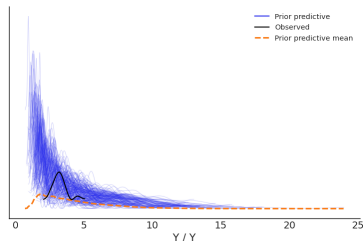


Рис.: Априорное предиктивное распределение Y и распределение реальных значений

Пора применять НМС





Сэмплирование

После всех проведенных проверок – можно начинать сэмплирование.

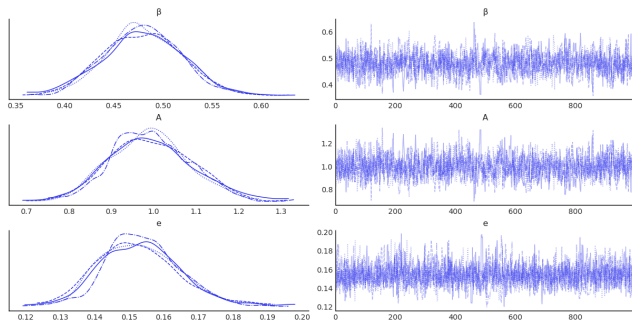


Рис.: Апостериорное распределение, полученное MCMC

Иерархии



Иерархии

В исходных данных есть группы. Как это учесть?

$$\log Y_{\mathbf{g}} \sim \text{Normal}(\log A_{\mathbf{g}} + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_{\mathbf{g}} \sim ???$$



Что такое иерархии?

Иерархии

Если в данных есть похожие группы, значит есть иерархии.

Примеры:

- 1 Страны, Регионы
- 2 Разделение пользователей по полу, возрасту и тд.
- 3 Группы воздействия
- 4 Временные эффекты
- 5 Панельные данные

Наш пример

Рабочие делают разные ковры и обладают совокупной производительностью A



Как учитывать иерархии

Классический эконометрический подход:

- 1 Если все группы независимы. **Регрессия пула**

$$y_{k,i} = \alpha + \beta x_{k,i} + \varepsilon_{i,k}$$

- 2 Если в группах есть различия.

Регрессия с фиксированными эффектами

$$y_{k,i} = \alpha_k + \beta x_{k,i} + \varepsilon_{i,k}$$

- 3 Разница между группами случайная, незначительная.

Регрессия со случайными эффектами

$$y_{k,i} = \alpha + \beta x_{k,i} + u_k + \varepsilon_{i,k}$$

Где

$$\mathbb{E}u_{k,i} = 0, \quad \mathbb{E}\varepsilon_{k,i} = 0$$



Байесовский подход к иерархиям

Перепишем уравнение

$$y_{k,i} = \alpha + \beta x_{k,i} + u_k + \varepsilon_{i,k}$$

Следующим образом

$$y_{k,i} = (\alpha + u_k) + \beta x_{k,i} + \varepsilon_{i,k}$$

- α - среднее по выборке
- $\alpha_k = \alpha + u_k$ - среднее по группе

Байесовский подход требует априорных распределений. Например

$$\alpha \sim \text{Normal}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$u_k \sim \text{Normal}(0, 1)$$

$$\alpha_k = \alpha + u_k \cdot \sigma$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$\alpha_k \sim \text{Normal}(\alpha, \sigma)$$



Больше про априорные распределения

Нецентрированная параметризация Центрированная параметризация

$$\alpha \sim \text{Normal}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$u_k \sim \text{Normal}(0, 1)$$

$$\alpha_k = \alpha + u_k \cdot \sigma$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$\alpha_k \sim \text{Normal}(\alpha, \sigma)$$

Group specific parameter u_k is disentangled

σ отражает разницу между группами

- ❶ $\sigma \rightarrow 0$: Модель пула
- ❷ Небольшая σ : Случайные эффекты / Частичный пул
- ❸ Большая σ : Фиксированные эффекты / Необъединенная модель

σ присутствует в каждом типе моделей



Деградация моделей

Для центрированной параметризации имеем

$$\alpha \sim \text{Normal}(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$\alpha_k \sim \text{Normal}(\alpha, \sigma)$$

Предупреждение

Для малого объема данных центрирование приводит к появлению воронок

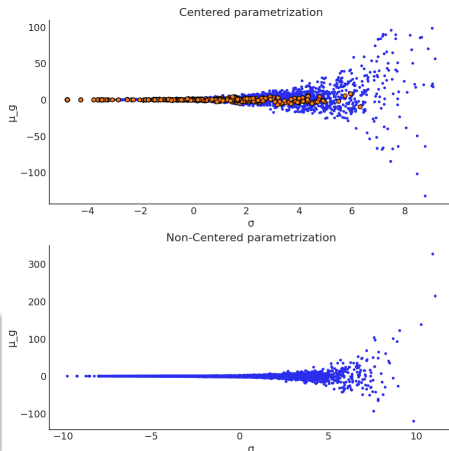


Рис.: Центрирование и расхождения



Как появляются воронки?

Геометрия распределения имеет значение

- 1 При сэмплинговании шаг учитывает предыдущие итерации
- 2 При неудачно выбранном распределении сэмплеру сложно предсказать следующий шаг

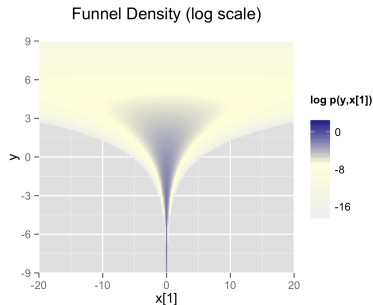


Рис.: Пример воронки

Рекомендация

Про репараметризацию можно почитать [здесь](#)



Инвертированная воронкообразная деградация

“Удачная” параметризация тоже имеет свои особенности

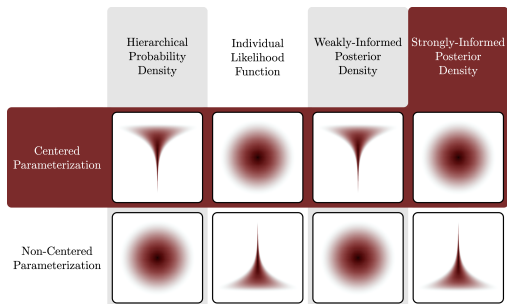


Рис.: Пример инвертированной воронкообразной деградации

Для дальнейшего погружения

Почитать про это можно [здесь](#)

Настраиваем иерархии в априорных распределениях



- 1 Начать лучше с модели с одной группой или модели пула
- 2 Добавляем иерархии

Настраиваем иерархии в априорных распределениях



- ❶ Начать лучше с модели с одной группой или модели пула
 - Понимаем размерность и особенности параметров
 - Структурируем модель
 - Пока не думаем о предсказательной способности модели
- ❷ Добавляем иерархии

Настраиваем иерархии в априорных распределениях



- ① Начать лучше с модели с одной группой или модели пула
 - Понимаем размерность и особенности параметров
 - Структурируем модель
 - Пока не думаем о предсказательной способности модели
- ② Добавляем иерархии
 - Выбираем параметр, для которого реализуем иерархии
 - Выбираем, допустима ли вариативность остальных параметров
 - Поправляем дивергенции, если нужно – повторно подбираем параметры

Настраиваем иерархии в априорных распределениях



- ❶ Начать лучше с модели с одной группой или модели пула
 - Понимаем размерность и особенности параметров
 - Структурируем модель
 - Пока не думаем о предсказательной способности модели
- ❷ Добавляем иерархии
 - Выбираем параметр, для которого реализуем иерархии
 - Выбираем, допустима ли вариативность остальных параметров
 - Поправляем дивергенции, если нужно – повторно подбираем параметры

Практический совет

Не надо хардокдить параметризацию, делайте свой код гибким



Пример функции Кобба-Дугласа

Модель с единственной группой

$$\log Y_0 \sim \text{Normal}(\log A_0 + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_0 \sim \text{LogNormal}(-0.5, 0.1)$$

Иерархическая модель

$$\log Y_k \sim \text{Normal}(\log A_k + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_k \sim \text{LogNormal}(\log A_{\text{pop}}, \sigma_A)$$

$$A_{\text{pop}} \sim \text{LogNormal}(-0.5, 0.1)$$

$$\sigma_A \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$



Пример функции Кобба-Дугласа

Модель с единственной группой

$$\log Y_0 \sim \text{Normal}(\log A_0 + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_0 \sim \text{LogNormal}(-0.5, 0.1)$$

Иерархическая модель

$$\log Y_k \sim \text{Normal}(\log A_k + \log L \cdot \beta, \epsilon)$$

$$\epsilon \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

$$\beta \sim \text{LogitNormal}(0, 1)$$

$$A_k \sim \text{LogNormal}(\log A_{\text{pop}}, \sigma_A)$$

$$A_{\text{pop}} \sim \text{LogNormal}(-0.5, 0.1)$$

$$\sigma_A \sim \text{LogNormal}(-2, 0.1)$$

Подсказка

Некоторые параметры можно переиспользовать, нужно лишь добавить немного вариативности с помощью σ_A



Обсуждаем итоги

При подборе априорных распределений стоит помнить следующее

- Не всегда доступны экспертные знания
- Параметризация не всегда помогает подобрать хорошие распределения
- Иногда априорные предиктивные распределения зависят от многих параметров
- Вы часто скованы временем
- Можно применять гиперприорные распределения