

5. Linearna algebra, 1. dio

1. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

- (a) $A + B$;
- (b) $A^T + B^T$;
- (c) $2A - 3B$.

2. Izračunajte

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunajte $P(A)$, ako je

- (a) $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 3$;
- (b) $P(x) = x^4 - x^2 + 1$.

4. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a-1 & a \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6a & 1 \end{bmatrix}$. Za koju su vrijednost parametra $a \in \mathbb{R}$ matrice A i B komutativne?

5. Riješite sustave Gaussovom metodom eliminacije:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ -4x - 3y - 2z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 8x_2 - 9x_3 = -8 \\ 5x_1 + 5x_2 = 14 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ -2x + z = -2 \\ x + 2y - z = 3 \\ -x + 2y + 12z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + 2y + z - u = 2 \\ 2x - y - 2z + 3u = 5 \end{cases}$$

6. Riješite sustav u ovisnosti o realnom parametru:

$$(a) \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \lambda x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

7. Pronađite sve $p \in \mathbb{R}$ za koje sustav

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + px_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 17x_3 + 8x_4 = 0 \\ 2x_1 + px_2 + 11x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje.

8. Pronađite $a \in \mathbb{R}$ za kojeg sustav

$$\begin{cases} -x + y + z = ax \\ x - y + z = ay \\ x + y - z = az \end{cases}$$

ima jednoparametarsko rješenje.