Matemáticas financieras

La medida del interés.

Definición 1 Definamos la función de acumulación $a(t)$ como el valor acumulado de un fondo al tiempo t con inversión inicial de 1 (una unidad) al tiempo $0(a(0) = 1)$.

Definición 2 La tasa de crecimiento del t-ésimo año(Basado en la cantidad del fondo al inicio del año) está dada por:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}$$

i_t también se conoce como la "tasa efectiva de interés".

Definición 3 Definimos la función monto $A(t)$ como el monto acumulado al tiempo t de una inversión de k unidades al tiempo $t = 0$. Esto es $A(0) = k$.

Obs 1 Es claro que $A(t) = ka(t)$, así la tasa de crecimiento de la función monto es:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)}$$

Obs 2 De lo anterior obtenemos:

$$A(t) = (1 + i_t)A(t-1)$$

Esto significa que el monto al final del t-ésimo año es igual al monto al inicio del año $(A(t-1))$ más un interés sobre $A(t-1)$.

Ejemplo 1 Dado $A(t) = t^2 + 100$ cálcula $a(10)$

$$A(0) = 100 = ka(0) = k$$

$$A(10) = 200 = 100a(10)$$

$$a(10) = 2$$

Interés Simple.

Nos gustaría estudiar un caso particular de la función de acumulación, nos gustaría que ver como se comporta $a(t)$ si la ganancia acumulada hasta al tiempo t es proporcional a t, esto es:

$$a(t) - a(0) = it$$

para alguna

$$i \in \mathbb{R}$$

, esto equivale a:

$$a(t) = 1 + it$$

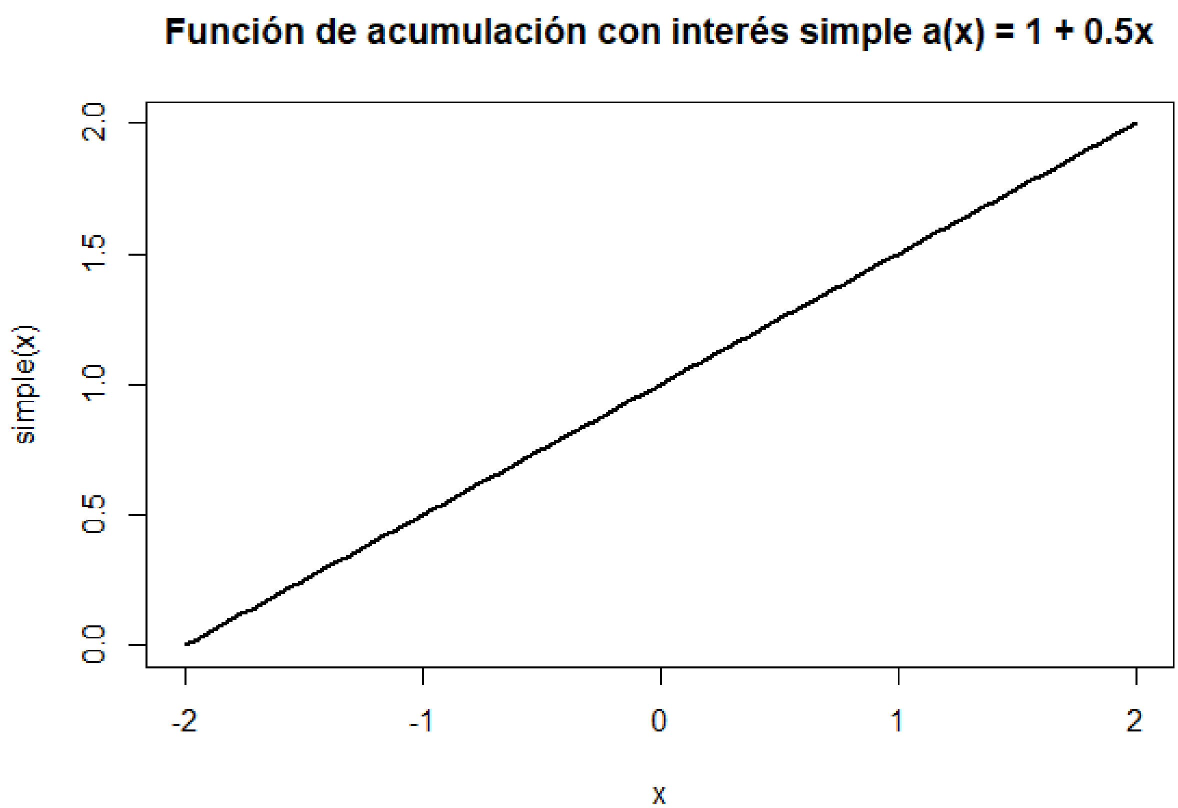
Para toda $t \in \mathbb{R}$.

Obs 3 Tenemos lo siguiente:

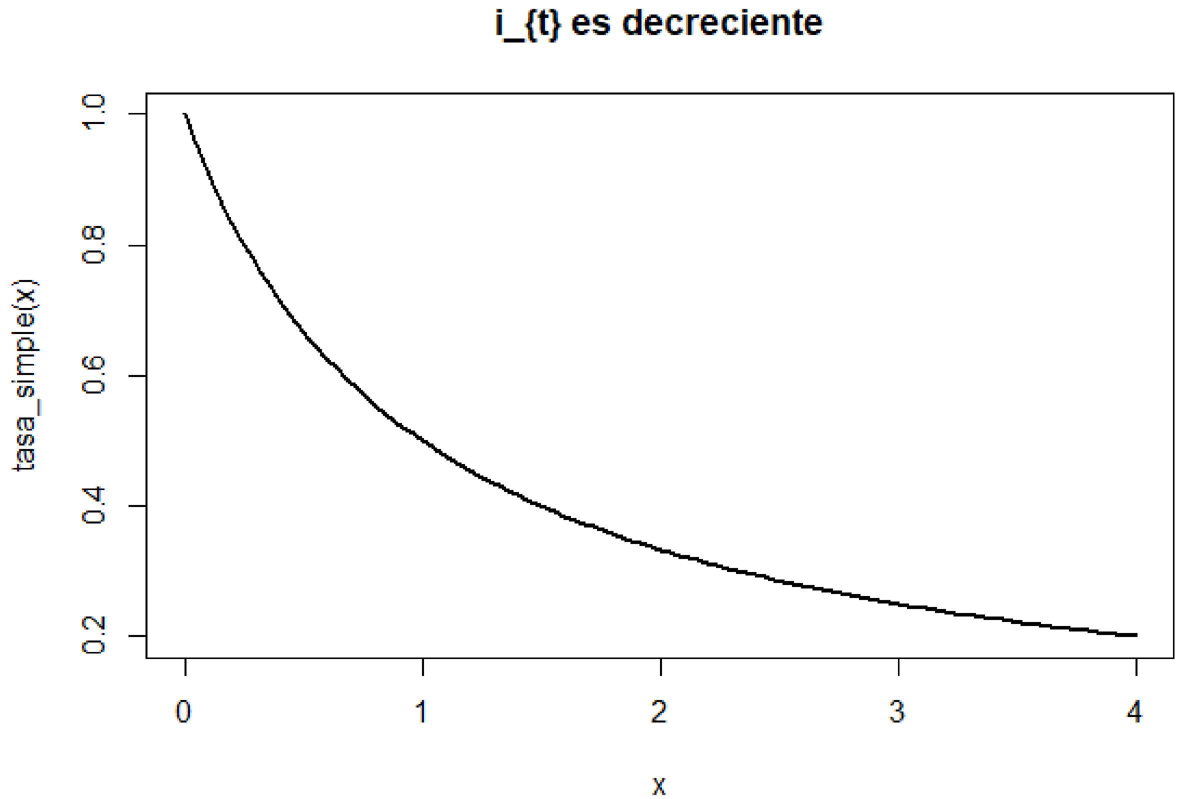
$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{i}{1 + i(t-1)}$$

Para todo $t > 1$, aquí observamos que $a(t)$ es creciente pero i_t es decreciente.

```r
simple <- function(x){
  return(1 + 0.5*x)
}
tasa_simple <- function(x){
  return( 0.5 / (1 + 0.5*(x-1)) )
}
curve(simple ,-2,2,lwd = 2 ,main = "Función de acumulación con interés simple a(x) = 1 + 0.5x")
```




```r
curve(tasa_simple,0,4,lwd = 2 ,main = "i_{t} es decreciente")
```



Por otro lado(sin suponer interés simple) Supongamos que tenemos tasas efectivas i_t en el t-ésimo año para toda $t \in \mathbb{N}$ entonces usando la observación 2(que también es válida para $a(t)$) e inducción obtenemos:

$$a(t) = \prod_{j=1}^{t} (1 + i_j)$$

Interés compuesto.

Del anterior producto si consideramos tasas efectivas de interés constantes esto es $i_j = i$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Este caso es llamado "Interés compuesto"

Valor presente.