Computación, Proyecto Final.
Física, Facultad de Ciencias. UNAM
Celeste Castro Granados
Fernanda Martínez Saldaña

Ecuaciones paramétricas

Un sistema de ecuaciones paramétricas permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio, mediante valores que recorren un intervalo de números reales, mediante una variable, llamada parámetro, considerando cada coordenada de un punto como una función dependiente del parámetro.

Los griegos concibieron curvas más complicadas a partir de la recta y de la circunferencia, tales como la cicloide, la hipocicloide o la epicicloide.

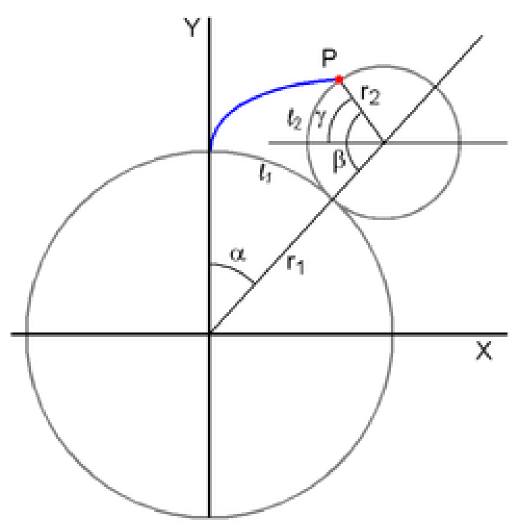
Los sabios de la antigüedad griega utilizaron sus conocimientos sobre circunferencia y esferas para crear un modelo matemático que describiera los movimientos de las estrellas y los planetas. La escuela pitagórica comenzó el estudio de la geometría. Uno de los principios de las matemáticas y posiblemente de la mente humana consiste en construir estructuras cada vez más complejas a partir de las estructuras simples.

Los griegos concibieron así curvas más complicadas a partir de la recta y de la circunferencia, tales como la cicloide, la hipocicloide o la epicicloide.

Epicicloide

Las epicicloides son curvas generadas por un punto fijo de una circunferencia que gira sin deslizar por la parte externa de otra circunferencia, de radio mayor que la primera. Es la curva generada por la trayectoria de un punto perteneciente a una circunferencia (generatriz) que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia (directriz). Es un tipo de ruleta cicloidal.

Tenemos la siguiente figura:



Computación, Proyecto Final.
Física, Facultad de Ciencias. UNAM
Celeste Castro Granados
Fernanda Martínez Saldaña

Basándonos en la figura anterior, es que se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{x} = (r_1 + r_2)cos\alpha + r_2 sin\gamma$$

$$\mathbf{y} = (r_1 + r_2)sin\alpha - r_2 cos\gamma$$

En donde γ = α + β - π/2, y como se menciona arriba, la circunferencia chica rueda sin desplazamiento, los arcos l1 y l2 son iguales.

Es decir;

$$r_1\alpha = l1 = l2 = r_2\beta$$

De esa expresión, se deriva que:

$$\beta = \frac{r_1}{r_2}\alpha$$

Por lo tanto, sustituyendo β, es como obtenemos las ecuaciones paramétricas que describen a la Epicicloide:

$$\mathbf{x} = (r_1 + r_2)cos\alpha - r_2 cos[\alpha(1 + \frac{r_1}{r_2})]$$

$$\mathbf{y} = (r_1 + r_2)sin\alpha - r_2 sin[\alpha(1 + \frac{r_1}{r_2})]$$

Siendo r1 el radio de la circunferencia fija y r2 el de la circunferencia que gira. El valor de r1 y r2 hace variar la epicicloide generada. Los elementos de la epicicloide son el arco, pico, directriz y generatriz.

Tenemos que cuando r1/r2 es un número racional, es decir;

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{q}$$

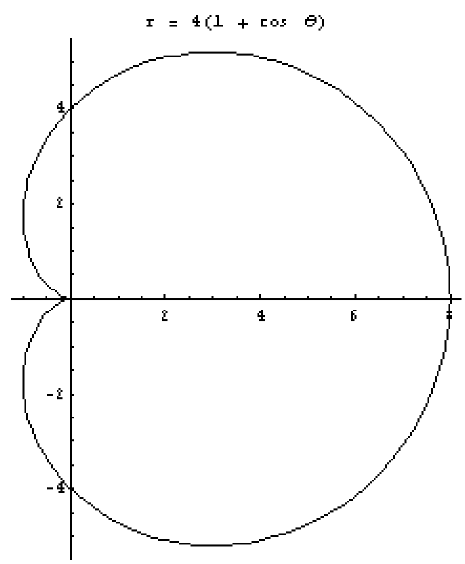
Siendo **p** y **q** números enteros, las epicicloides son curvas algebraicas.

Computación, Proyecto Final.
Física, Facultad de Ciencias. UNAM
Celeste Castro Granados
Fernanda Martínez Saldaña

Ejemplos de casos particulares de la Epicicloide

1. <u>Cardioide.</u>

La cardioide es una curva ruleta de tipo Epicicloide, es la más sencilla de las epicicloides. Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que, sin deslizarse, rueda alrededor de otra circunferencia de igual radio (k=1). Se llama cardioide por su semejanza con el dibujo de un corazón.



La ecuación genérica de la cardioide en coordenadas cartesianas es:

$$(x_2 + y_2 - 2ax)2 = 4a2(x_2 + y_2)$$

La ecuación genérica de la cardiode en coordenadas polares es:

$$\mathbf{r} = a(1 + cos(t))$$

2. <u>Nefroide.</u>

La nefroide es una epicicloide de dos puntos de retroceso cuya forma es la de un riñón. Es engendrada por una circunferencia de radio **a** que gira exteriormente sin deslizar sobre una circunferencia de radio **2a** y de centro **O**. (k=2)

Computación, Proyecto Final.
Física, Facultad de Ciencias. UNAM
Celeste Castro Granados
Fernanda Martínez Saldaña

Las ecuaciones paramétricas de la nefroide con picos en el eje **y**, son las siguientes:

$$x = a(3\cos t + \cos 3t), \quad y = a(3\sin t + \sin 3t).$$

En el caso de cuando los picos están en el eje **x**, las ecuaciones paramétricas son:

$$x = a(3\cos t - \cos 3t), \quad y = a(3\sin t - \sin 3t).$$

Una ecuación cartesiana para la nefroide sería:

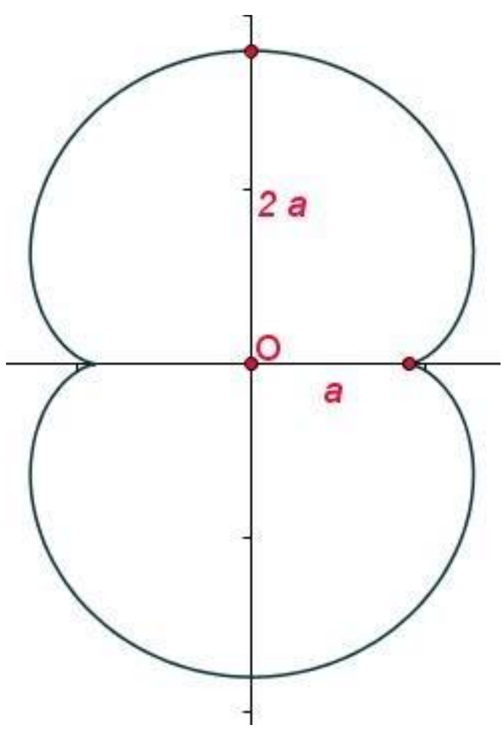
$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4x^2.$$

Las propiedades hacen referencia a la nefroide parametrizada por el primer par de ecuaciones mencionadas antes. La longitud de arco y el área de la nefroide son, respectivamente,

$$L = 24a, \quad A = 12\pi a^2.$$

El radio de curvatura está dado por:

$$\rho = |3a\cos t|.$$

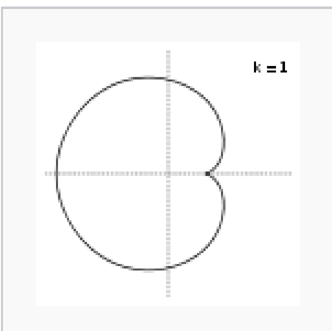


Computación, Proyecto Final.
Física, Facultad de Ciencias. UNAM
Celeste Castro Granados
Fernanda Martínez Saldaña

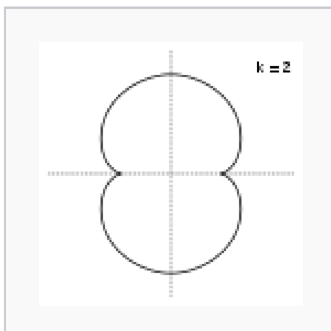
Finalmente, a continuación se muestran distintos tipos de Epicicloides, dependiendo del valor de k para cada caso.

Como se puede observar, se está presentando como sería la Epicicloide cuando el valor de k va desde 1 hasta 4, y después, específicamente para:

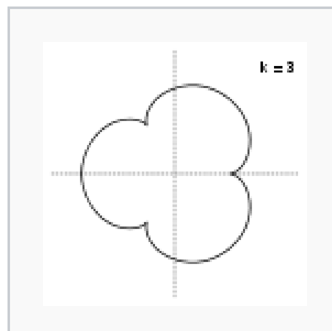
- k=21
- k=38
- k=55
- k =72



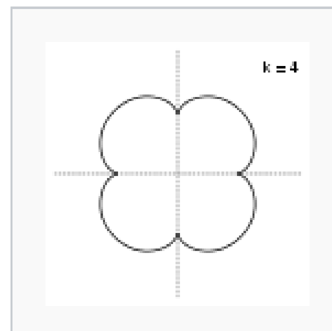
k=1



k=2



k=3



k=4