

1 Kompleksni brojevi

1. Riješite jednađbe $x^2 - 2x + 2 = 0$ i $x^2 + 4 = 0$ i rješenja prikažite u kompleksnoj ravni.
2. Izračunajte $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ i $\frac{z_1}{z_2}$ ako je
 - (a) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$;
 - (b) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = i$;
 - (c) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - 2i$.
3. Odredite $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\text{Im}(z_1 + z_2) = 0$ ako je $z_1 = 1 + 2ti$ i $z_2 = 3t - 4i$.
4. Odredite $z_2 \in \mathbb{C}$ takav da je $|z_1 + z_2| = 1$ i $\text{Re}(\overline{z_1} + z_2) = 0$ ako je $z_1 = 1 + i$.
5. Izračunajte
 - (a) i^{2005} ;
 - (b) $\frac{i^6 + i^3}{i^2 - i^7}$;
 - (c) $\text{Im} \frac{i^{20} - i}{i + 1}$;
 - (d) $p(2 + i)$ ako je $p(z) = z^2 - 5z + 1$.
6. Riješite jednađbu $z(3 + 2i) = i^{10}$.
7. Odredite kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju izraz

$$\frac{\overline{z} + |z| - \sqrt{29}}{2} = 1 + \frac{5}{2}i^9.$$

8. Koristeći trigonometrijski oblik kompleksnog broja izračunajte

- (a) $(1 + i)^{10}$;
- (b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{50}$;
- (c) $\sqrt[3]{1}$;
- (d) $\sqrt[4]{-i}$;
- (e) $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$;
- (f) $\sqrt{-3\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)}$.

Rješenja prikažite u kompleksnoj ravni.

9. Riješite jednađbe

- (a) $8z^3 + \frac{8}{\sqrt{2}} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{313} = 0$;

$$(b) \left[\frac{1}{16} (-1+i)^8 - z \right]^4 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + i}.$$

10. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skupove kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju sljedeće izraze:

- (a) $|z - i| \geq 1$;
- (b) $\operatorname{Im} [(1+i)z] \leq 1$;
- (c) $|z| + \operatorname{Re} z \leq 2$;
- (d) $2 \leq |z| \leq 3$;
- (e) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;
- (f) $2 \leq |z| \leq 3$ i $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \pi$.