

Zadaci:

1. (4 boda) Bez primjene L'Hospitalovog pravila, izračunati limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

2. (10 bodova) Odrediti domen, nultočke, asimptote, lokalne ekstreme i točke infleksije, intervale monotonosti i intervale zakrivljenosti te na temelju tih podataka skicirati graf funkcije

$$f(x) = x^2(1 - 2 \ln x).$$

3. (5 bodova) Pravokutnik stranica a i b ima opseg 100. Rotacijom oko stranice a nastane valjak. Odrediti stranice pravokutnika tako da volumen dobivenog valjka bude maksimalan.

4. (5 bodova) Odrediti sva gomilišta niza zadanog općim članom

$$a_n = \frac{2n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$$

5. (6 bodova) Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{-n^2-n}.$$

Teorija:

1. (10 bodova) Definirati neprekidnost funkcije u točki. Definirati vrste prekida funkcije pa za svaku vrstu dati po jedan primjer (navesti analitički izraz funkcije, istaknuti točku prekida te skicirati graf). Odrediti realan parametar

$$a \text{ tako da funkcija } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ x^2 + ax, & x > 1. \end{cases} \text{ bude neprekinuta na } \mathbb{R}.$$

2. (10 bodova) Objasniti (svojim riječima): što je red realnih brojeva, što nazivamo sumom reda, kako ispituje konvergenciju preko definicije, kako preko kriterija i kako preko apsolutne konvergencije. Navesti primjere za: a) geometrijski red koji je konvergentan, b) harmonijski red, c) alternirani red i d) red koji ne ispunjava nužan uvjet konvergencije.

Rješenja:

1. $-\frac{1}{12}$

2. $\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$

nultočka: $x = \sqrt{e}$

asimptote: nema

$T_{\max}(1, 2)$

$T_{\inf}(\frac{1}{e}, \frac{3}{e^2})$

3. $a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}$

4. skup gomilišta $\{2, 3\}$

5. (Cauhcyjev kriterij) $q = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ red konvergira