

# 必要呼び意味論と 名前呼び意味論の対応の 形式的検証

水野 雅之

情報科学研究科 情報基礎科学専攻  
住井・松田研究室

指導教員：住井 英二郎 教授

## 動機：非正格言語の仕様と実装のギャップ

- 名前呼び：  
非正格言語の(ハイレベルな)仕様
- 必要呼び：  
非正格言語の実装

これらの対応を検証したい

## $\lambda$ 計算の基本 : full- $\beta$ 簡約

### ■ 簡約基は複数存在しうる

- $\underline{(\lambda xy. y) \Omega}$

- $(\lambda xy. y) \underline{\Omega}$

### ■ 下手に簡約基を選ぶと無限ループに

- $\underline{(\lambda xy. y) \Omega} \xrightarrow{\beta} \lambda y. y$

- $(\lambda xy. y) \underline{\Omega} \xrightarrow{\beta} (\lambda xy. y) \Omega$

$$\Omega = (\lambda x. xx) (\lambda x. xx)$$

# 非正格な言語の理論的背景：名前呼び

## 定義 (名前呼び)

関数呼び出し以前に引数を簡約せず，  
 $\lambda$  抽象の中も簡約しない評価戦略

- full- $\beta$  簡約で  $\lambda$  抽象に評価できる項は  
名前呼びでも  $\lambda$  抽象まで評価できる

$$(\lambda x y. y) \Omega \xrightarrow{\text{name}} \lambda y. y$$

## 名前呼びの問題点

### 関数引数の簡約基が複製される

- 余計な簡約が必要になることも

$$\bullet \quad \underline{(\lambda x. xx) (I I)} \xrightarrow{\text{name}} I I (I I)$$

$$I = \lambda x. x$$

## 名前呼びの改良：必要呼び

- 一度関数引数を評価したら  
値を覚えて使い回す

- 余計な簡約が不要に

$$(\lambda x. x x) (I I)$$
$$\xrightarrow{\text{need}} \text{let } x = I I \text{ in } x x$$
$$\xrightarrow{\text{need}} \text{let } x = \lambda x. x \text{ in } x x$$

- 名前呼びと振る舞いが一致してほしい

# 本研究の貢献

- 必要呼び  $\lambda$  計算 [Ariola+ 1995] を検証に適するよう変形し Coq で定式化
  - De Bruijn インデックス
  - 評価文脈の排除
- 名前呼びとの評価の対応に**既存研究より簡単な証明を考案** , Coq で定式化
  - 標準化定理 [Curry&Feys 1958] を利用

# アウトライン

- ① 対象言語：名前呼び  $\lambda$  計算と必要呼び  $\lambda$  計算
- ② 貢献：主定理の簡潔化された証明
- ③ まとめ



# アウトライン

- ① 対象言語：名前呼び  $\lambda$  計算と必要呼び  $\lambda$  計算
- ② 貢献：主定理の簡潔化された証明
- ③ まとめ

# 名前呼び $\lambda$ 計算

Terms	$L, M, N$	$::=$	$x \mid V \mid M N$
Values (WHNF)	$V$	$::=$	$\lambda x.M$
Evaluation contexts	$E_n$	$::=$	$[] \mid E_n M$

$$\frac{M \rightarrow N}{E_n[M] \xrightarrow{\text{name}} E_n[N]}$$

$$(\beta) \quad (\lambda x.M)N \rightarrow M[x \mapsto N]$$

- 簡約は決定的
- stuck 状態は全て  $E_n[x]$  の形

## 補題 (名前呼び $\lambda$ 計算の決定性)

- $\xrightarrow{\text{name}}$  は部分関数
- $E_n[x] = E'_n[y]$  ならば  $x = y$
- 任意の  $M$  について, 以下のうち  
**ただ一つ** が成り立つ
  1.  $M$  は値
  2.  $M = E_n[x]$  となる  $E_n$  と  $x$  が存在
  3.  $M$  は  $\xrightarrow{\text{name}}$  で簡約できる

# 標準化定理 [Curry&Feys 1958]

## 定義 (標準簡約列)

簡約位置  $\Delta_i$  が  $\Delta_{i+1}$  よりも外側かつ左側になるような簡約列  $M_1 \xrightarrow[\Delta_1]{\beta} M_2 \xrightarrow[\Delta_2]{\beta} \cdots \xrightarrow[\Delta_{n-1}]{\beta} M_n$  を標準簡約列という

## 定理 (標準化定理)

$M \xrightarrow{\beta} N$  ならば,  
 $M$  から  $N$  への標準簡約列が存在

# 名前呼びの性質：標準化定理の2つの系

## 定理 (正規化定理)

$M$  は full- $\beta$  簡約で  $\lambda$  抽象に評価できるならば,  
 $M$  は名前呼びの簡約でも  $\lambda$  抽象に評価できる

## 定理 (準正規化定理)

$M$  は full- $\beta$  簡約で  $\lambda$  抽象に評価できるならば,  
 $\xrightarrow{\text{name}} \circ \xrightarrow{\beta}$  による  $M$  の簡約は必ず止まる

- 必要呼びとの対応の証明に用いる

# 必要呼び $\lambda$ 計算 [Ariola+ 1995]

Terms	$M, N ::= x \mid V \mid M N \mid \text{let } x = M \text{ in } N$
Values	$V ::= \lambda x. M$
Answers	$A ::= V \mid \text{let } x = M \text{ in } A$
Evaluation contexts	$E, E' ::= [] \mid E M \mid \text{let } x = M \text{ in } E$ $\mid \text{let } x = E \text{ in } E'[x]$

- (I)  $(\lambda x. M)N \rightarrow \text{let } x = N \text{ in } M$
- (V)  $\text{let } x = V \text{ in } E[x] \rightarrow \text{let } x = V \text{ in } E[V]$
- (C)  $(\text{let } x = M \text{ in } A) N \rightarrow \text{let } x = M \text{ in } A N$
- (A)  $\text{let } y = (\text{let } x = M \text{ in } A) \text{ in } E[y] \rightarrow$   
 $\text{let } x = M \text{ in let } y = A \text{ in } E[y]$

$\xrightarrow{I}$  (I) のみ用いる簡約

$\xrightarrow{\text{VCA}}$  (V) , (C) と (A) のみ用いる簡約  
(Administrative)

## 補題 (必要呼び $\lambda$ 計算の決定性)

- $\overset{I}{\rightarrow}$  は部分関数
- $\overset{VCA}{\longrightarrow}$  は部分関数
- $E[x] = E'[y]$  ならば  $x = y$
- 任意の  $M$  について, 以下のうち  
**ただ一つ** が成り立つ
  1.  $M$  は answer
  2.  $M = E[x]$  となる  $E$  と  $x$  が存在
  3.  $M$  は  $\overset{I}{\rightarrow}$  で簡約できる
  4.  $M$  は  $\overset{VCA}{\longrightarrow}$  で簡約できる

# アウトライン

- ① 対象言語：名前呼び  $\lambda$  計算と必要呼び  $\lambda$  計算
- ② 貢献：主定理の簡潔化された証明
- ③ まとめ



# 主定理：名前呼びと必要呼びの対応

## 定理 (必要呼び評価の健全性 [Ariola+ 1995])

$M$  が必要呼びの簡約によって answer に評価できるならば,  $M$  に対応する項  $N$  は名前呼びの簡約によって  $\lambda$  抽象に評価される

## 定理 (必要呼び評価の完全性 [Ariola+ 1995])

$M$  が名前呼びの簡約によって  $\lambda$  抽象に評価できるならば,  $M$  に対応する項  $N$  は必要呼びの簡約によって answer に評価される

# 先行研究の証明方法

— Ariola と Felleisen[1997] —

- Informal に定義されたグラフに基づく

— Maraist ら [1998] —

- マーク付きの簡約と簡約位置を陽に扱っており煩雑

→ 本研究ではより簡単な証明を考案

## 定義 (項同士の対応関係)

$(\cdot)^\dagger : \text{必要呼びの項} \rightarrow \text{名前呼びの項}$

$$x^\dagger = x$$

$$(\lambda x.M)^\dagger = \lambda x.M^\dagger$$

$$(M\ N)^\dagger = M^\dagger\ N^\dagger$$

$$(\text{let } x = M \text{ in } N)^\dagger = N^\dagger[x \mapsto M^\dagger]$$

- let を全て展開する関数
- マークを除くと [Maraist+ 1998] と一致

## 補題 (1 ステップの対応)

- $A^\dagger$  は値
- 任意の  $E$  と  $x$  について,  $E[x]^\dagger = E_n[x]$  となる  $E_n$  が存在
- $M \xrightarrow{\text{VCA}} N$  ならば  $M^\dagger = N^\dagger$
- $M \xrightarrow{\text{I}} N$  ならば  $M^\dagger \xrightarrow{\text{name}} \circ \xrightarrow{\beta} N^\dagger$

## 再掲：前呼びと必要呼びの評価の対応

### 定理 (必要呼び評価の健全性)

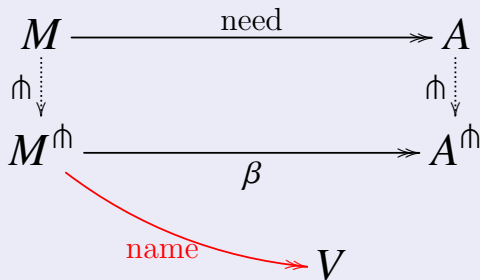
$M \xrightarrow{\text{need}} A$  ならば,  
 $M^{\hookrightarrow} \xrightarrow{\text{name}} V$  となるような値  $V$  が存在

### 定理 (必要呼び評価の完全性)

$M^{\hookrightarrow} \xrightarrow{\text{name}} V$  ならば,  
 $M \xrightarrow{\text{need}} A$  となるような answer  $A$  が存在

(Answer  $A$  と値  $V$  の対応も成り立つ)

## 健全性の証明.



1ステップの対応により  $A^{\text{♯}}$  は値  
 よって正規化定理により  $M^{\text{♯}} \xrightarrow{\text{name}} V$



## 完全性の証明の困難な点

- 完全性 :  $M^{\dagger} \xrightarrow{\text{name}} V$  ならば  $M \xrightarrow{\text{need}} A$
- Administrative な簡約が止まらないかもしれない
  - $M \xrightarrow{\text{VCA}} N$  ならば  $M^{\dagger} = N^{\dagger}$
- let で共有されている部分がすべて簡約される
  - $M \xrightarrow{\text{I}} N$  ならば  $M^{\dagger} \xrightarrow{\text{name}} \circ \xrightarrow{\beta} N^{\dagger}$
  - $\lambda$  抽象の中も簡約されうる

$\text{VCA} \longrightarrow$  の正規化性の証明.

[Maraist+ 1998] の重み付けを変形したものにより証明

$$\begin{aligned}\|x\|_s &= s(x) \\ \|\lambda x.M\|_s &= \|M\|_{s \circ [x \mapsto 1]} \\ \|MN\|_s &= 2\|M\|_s + 2\|N\|_s \\ \|\text{let } x = M \text{ in } N\|_s &= 2\|M\|_s + \|N\|_{s \circ [x \mapsto 1 + \|M\|_s]}\end{aligned}$$

$M \xrightarrow{\text{VCA}} N$  ならば  $\|M\|_s > \|N\|_s$





## 完全性の証明 (1/2).

$M \stackrel{\text{name}}{\longrightarrow} V$  と仮定し,  $M \stackrel{\text{need}}{\longrightarrow} A$  を示したい

まず  $\stackrel{\text{need}}{\longrightarrow}$  によって  $M$  が正規化されることを示す

$$M \xrightarrow{\text{need}} \text{---} \xrightarrow{\text{need}}$$

## 完全性の証明 (1/2).

$M \stackrel{\text{name}}{\longrightarrow} V$  と仮定し,  $M \stackrel{\text{need}}{\longrightarrow} A$  を示したい

まず  $\stackrel{\text{need}}{\longrightarrow}$  によって  $M$  が正規化されることを示す

$\stackrel{\text{need}}{\longrightarrow} = (\overset{\text{I}}{\rightarrow} \cup \overset{\text{VCA}}{\longrightarrow})^* = (\overset{\text{VCA}}{\longrightarrow} \circ \overset{\text{I}}{\rightarrow})^*$  が成り立つ

$$M \xrightarrow{\text{VCA}} \xrightarrow{\text{I}} \cdots \xrightarrow{\text{VCA}} \xrightarrow{\text{I}}$$

## 完全性の証明 (1/2).

$M^{\flat} \xrightarrow{\text{name}} V$  と仮定し,  $M \xrightarrow{\text{need}} A$  を示したい

まず  $\xrightarrow{\text{need}}$  によって  $M$  が正規化されることを示す

準正規化定理により,  $\xrightarrow{\text{name}} \circ \xrightarrow{\beta}$  による  $M^{\flat}$  の簡約は停止する (=導出に関する帰納法を使える)

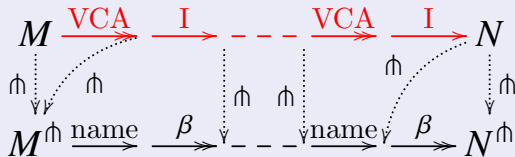
$$\begin{array}{c} M \xrightarrow{\text{VCA}} \xrightarrow{\text{I}} \cdots \xrightarrow{\text{VCA}} \xrightarrow{\text{I}} \cdots \\ \vdots \\ M^{\flat} \xrightarrow{\text{name}} \xrightarrow{\beta} \cdots \xrightarrow{\text{name}} \xrightarrow{\beta} \cdots \end{array}$$

## 完全性の証明 (1/2).

$M \Downarrow^{\text{name}} \Rightarrow V$  と仮定し,  $M \xrightarrow{\text{need}} A$  を示したい

まず  $\xrightarrow{\text{need}}$  によって  $M$  が正規化されることを示す

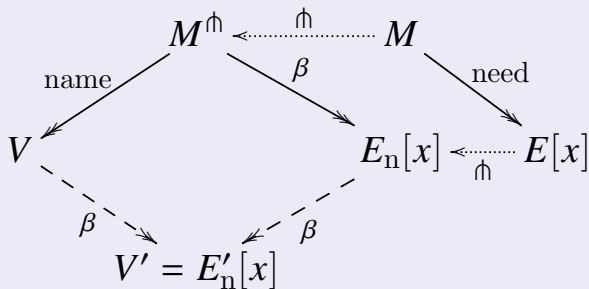
$\xrightarrow{\text{VCA}}$  は administrative な簡約



## 完全性の証明 (2/2).

次に,  $M$  の正規形  $N$  が answer であることを示す

名前呼びにおける値であることや stuck 状態であることは, full- $\beta$  簡約で保存される



# アウトライン

- ① 対象言語：名前呼び  $\lambda$  計算と必要呼び  $\lambda$  計算
- ② 貢献：主定理の簡潔化された証明
- ③ まとめ

# まとめ

## 本発表では割愛

- 必要呼び $\lambda$ 計算 [Ariola+ 1995] を検証に適するよう変形し Coq で定式化
  - De Bruijn インデックス
  - 評価文脈の排除
- 名前呼びとの評価の対応に**既存研究より簡単な証明を考案** , Coq で定式化
  - 標準化定理 [Curry&Feys 1958] を利用
- TPP 2017 で口頭発表
- FLOPS 2018 に受理