

9 章 単純型付きラムダ計算

水野 雅之

2015 年 5 月 14 日

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

8章で定義したように, 好ましい性質を持った型システムをラムダ計算に対しても定義したい

- 型安全
 - 型保存定理
 - 進行定理
- 保守的過ぎない
 - 書きたいプログラムに型が付けられる

arrow type

関数は全て \rightarrow という型 (arrow type) を持つ事にしてはどうか?

$$\lambda x.t : \rightarrow$$

問題点:

- どのような値を返すかの情報を欠いている
 - $\lambda x.x : \rightarrow$ と $\lambda x.\lambda y.y : \rightarrow$
- 引数の型が分からないため、関数が呼び出された際の振る舞いを検査できない
 - $\lambda b.\text{if } b \text{ then false else true} : \rightarrow$

関数型

関数型に引数と戻り値の型の情報を持たせる

定義 1 (単純型)

$T ::=$	型:
$T \rightarrow T$	関数の型
Bool	真偽値の型

例: $\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$, $(\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

\rightarrow は右結合

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

引数の型付け

引数の型をどのように知れば良いだろうか？

型注釈を付ける・・・明示的に型付けされた言語

- $\lambda x : T. t$

型推論する・・・暗幕的に型付けされた言語

この章では明示的に型付けされた言語を扱う

λ抽象の型付け

λ抽象 $\lambda x : T. t$ の型付け規則は、項 t に出現した変数 x の型を T であるとみなす事で得られる

$$\frac{x : T_1 \vdash t : T_2}{\vdash \lambda x. t : T_1 \rightarrow T_2} \text{T-ABS}$$

ネストしうる λ抽象に一般化

$$\frac{\Gamma, x : T_1 \vdash t : T_2}{\Gamma \vdash \lambda x. t : T_1 \rightarrow T_2} \text{T-ABS}$$

$\Gamma \dots t$ 上の自由変数を型付けする際の前提 (型環境)

型環境

型環境：変数とその型の列

$T ::=$

\emptyset

$\Gamma, x : T$

型環境:

空の環境

項変数の束縛

この教科書でのお約束

新しい束縛と既に Γ に現れている束縛を混同する事の無いよう, x は Γ で束縛されているものとは異なるように選ばれる

Γ に束縛された変数の集合を $\text{dom}(\Gamma)$ と書く

変数の型付け

変数にはその文脈で持つと仮定された型を付ければ良い

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \text{T-VAR}$$

これまでの型付け規則を用いた例:

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{Bool} \in x : \text{Bool}, y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{x : \text{Bool}, y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash x : \text{Bool}} \text{T-VAR}}{x : \text{Bool} \vdash \lambda y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. x : (\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow \text{Bool}} \text{T-ABS}}{\vdash \lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. x : \text{Bool} \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow \text{Bool}} \text{T-ABS}$$

関数適用の型付け

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_{11} \rightarrow T_{12} \quad \Gamma \vdash t_2 : T_{11}}{\Gamma \vdash t_1 \ t_2 : T_{12}} \text{T-APP}$$

例:

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{Bool} \in x : \text{Bool}}{x : \text{Bool} \vdash x : \text{Bool}} \text{T-VAR} \quad \frac{}{\vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{T-TRUE}}{\vdash \lambda x : \text{Bool}. x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{T-ABS} \quad \frac{}{\vdash (\lambda x : \text{Bool}. x) \text{ true} : \text{Bool}} \text{T-APP}$$

純粋な単純型付きラムダ計算の意味論

評価規則 ($t \longrightarrow t'$)

$$\frac{t_1 \longrightarrow t'_1}{t_1 \ t_2 \longrightarrow t'_1 \ t_2} \text{E-APP1}$$

$$\frac{t_2 \longrightarrow t'_2}{v_1 \ t_2 \longrightarrow v_1 \ t'_2} \text{E-APP2}$$

$$(\lambda x : T_{11}. t_{12}) \ v_2 \longrightarrow [x \mapsto v_2] t_{12} \text{ (E-APPAbs)}$$

型付け規則 ($\Gamma \vdash t : T$)

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \text{T-VAR}$$

$$\frac{x : T_1 \vdash t : T_2}{\vdash \lambda x. t : T_1 \rightarrow T_2} \text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_{11} \rightarrow T_{12} \quad \Gamma \vdash t_2 : T_{11}}{\Gamma \vdash t_1 \ t_2 : T_{12}} \text{T-APP}$$

文法

$t ::=$

x	項: 変数
$\lambda x : T. t$	λ 抽象
$t \ t$	関数適用

$v ::=$

$\lambda x : T. t$	値: 関数値
--------------------	-----------

$T ::=$

$T \rightarrow T$	型: 関数型
-------------------	-----------

$\Gamma ::=$

\emptyset	型環境: 空の環境
$\Gamma, x : T$	項変数の束縛

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質**
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

型付け関係の反転

補題 9.3.1 (型付け関係の反転)

1. $\Gamma \vdash x : R$ ならば $x : R \in \Gamma$
2. $\Gamma \vdash \lambda x : T_1. t_2 : R$ ならば $\Gamma, x : T_1 \vdash t_2 : R_2$ 及び $R = T_1 \rightarrow R_2$ を満たすある型 R_2 が存在する
3. $\Gamma \vdash t_1 \ t_2$ ならば $\Gamma \vdash t_1 : T_{11} \rightarrow R$ 及び $\Gamma \vdash t_2 : T_{11}$ を満たすある型 T_{11} が存在する
4. $\Gamma \vdash \text{true} : R$ ならば $R = \text{Bool}$ が成り立つ
5. $\Gamma \vdash \text{false} : R$ ならば $R = \text{Bool}$ が成り立つ
6. $\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : R$ ならば $\Gamma \vdash t_1 : \text{Bool}$, $\Gamma \vdash t_2 : R$ 及び $\Gamma \vdash t_3 : R$ が成り立つ

8 章同様, 定義から直ちに証明できる.

型の一意性

補題 9.3.3 (型の一意性)

与えられた型環境 Γ の下で項 t の型 T は一意に定まる (ただし, t 上の全ての自由変数は Γ に現れるものとする)

さらに, 型付け関係が推論規則から生成できるならばその導出も一意である

証明.

前者を述語論理で書き下すと $\forall \Gamma \ t \ T_1 \ T_2. \ \Gamma \vdash t : T_1 \wedge \Gamma \vdash t : T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$

$\Gamma \vdash t : T_1$ の導出に関する構造的帰納法を用いる.

$\Gamma \vdash t : T_2$ に由来する仮定に対して型付け関係の反転補題を適用して帰納法の仮定を使えば良い.

このとき, $\Gamma \vdash t : T_1$ の場合分けに用いた型付け規則と $\Gamma \vdash t : T_2$ に適用した反転補題に対応する型付け規則が一致するため, 後者が成り立つ事が示せる.

T-VAR のときは Γ に束縛された変数 x が一回しか出現しない事を用いる. □

標準形

補題 9.3.4 (標準形)

1. v が Bool 型を持つ値ならば v は true または false である
2. v が $T_1 \rightarrow T_2$ 型を持つ値ならば $v = \lambda x : T_1. t_2$ と表わされる

証明.

v の構造について場合分けをすると、結論の形をとらない値は前提の型付け関係が成り立たない事から証明できる. □

進行定理

定理 9.3.5 (進行定理)

t が閉じた well-typed な項 ($\vdash t : T$ となる型 T が存在する) ならば t は値もしくは $t \longrightarrow t'$ となる項 t' が存在する

証明.

型付け関係の導出に関する構造的帰納法で証明する.

T-VAR の場合: 変数は閉じた項になり得ないため前提が偽.

T-ABS の場合: λ 抽象は値であるので直ちに成り立つ.

T-APP の場合: $t = t_1 t_2$

帰納法の仮定により t_1 は値もしくは $t_1 \longrightarrow t'_1$ となる項 t'_1 が存在する. t_2 に対しても同様の命題が成り立つ.

t_1 が簡約できる場合, E-APP1 を適用すればよい.

t_1 が値で t_2 が簡約できる場合, E-APP2 を適用する.

t_1 と t_2 が共に値の場合, 標準形の補題により t_1 が $\lambda x : T_{11}. t_{12}$ の形を取る事が分かり, E-APPABS を適用する事ができる. □

並び替え

補題 9.3.6 (並び替え)

$\Gamma \vdash t : T$ かつ Δ が Γ の並び替えならば $\Delta \vdash t : T$
加えて、導出の深さはそれぞれ等しい

証明.

型付け関係の導出に関する構造的帰納法で証明する.

T-VAR の場合: 型環境に出現する変数は重複しないと仮定したので成り立つ

T-ABS の場合: $t = t_1 \ t_2$

仮定より Δ は Γ の並び替えであり、帰納法の仮定より全ての Δ' に対して Δ' が $\Gamma, x : T_{11}$ の並び替えならば $\Delta' \vdash t_2 : T_{11} \rightarrow T_{12}$.

Δ は Γ の並び替えであるから、 $\Delta, x : T_{11}$ は $\Gamma, x : T_{11}$ の並び替えである. 従って、帰納法の仮定から $\Delta, x : T_{11} \vdash t_2 : T_{12}$ が得られるので、T-ABS を適用すれば良い.

それ以外の場合: 自明

このとき、帰納法の各々の場合で用いた型付け規則はちょうど 1 回であるから後者も成り立つ. □

弱化

補題 9.3.7 (弱化)

$\Gamma \vdash t : T$ かつ $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ ならば $\Gamma, x : S \vdash t : T$ 加えて, 両者の導出の深さは等しい

証明.

型付け関係の導出に関する構造的帰納法で証明する.

T-VAR の場合: 並び替え同様の議論で成り立つ.

T-ABS の場合: $t = \lambda x' : T_1. t$

帰納法の仮定を適用できるように, 適切に α 変換して $x \neq x'$ を満たす必要がある.

並び替えの補題を用い, T-ABS を適用する.

その他の規則: 自明



代入の元での型保存補題

補題 9.3.8 (代入の元での型保存)

$\Gamma, x : S \vdash t : T$ かつ $\Gamma \vdash s : S$ ならば $\Gamma \vdash [x \mapsto s]t : T$

証明.

$\Gamma, x : S \vdash t : T$ の導出に関する構造的帰納法で証明する.

T-VAR の場合: $t = z$ ただし, $z : T \in (\Gamma, x : S)$

$z=x$ が成り立つ場合と成り立たない場合に場合分けする.

$z=x$ が成り立つ場合, $[x \mapsto s]z = s$ となるから自明.

$z \neq x$ が成り立たない場合, $[x \mapsto s]z = z$ となるため, 弱化規則を用いて示せる.

T-ABS の場合: $t = \lambda y : T_2. t_1$ $T = T_2 \rightarrow T_1$ $\Gamma, x : S, y : T_2 \vdash t_1 : T_1$

弱化と並び替えにより $\Gamma, y : T_2 \vdash s : S$ が得られる.

あとは帰納法の仮定と T-ABS を適用すれば良い.

残りの場合: 自明



型保存定理

定理 9.3.9 (型保存定理)

$\Gamma \vdash t : T$ かつ $t \longrightarrow t'$ ならば $\Gamma \vdash t' : T$

証明.

練習問題



アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応**
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

カーリーワード対応

型理論と論理学の間に成り立つ対応関係

論理学	プログラミング言語
命題 $P \Rightarrow Q$	型 $P \rightarrow Q$
命題 $P \wedge Q$	型 $P \times Q$
命題 P の証明	型 P を持つ項 t
命題 P は証明できる	型 P を持つ項が存在する
二階の構成的論理	System F
高階論理	System F_ω
線形論理	線形型システム
様相論理	部分評価, 実行時コード生成

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性**
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

型消去

型注釈は評価において用いられていないため、型付きの項を型無しの項に写して意味論を定義する事もできる

定義 9.5.1 (単純型付き項に対する型消去)

$$\begin{aligned} \text{erase}(x) &= x \\ \text{erase}(\lambda x : T_1. t_2) &= \lambda x. \text{erase}(t_2) \\ \text{erase}(t_1 t_2) &= \text{erase}(t_1) \text{erase}(t_2) \end{aligned}$$

型消去の性質

定理 9.5.2

1. $t \longrightarrow t'$ ならば $\text{erase}(t) \longrightarrow \text{erase}(t')$
2. $\text{erase}(t) \longrightarrow m'$ ならばある型付きの項 t' が存在し $t \longrightarrow t'$ かつ $\text{erase}(t') = m'$

証明.

型付け関係の導出に関する帰納法で証明できる □

定義 9.5.3

ある型無しの項 m について型付きの項 t , 型 T , 型環境 Γ が存在し $\text{erase}(t) = m$ かつ $\Gamma \vdash t : T$ が成り立つとき, m は λ_{\rightarrow} で型付け可能であると言う

アウトライン

- ① 関数型
- ② 型付け関係
- ③ 型付けの性質
- ④ カリーハワード対応
- ⑤ 型消去と型付け可能性
- ⑥ Curry スタイルと Church スタイル

Curry スタイルと Church スタイル

- Curry スタイル
項と意味論を定義し, 望まない振る舞いをする項を弾く型システムを定義
- Church スタイル
項と型システムを定義し, 正しく型付けされた項に対して意味論を与える