

Zadaci:

1. a) **(5 bodova)** Izračunati

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{3 \operatorname{ctgx}}.$$

- b) **(5 bodova)** Odrediti jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 1 - \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$$

u točki $T(0, \frac{\pi}{2})$.

2. **(7 bodova)** Odrediti domen, nultočke, asimptote te na temelju tih podataka skicirati graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 5x + 6}}.$$

3. **(6 bodova)** Točkom $T(1, 3)$ položite pravac koji s koordinatnim osima čini trokut najmanje površine. Koliki je koeficijent smjera tog pravca?

4. **(7 bodova)** Naći područje konvergencije reda potencija i ispitati konvergenciju na rubu područja za red

$$\frac{x-2}{3} + \frac{(x-2)^2}{9\sqrt{2}} + \frac{(x-2)^3}{27\sqrt{3}} + \frac{(x-2)^4}{162} + \frac{(x-2)^5}{243\sqrt{5}} + \dots$$

Teorija:

1. **(7 bodova)** Definirati pojam derivacije funkcije u točki. Iskazati i dokazati tvrdnju koja povezuje derivabilnost i neprekidnost funkcije u točki. Neka je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ oblika $f(x) = |x - 1|$. Koristeći definiciju derivacije funkcije u točki objasniti postoji li $f'(1)$?
2. **(6 bodova)** Definirati posebno lokalni i globalni minimum funkcije g u točki x_0 . Kako glasi nužan, a kako dovoljan uvjet za postojanje lokalnih ekstrema? Iskazati i dokazati Fermatov teorem.
3. **(7 bodova)** Kako definiramo red i konvergenciju reda realnih brojeva? Iskazati i dokazati teorem o nužnom uvjetu konvergencije reda. Što sve iz tog teorema možemo zaključiti o konvergenciji reda (ilustrirati primjerima)?

Rješenja:

1. a) $L = e^3$
b) $t...y = -e^{\frac{\pi}{2}}x + \frac{\pi}{2}$, $n...y = e^{-\frac{\pi}{2}}x + \frac{\pi}{2}$.
2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, nultočke nema, $x = 2$ lijeva V.A., $x = 3$ desna V.A., $y = 1$ obostrana H.A.
3. $y = -3x + 6$.
4. Red konvergira za $x \in [-1, 5)$.