**Zadaci:**

1. **(8 bodova)** Riješi matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{\lambda} \cdot X + X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje je $\lambda$ zbroj rješenja jednadžbe

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^4 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^6.$$

2. **(3 bodova)** Postoji li $a \in \mathbb{R}$ takav da $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ bude rješenje sustava

$$\begin{aligned} a^2y + 2z &= 0 \\ ax + y + 3z &= 3? \end{aligned}$$

Ako postoji, nadji sva rješenja sustava za taj parametar $a$.

3. **(4 bodova)** Zadane su točke $A(1,0,1)$, $B(2,-2,4)$, $C(1,\lambda,3)$ i $D(0,1,-4)$. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ budu komplanarni, te za taj $\lambda$ izrazite vektor $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

4. **(5 boda)** Odredite udaljenost pravaca $p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ i $q \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-1}$.

5. **(5 bodova)** Za koju vrijednost parametra $k \in \mathbb{R}$ je funkcija $f(x) = \sqrt{\ln\left(kx^2 - (2k+1)x + \frac{13}{16k}\right)}$ definirana za sve $x \in \mathbb{R}$?

**Teorija:**

1. **(7 bodova)** Kako definiramo skup kompleksnih brojeva, jednakost dvaju kompleksnih brojeva, konjugirano kompleksni broj i modul kompleksnog broja? Dokazati da je $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, za $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

2. **(6 bodova)** Definirati pojam ranga matrice i pojam regularnosti matrice. Objasniti vezu između ranga matrice sustava i karaktera rješenja sustava (navesti jednostavne primjere za svaku situaciju).

3. **(7 bodova)** Izvesti vektorsku jednadžbu ravnine zadane u prostoru pomoću triju različitih točaka $T_1$, $T_2$ i $T_3$ koje ne leže na istom pravcu pa zatim nju raspisati u općem obliku u koordinatnom sustavu $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Kako glasi jednadžba ravnine kroz točke $T_1(a,0,0)$, $T_2(0,b,0)$ i $T_3(0,0,c)$, $a, b, c \neq 0$?

**Rješenja:**

1. $\lambda = 2,\ X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$
2. $a = -2,\ \begin{cases} x = \frac{-3}{2} - \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$
3. $\lambda = 1,\ \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
4. $d = 2\sqrt{5}$
5. Za $k \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right]$ funkcija $f$ je definirana za svaki $x \in \mathbb{R}$