

Matemáticas financieras

La medida del interés.

Definición 1 Definamos la función de acumulación $a(t)$ como el valor acumulado de un fondo al tiempo t con inversión inicial de 1 (una unidad) al tiempo 0 ($a(0) = 1$).

Definición 2 La tasa de crecimiento del t -ésimo año (Basado en la cantidad del fondo al inicio del año) está dada por:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)}$$

i_t también se conoce como la “tasa efectiva de interés”.

Definición 3 Definimos la función monto $A(t)$ como el monto acumulado al tiempo t de una inversión de k unidades al tiempo $t = 0$. Esto es $A(0) = k$.

Obs 1 Es claro que $A(t) = ka(t)$, así la tasa de crecimiento de la función monto es:

$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{A(t) - A(t-1)}{A(t-1)}$$

Obs 2 De lo anterior obtenemos:

$$A(t) = (1 + i_t)A(t-1)$$

Esto significa que el monto al final del t -ésimo año es igual al monto al inicio del año ($A(t-1)$) más un interés sobre $A(t-1)$.

Ejemplo 1 Dado $A(t) = t^2 + 100$ calcula $a(10)$

$$A(0) = 100 = ka(0) = k$$

$$A(10) = 200 = 100a(10)$$

$$a(10) = 2$$

Interés Simple.

Nos gustaría estudiar un caso particular de la función de acumulación, nos gustaría que ver como se comporta $a(t)$ si la ganancia acumulada hasta al tiempo t es proporcional a t , esto es:

$$a(t) - a(0) = it$$

para alguna

$$i \in \mathbb{R}$$

, esto equivale a:

$$a(t) = 1 + it$$

Para toda $t \in \mathbb{R}$.

Obs 3 Tenemos lo siguiente:

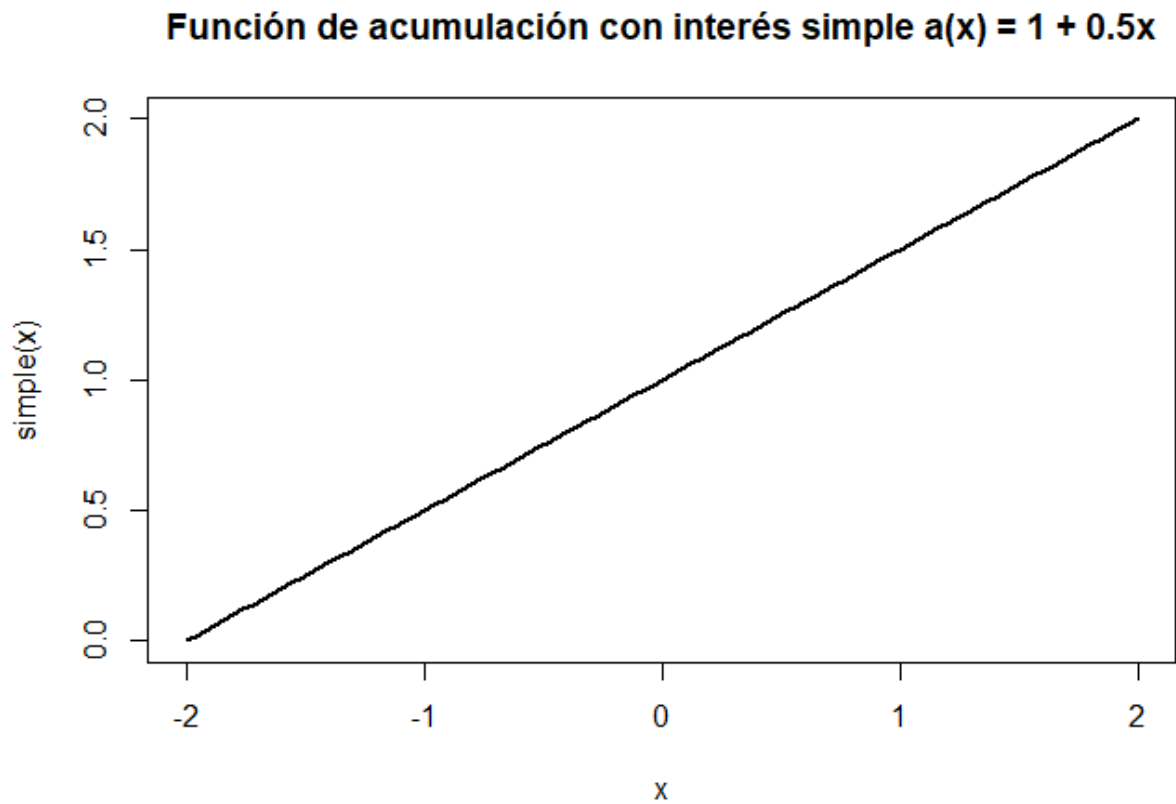
$$i_t = \frac{a(t) - a(t-1)}{a(t-1)} = \frac{i}{1 + i(t-1)}$$

Para todo $t > 1$, aquí observamos que $a(t)$ es creciente pero i_t es decreciente.

```

simple <- function(x){
  return(1 + 0.5*x)
}
tasa_simple <- function(x){
  return( 0.5 / (1 + 0.5*(x-1)) )
}
curve(simple ,-2,2,lwd = 2 ,main = "Función de acumulación con interés simple a(x) = 1 + 0.5x")

```

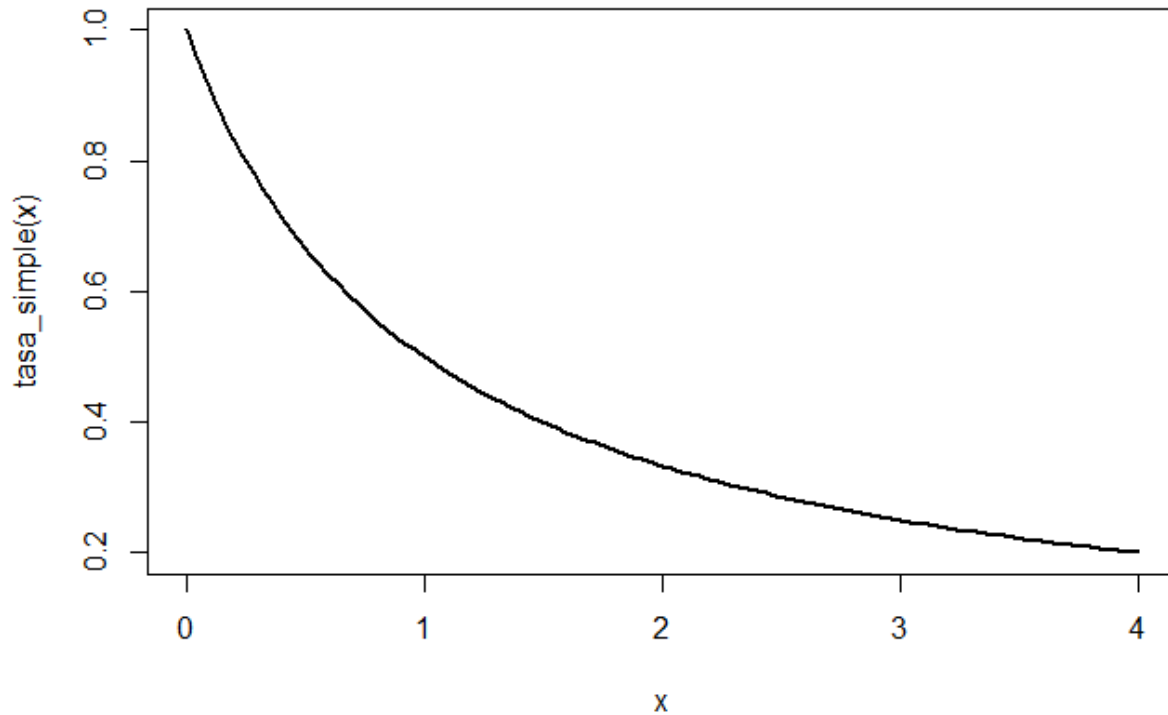


```

curve(tasa_simple,0,4,lwd = 2 ,main = "i_{t} es decreciente")

```

$i_{\{t\}}$ es decreciente



Por otro lado(sin suponer interés simple) Supongamos que tenemos tasas efectivas i_t en el t -ésimo año para toda $t \in \mathbb{N}$ entonces usando la observación 2(que también es válida para $a(t)$) e inducción obtenemos:

$$a(t) = \prod_{j=1}^t (1 + i_j)$$

Interés compuesto.

Del anterior producto si consideramos tasas efectivas de interés constantes esto es $i_j = i$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces:

$$a(t) = (1 + i)^t$$

Este caso es llamado “Interés compuesto”

Valor presente.

Definición 4 El valor presente (VP) es el valor en el tiempo cero de una inversión y el valor futuro (VF) es el valor de una inversión n periodos después.

Si algún fondo es invertido a interés compuesto de una tasa i por periodo, para n periodos, entonces:

$$VF = VP(1 + i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1 + i)^n}$$

Tasa Nominal de interés

Definición 4 La tasa nominal anual de interés convertible m -veces al año es igual a la tasa efectiva por periodo (de m) multiplicada por el número de periodos del año en este caso por m .

Ejemplo Supongamos que tenemos un fondo que paga interés cada trimestre (4 periodos por año) con tasa efectiva trimestral de 2 (Ocupamos interés compuesto el cual la tasa efectiva trimestral es constante, ¿Por qué?). La tasa nominal anual convertible trimestralmente (4 veces al año) es 8.