

Zadaci:

1. **(12 bodova)** Riješiti jednačbu $z^4 + i \cdot w = \frac{3}{2}$, gdje je w rješenje sustava

$$|w - 2| = |w + i|, \quad |w| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad |\operatorname{Re}(w)| > |\operatorname{Im}(w)|.$$

2. **(10 bodova)** U ovisnosti o realnom broju a riješiti sustav

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ ax + y + z &= a^2 \\ ax + ay + az &= a^3. \end{aligned}$$

3. **(12 bodova)** Zadani su pravci $p \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$, $q \dots \begin{cases} x-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$.
Odrediti $m \in \mathbb{R}$ u jednačbi ravnine $\Pi \dots x + y - m = 0$, tako da pravci p i q sijeku ravninu Π u točkama čija je međusobna udaljenost 3.

4. **(16 bodova)** Odrediti domenu, nultočke, asimptote, lokalne ekstreme, intervale pada i rasta te skicirati graf funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-3x-4}}.$$

5. **(10 bodova)** Odrediti limes niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kojem je opći član zadan sa

$$a_n = \left(3 \cdot \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k - 2}{k^2 + k} \right)^n.$$

6. **(10 bodova)** Odrediti područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2 + 1}$ i ispitati konvergenciju na rubovima tog područja.

Teorija:

7. a) **(10 bodova)** Objasniti princip matematičke indukcije (čemu služi, kako se provodi). Definirati operaciju množenja matrica i navesti svojstva te operacije. Primjenom matematičke indukcije dokazati da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

- b) **(10 bodova)** Definirati neprekidnost funkcije u točki. Odrediti realne

$$\text{brojeve } a \text{ i } b \text{ tako da funkcija } f \text{ definirana sa } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(ax)}{a \ln(1+2x^2)} + b, & x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ bx + a, & x \geq 0. \end{cases}$$

bude neprekinuta na cijelom području definicije.

- c) **(10 bodova)** Definirati pojmove limesa i gomilišta niza realnih brojeva. Objasniti razlike i veze između tih pojmova. Za nizove $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zadane sa $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2n+5}$, $b_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2n^2+5}$, odrediti gomilišta i limes ako postoji.