

3. Derivacije i primjene, 4. dio - Rješenja

1. (a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ (infleksije)

domena: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

nultočke: $x = 1$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = -2$ vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ horizontalna asimptota \Rightarrow nema kosih asimptota

lokalni ekstremi: nema

intervali monotonosti: f svuda raste

točke infleksije: nema

intervali konveksnosti i konkavnosti:

f je " \cup " na $\langle -\infty, -2 \rangle$, " \cap " na $\langle -2, +\infty \rangle$

(b) $f(x) = e^{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$

domena: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

nultočke: nema

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$ lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e \Rightarrow y = e$ horizontalna asimptota \Rightarrow nema kose asimptote

lokalni ekstremi: $T(0, \sqrt[4]{e})$ lokalni maksimum

intervali monotonosti:

f raste na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle$, pada na $\langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

(c) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

domena: $\langle 0, +\infty \rangle$

nultočke: nema

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ nije vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ desna horizontalna asimptota \Rightarrow

nema kosih asimptota

lokalni ekstremi: $T(e, e^{\frac{1}{e}})$ lokalni maksimum

intervali monotonosti: f raste na $\langle 0, e \rangle$, pada na $\langle e, +\infty \rangle$

(d) $f(x) = x \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ (infleksije)

domena: $\langle 0, e \rangle \cup \langle e, +\infty \rangle$

nultočke: $\frac{1}{e}$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ nije vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow e\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = e$ vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = -\infty \Rightarrow$ nema kosih asimptota

lokalni ekstremi:

u $x_1 = e^{\sqrt{3}}$ je lokalni maksimum, u $x_2 = e^{-\sqrt{3}}$ je lokalni minimum

intervali monotonosti:

f raste na $\langle e^{-\sqrt{3}}, e \rangle \cup \langle e, e^{\sqrt{3}} \rangle$, pada na $\langle 0, e^{-\sqrt{3}} \rangle \cup \langle e^{\sqrt{3}}, +\infty \rangle$

točke infleksije: $T(e^3, -2e^3)$

intervali konveksnosti i konkavnosti:

f je " \cup " na $\langle 0, e \rangle \cup \langle e^3, +\infty \rangle$, " \cap " na $\langle e, e^3 \rangle$

(e) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$ (infleksije)

domena: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ nultočke: $x = 0$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow \pm 2 \pm} f(x) = \pm \infty \Rightarrow x = 2$ i $x = -2$ vertikalne asimptote

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty \Rightarrow$ nema horizontalne asimptote

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - 2x] = 0 \Rightarrow y = 2x$ kosa asimptota

lokalni ekstremi:

$T_1(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ lokalni maksimum, $T_2(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ lokalni minimum

intervali monotonosti:

f raste na $\langle -\infty, -2\sqrt{3} \rangle \cup \langle 2\sqrt{3}, +\infty \rangle$,

pada na $\langle -2\sqrt{3}, -2 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$

točke infleksije: $T(0, 0)$

intervali konveksnosti i konkavnosti:

f je " \cap " na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle$, " \cup " na $\langle -2, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

(f) $f(x) = |e^{\frac{1}{x}} - ex|$ (infleksije)

Neka je $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - ex$. Skiciramo prvo graf funkcije g iz kojeg onda konstruiramo graf funkcije f .

domena: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nultočke: 1

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = \mp \infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{g(x)}{x} = -e, \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [g(x) + ex] = 1 \Rightarrow y = -ex + 1$ kosa asimptota

lokalni ekstremi: nema

intervali monotonosti: g svuda pada

točke infleksije: u $x = -\frac{1}{2}$ je točka infleksije

intervali konveksnosti i konkavnosti:

g je " \cup " na $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$, " \cap " na $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$

2. (a) $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x}$ (infleksije)

domena: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

nultočke: $x_1 = -2, x_2 = 1$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = 0$ vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ nema horizontalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 1 \Rightarrow y = x + 1$ kosa asimptota

lokalni ekstremi: nema

intervali monotonosti: f raste svuda

točke infleksije: nema

intervali konveksnosti i konkavnosti:

f je " \cup " na $\langle -\infty, 0 \rangle$, " \cap " na $\langle 0, +\infty \rangle$

(b) $f(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x^2 + x - 2} \right)$

domena: $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

nultočke: nema

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$ lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ horizontalna asimptota

lokalni ekstremi: $T\left(\frac{-1}{2}, -\ln 9\right)$ lokalni maksimum

intervali monotonosti:

f raste na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, -\frac{1}{2} \rangle$, pada na $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

(c) $f(x) = x - 2 \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right)$

domena: $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 0 \Rightarrow y = x$ kosa asimptota

lokalni ekstremi:

$T_1(2, 2 + 2 \ln 2)$ lokalni minimum,

$T_2(-1, -1 - 2 \ln 2)$ lokalni maksimum

intervali monotonosti:

f raste na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$, pada na $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$

(d) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

domena: $\langle 0, +\infty \rangle$

nultočke: 1

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ desna horizontalna asimptota \Rightarrow

nema desnu kosu asimptotu

lokalni ekstremi: $T(e^2, \frac{2}{e})$ lokalni maksimum

intervali monotonosti: f raste na $\langle 0, e^2 \rangle$, pada na $\langle e^2, +\infty \rangle$

(e) $f(x) = \frac{7}{x^2 + 3} - 1$ (infleksije)

domena: \mathbb{R}

nultočke: $x_1 = -2, x_2 = 2$

asimptote:

domena je $\mathbb{R} \Rightarrow$ nema vertikalnih asimptota

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ horizontalna asimptota \Rightarrow nema kosih asimptota

lokalni ekstremi: $T(0, \frac{4}{3})$ lokalni maksimum

intervali monotonosti: f raste na $\langle -\infty, 0 \rangle$, pada na $\langle 0, +\infty \rangle$

točke infleksije: $T_1(-1, \frac{3}{4}), T_2(1, \frac{3}{4})$

intervali konveksnosti i konkavnosti:

f je " \cup " na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$, " \cap " na $\langle -1, 1 \rangle$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{2x + 4}$

domena: $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle \cup [4, +\infty)$

nultočke: $x_1 = -1, x_2 = 4$

asimptote:

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ nije lijeva vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 0 \Rightarrow x = 4$ nije desna vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -2\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -2$ vertikalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ desna horizontalna asimptota

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ lijeva horizontalna asimptota

lokalni ekstremi: $T_1(-1, 0), T_2(4, 0)$ lokalni minimumi

intervali monotonosti:

f raste na $\langle 4, +\infty \rangle$, pada na $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle$