

平成 27 年度 卒業研究発表会

# MinCaml の K 正規化の形式的検証

B2TB2512 水野雅之

工学部 情報知能システム総合学科  
住井・松田研究室

2016 年 3 月 11 日

## MinCaml の K 正規化の正当性を形式的に検証

- 証明を簡潔に
  - de Buijn インデックス
  - 余帰納的大ステップ意味論
- スケーラビリティの確保
  - 証明自動化機能を活用

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論

## コンパイラのバグ

- 広範囲に影響が及ぶ
- デバッグが困難

CompCert [Leroy ら 2006]

- C コンパイラの正当性の検証

[Chlipala 2010]

- 非純粋関数型言語処理系の正当性の検証

目標:MinCaml の正当性を検証

現状:サブセットのK正規化の正当性を検証

実装済 1 引数関数、算術演算、let、if

未実装 タプル、複数引数関数、配列、外部関数呼び出し

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論



## 住井による教育用コンパイラ [FDPE 2005]

- 非純粋な関数型言語
- OCaml で 2000 行程度の実装
  - 型推論
  - 定数畳み込み等の最適化

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$M, N ::=$

$\vdots$

**let rec**  $x \ y_1 \ \cdots \ y_n = M \ \mathbf{in} \ N$

$M \ N_1 \ \cdots \ N_n$

$(M_1, \ \cdots, M_n)$

**let**  $(x_1, \ \cdots, x_n) = M \ \mathbf{in} \ N$

**Array.create**  $M \ N$

$M_1.(M_2)$

$M_1.(M_2) \leftarrow M_3$

- 高階関数
- **N 引数の構文**
- 副作用
- 外部関数呼び出し(入出力)

$M, N ::=$

$\vdots$

**let rec**  $x \ y_1 \ \cdots \ y_n = M$  **in**  $N$

$M \ N_1 \ \cdots \ N_n$

$(M_1, \ \cdots \ , M_n)$

**let**  $(x_1, \ \cdots \ , x_n) = M$  **in**  $N$

**Array.create**  $M \ N$

$M_1.(M_2)$

$M_1.(M_2) \leftarrow M_3$

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$M, N ::=$

$\vdots$

$\text{let rec } x \ y_1 \ \cdots \ y_n = M \ \text{in } N$

$M \ N_1 \ \cdots \ N_n$

$(M_1, \ \cdots, M_n)$

$\text{let } (x_1, \ \cdots, x_n) = M \ \text{in } N$

$\text{Array.create } M \ N$

$M_1.(M_2)$

$M_1.(M_2) \leftarrow M_3$

- 高階関数
- N 引数の構文
- 副作用
- 外部関数呼び出し (入出力)

$M, N ::=$

$\vdots$

**let rec**  $x \ y_1 \ \cdots \ y_n = M$  **in**  $N$

$M \ N_1 \ \cdots \ N_n$

$(M_1, \ \cdots, M_n)$

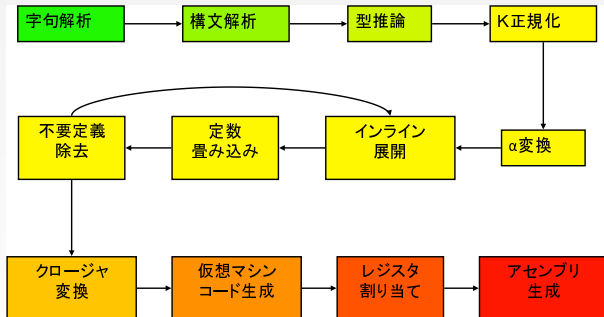
**let**  $(x_1, \ \cdots, x_n) = M$  **in**  $N$

**Array.create**  $M \ N$

$M_1.(M_2)$

$M_1.(M_2) \leftarrow M_3$

- 様々なコンパイルフェーズ
- 疎結合



全ての部分式に名前を付ける

$$a + b * c + d$$

let  $x = b * c$  in  
let  $y = a + x$  in  
 $y + d$

束縛に関する操作

全ての部分式に名前を付ける

$$a + b * c + d$$

**let**  $x = b * c$  **in**  
**let**  $y = a + x$  **in**  
 $y + d$

束縛に関する操作



## 期待される定理 (1/2)

K 正規化後の項を評価してみる  
単純な値では一致

$$1 + 2 \Downarrow 3$$

let  $a = 1$  in  
let  $b = 2$  in  
 $a + b \Downarrow 3$

元の値の K 正規形と一致

$$\begin{aligned} &\lambda x. \lambda y. \lambda z. x + y + z \\ &\Downarrow \lambda x. \lambda y. \lambda z. x + y + z \end{aligned}$$

$\lambda x. \lambda y. \lambda z.$   
let  $a = x + y$  in  
 $a + z$   
 $\Downarrow \lambda x. \lambda y. \lambda z.$   
let  $a = x + y$  in  
 $a + z$

## 期待される定理 (2/2)

### 定理 1

項  $t$  が値  $v$  に評価される場合、項  $t$  を  $K$  正規化した結果  $K(t)$  は値  $v$  を  $K$  正規化した結果  $K(v)$  に評価される

### 定理 2

項  $t$  の評価が停止しない場合、項  $t$  を  $K$  正規化した結果  $K(t)$  の評価は停止しない

今回検証した言語の範囲では評価は決定的なため、逆も成り立つ

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現**
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論

## $\alpha$ 等価性の議論が面倒

$$\lambda x. \lambda y. x \simeq \lambda a. \lambda b. a$$

## fresh な名前が必要になる

- 束縛の関係を乱さないよう変数名を選ぶ

$$\begin{aligned} [x \mapsto z](\lambda z. x) &\simeq \lambda z'. z \\ &\neq \lambda z. z \end{aligned}$$

## 何番目の束縛かで変数を表現

- 内側から外側へ数える

$\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz)$        $\lambda. \lambda. \lambda. 2 \ 0 \ (1 \ 0)$

## $\alpha$ 等価な式は構文的に等価

- 名前の freshness を保証

$\lambda x. \lambda y. x$

$\lambda a. \lambda b. a$

$\lambda. \lambda. 1$

## 自由変数のインデックスをずらす

$$\uparrow^d t$$

## 束縛に関する操作

 $(\lambda x. x) (\lambda y. z)$ 
 $(\lambda. 0) (\lambda. 1)$ 

```
let a = λx. x in
let b = λy. z in
a b
```

```
let _ = λ. 0 in
let _ =  $\uparrow^1 (\lambda. 1)$  in
1 0
```

## 自由変数のインデックスをずらす

$$\uparrow^d t$$

## 束縛に関する操作

 $(\lambda x. x) (\lambda y. z)$ 
 $(\lambda. 0) (\lambda. 1)$ 
 $\text{let } a = \lambda x. x \text{ in}$ 
 $\text{let } b = \lambda y. z \text{ in}$ 
 $a \ b$ 
 $\text{let } \_ = \lambda. 0 \text{ in}$ 
 $\text{let } \_ = \lambda. 2 \text{ in}$ 
 $1 \ 0$

# K正規化の実装

```
Fixpoint knormal e :=  
  match e with  
  | Exp.Var x => K.Var x  
  | Exp.Abs e => K.Abs (knormal e)  
  | Exp.App e1 e2 =>  
    K.Let (knormal e1)  
      (K.Let (shift 1 (knormal e2))  
        (App 1 0))  
end.
```



# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義**
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論

比較的単純な  
プログラム変換の検証に適する

が

無限ループとエラーの区別が困難

## 例:型無しラムダ計算

### 構文

$$t ::= b$$

$$| \quad x$$

$$| \quad \lambda x. t$$

$$| \quad t \ t$$

$$v ::= b$$

$$| \quad \lambda x. t$$

### 意味論

$$\overline{b \Downarrow b}$$

$$\overline{\lambda x. t \Downarrow \lambda x. t}$$

$$\frac{t_1 \Downarrow \lambda x. t \quad t_2 \Downarrow v_2 \quad [x \mapsto v_2]t \Downarrow v}{t_1 \ t_2 \Downarrow v}$$

## エラー

`true true`  $\not\Downarrow v$

適用できる規則が無い

## 無限ループ

$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$   $\not\Downarrow v$

有限回の規則適用で導出できない

## 区別できない

## 余帰納的に定義 [Leroy, Grall 2009]

$$\frac{t_1 \uparrow}{t_1 \ t_2 \uparrow}$$

$$\frac{t_1 \Downarrow v_1 \quad t_2 \uparrow}{t_1 \ t_2 \uparrow}$$

$$\frac{t_1 \Downarrow \lambda x. t \quad t_2 \Downarrow v_2 \quad [x \mapsto v_2]t \uparrow}{t_1 \ t_2 \uparrow}$$

エラー

無限ループ

`true true`  $\nrightarrow$

$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$   $\rightarrow$

適用できる規則がない

無限回の規則適用を許す

区別できる

どのような入出力を行ったかを表すラベルの列を付与

```
print_endline "hoge"; read_line ()
```

```
↓ "fuga" / (print_endline "hoge", read_line () = "fuga")
```

ストリームを用いれば無限回の入出力も

```
(while true do print_endline "hoge" done)
```

```
↑ / (print_endline "hoge", print_endline "hoge", ...)
```

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証**
- ⑥ 結論



## 言語拡張のたび全ての証明の修正が必要

```
Inductive t :=  
  | Var : nat -> t  
:  
Proof.  
  intros t.  
  induction t.  
  Case "Var".
```

```
Inductive t :=  
  | Int : Z -> t  
  | Var : nat -> t  
:  
Proof.  
  intros t.  
  induction t.  
  Case "Int".  
  :  
  Case "Var".
```

## 構文の違いを自動証明で吸収

- $tactic_1; tactic_2$
- $\text{solve}[tactic_1 | \dots | tactic_n]$

```
Lemma shift_0 : forall e c,  
  shift c 0 e = e.  
Proof.  
  intros e.  
  induction e; intros ?; simpl;  
    f_equal;  
    solve [ apply shift_var_0 | eauto ].  
Qed.
```

## プリミティブ、if、let を追加

	構文	証明の行数
拡張前	3 種類 (変数, 匿名関数, 関数適用)	110
拡張後	20 種類 (整数プリミティブ, if, let 等)	141

比較的単純な変更に対してはスケール

# アウトライン

- ① 研究背景
- ② MinCaml
- ③ 束縛の表現
- ④ 意味論の定義
- ⑤ 正当性の検証
- ⑥ 結論

K 正規化を Coq で検証できた

- de Buijn インデックス、  
余帰納的大ステップ意味論の採用で証明  
が簡潔に
- 証明自動化による再利用性の高い証明

さらに言語を拡張し、MinCaml と同等に

- 組や複数引数の関数
- 配列
- 外部関数呼び出し

K 正規化以外の検証も