Zadaci:

1. **(7 bodova)** Ako je z_1 rješenje jednadžbe
$$(1+i)^3 \cdot (3-i) + i \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{z_1+2i}{2}\right) + z_1 = -2+12i,$$
u kompleksnoj ravnini prikažite skup točaka z koje zadovoljavaju nejednakost $\left|\sqrt{1+i\sqrt{3}}\right| < \left|z - i\sqrt{2}\right| < |z_1|$.

2. **(5 bodova)** Za koju vrijednost parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ sustav
$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_3 &= 3 - 2\lambda \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 - \lambda \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -\lambda \end{aligned}$$
ima rješenje? Odredite to rješenje.

3. **(6 bodova)** Zadana su tri uzastopna vrha paralelograma $ABCD$, $A(-3,2,\lambda)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,\lambda,2)$. Odredite: a) vrh D, b) $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je $|\vec{AD}| = \sqrt{14}$ i c) za $\lambda = 0$ prikažite vektor $|\vec{AC}|$ kao linearnu kombinaciju vektora $|\vec{AD}|$ i $|\vec{BD}|$.

4. **(6 bodova)** Zadani su pravci: $a \ldots \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$, $b \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da se pravci a i b sijeku. Za dobiveni λ odredite u kojoj se točki sijeku pravci.

5. **(6 bodova)** Odredite domenu funkcije $h = f \circ g$ ako je $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $g(x) = \ln(x^2-5)$.

Teorija:

1. **(10 bodova)** Definirati pojam ranga matrice i navesti Kronecker-Capellijev teorem. Dati primjere proširenih matrica sustava iz kojih je vidljivo da: a) sustav ima jedinstveno rješenje, b) sustav nema rješenja i c) sustav ima dvoparametarsko rješenje. U svakom primjeru komentirati rang matrica u skladu s rješenjima sustava (prema Kronecker-Cap.teoremu).

2. **(10 bodova)** Definirati mješoviti produkt triju vektora pa dokazati vezu mješovitog produkta i volumena paralelopipeda kojeg razapinju ti vektori (objasniti i skicirati). Kada kažemo da su tri vektora komplanarna i kako to računski provjeravamo? Primjenom svojstva komplanarnosti izvesti vektorsku jednadžbu ravnine.

Rješenja:

1. $z_1 = 2 + 2i$, $2 < x^2 + (y - \sqrt{2})^2 < 8$.
2. $\lambda = 1$, $x = (1, -1, 1)$.
3. $D(-1, \lambda + 5, 1 + \lambda)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$, $\vec{AC} = 2\vec{AD} - \vec{BD}$.
4. $\lambda = -\frac{1}{2}$, $S(3, -1, 2)$.
5. $\mathcal{D}(f) = \big(-\infty, -\sqrt{e+5}\big) \cup \big(-\sqrt{e+5}, -\sqrt{6}\big] \cup \big[\sqrt{6}, \sqrt{e+5}\big) \cup \big(\sqrt{e+5}, +\infty\big)$.