Zadaci:

1. **(6 bodova)** Odrediti modul i trigonometrijski prikaz broja $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljava jednadžbu
$$\begin{vmatrix} z & 1 & \overline{z} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2+i & i \end{vmatrix} = 2 - 8i.$$

2. **(6 bodova)** U ovisnosti u parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ ispitati rang matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 & \alpha \\ 1 & -5 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
Za onaj $\alpha \in \mathbb{R}$ za koji je rang matrice najmanji riješiti sustav $A \cdot X = 0$.

3. **(6 bodova)** Zadane su dijagonale paralelograma: $\overrightarrow{d}_1 = 3\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{d}_2 = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$, pri čemu je $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}| = 1$, $\measuredangle(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \frac{\pi}{3}$. Odrediti duljine stranica i površinu paralelograma, te kut između dijagonala.

4. **(6 bodova)** Odrediti jednadžbu pravca koji prolazi probodištem pravca $p ... \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{3}$ i ravine $\Pi ... 2x + y - z + 5 = 0$, a leži u ravnini Π i okomit je na dani pravac p.

5. **(6 bodova)** Odrediti domenu funkcije $f(x) = \frac{1-x}{x^2+5x+6} - \sqrt{\ln\left(\frac{2-x}{5+x}\right)}$.

Teorija:

1. **(6 bodova)** Objasniti što je i kako se provodi princip matematičke indukcije. Primjenom matematičke indukcije dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \cdots + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = 2\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

2. **(7 bodova)** Definirati pojmove: regularna matrica, inverzna matrica. Dokazati da, za regularne matrice A i B, vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Izraziti matricu X iz jednakosti $\left(AX^{-1}\right)^{-1} = B$.

3. **(7 bodova)** Definirati pojam linearne nezavisnosti vektora $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$. Neka su zadani vektori: $\vec{v}_1 = \{1, 1, 0\}$, $\vec{v}_2 = \{0, 1, 1\}$, $\vec{v}_3 = \{1, 3, 2\}$ i $\vec{v}_4 = \{1, 3, -2\}$. Za svaki od skupova $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ i $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ ispitati je li linearno nezavisan. Obrazložiti odgovore.

Rješenja:

1. $z = 1 + i, z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
2. $\alpha = -9, r(A) = 2$. Sustav ima $3 - parametarsko$ rješenje.
3. $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = \sqrt{7}, P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{d}_1| = 3\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{d}_2| = 1$.
4. $q ... \frac{x-5}{0} = \frac{y+7}{1} = \frac{z-8}{1}$.
5. $D_f = \langle -5, -3\rangle \cup \langle -3, -2\rangle \cup \left\langle -2, \frac{-3}{2}\right]$.