平成 27 年度 卒業研究発表会

MinCamlのK正規化の形式的検証

B2TB2512 水野雅之

工学部　情報知能システム総合学科
住井・松田研究室

2016 年 3 月 11 日

研究目的

MinCaml の K 正規化の正当性を検証

- 証明を簡潔に
  - 余帰納的大ステップ意味論
  - de Buijn インデックス
- スケーラビリティの確保
  - 証明自動化機能を活用

アウトライン

1. 研究背景
2. MinCaml
3. 束縛の表現
4. 意味論の定義
5. 正当性の検証
6. 結論

アウトライン

1. 研究背景
2. MinCaml
3. 束縛の表現
4. 意味論の定義
5. 正当性の検証
6. 結論

コンパイラの形式的検証の意義

コンパイラのバグは伝播

$\Rightarrow$ コンパイラ由来のバグはソースコード上に現れない

$\Rightarrow$ デバッグが困難

関連研究

CompCert [Leroy ら 2006]

- C **コンパイラの正当性の検証**

[Chlipala 2010]

- **非純粋関数型言語処理系の正当性の検証**

本研究の目標と現状

目標:MinCaml の K **正規化の正当性を検証**

現状:**サブセットの** K **正規化の正当性を検証**

- **実装済**　1 **引数関数、算術演算、**let、if
- **未実装**　**タプル、複数引数関数、配列、外部関数呼び出し**

アウトライン

1. 研究背景
2. MinCaml
3. 束縛の表現
4. 意味論の定義
5. 正当性の検証
6. 結論

MinCaml の特徴

住井による教育用コンパイラ [FDPE 2005]

- 非純粋な関数型言語
- OCaml で 2000 行程度の実装
  - 型推論
  - 定数畳み込み等の最適化

対象言語

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$$
\begin{array}{rl}
M, N, f ::= & \\
& \vdots \\
& \textbf{let rec}\ x\ y_1\ \cdots\ y_n = M\ \textbf{in}\ N \\
& f\ N_1\ \cdots\ N_n \\
& (M_1,\ \cdots\ , M_n) \\
& \textbf{let}\ (x_1,\ \cdots\ , x_n) = M\ \textbf{in}\ N \\
& \textbf{Array.create}\ M\ N \\
& M_1.(M_2) \\
& M_1.(M_2) \leftarrow M_3
\end{array}
$$

対象言語

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$$
\begin{aligned}
M, N, f ::= \\
& \vdots \\
& \textbf{let rec } x\ y_1\ \cdots\ y_n = M \textbf{ in } N \\
& f\ N_1\ \cdots\ N_n \\
& (M_1,\ \cdots\ , M_n) \\
& \textbf{let } (x_1,\ \cdots\ , x_n) = M \textbf{ in } N \\
& \textbf{Array.create } M\ N \\
& M_1.(M_2) \\
& M_1.(M_2) \leftarrow M_3
\end{aligned}
$$

対象言語

- 高階関数
- N 引数の構文
- **副作用**
- 外部関数呼び出し (入出力)

$$
\begin{aligned}
M, N, f ::= & \\
& \vdots \\
& \mathbf{let\ rec}\ x\ y_1\ \cdots\ y_n = M\ \mathbf{in}\ N \\
& f\ N_1\ \cdots\ N_n \\
& (M_1,\ \cdots\ , M_n) \\
& \mathbf{let}\ (x_1,\ \cdots\ , x_n) = M\ \mathbf{in}\ N \\
& \mathbf{Array.create}\ M\ N \\
& M_1.(M_2) \\
& M_1.(M_2) \leftarrow M_3
\end{aligned}
$$

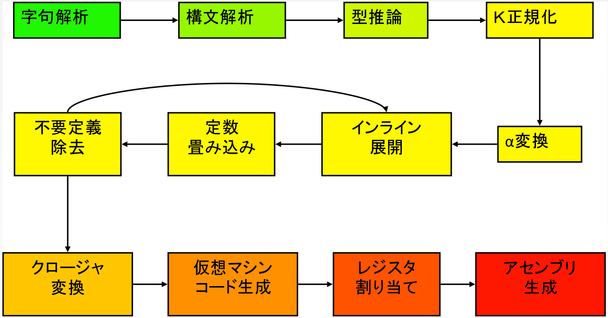
対象言語

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$$
\begin{aligned}
M, N, f ::= \\
& \vdots \\
& \textbf{let rec } x\ y_1\ \cdots\ y_n = M \textbf{ in } N \\
& f\ N_1\ \cdots\ N_n \\
& (M_1, \cdots, M_n) \\
& \textbf{let } (x_1, \cdots, x_n) = M \textbf{ in } N \\
& \textbf{Array.create } M\ N \\
& M_1.(M_2) \\
& M_1.(M_2) \leftarrow M_3
\end{aligned}
$$

内部設計

- 様々なコンパイルフェーズ
- 疎結合



http://esumii.github.io/min-caml/index8.html

全ての部分式に名前を付ける

$$a + b * c + d$$

$$\begin{aligned}&\textbf{let } x = b * c \textbf{ in}\\&\textbf{let } y = a + x \textbf{ in}\\&y + d\end{aligned}$$

束縛に関する操作

K 正規化

全ての部分式に名前を付ける

$$a + b * c + d$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{let}\ x = b * c\ \mathbf{in}\\&\mathbf{let}\ y = a + x\ \mathbf{in}\\&y + d\end{aligned}$$

束縛に関する操作

期待される定理 (1/2)

K 正規化後の項を評価してみる

単純な値では一致

$$1 + 2 \Downarrow 3$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{let } a = 1 \textbf{ in}\\
&\textbf{let } b = 2 \textbf{ in}\\
&a + b \Downarrow 3
\end{aligned}$$

元の値の K 正規形と一致

$$\begin{aligned}
&\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ x + y + z\\
&\Downarrow \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ x + y + z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda x.\lambda y.\lambda z.\\
&\textbf{let } a = x + y \textbf{ in}\\
&a + z\\
&\Downarrow \lambda x.\lambda y.\lambda z.\\
&\textbf{let } a = x + y \textbf{ in}\\
&a + z
\end{aligned}$$

期待される定理 (2/2)

定理 1

項 t が値 v に評価される場合、項 t を K 正規化した結果 K(t) は値 v を K 正規化した結果 K(v) に評価される

定理 2

項 t の評価が停止しない場合、項 t を K 正規化した結果 K(t) の評価は停止しない

今回検証した言語の範囲では評価は決定的なため、逆も成り立つ

アウトライン

名前による表現

α 等価性の議論が面倒

$$\lambda x.\lambda y.\ x \simeq \lambda a.\lambda b.\ a$$

fresh な名前が必要になる

- 束縛の関係を乱さないよう変数名を選ぶ

$$\begin{aligned}[x \mapsto z](\lambda z.\ x) &\simeq \lambda z'.\ z \\ &\not\simeq \lambda z.\ z\end{aligned}$$

de Buijn インデックス

何番目の束縛かで変数を表現

- 内側から外側へ数える

$$\lambda x.\lambda y.\lambda z.\ xz(yz) \qquad \lambda.\lambda.\lambda.\ 2\ 0\ (1\ 0)$$

α 等価な式は構文的に等価

- 名前の freshness を保証

$$\begin{array}{l} \lambda x.\lambda y.\ x \\ \lambda a.\lambda b.\ a \end{array} \qquad \lambda.\lambda.\ 1$$

シフト

自由変数のインデックスをずらす

$$\uparrow^d t$$

束縛に関する操作

$(\lambda x.\ x)\ (\lambda x.\ y)$ $\qquad$ $(\lambda.\ 0)\ (\lambda.\ 1)$

$$\begin{aligned}&\textbf{let}\ a = \lambda x.\ x\ \textbf{in}\\&\textbf{let}\ b = \lambda x.\ y\ \textbf{in}\\&a\ b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\textbf{let}\ \_ = \lambda.\ 0\ \textbf{in}\\&\textbf{let}\ \_ = \textcolor{red}{\uparrow^1}\ (\lambda.\ 1)\ \textbf{in}\\&1\ 0\end{aligned}$$

シフト

自由変数のインデックスをずらす

$$\uparrow^d t$$

束縛に関する操作

$$(\lambda x.\ x)\ (\lambda x.\ y)$$

$$(\lambda.\ 0)\ (\lambda.\ 1)$$

$$\begin{array}{l}\textbf{let}\ a = \lambda x.\ x\ \textbf{in}\\ \textbf{let}\ b = \lambda x.\ y\ \textbf{in}\\ a\ b\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\textbf{let}\ \_ = \lambda.\ 0\ \textbf{in}\\ \textbf{let}\ \_ = \lambda.\ 2\ \textbf{in}\\ 1\ 0\end{array}$$

K 正規化の実装

```
Fixpoint knormal e :=
  match e with
  | Exp.Var x => K.Var x
  | Exp.Abs e => K.Abs (knormal e)
  | Exp.App e1 e2 =>
      K.Let (knormal e1)
        (K.Let (shift 1 (knormal e2))
          (App 1 0))
  end.
```

アウトライン

大ステップ意味論

比較的単純な
プログラム変換の検証に適する

が

無限ループとエラーの区別が困難

例:型無しラムダ計算

構文

$$
\begin{aligned}
t \;::=\;& b \\
\mid\;& x \\
\mid\;& \lambda x.\ t \\
\mid\;& t\ t
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
v \;::=\;& b \\
\mid\;& \lambda x.\ t
\end{aligned}
$$

意味論

$$
\frac{}{b \Downarrow b}
\qquad\qquad
\frac{}{\lambda x.\ t \Downarrow \lambda x.\ t}
$$

$$
\frac{t_1 \Downarrow \lambda x.\ t \qquad t_2 \Downarrow v_2 \qquad [x \mapsto v_2]t \Downarrow v}{t_1\ t_2 \Downarrow v}
$$

大ステップ意味論の問題点

エラー

$$\mathbf{true}\ \mathbf{true} \not\Downarrow v$$

適用できる規則が無い

無限ループ

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \not\Downarrow v$$

有限回の規則適用で導出できない

区別できない

余帰納的に定義 [Leroy 及び Grall 2009]

$$\frac{t_1 \Uparrow}{t_1 \; t_2 \Uparrow} \qquad\qquad \frac{t_1 \Downarrow v_1 \qquad t_2 \Uparrow}{t_1 \; t_2 \Uparrow}$$

$$\frac{t_1 \Downarrow \lambda x.\, t \qquad t_2 \Downarrow v_2 \qquad [x \mapsto v_2]t \Uparrow}{t_1 \; t_2 \Uparrow}$$

余帰納的大ステップ意味論 (2/2)

エラー

$$\mathbf{true}\ \mathbf{true} \not\Downarrow$$

適用できる規則がない

無限ループ

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \Uparrow$$

無限回の規則適用を許す

区別できる

参考:入出力を含む言語への拡張

どのような入出力を行ったかを表すラベルの列を付与

$$\textbf{print\_endline}\ ''hoge'';\ \ \textbf{read\_line}\ ()$$
$$\Downarrow ''fuga''\ \ /\ (\textbf{print\_endline}\ ''hoge'',\ \ \textbf{read\_line}\ () = ''fuga'')$$

ストリームを用いれば無限回の入出力も

$$(\textbf{while true do print\_endline}\ ''hoge''\,\textbf{done})$$
$$\Uparrow /\ (\textbf{print\_endline}\ ''hoge'', \textbf{print\_endline}\ ''hoge'', \cdots)$$

アウトライン

コンパイラの検証

言語拡張のたび全ての証明の修正が必要

```
Inductive t :=
  | Var : nat -> t
⋮
Proof.
  intros t.
  induction t.
  Case "Var".
```

```
Inductive t :=
  | Int : Z -> t
  | Var : nat -> t
⋮
Proof.
  intros t.
  induction t.
  Case "Int".
    ⋮
  Case "Var".
```

構文の違いを自動証明で吸収

- $tactic_1; tactic_2$
- $\textbf{solve}[tactic_1 | \cdots | tactic_n]$

```
Lemma shift_0 : forall e c,
  shift c 0 e = e.
Proof.
  intros e.
  induction e; intros ?; simpl;
    f_equal;
    solve [ apply shift_var_0 | eauto ].
Qed.
```

拡張性の評価

プリミティブ、if、let を追加

	構文	証明の行数
拡張前	**変数 匿名関数 関数適用**	110
拡張後	20 **種類**	141

単純な変更に対してはスケール

アウトライン

1. 研究背景
2. MinCaml
3. 束縛の表現
4. 意味論の定義
5. 正当性の検証
6. **結論**

結論

K 正規化を Coq で検証できた

- de Buijn インデックス、余帰納的大ステップ意味論の採用で証明が簡潔に
- 証明自動化による再利用性の高い証明

今後の課題

さらに言語を拡張し、MinCaml と同等に

- 組や複数引数の関数
- 配列
- 外部関数呼び出し

K 正規化以外の検証も