

4. Nizovi i redovi - 3. dio

1. Razvijte funkciju u red potencija u okolini zadane točke, te provjerite za koje vrijednosti x formula vrijedi (pronađite područje konvergencije reda):

(a) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 3;$

(b) $f(x) = \ln(1 + 2x), x_0 = 0;$

(c) $f(x) = \frac{2}{1 + 2x}, x_0 = 0;$

(d) $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x, x_0 = 2;$

(e) $f(x) = \cos(2x - 2), x_0 = 1;$

(f) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 3x - 4}, x_0 = 2;$

(g) $f(x) = \ln \frac{1}{\left(\frac{1}{3}x + 2\right)^4}, x_0 = -1;$

(h) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x}, x_0 = 0;$

(i) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x_0 = 0.$

Napomena. Zadatke možete riješiti pomoću razvoja funkcija

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2. Uz pomoć razvoja funkcije iz zadatka 1.(a) izračunajte

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{16}{243} + \dots$$

3. Uz pomoć razvoja funkcije iz zadatka 1.(g) pokažite da je

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2.$$

4. Uz pomoć MacLaurinovog razvoja funkcije $f(x) = e^x$ izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}.$$

Za koje vrijednosti x MacLaurinov red funkcije $f(x) = e^x$ konvergira?