

Zadaci:

1. (6 bodova) Neka je $w \in \mathbb{C}$ zadan determinantom

$$w = \begin{vmatrix} i & 2 & a \\ -2 & 4i & 3i \\ -1 & -i & -3 \end{vmatrix}.$$

a) Odrediti realan broj a ako je $\operatorname{Im}(w) = 3$.

b) Izračunati $\sqrt{-3 + w}$.

2. (6 bodova) Koristeći činjenicu da je $A^2 = I$, riješiti matričnu jednadžbu

$$A^{-1}X + ABX = B,$$

$$\text{ako su } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. (6 bodova) Zadane su točke $A(0, 0, 2)$, $B(0, 1, 6)$, $C(-2, -1, 4)$ i $D = (1, 1, 3)$.

Jesu li dane točke komplanarne? Ako jesu, prikažite vektor \overrightarrow{AD} kao linearnu kombinaciju vektora \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} .

4. (6 bodova) Odrediti točku simetričnu točki $M(4, 2, 1)$ u odnosu na ravninu $\Pi: x - 2y - 3z - 8 = 0$.

5. (6 bodova) Odrediti domen funkcije $f(x) = \sqrt{\log_5(x - 4) - 1} + \arcsin\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$.

Teorija:

1. (10 bodova) Objasniti princip matematičke indukcije (čemu služi, kako se provodi). Definirati operaciju množenja matrica i navesti svojstva te operacije. Primjenom matematičke indukcije dokazati da je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

2. (10 bodova) Definirati pojmove: funkcija, injekcija, surjekcija, bijekcija, inverzna funkcija. Za funkciju $f(x) = \cos x$ zadati domen, kodomen, skicirati graf i komentirati: a) parnost, b) periodičnost, c) omeđenost, d) intervale monotonosti, te odrediti i skicirati njoj inverznu funkciju.

Rješenja:

$$1. \ w = 3i, \sqrt{-3+w} = \sqrt{3\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2} \right), k = 0, 1.$$

$$2. \ X = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -20 & -24 & -24 \\ -32 & 12 & -24 \\ -15 & -18 & 18 \end{bmatrix}.$$

$$3. \ \text{Dane točke su komplanarne; } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

$$4. \ \text{Tražena točka } M'(\frac{39}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-26}{7}).$$

$$5. \ D_f = \langle 4, +\infty \rangle.$$