

# Propiedades de un modelo de espera con capacidad finita

Jorgelina Mandrile, Analía Monti, Luis Lara, Luis Feraboli  
*Escuela de Ingeniería Industrial*  
*Departamento Optimización y Control*  
*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura*  
*Universidad Nacional de Rosario*  
*Avda Pellegrini 250 - 2000 Rosario*  
*lplara@fceia.unr.edu.ar*

## RESUMEN

**En este trabajo se estudian las propiedades de un sistema simple de espera con capacidad limitada. En el régimen estacionario, se demuestra que el modelo con capacidad infinita constituye una buena aproximación del modelo con capacidad limitada.**

## Investigación Operativa, Fenómenos de Espera, Dinámica de Sistemas

## 1 INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de espera poseen un campo de aplicación muy vasto que incluye desde redes de telecomunicaciones hasta procesos industriales [1,2,3,4,5]. Los mismos se caracterizan por la llegada de clientes a una instalación de servicio formada por uno o varios servidores. Estos servidores pueden estar ocupados en el momento del arribo provocando la formación de una línea de espera o cola. Ejemplos típicos son las colas que se forman frente a las ventanillas de un banco o cajas de supermercados, la atención de llamadas de un call center, la llegada de material en proceso a una celda de producción, etc. Dentro de este contexto, se denomina cliente a todo elemento que requiere un servicio y puede tener que esperar para ser atendido.

Estructuralmente, una operación de colas se divide en cuatro partes: el ingreso, la línea de espera o cola, la prestación de servicio y la salida. Los clientes que requieren un servicio provienen de una fuente o población, que puede ser finita o infinita. Estos clientes arriban al sistema según una determinada distribución de probabilidad.

El conjunto formado por la cola y la instalación de servicio constituye el sistema de espera. Debe definirse si el mismo es de capacidad limitada o infinita. En la práctica ningún sistema real tiene capacidad infinita. Se considera como tal cuando su capacidad no implica ninguna restricción para su funcionamiento.

En este trabajo se estudia bajo qué condiciones un modelo de espera con capacidad limitada en el régimen estacionario puede ser aproximado por su equivalente con capacidad ilimitada.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección II se desarrollan los modelos a comparar. En la sección III se estudian sus propiedades. En la sección IV se comparan las propiedades en el régimen estacionario. Por último, en la sección V se desarrollan las conclusiones.

## II MODELOS DE ESPERA SIMPLE

Si bien existe una gran cantidad de modelos que surgen de las distintas alternativas asociadas a cada una de las partes de la estructura de un problema de espera, en este estudio se consideran sólo dos de ellos que presentan las siguientes características:

1) arribos Poissonianos, con tasa  $\lambda$ ; 2) tiempo de servicio exponencial, con tasa  $\mu$ ; 3) un servidor; 4) disciplina de servicio general; 5) fuente de clientes infinita. El primer caso corresponde al sistema con capacidad infinita (M/M/1):(DG/ $\infty/\infty$ ) y el segundo con capacidad limitada (M/M/1):(DG/N/ $\infty$ ).

El primer caso (M/M/1):(DG/ $\infty/\infty$ ) se corresponde con el proceso de nacimiento y muerte de Poisson y puede representarse con el siguiente diagrama de causalidad:

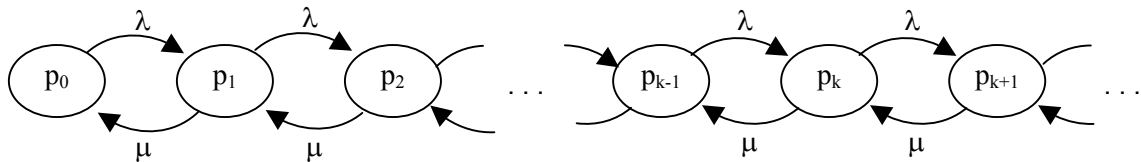


Figura 1: Diagrama de causalidad para el modelo (M/M/1):(DG/ $\infty/\infty$ ).

Los círculos corresponden a los niveles de la probabilidad  $p_k(t)$  de que existan  $k$  clientes en el sistema en el tiempo  $t$ . Las flechas indican los flujos de probabilidad que son la causa de variación de las probabilidades. En base al diagrama de causalidad, la dinámica se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= \mu p_1 - \lambda p_0, \\ \dot{p}_k &= \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} - (\lambda + \mu) p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \quad (1)$$

donde el sobre punto indica la derivada respecto al tiempo.

Si bien es un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales, la solución explícita en términos de las funciones de Bessel no es de difícil determinación y puede verse en [2].

Para el caso en que el sistema tiene capacidad limitada de  $N$  clientes, (M/M/1):(DG/N/ $\infty$ ), el comportamiento es muy similar al modelo anterior (M/M/1):(DG/ $\infty/\infty$ ), la diferencia se presenta cuando ocurren llegadas después de que hay en el sistema  $N$  clientes. En ese momento, el nuevo cliente que se presenta es rechazado puesto que el sistema no admite ningún nuevo ingreso hasta que no sea atendido alguno de los clientes que están en él. Dado que el sistema nunca alcanzará el estado  $N+1$ , el diagrama de la Figura 1 se convierte en:

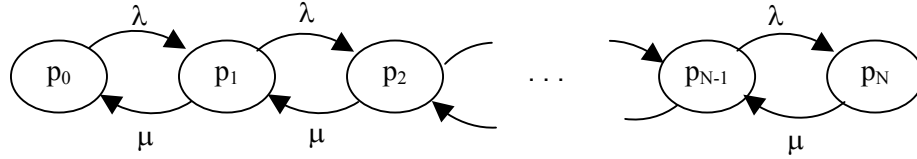


Figura 2: Diagrama de causalidad para el modelo (M/M/1):(DG/N/∞).

Con el fin de reducir el número de parámetros en las ecuaciones, se adimensionalizan las variables mediante la transformación lineal  $t \rightarrow \mu t$ ,  $x = \lambda/\mu$ . De esta forma, las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= p_1 - x p_0, \\ \dot{p}_k &= x p_{k-1} + p_{k+1} - (x+1) p_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \dot{p}_N &= x p_{N-1} - p_N. \end{aligned} \quad (2)$$

En la sección siguiente se muestra que los autovalores tienen multiplicidad uno, luego la solución explícita de (2) es  $p_k(t) = \sum C_i e^{\lambda_i t}$ , donde  $C_i$  son las constantes de integración y  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz de los coeficientes, con  $i = 1, \dots, N+1$ . Sin embargo, cuando  $N$  es grande, la determinación de los autovalores no es simple y resulta más conveniente integrar numéricamente las ecuaciones [6,7,8]. Debido a la capacidad de cálculo del hardware actual, el método de Runge Kutta de cuarto orden con paso adaptativo resulta ser muy eficiente para este problema. El sistema posee un invariante ya que sumando todas las derivadas de la ecuación (2) obtenemos que  $\sum_{k=0}^N p_k(t)$  es constante sobre la curva solución y por lo tanto puede ser utilizada como variable de control de la precisión del cálculo numérico.

### III PROPIEDADES DE LOS MODELOS

Para caracterizar la dinámica de los modelos solamente se han elegido las siguientes indicadores: el número medio de clientes en el sistema y el factor de servicio.

El número medio de clientes en el sistema es  $L_s^m(t) = \sum_{k=0}^m k p_k(t)$ , donde  $m \leq \infty$ , y el factor de servicio,  $f_s^m(t) = 1 - p_0^m(t)$ .

El sistema con capacidad infinita (M/M/1):(DG/∞/∞) ( $m = \infty$ ) ha sido muy estudiado y las soluciones explícitas tanto del estado transitorio como las del estacionario pueden verse en [1,2]. Para estudiar el régimen estacionario se debe considerar el límite  $t \rightarrow \infty$ , el cual es finito sólo si  $x < 1$ . En esas condiciones, las probabilidades resultan:

$$\begin{aligned} p_0^* &= 1 - x, \\ p_k^* &= p_0^* (1 - x)^k, \end{aligned}$$

luego, el número medio de clientes en el sistema y el factor de servicio resultan:

$$L_s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} L_s(t) = \frac{x}{1-x}, \quad (3)$$

$$f_s^* = \lim_{t \rightarrow \infty} f_s(t) = x. \quad (4)$$

Para determinar las propiedades en el régimen estacionario del sistema con capacidad limitada (M/M/1):(DG/N/∞) es necesario estudiar los puntos fijos de (2). Dado que la matriz de coeficientes posee determinante nulo, el sistema posee infinitos puntos fijos que son no aislados. En particular, sólo nos interesa la solución estacionaria que satisface la condición de normalización:

$$\sum_{k=0}^N p_k(t) = 1. \quad (5)$$

Para determinar los puntos fijos de (2), teniendo en cuenta la condición de normalización, se empleó el método de inducción comenzando con  $N = 2$ . Entonces las probabilidades estacionarias son:

$$p_0^* = \frac{x-1}{x^{N+1}-1}, \quad x \neq 1 \quad (6)$$

$$p_k^* = p_0^* x^k. \quad (7)$$

Para el caso  $x = 1$ , tenemos  $p_0^* = p_1^* = \dots = p_N^* = \frac{1}{N+1}$ .

El límite de (6) para  $N \rightarrow \infty$ ,  $x < 1$  y teniendo en cuenta que  $\lim_{N \rightarrow \infty} x^{N+1} - 1 = -1$ , obtenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_0^* = 1-x, \quad x < 1,$$

que correspondiente al modelo (M/M/1):(DG/∞/∞). La restricción  $x < 1$  es necesaria en el modelo (M/M/1):(DG/∞/∞) para obtener soluciones estacionarias. Dado que las probabilidades del modelo con capacidad limitada convergen uniformemente a las del modelo con capacidad infinita, se concluye que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (M/M/1):(DG/N/\infty) = (M/M/1):(DG/\infty/\infty), \quad x < 1.$$

Como es sabido la estabilidad del punto fijo se puede determinar a partir de los autovalores de la matriz Jacobiana de (2). Debido a la dificultad de cálculo, a través del software Mathematica® [9] se pudieron determinar explícitamente los autovalores hasta  $N = 12$ , obteniéndose que los mismos siempre tienen multiplicidad uno, siendo uno de ellos nulo y los restantes reales negativos. Para  $N > 12$  no fue posible determinarlos en forma explícita, sin embargo, la parte real de los autovalores no puede ser positiva ya que de serlo las probabilidades  $p_k(t)$  divergirían a tiempo infinito y por lo tanto no se satisfaría la normalización dada por la condición (5). De esta forma concluimos que la solución estacionaria es asintóticamente estable.

En la Figura 3 se muestra el comportamiento del número promedio de clientes en el sistema  $L_s(t)$  para los parámetros  $x = 1/2$  y  $N = 15$ . Éste tiende asintóticamente a un límite finito ya que las probabilidades  $p_k(t)$  tienden asintóticamente al punto fijo. Considerando (6) y (7), el límite de  $L_s(t)$  resulta:

$$L_s^* = \frac{x(Nx^{N+1} + 1 - x^N - Nx^N)}{(x-1)(x^{N+1} - 1)} \quad (8)$$

con igual razonamiento el factor de servicio  $f_s(t)$ :

$$f_s^* = 1 - \frac{x-1}{x^{N+1}-1}. \quad (9)$$

En  $x = 1$ , la singularidad en  $L_s^*$  y  $f_s^*$  es evitable dado que utilizando el teorema de L'Hospital se obtienen los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} L_s^* = \frac{N}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_s^* = \frac{N}{N+1}$$

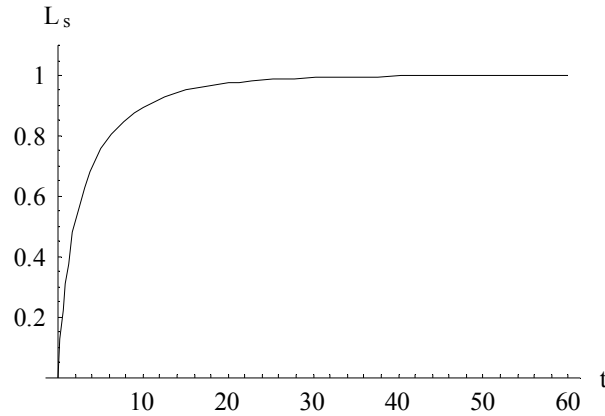


Figura 3: Comportamiento de  $L_s$  en función del tiempo con  $x = 1/2$  y  $N = 15$ .

Es fácil verificar que  $\frac{\partial L_s^*}{\partial x} \geq 0$ , luego  $L_s^*(x)$  es no decreciente. Este resultado es de esperar dado que al aumentar  $x$ , aumenta la frecuencia de arribos y por consiguiente el sistema incrementa su población promedio. Además, cuando la tasa de arribo supera fuertemente a la de servicio  $x \gg 1$  la capacidad del sistema se satura en su valor máximo  $N$ , de donde resulta que  $L_s^*(x) \rightarrow N$ . En la Figura 4 se mostramos el número medio de clientes en el sistema en el régimen estacionario  $L_s^*(x)$  para  $N=15$ , poniéndose de manifiesto el comportamiento asintótico antes descripto.

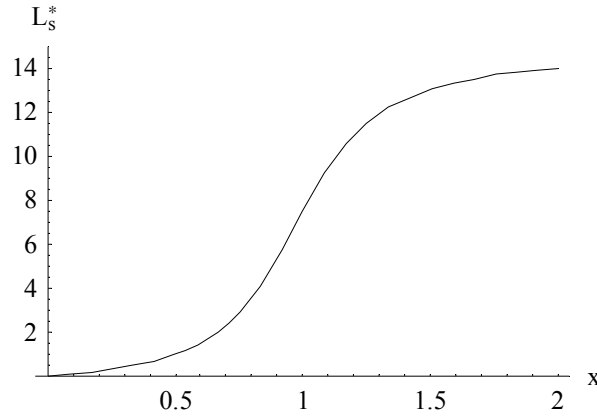


Figura 4: Comportamiento de  $L_s^*$  en función de  $x$  con  $N = 15$ .

Para alcanzar el estado estacionario debe transcurrir un tiempo infinito. Sin embargo, es posible adoptar algún criterio práctico para determinar un tiempo aproximado a partir del cual se puede considerar que al sistema estacionario. Definimos  $t^*$  al valor del tiempo a partir del cual se aproxima  $L_s(t)$  por  $L_s^*$ , el criterio propuesto consiste en determinar el tiempo  $t^*$  a partir del cual el número medio de clientes en el sistema se mantiene acotado por  $L_s^* \pm 5\%$ . Luego de realizar los cálculos para distintos valores de  $N$  y  $x$ , se obtienen los resultados que se representan en la Figura 5. Cabe aclarar que si en lugar de adoptar el 5% del valor de estado estable de  $L_s(t)$  se tomara el 1%, el valor de  $t^*$  será mayor. El análisis precedente también fue realizado para el factor de servicio  $f_s^*$ , obteniéndose resultados similares.

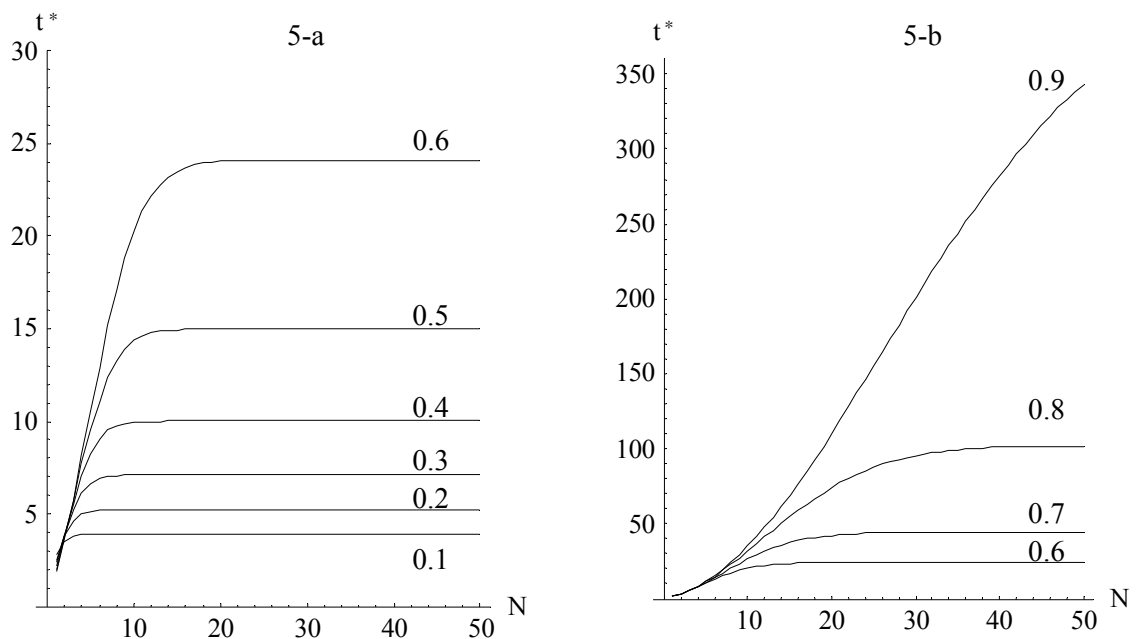


Figura 5: Representación de  $t^*$  en función de  $N$  para  $x$ : 5-a) de 0.1 a 0.6 y 5-b) de 0.6 a 0.9.

De los resultados vemos que el tiempo  $t^*$  crece a medida que la capacidad máxima del sistema se incrementa hasta que a partir de un determinado valor de  $N$  deja de cambiar. Esto se debe a que al considerar valores de  $N$  cada vez mayores para un  $x$  fijo, los valores de  $L_s^*$  son cada vez más próximos entre sí y tienden al valor del modelo de capacidad infinita. En consecuencia, llega un momento en que la diferencia entre los  $t^*$  para los distintos  $N$  se hace despreciable.

Por otra parte, se puede ver que para un  $N$  dado la duración del régimen transitorio se incrementa a medida que  $\lambda/\mu$  aumenta. Se observa que la variación de  $t^*$  es cada vez mayor frente a incrementos iguales del parámetro mencionado.

#### IV APROXIMACIÓN DEL SISTEMA CON CAPACIDAD LIMITADA

En esta sección se estudia cuándo en el régimen estacionario del sistema con capacidad finita  $(M/M/1):(DG/N/\infty)$  puede ser aproximado por un modelo con capacidad ilimitada  $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$ . La utilidad de este análisis está fundamentada en que los resultados del modelo con capacidad ilimitada son muy simples y fáciles de interpretar.

Utilizando (3) y (8), la variación relativa de  $L_s^*$  del sistema con capacidad limitada respecto al caso con capacidad infinita es:

$$\delta_r L_s^* = \left| \frac{(1+N)(x-1)x^N}{x^{N+1}-1} \right|, \quad (10)$$

donde  $x < 1$ , ya que el modelo  $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$  no posee solución estacionaria cuando  $x \geq 1$ . En la Figura 6 se representa la variación relativa  $\delta_r L_s^*$ . Se observa que los cambios más importantes se producen básicamente en las proximidades de  $N \rightarrow 0$  o  $x \rightarrow 1$ . Cualitativamente, fuera de estas regiones el sistema con capacidad limitada es aproximado por el sistema de capacidad ilimitada con un error tolerable.

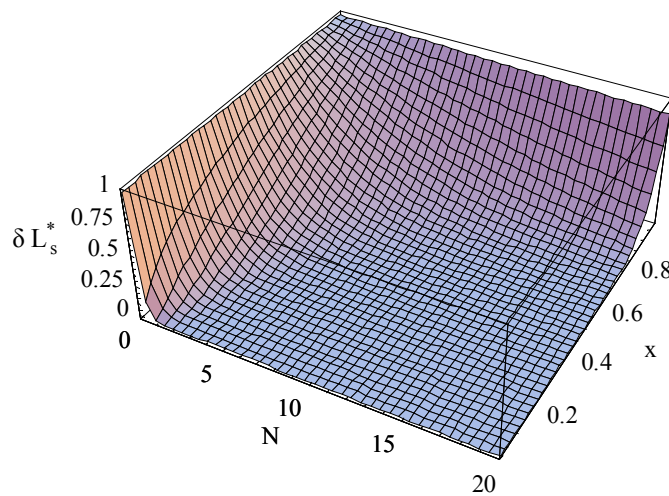


Figura 6: Comportamiento de  $L_s^*$  en función de  $N$  y  $x$ .

Igualando (10) a una constante se obtienen las curvas de nivel que se muestran en la Figura 7. Las mismas corresponden a diferentes valores de la variación relativa en el rango del 10 al 100 %. Las curvas de nivel resultan de mayor interés práctico para determinar el grado de aproximación de un modelo por otro cuando se especifican  $N$  y  $x$ .

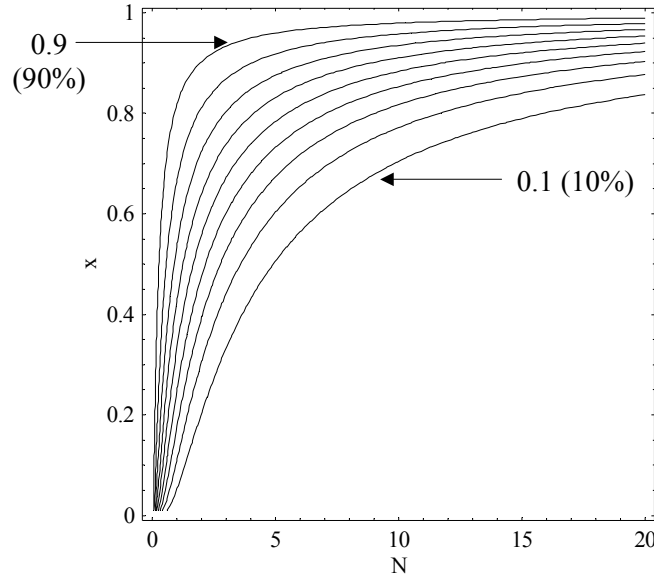


Figura 7: Curvas de nivel de  $L_s^*$ .

De igual forma se analiza el comportamiento del factor de servicio  $f_s^*$ . Utilizando (4) y (9), la variación relativa  $\delta_r f_s^*$  resulta:

$$\delta_r f_s^* = \left| \frac{(x-1) x^N}{x^{N+1} - 1} \right| \quad (11)$$

En la Figura 8 se muestran las curvas de nivel para  $\delta_r f_s^*$  y al igual que para  $\delta_r L_s^*$  se observa que los cambios más importantes se producen básicamente en las proximidades de  $N \rightarrow 0$  o  $x \rightarrow 1$ .

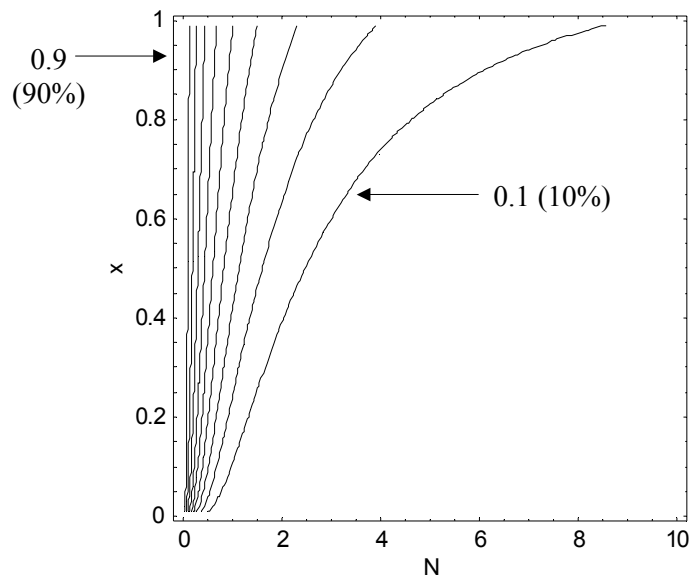


Figura 8: Curvas de nivel de  $f_s^*$ .



## V CONCLUSIONES

En este trabajo se determinó analíticamente el rango de los parámetros en el cual las propiedades del estado estacionario de un sistema con capacidad limitada  $(M/M/1):(DG/N/\infty)$  puede ser aproximado por uno con capacidad ilimitada  $(M/M/1):(DG/\infty/\infty)$ . Esto proporciona una ventaja de trabajo ya que las propiedades asintóticas en el sistema de capacidad ilimitada son muy simples y conocidas. También se determinó el tiempo a partir del cual se puede considerar al sistema en su estado estacionario. Por consiguiente, se simplifica el estudio del comportamiento de sistemas en situaciones reales donde la relación capacidad – número de clientes está sobredimensionada, disponiendo de sólidos argumentos matemáticos que permiten tomar decisiones en la práctica de la ingeniería industrial..

## VI REFERENCIAS

- 1 T. L. Saaty, *Elementos de la Teoría de Colas*, España: Aguilar S.A. de Ediciones, 1967.
- 2 A. Kaufmann, *Métodos y Modelos de la investigación de operaciones*, México: Compañía Editorial Continental, 1965.
- 3 R. A. A.Morán, "Introducción a los Fenómenos de Espera (Teoría de Colas)", Nota Técnica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, 2004.
- 4 H. A. Taha, *Investigación de Operaciones*, 7° ed., Editorial Pearson Educación, 2004.
- 5 W. L. Winston, *Investigación de Operaciones – Aplicaciones y Algoritmos*. Editorial Thomson International, 2004.
- 6 G. F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, 2° ed., España: Editorial Mc Graw Hill, 1993.
- 7 A. Law and W. Kelton, *Simulation modelling and analysis*, New York: McGraw-Hill, 1991.
- 8 S. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, New York: Addison-Wesley, 1994.
- 9 S. Wolfram, *Mathematica*, New York: Addison Wesley, 1991.