

Zadaci:

1. **(6 bodova)** Izračunati i skicirati u Gaussovoj ravnini kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$|z - 1 - i| + |z - 3 - i| \geq 4.$$

2. **(6 bodova)** Odrediti realni parametar α tako da sustav

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + (1 - 2\alpha)x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 + 5x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + (\alpha + 1)x_3 + (\alpha - 1)x_4 &= 2\alpha \\ 2x_2 - 2\alpha x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

ima dvoparametarsko rješenje.

3. **(5 bodova)** Odrediti $\alpha \in \mathbb{Z}$ tako da volumen paralelopipeda, kojeg razapinju vektori $\vec{a} = 2\alpha^3 \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \alpha^3 \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\alpha^3 \vec{j} + \vec{k}$, bude jednak 6.

4. **(6 bodova)** Odrediti jednadžbu pravca p koji leži u ravnini

$$\pi \dots x - 4y + 2z - 7 = 0, \text{ prolazi točkom } T \text{ u kojoj pravac } p_1 \dots \begin{cases} x - 2y - 4z + 3 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

siječe ravninu π i okomit je na pravac p_1 . Skica obavezna.

5. **(7 bodova)** Odrediti i skicirati domenu funkcije $(f \circ g)(x)$ ako je

$$f(x) = \sqrt{\arcsin x} + \arccos \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1 - x^2}{2 + x}.$$

Teorija:

1. **(6 bodova)** Objasniti kako provodimo postupak matematičke indukcije i čemu on služi. Primjenom principa matematičke indukcije dokazati da, za svaki prirodan broj n , vrijedi

$$13 \mid 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}.$$

2. **(7 bodova)** Definirati pojam inverzne matrice i opisati dva načina računanja inverznih matrica. Riješiti matricnu jednadžbu $(AX^{-1} + B)^{-1} = \frac{1}{3}X$, ako je

$$A = [a_{ij}] \text{ matrica reda } 2 \times 2 \text{ zadana s } a_{ij} = 2i - j, \text{ a } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. **(7 bodova)** Definirati pojmove: funkcija, injekcija, surjekcija. U tri zasebna koordinatna sustava skicirati grafove funkcija: $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ i $h(x) = x^5$ pa za svaku funkciju zapisati: domenu, kodomenu, je li injektivna i zašto, je li surjektivna i zašto. Funkcije koje nisu bijekcije 'popraviti' tako da postanu bijektivne.

Rješenja:

$$1. \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} \geq 1.$$

$$2. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$3. \alpha = 2$$

$$4. p \dots \frac{x-2}{-2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{7}$$

$$5. D_f = [-1, 1]$$