Matemáticas financieras

La medida del interés.

Definición 1 Definamos la función de acumulación $a(t)$ como el valor acumulado de un fondo al tiempo t con inversión inicial de 1 (una unidad) al tiempo $0(a(0) = 1)$.

Definición 2 La tasa de crecimiento del t-ésimo año(Basado en la cantidad del fondo al inicio del año) está dada por:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}$$

i_t también se conoce como la “tasa efectiva de interés”.

Definición 3 Definimos la función monto $A(t)$ como el monto acumulado al tiempo t de una inversión de k unidades al tiempo $t = 0$. Esto es $A(0) = k$.

Obs 1 Es claro que $A(t) = ka(t)$, así la tasa de crecimiento de la función monto es:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)}$$

Obs 2 De lo anterior obtenemos:

$$A(t) = (1 + i_t)A(t-1)$$

Esto significa que el monto al final del t-ésimo año es igual al monto al inicio del año $(A(t-1))$ más un interés sobre $A(t-1)$.

Ejemplo 1 Dado $A(t) = t^2 + 100$ cálcula $a(10)$

$$A(0) = 100 = ka(0) = k$$

$$A(10) = 200 = 100a(10)$$

$$a(10) = 2$$

Interés Simple.

Nos gustaría estudiar un caso particular de la función de acumulación, nos gustaría que ver como se comporta $a(t)$ si la ganancia acumulada hasta al tiempo t es proporcional a t, esto es:

$$a(t) - a(0) = it$$

para alguna

$$i \in \mathbb{R}$$

, esto equivale a:

$$a(t) = 1 + it$$

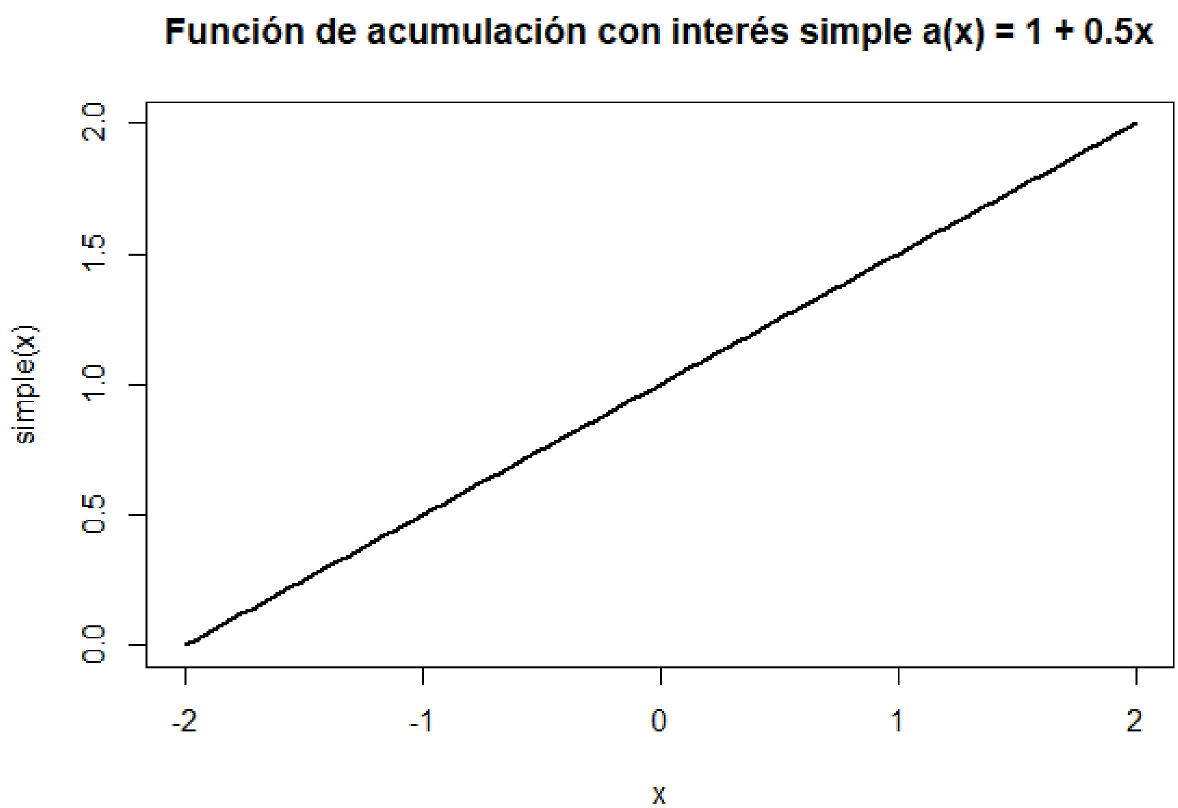
Para toda $t \in \mathbb{R}$.

Obs 3 Tenemos lo siguiente:

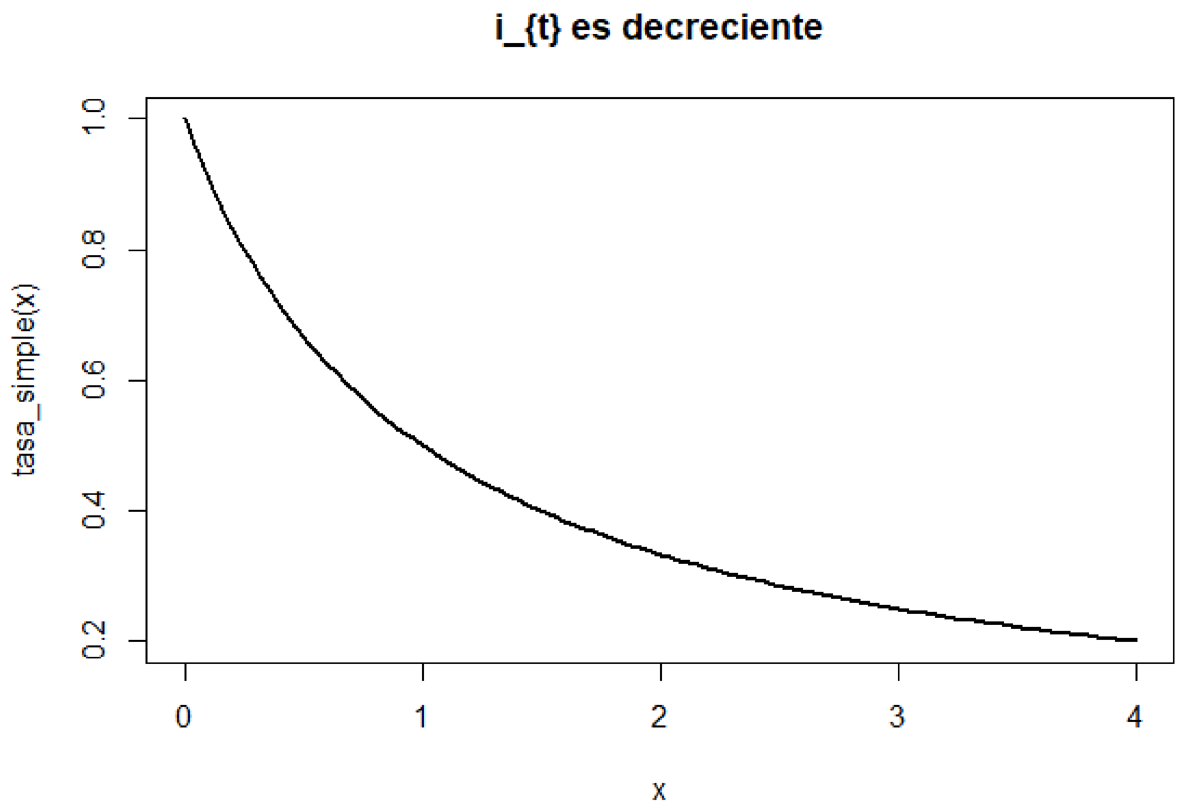
$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{i}{1 + i(t-1)}$$

Para todo $t > 1$, aquí observamos que $a(t)$ es creciente pero i_t es decreciente.

```r
simple <- function(x){
  return(1 + 0.5*x)
}
tasa_simple <- function(x){
  return( 0.5 / (1 + 0.5*(x-1)) )
}
curve(simple ,-2,2,lwd = 2 ,main = "Función de acumulación con interés simple a(x) = 1 + 0.5x")
```




```r
curve(tasa_simple,0,4,lwd = 2 ,main = "i_{t} es decreciente")
```



Por otro lado(sin suponer interés simple) Supongamos que tenemos tasas efectivas i_t en el t-ésimo año para toda $t \in \mathbb{N}$ entonces usando la observación 2(que también es válida para $a(t)$) e inducción obtenemos:

$$a(t) = \prod_{j=1}^{t}(1 + i_j)$$

Interés compuesto.

Del anterior producto si consideramos tasas efectivas de interés constantes esto es $i_j = i$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Este caso es llamado "Interés compuesto"

Valor presente.

Definición 4 El valor presente (VP) es el valor en el tiempo cero de una inversión y el valor futuro (VF) es el valor de una inversión n periodos después.

Si algún fondo es invertido a interés compuesto de una tasa i por periodo, para n periodos, entonces:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Tasa Nominal de interés

Definición 4 La tasa nominal anual de interés convertible m-veces al año es igual a la tasa efectiva por periodo(de m) multiplicada por el número de periodos del año en este caso por m.

Ejemplo Supongamos que tenemos un fondo que paga interés cada trimestre(4 periodos por año) con tasa efectiva trimestral de 2% (Ocupamos interés compuesto el cual la tasa efectiva trimestral es constante, ¿Por qué?). La tasa nominal anual convertible trimestralmente(4 veces al año) es $8\% = 2\% * 4$. Pero la tasa anual efectiva la calculamos como sigue:

$$(1 + 0.02)^4 = 1.0824$$

$$Tasa anual efectiva = 1.0824 - 1 = 0.0824$$

Obs La tasa nominal anual convertible m-veces al año es una tasa artificial que provee una forma de hablar de la tasa periodica en terminos anuales. La tasa efectiva se ocupa para calculos, la nominal no.

En el caso general de m periodos al año denotamos como $i^{(m)}$ a la tasa nominal donde $\frac{i^{(m)}}{m}$ es la tasa efectiva por periodo m-ésimo. La tasa anual efectiva es calculada como sigue:

$$i = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1$$

Obs Usualmente verás que el interés es "compuesto" o "convertible" m-veces al año. Esto significa que el interés ganado durante cada periodo (de tamaño $\frac{1}{m}$ de año) es "compuesto"(convertido a principal) a final de cada periodo y gana intereses durante el siguiente periodo.

Tasa de descuento

Supongamos que tenemos una tasa anual del 6% y queremos tener al final del año \$1000 así que necesitamos invertir:

$$\frac{1000}{(1 + 0.06)} = 943.4$$

Para tener en el futuro \$1000. Ahora el interés ganado durante el año o lo que le tenemos que descontar a \$1000 es:

$$1000 - 943.9 = 56.6$$

Está es la cantidad de descuento, y la tasa de descuento es:

$$\frac{56.6}{1000} = 0.0566$$

En términos generales si al final del año queremos 1, tenemos que invertir al inicio del año $\frac{1}{(1+i)}$ con i la tasa anual efectiva. Así el monto de descuento es $1 - \frac{1}{(1+i)}$ y la tasa de descuento d es:

$$d = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)}}{1} = 1 - \frac{1}{(1 + i)}$$

Es fácil ver que:

$$d = \frac{i}{1 + i}$$

Obs También podemos definir la tasa efectiva de descuento en terminos de la función de acumulación:

$$d = \frac{a(t + 1) - a(t)}{a(t + 1)}$$

De esta forma podemos definir la tasa efectiva de descuento para mas periodos o mas años.

Definición Se define el factor de valor presente v como:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Obs De la sección anterior es inmediato que:

$$d = 1 - v$$

$$d = iv$$

Y además:

$$i - d = i - \frac{i}{1+i} = i(1 - \frac{1}{1+i}) = i(1-v) = id$$
$$i - d = id$$

Notación actuarial tenemos:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n} = v^n VF$$

###Tasa nominal de descuento Una tasa de deescuento puede ser también cotizada como una tasa nominal anual. Por ejemplo si la tasa efectiva de descuento trimestral es 2%, podemos decir que la tasa nominal anual de descuento es 8% convertible trimestralmente.

La tasa nominal de descuento convertible m-veces es denotada por $d^{(m)}$. Así con lo que sabemos:

$$v = 1 - d = (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^m$$

Algunos problemas requieren conversión de una tasa nominal de interés convertible m-veces al añor a una equivalente tasa nominal de descuento convertible p veces al año.Así:

$$1 = \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m}{1+i} = (1-d)(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = (1-\frac{d^{(p)}}{p})^p(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$$

Así:

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = (1-\frac{d^{(p)}}{p})^{-p}$$

Interés compuesto continuamente y fuerza de interés

Siempre considerarémos que el interés es compuesto a menos que se diga lo contrario. Esto es, la función de acumulación está dada por:

$$a(t) = (1+i)^t$$

Para alguna tasa de interés $i \in \mathbb{R}$.

En está sección consideraremos el caso dónde el interés es compuesto continuamente. El interés compuesto continuamente no es un diferente tipo del interés compuesto, solo es una forma distinta de verlo.

Si una inversión gana interés compuesto a una tasa de interés anual efectiva de 8%, su valor incrementa anualmente por un factor de 1.08. Sin embargo, si eso gana interés a una tasa nominal anual de 8% convertible semi-anualmente, entonces está ganando una tasa semi-anual efectiva del 4%, y su valor incremente anualmente por un facotr de $1.0816 = (1.04)^2$. Esto es equivalente a una tasa anual efectiva del 8.16%

En general para una tasa anual nominal del 8% convertible m-veces al año, la tasa anual efectiva es:

$$i = (1 + \frac{0.08}{m})^m - 1$$

Consideremos la situación mencionada antes, donde el interés es convertible a principal continuamente como es ganado. En ese caso , m tiende a infinito y la tasa de interés anual efectiva es:

$$\lim_{m\to\infty}[(1+\frac{0.08}{m})^m - 1] = e^{0.08} - 1 \approx 8.3287\%$$

La anterior igualdad se da por la definición de la exponencial.

Definición Cuando el interés es compuesto continuamente, nosotros llamamos a la exponente una "Fuerza de interés" y a denotamos por la letra δ.

Bajo el interés compuesto continuamente si la fuerza de interés es δ entonces:

$$a(t) = (1+i)^t = e^{t\delta}$$

Derivando:

$$a'(t) = \delta e^{t\delta} = \delta a(t) \ldots (1)$$

Así la fuerza de interés $\delta = a'(0)$. Esto nos dice que la fuerza de interés δ es la tasa(o velocidad) de crecimiento anual al tiempo cero de una inversión inicial de una unidad. Si consideramos una inverisón inicial $K > 0$, tendremos:

$$\delta = \frac{A'(0)}{A(0)} = \frac{A'(0)}{K}$$

Lo cual se puede interpretar como la tasa(velocidad) de crecimiento anual al tiempo cero proporcional al balance al timepo 0, el cual es K.

Obs En estos casos nos referimos a una tasa como "velocidad" pues es el significado de la derivada $a'(0)$ es una "velocidad".

Ejemplo Siguiendo con el ejemplo anterior. La fuerza de interés era 8%, así que la inversión tiene un valor de 100 al tiempo cero, entonces está ganando un interés a una tasa de crecimiento de $K * \delta = 100 * 8\% = 8$ por año al tiempo cero. En el último día del año, el principal creció a 108.305(Verifíquelo) y está ganando una tasa de creimiento de $A'(t) = 100 * 8\% * e^{8\%} = 8.6662$.

Al final del año $A(1) = 108.3287$, esto es la tasa anual efectiva del primer año es 8.3287%. Recordemos que al principio del año la tasa de crecimiento es de 8% y al final de 8.6662% Se puede considerar que la tasa promedio es 8.3287% ya que por teorema fundamental del cálculo:

$$\int_0^1 A'(t) = A(1) - A(0) = K(1+i) - K$$

$$i = \frac{\int_0^1 A'(t)}{K}$$

Que en este caso:

$$8.3287\% = \frac{\int_0^1 A'(t)}{100} = a(1) - a(0) = e^{8\%} - 1$$

Así la tasa anual efectiva del primer año es un "promedio" de las tasas(velocidades) de crecimiento de la inversión a lo largo del primer año.

Obs Recuerda que el interés compuesto continuamente no es un diferente tipo del interés compuesto. La fuerza de interés, δ, es simplemnte una forma de describir la tasa a la cual la inversión está creciento con interés compuesto, podemos ocupar la igualdad:

$$1 + i = e^{\delta}$$

para pasar de la fuerza de interés a una tasa de interés anual efectiva(o viceversa).

Más aún para una fuerza de interés δ y su equivalente tasa anual efectiva i tenemos las siguientes igualdades:

$$1 + i = e^{\delta}$$

$$(1+i)^n = e^{n\delta}$$
$$\delta = \ln(1+i)$$
$$v^n = (1+i)^{-n} = e^{-n\delta}$$

En la discusión anterior, asumimos una fuerza de interés constante. Pero hay situaciones donde la fuerza de interés varia en el tiempo.

Definición Definimos la fuerza de interés instantanea al tiempo t, como:

$$\delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

La cual tiene sentido por la igualdad (1). $\delta(t)$ es la tasa(velocidad) a la cual la inversión está ganando interés al tiempo t, expresado como un porcentaje de $a(t)$ (Porque se divide entre a(t)). Está es la definición de fuerza de interés, pero como está puede cambiar como función del tiempo $\delta(t)$, es llamada fuerza de interés instantánea al tiempo t. Para la función de acumulación con una constante de fuerza de interés δ (Esto es, cuando $a(t) = e^{t\delta}$), la instantánea coincide:

$$\delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\delta e^{t\delta}}{e^{t\delta}} = \delta$$

Por otro lado tenemos las relaciones que no son dificiles de verificar:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\ln(a(t))$$
$$\int_0^k \delta(t)dt = \ln(a(k)) - \ln(a(0)) = \ln(a(k))$$

Esto implica:

$$a(t) = e^{\int_0^t \delta(u)du}$$

Tasas cotizadas para Treasures Bills

United States Treasure Bills

Los T-bills son titulos de valores a corto plazo de Estados Unidos. Un inversor quien comprar T-bills está prestando dinero al gobierno de los Estados Unidos por un periodo de 4, 13, 26 o 52 semanas. El inversor recibirá la cantidad facial del T-bill en la fecha de maduración. Por ejemplo, un inversor podría pagar 960 para un T-bill de 52 semanas con una cantidad facial de 100. Al final de las 52 semanas, el tesoro de US pagará el valor madurado de 1000 y el inversor habrá ganado un retorno de:

$$\frac{1000}{960} - 1 = 4.167\%$$

Esta es la tasa efectiva de interés por las 52 semanas(364 días) del T-bill. Tecnicamente, la tasa anual efectiva es un poco mas grande que está, desde que 4.167% fue ganado in poco menos que un año.

Tasas cotizadas para T-bills de US no son ni tasas efectivas de interés ni tasas nominales. En su lugar, son expresadas como "Rendimiento de descuento bancario", el cual es calculado por la siguiente fórmula:

$$Tasa-cotizada = \frac{360}{Días-para-madurar} * \frac{Cantidad-de-interés}{Valor-de-maduración}$$

Relacionando tasas de descuento, fuerza de interés y tasa de interés.

No es dificíl ver que $d < \delta < i$, desde que para $i > 0$:

$$\frac{i}{1+i} < ln(1+i) < i$$

Demostración hagamos $x = 1 + i$ si $i > 0$ entonces $x > 1$, Así para $1 < u \leq x$:

$$1 < u < u^2$$

Entonces:

$$\frac{1}{u^2} < \frac{1}{u} < 1$$

Integrando de 1 a x:

$$\int_1^x \frac{1}{u^2} du < \int_1^x \frac{1}{u} du < \int_1^x 1 du$$

Equivale a:

$$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1$$

Sustituyendo $x = 1 + i$

$$\frac{i}{1+i} < \ln(1+i) < i$$

Como se quería.

Resolviendo para VP,VF, i y n.