6. Vektorska algebra

1. Odredite duljinu vektora $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ako je
$$|\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 3,\ \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}.$$

2. Ako je vektor $\vec{c} = \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ okomit na vektore $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ izračunaj komponente y i z.

3. Zadane su točke $A(2,3,2), B(0,1,1), C(4,4,0), D(8,6,6)$. Odredite vektorsku projekciju vektora $\overrightarrow{AB}$ na vektor $\overrightarrow{CD}$ i njenu duljinu.

4. Zadani su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ takvi da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni i vrijedi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Izrazite vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{c}$ i $\vec{d}$, gdje je $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

5. Zadani su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ takvi da vrijedi
$$|\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 3,\ \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}.$$
   (a) Izrazite vektor $\vec{n}$ preko vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ako vrijedi $\vec{n} \cdot \vec{p} = 7$ i $\vec{n} \cdot \vec{q} = 3$.
   (b) Izrazite jedinični vektor vektora $\vec{n}$ preko $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

6. Odredite vektor $\vec{b}$ koji je kolinearan s vektorom $\vec{a} = (2, -1, 2)$ i zadovoljava uvjet $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$.

7. Zadani su vektori $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ i $\vec{c} = (-1, -2, -1)$.
   (a) Odredite λ iz uvjeta $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.
   (b) Odredite vektor $\vec{d}$ iz uvjeta $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.
   (c) Pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.

8. Odredite površinu trokuta što ga određuju vektori
$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

9. Odredite površinu trokuta s vrhovima $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$ i $C(4,3,2)$.

10. Trokut ABC zadan je vektorima $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, pri čemu je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{3}$. Odredite površinu P i visinu v_C spuštenu iz vrha C.

11. Odredite površinu P i visinu v_B spuštenu iz vrha B u trokutu ABC sa vrhovima $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

12. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od $\dfrac{\pi}{4}$. Odredite površinu paralelograma s dijagonalama $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

13. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od $\dfrac{\pi}{3}$.

    (a) Izračunajte površinu romba što ga razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

    (b) Izračunajte duljine dijagonala romba.

14. Zadani su vektori $\vec{a} = (1, 2\alpha, 1)$, $\vec{b} = (2, \alpha, \alpha)$ i $\vec{c} = (3\alpha, 2, -\alpha)$.

    (a) Nađite volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

    (b) Odredite α tako da $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni.

15. Zadane su točke $A(1, 2, 1)$, $B(3, -2, 1)$, $C(1, 4, 3)$ i $D(5, 0, 5)$. Izračunajte volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$.

16. Pokažite da ako za tri proizvoljna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, onda su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, a vektori $\vec{A} = \vec{a} - \vec{c}$ i $\vec{B} = \vec{b} - \vec{a}$ kolinearni.

17. Odredite jedinični vektor okomit na vektore $\vec{a} = (-2, -6, -1)$ i $\vec{b} = (1, 2, 0)$ koji s vektorom $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ zatvara šiljasti kut. U smjeru tog jediničnog vektora odredite $\vec{d}$ takav da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{d}$ budu stranice paralelepipeda čiji je volumen $V = 18$.