Matemáticas financieras

La medida del interés.

Definición 1 Definamos la función de acumulación $a(t)$ como el valor acumulado de un fondo al tiempo t con inversión inicial de 1 (una unidad) al tiempo $0(a(0) = 1)$.

Definición 2 La tasa de crecimiento del t-ésimo año(Basado en la cantidad del fondo al inicio del año) está dada por:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}$$

i_t también se conoce como la "tasa efectiva de interés".

Definición 3 Definimos la función monto $A(t)$ como el monto acumulado al tiempo t de una inversión de k unidades al tiempo $t = 0$. Esto es $A(0) = k$.

Obs 1 Es claro que $A(t) = ka(t)$, así la tasa de crecimiento de la función monto es:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)}$$

Obs 2 De lo anterior obtenemos:

$$A(t) = (1 + i_t)A(t-1)$$

Esto significa que el monto al final del t-ésimo año es igual al monto al inicio del año $(A(t-1))$ más un interés sobre $A(t-1)$.

Ejemplo 1 Dado $A(t) = t^2 + 100$ cálcula $a(10)$

$$A(0) = 100 = ka(0) = k$$

$$A(10) = 200 = 100a(10)$$

$$a(10) = 2$$

Interés Simple.

Nos gustaría estudiar un caso particular de la función de acumulación, nos gustaría que ver como se comporta $a(t)$ si la ganancia acumulada hasta al tiempo t es proporcional a t, esto es:

$$a(t) - a(0) = it$$

para alguna

$$i \in \mathbb{R}$$

, esto equivale a:

$$a(t) = 1 + it$$

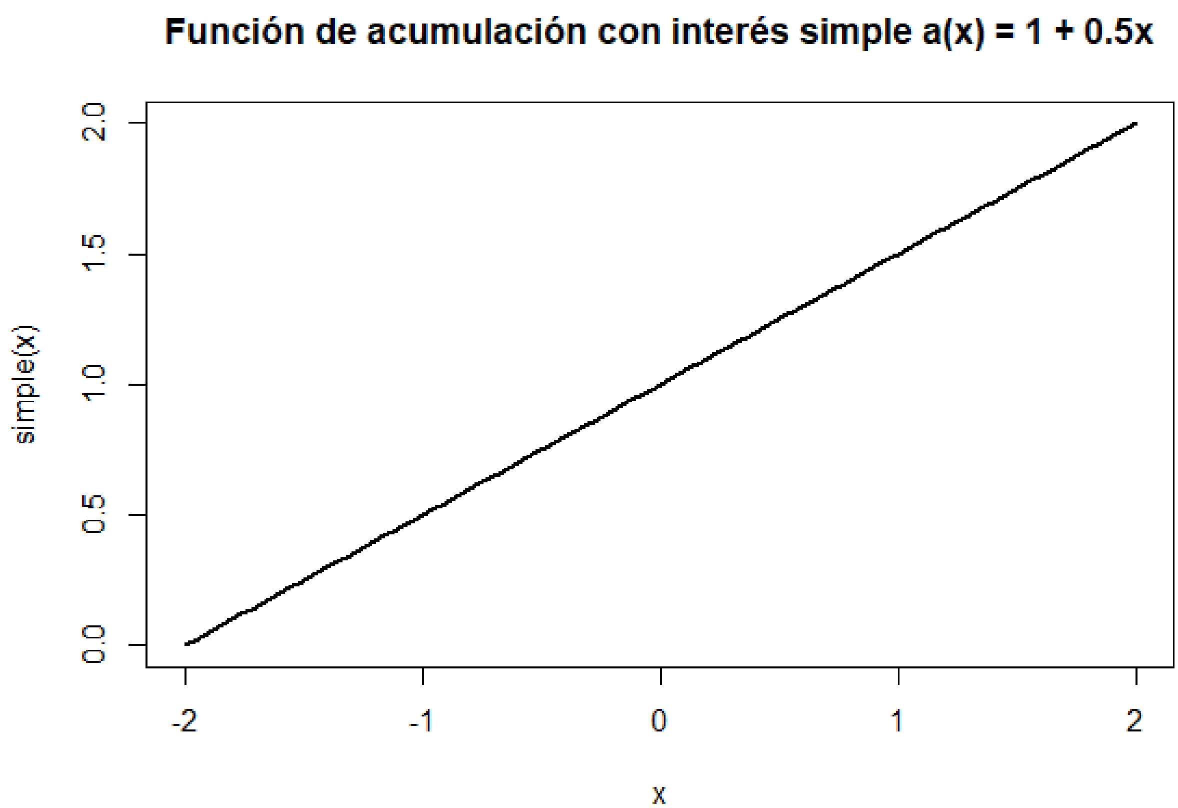
Para toda $t \in \mathbb{R}$.

Obs 3 Tenemos lo siguiente:

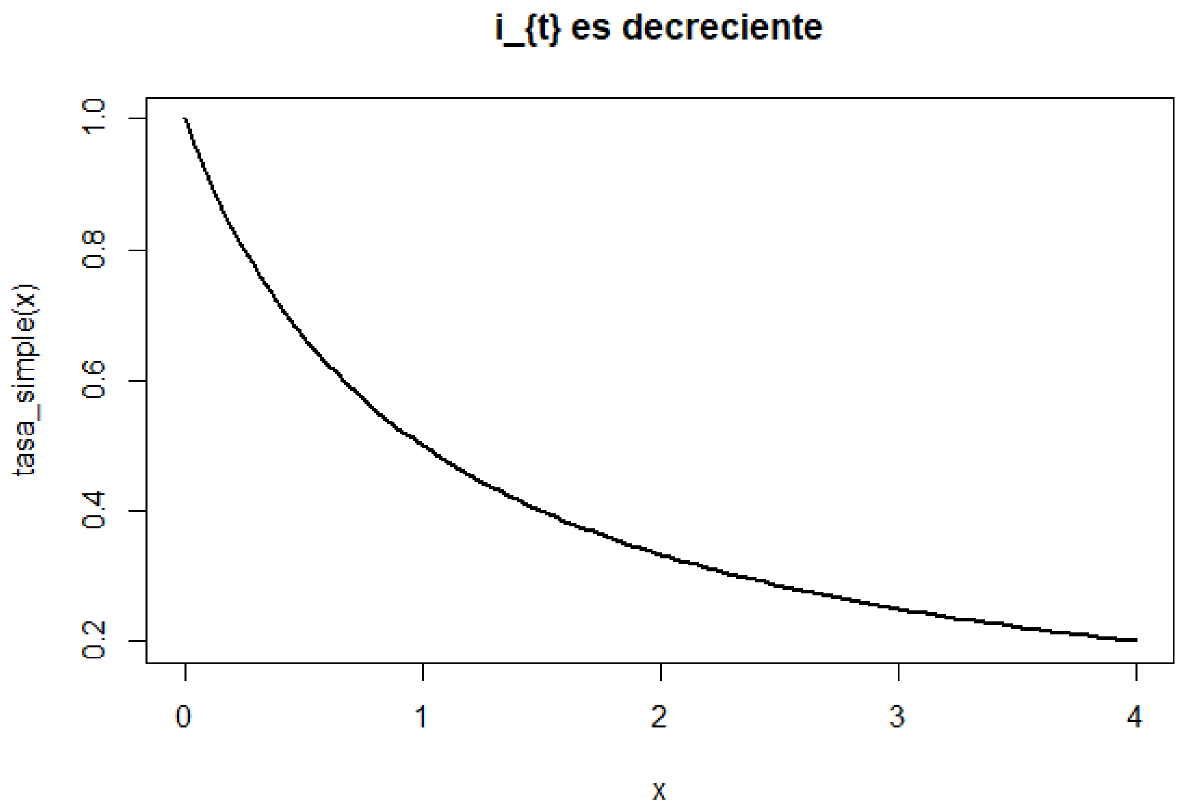
$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{i}{1 + i(t-1)}$$

Para todo $t > 1$, aquí observamos que $a(t)$ es creciente pero i_t es decreciente.

```r
simple <- function(x){
  return(1 + 0.5*x)
}
tasa_simple <- function(x){
  return( 0.5 / (1 + 0.5*(x-1)) )
}
curve(simple ,-2,2,lwd = 2 ,main = "Función de acumulación con interés simple a(x) = 1 + 0.5x")
```




```r
curve(tasa_simple,0,4,lwd = 2 ,main = "i_{t} es decreciente")
```



Por otro lado(sin suponer interés simple) Supongamos que tenemos tasas efectivas i_t en el t-ésimo año para toda $t \in \mathbb{N}$ entonces usando la observación 2(que también es válida para $a(t)$) e inducción obtenemos:

$$a(t) = \prod_{j=1}^{t} (1 + i_j)$$

Interés compuesto.

Del anterior producto si consideramos tasas efectivas de interés constantes esto es $i_j = i$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Este caso es llamado "Interés compuesto"

Valor presente.

Definición 4 El valor presente (VP) es el valor en el tiempo cero de una inversión y el valor futuro (VF) es el valor de una inversión n periodos después.

Si algún fondo es invertido a interés compuesto de una tasa i por periodo, para n periodos, entonces:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Tasa Nominal de interés

Definición 4 La tasa nominal anual de interés convertible m-veces al año es igual a la tasa efectiva por periodo(de m) multiplicada por el número de periodos del año en este caso por m.

Ejemplo Supongamos que tenemos un fondo que paga interés cada trimestre(4 periodos por año) con tasa efectiva trimestral de 2% (Ocupamos interés compuesto el cual la tasa efectiva trimestral es constante, ¿Por qué?). La tasa nominal anual convertible trimestralmente(4 veces al año) es $8\% = 2\% * 4$. Pero la tasa anual efectiva la calculamos como sigue:

$$(1 + 0.02)^4 = 1.0824$$

$$Tasaanualefectiva = 1.0824 - 1 = 0.0824$$

Obs La tasa nominal anual convertible m-veces al año es una tasa artificial que provee una forma de hablar de la tasa periodica en terminos anuales. La tasa efectiva se ocupa para calculos, la nominal no.

En el caso general de m periodos al año denotamos como $i^{(m)}$ a la tasa nominal donde $\frac{i^{(m)}}{m}$ es la tasa efectiva por periodo m-ésimo. La tasa anual efectiva es calculada como sigue:

$$i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1$$

Obs Usualmente verás que el interés es "compuesto" o "convertible" m-veces al año. Esto significa que el interés ganado durante cada periodo (de tamaño $\frac{1}{m}$ de año) es "compuesto"(convertido a principal) a final de cada periodo y gana intereses durante el siguiente periodo.

Tasa de descuento

Supongamos que tenemos una tasa anual del 6% y queremos tener al final del año \$1000 así que necesitamos invertir:

$$\frac{1000}{(1 + 0.06)} = 943.4$$

Para tener en el futuro \$1000. Ahora el interés ganado durante el año o lo que le tenemos que descontar a \$1000 es:

$$1000 - 943.9 = 56.6$$

Está es la cantidad de descuento, y la tasa de descuento es:

$$\frac{56.6}{1000} = 0.0566$$

En términos generales si al final del año queremos 1, tenemos que invertir al inicio del año $\frac{1}{(1+i)}$ con i la tasa anual efectiva. Así el monto de descuento es $1 - \frac{1}{(1+i)}$ y la tasa de descuento d es:

$$d = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)}}{1} = 1 - \frac{1}{(1 + i)}$$

Es fácil ver que:

$$d = \frac{i}{1 + i}$$

Obs También podemos definir la tasa efectiva de descuento en terminos de la función de acumulación:

$$d = \frac{a(t + 1) - a(t)}{a(t + 1)}$$

De esta forma podemos definir la tasa efectiva de descuento para mas periodos o mas años.

Definición Se define el factor de valor presente v como:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Obs De la sección anterior es inmediato que:

$$d = 1 - v$$

$$d = iv$$

Y además:

$$i - d = i - \frac{i}{1+i} = i(1 - \frac{1}{1+i}) = i(1-v) = id$$

$$i - d = id$$

Notación actuarial tenemos:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n} = v^n VF$$

###Tasa nominal de descuento Una tasa de deescuento puede ser también cotizada como una tasa nominal anual. Por ejemplo si la tasa efectiva de descuento trimestral es 2%, podemos decir que la tasa nominal anual de descuento es 8% convertible trimestralmente.

La tasa nominal de descuento convertible m-veces es denotada por $d^{(m)}$. Así con lo que sabemos:

$$v = 1 - d = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^m$$

Algunos problemas requieren conversión de una tasa nominal de interés convertible m-veces al añor a una equivalente tasa nominal de descuento convertible p veces al año.Así:

$$1 = \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m}{1+i} = (1-d)(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = (1-\frac{d^{(p)}}{p})^p(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

Así:

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = (1-\frac{d^{(p)}}{p})^{-p}$$

Interés compuesto continuo y fuerza de interés

Consideraremos el casi donde el interés es converdito en principal tan pronto como sea ganado, esto inmediatamente empieza a ganar interéses. Como veremos, esto es equivalente a ganar una tasa nominal anual de $i^{(m)}$ donde m tiende a infinito.

Definición Cuando el interés es compuesto continuamente esto es cuanto hacemos tender m a infinito, le llamamos a la tasa de interés, "fuerza de interés".

Sea j la tasa nominal anual convertible m -veces al años, entonces la tasa anual efectiva es:

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1$$

Haciendo tender m a infinito obtenemos:

$$i = e^j - 1$$