ỨNG DỤNG PHƯƠNG THỨC MATRIX TRÊN MÁY TÍNH CASIO FX-580VNX VÀ CASIO FX-570VN PLUS ĐỂ GIẢI QUYẾT NHỮNG BÀI TOÁN MA TRẬN

Diễn đàn toán Casio[1]

Tóm tắt
Trong bài viết này chúng tôi đưa ra những hướng dẫn cơ bản nhất để có thể làm quen với phương thức Matrix. Từ đó ứng dụng nó để giải quyết những bài toán Đại số tuyến tính từ đơn giản đến phức tạp. Ngoài ra, ở bài viết này chúng tôi còn ứng dụng phương thức ma trận để giải quyết một số bài toán trắc nghiệm ở chương trình trung học phổ thông.

[1] *Chuyên trang chia sẻ tài liệu, kinh nghiệm ứng dụng giải toán trên máy tính cầm tay bao gồm: Giải toán SGK; Tuyển sinh 10; Luyện thi THPT QG và HSG MTCT.*
*__Website:__ `http://diendanmaytinhcamtay.vn`
*__Facebook:__ `https://www.facebook.com/DienDanToanCasio/`
*__Youtube:__ `https://www.youtube.com/channel/UCS8C4tPbCJDQWI7-DpoMwZg`

Mục lục

Giới thiệu

Trong bài viết này chúng tôi đưa ra những hướng dẫn cơ bản nhất để có thể làm quen với phương thức Matrix. Từ đó ứng dụng nó để giải quyết những bài toán Đại số tuyến tính từ đơn giản đến phức tạp. Ngoài ra, ở bài viết này chúng tôi còn ứng dụng phương thức ma trận để giải quyết một số bài toán trắc nghiệm ở chương trình trung học phổ thông.

1. Tổng quan về phương thức ma trận trên CASIO fx-570VN;CASIO fx-580VNX

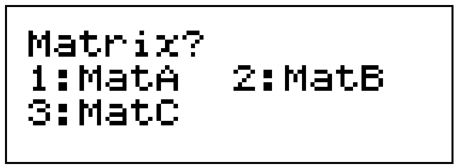
Matrix là một phương thức trong máy tính Casio mà trong đó, người ta có thể tính toán được các phép tính toán trên ma trận.

Để thực hiện tính toán ma trận trên máy tính, trước hết ta gán dữ liệu cho các biến đặc biệt (MatA, MatB, MatC), và rồi dùng các biến này trong tính toán.

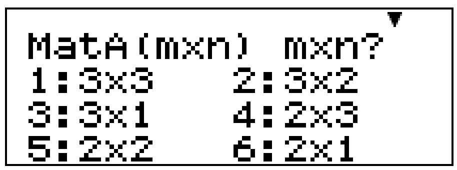
Vì 2 dòng máy tính có cấu tạo phím bấm cũng như hiệu năng khác nhau, để thuận tiện cho người đọc, tôi sẽ có hướng dẫn cụ thể cho từng máy tính:

1.1 Máy Casio fx-570VN plus

Để vô phương thức Matrix ta nhấn: MODE 6

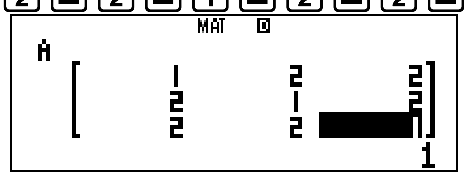


Sau đó máy tính sẽ hỏi tên ma trận mà bạn muốn nhập, bấm 1 2 3 tùy thích (ở đây tôi chọn 1).

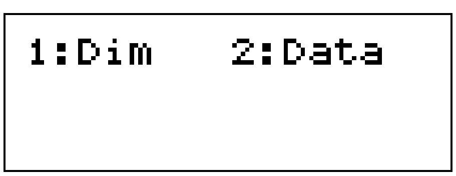


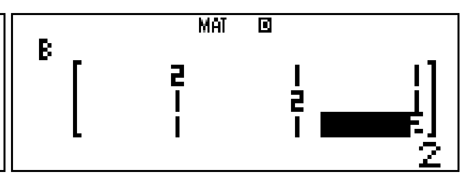
Sau đó máy tính sẽ hỏi kích cỡ ma trận mà bạn muốn nhập, bấm từ 1 tới 6 tùy thuộc vào kích thước ma trận mà bạn muốn tính (ở đây tôi chọn ma trận 3x3 1). Và bắt đầu nhập ma trận

1 = 2 = 2 = 2 = 1 = 2 = 2 = 2 = 1 =

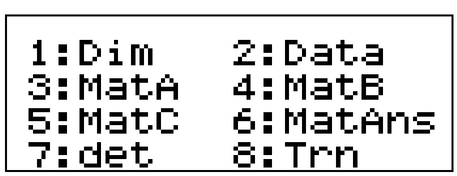


Tiếp đó ta bấm SHIFT 4 để nhập thêm ma trận B và ma trận C với Dim hoặc sửa lại ma trận với Data (ở đây tôi nhập thêm ma trận B)





Khi đã nhập xong các ma trận, ta bấm AC SHIFT 4 ta được bảng sau

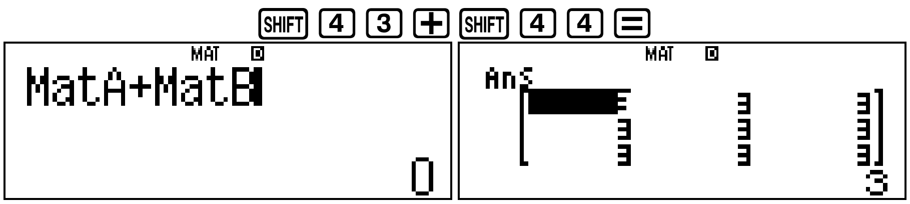


Với bảng này:

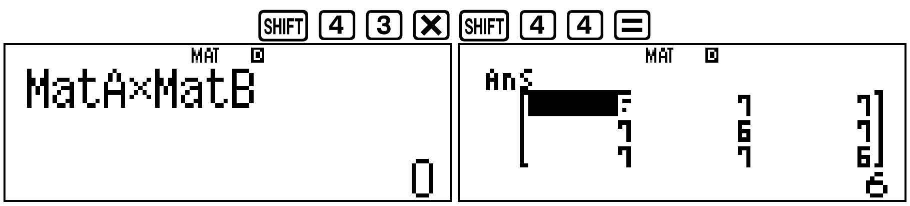
1. Dim là nhập lại ma trận.
2. Data là xem lại ma trận.
3. MatA là gọi ra ma trận A.
4. MatB là gọi ra ma trận B.
5. MatC là gọi ra ma trận C.
6. MatAns là gọi ra ma trận đã tính toán trước đó.
7. Det là tính định thức của ma trận.
8. Trn là tính ma trận chuyển vị.

Tới đây, ta có thể tính toán các phép tính trên ma trận

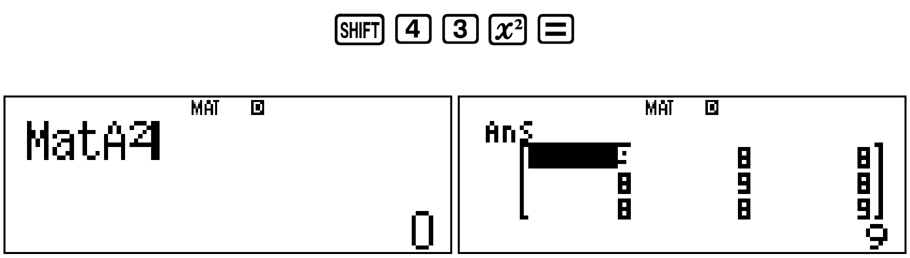
i. Tính tổng của 2 ma trận A và B



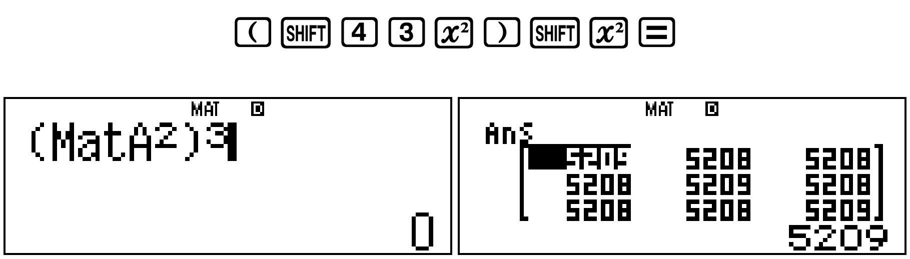
ii. Tính tích của 2 ma trận A và B



iii. Tính bình phương của ma trận A

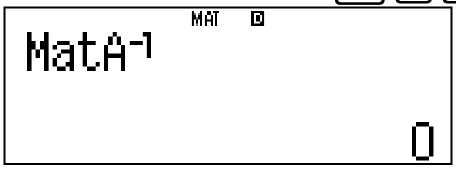


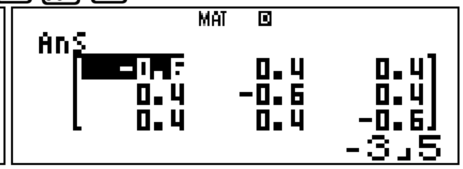
Ngoài ra, ta có thể tính ma trận A^6 bằng cách kết hợp như sau (hoặc A^n tùy vào sức sáng tạo)



iv. Tính ma trận nghịch đảo của ma trận A

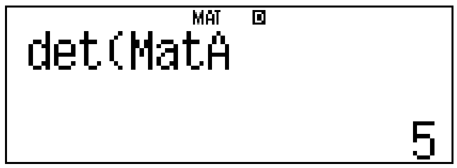
[SHIFT] [4] [3] [x^{-1}] [=]





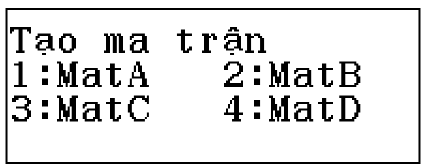
v. Tính định thức của ma trận A

[SHIFT] [4] [7] [SHIFT] [4] [3] [=]

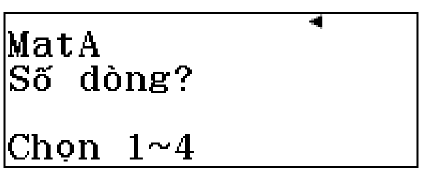


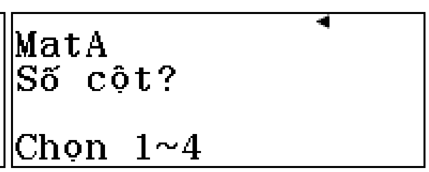
1.2 Máy tính Casio fx-580VNX

Để vô phương thức Matrix ta nhấn: [MENU] [4]



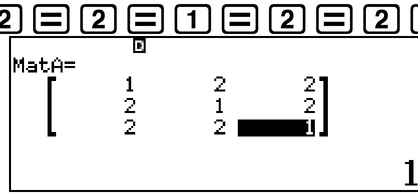
Ở máy tính Casio fx- 580VNX cho 4 biến nhớ ma trận (MatA, MatB, MatC, MatD). Đây cũng là một thế mạnh của loại máy tính này so với phiên bản tiền nhiệm. Chọn ma trận nào tùy thích nha các bạn (Ở đây tôi chọn MatA 1). Sau đó máy tính sẽ hỏi số dòng và số cột của ma trận



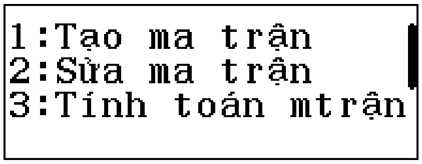


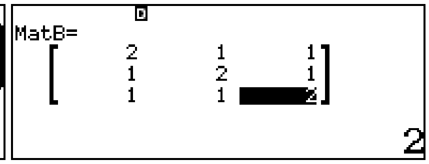
Ở fx-580VNX, ma trận có kích thước lớn nhất là 4x4, điều này giúp chúng ta có thể tính toán những ma trận bậc lớn thuận tiện hơn. Sau khi nhập xong kích thước (ở đây tôi chọn ma trận 3x3), ta sẽ bắt đầu nhập ma trận

[1] [=] [2] [=] [2] [=] [2] [=] [1] [=] [2] [=] [2] [=] [2] [=] [1] [=]

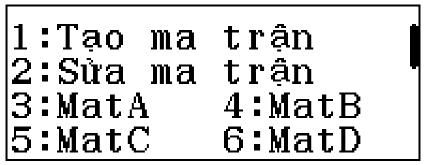


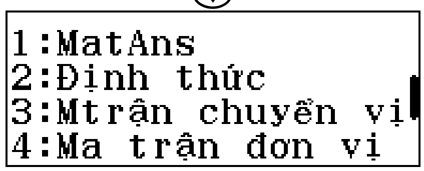
Sau đó ta bấm [OPTN] [1] (Define Matrix) để nhập thêm ma trận B, C, D hoặc là sửa ma trận với [OPTN] [2] (Edit Matrix)

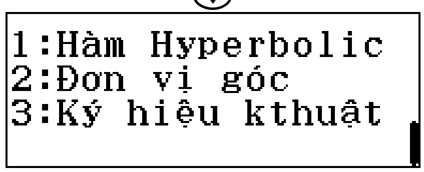




Khi đã nhập xong ma trận mình cần, ta bấm OPTN đây là những tính năng của phương thức ma trận



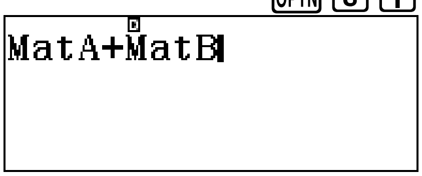


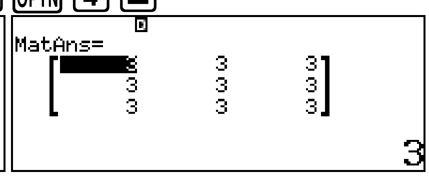


Tới đây, ta có thể tính toán trên ma trận bằng cách gọi ta từng phép tính tương ứng:

i. Tính tổng của 2 ma trận A và B

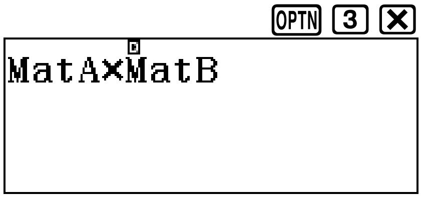
OPTN 3 + OPTN 4 =

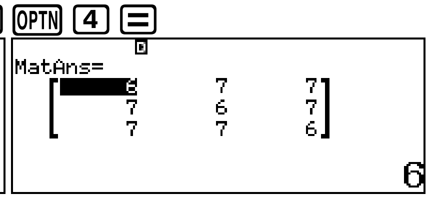




ii. Tính tích của 2 ma trận A và B

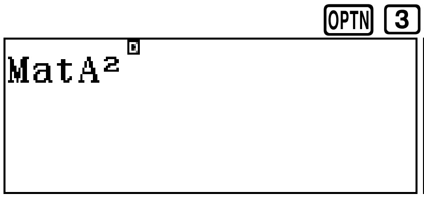
OPTN 3 × OPTN 4 =

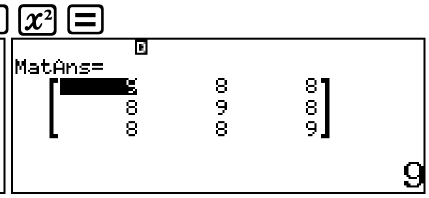




iii. Tính bình phương của ma trận A

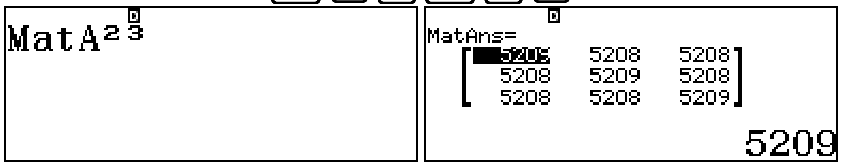
OPTN 3 x^2 =





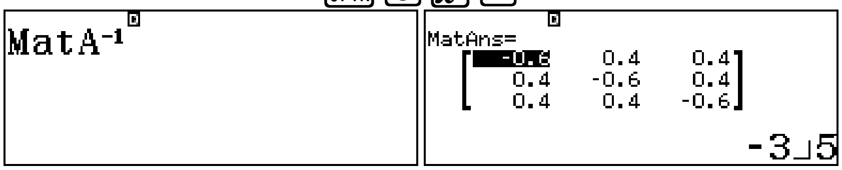
Ngoài ra, ta có thể tính ma trận A^6 bằng cách kết hợp như sau (hoặc A^n tùy vào sức sáng tạo)

OPTN 3 x^2 SHIFT x^2 =



iv. Tính ma trận nghịch đảo của ma trận A

OPTN 3 x^{-1} =



v. Tính định thức của ma trận A

OPTN ▼ 2 OPTN 3 =

Lưu ý 1.1. *Khi sử dụng phương thức ma trận để tính toán, máy tính chỉ hiểu những phím bấm có sẵn trên màn hình máy như bình phương (x^2), lập phương (SHIFT x^2), nghịch đảo (x^{-1}),... Không hiểu những phím mũ mà chúng ta nhập vào. Các bạn nên lưu ý điều này, tránh để mất thời gian khi làm bài trong phòng thi.*

2. Sử dụng phương thức ma trận trên máy tính Casio để giải những bài toán THPT

2.1 Sử dụng phương thức ma trận để giải những bài toán hình học không gian toạ độ

2.1.1 Điều kiện cắt nhau của hai đường thẳng

Giả sử ta có hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-x_A}{a_1} = \frac{y-y_A}{a_2} = \frac{z-z_A}{a_3}; d_2 : \frac{x-x_B}{b_1} = \frac{y-y_B}{b_2} = \frac{z-z_B}{b_3};$$

Nếu d_1 và d_2 không cùng phương và ba vector

$$\overrightarrow{a} = (a_1;a_2;a_3); \overrightarrow{b} = (b_1;b_2;b_3); \overrightarrow{AB}$$

không đồng phẳng thì hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

Về phương diện định thức, ba vector nói trên không đồng phẳng tương đương với

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ 2.1. *Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng*

$$d_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1};$$

Và mặt phẳng $(P) : x+2y+3z-5=0$. *Đường thẳng vuông góc với* (P), *cắt* d_1 *và* d_2 *có phương trình là:*

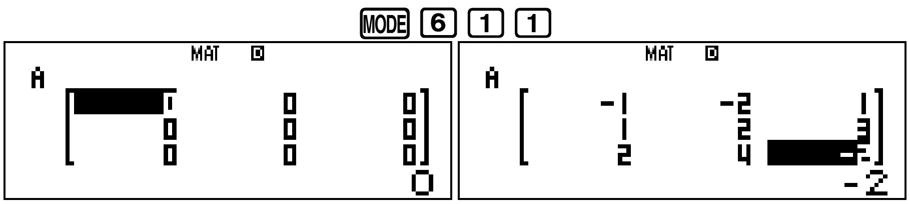
A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$

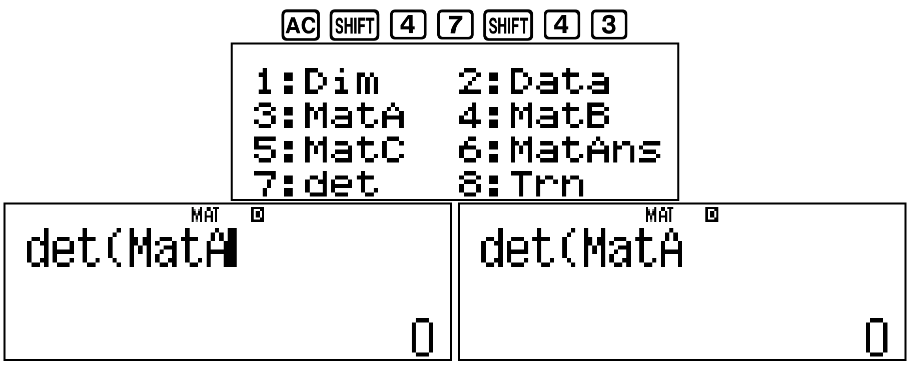
B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$

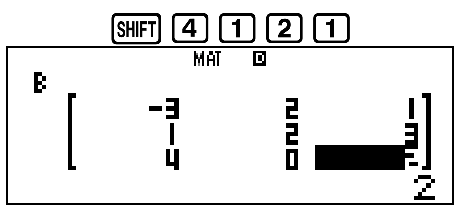
D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$

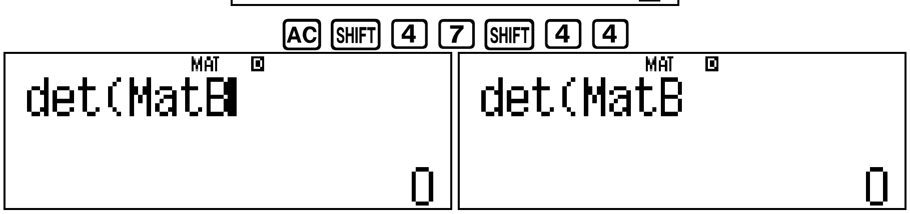
Hướng dẫn. Ta thử phương án A với d_1 . Nếu d_1 không cắt d_A ta thử phương án B, ….
Thử phương án A:





$\Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow d_A$ cắt d_1.

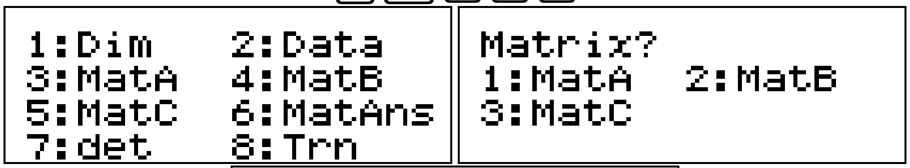


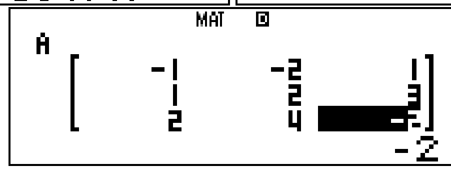


$\Rightarrow d_A$ cắt d_2. Vậy chọn A. □

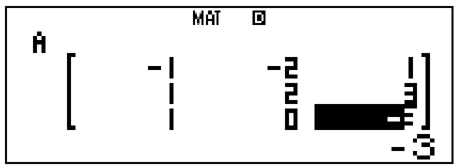
Lưu ý 2.2. *Nếu* d_1 *không cắt* d_A *ta chuyển ngay sang phương án B. Nếu* d_1 *cắt* d_A *nhưng* d_2 *không cắt* d_A *ta cũng chuyển sang phương án B. Trong ví dụ này ta chọn phương án A. Tuy nhiên nếu phải chuyển sang phương án B, ta chuyển như sau*

AC SHIFT 4 2 1





Điều chỉnh lại ma trận A



AC SHIFT 4 7 SHIFT 4 3

Định thức khác 0 nên d_1 không cắt d_B. Nếu vậy ta thử tiếp phương án C. Nếu C sai thì ta chọn D. Thời gian để thử ba phương án không lâu hơn bao nhiêu so với thời gian giải tự luận của câu trắc nghiệm đó.

Lời bình. Đôi khi chúng ta nghĩ việc sử dụng ma trận đối với học sinh Trung học phổ thông là không cần thiết. Tuy nhiên chúng ta cũng biết rằng nhiều vấn đề về phương pháp toạ độ trong không gian có thể được xử lý thông qua phép tính định thức và ma trận thì thao tác sẽ đơn giản hơn.

2.1.2 Tính thể tích khối đa diện

Giả sử ta có khối tứ diện *ABCD* có

$$\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1), \overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2), \overrightarrow{AD}(x_3; y_3; z_3)$$

thì thể tích được xác định theo công thức

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\right|$$

Trong đó $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ là một định thức vuông cấp ba, được tính theo công thức:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 \qquad - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3$$

Ví dụ 2.3. *Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz cho bốn điểm* $A(1;0;1), B(2;2;2), C(5;2;1), D(4;3;-2)$ *Tìm thể tích tứ diện ABCD:*

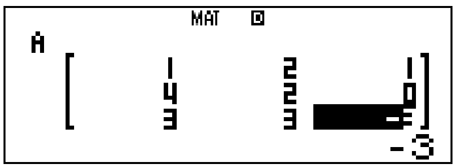
A. 6. *B.* 12. *C.* 24. *D.* 4.

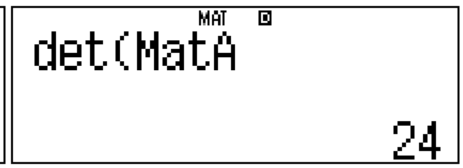
Hướng dẫn.
***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Ta có ba vector:

$$\overrightarrow{AB} = (1;2;1), \overrightarrow{AC} = (4;2;0), \overrightarrow{AD} = (3;3;-3)$$

Nhập toạ độ của ba vector vào ma trận:





Vậy $V = 4$. □

2.2 Áp dụng ma trận giải hệ phương trình tuyến tính bốn ẩn

Một hệ phương trình tuyến tính 4 ẩn có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Khi đó nghiệm của hệ viết dưới dạng ma trận là: $X = A^{-1}B$

Ví dụ 2.4. *Trong không gian Oxyz cho bốn điểm*

$A(1;-2;1), B(-5;10;-1),$
$C(4;1;11), D(-8;-2;2)$

Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có toạ độ là:

A. $I(-2;4;5)$ *B.* $I(2;-4;5)$ *C.* $I(5;4;-2)$ *D.* $I(-5;-4;2)$

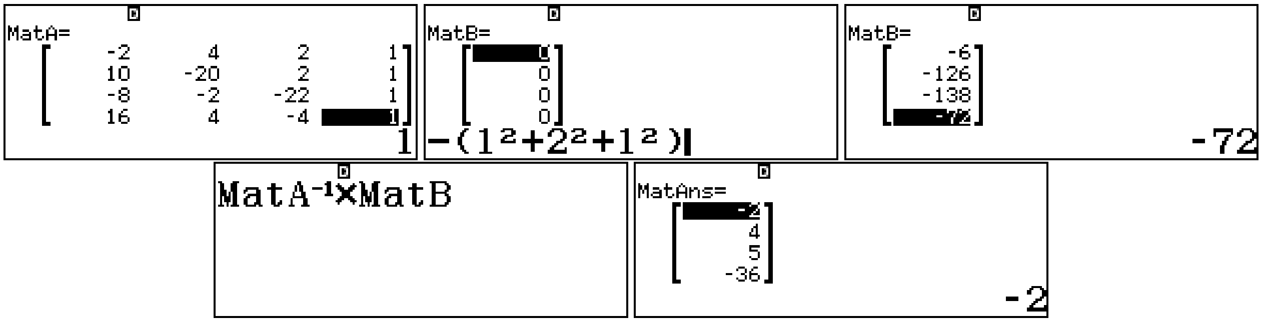
Hướng dẫn. Phương trình mặt cầu có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Thay toạ độ của điểm nằm trên mặt cầu vào phương trình:

$$-2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d = -\left({x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2\right)$$

Thay vì vào phương thức hệ phương trình để giả hệ phương trình tuyến tính bốn ẩn ta có thể sử dụng MODE 4 1 4 4 để nhập ma trận 4 dòng 1 cột như sau:



Như các bạn thấy, ta có tất cả thông tin của mặt này trên một màn hình. Cụ thể tâm của mặt cầu là $I(-2;-4;5)$. □

3. Sử dụng phương thức matrix để giải quyết một số dạng toán ma trận luỹ thừa

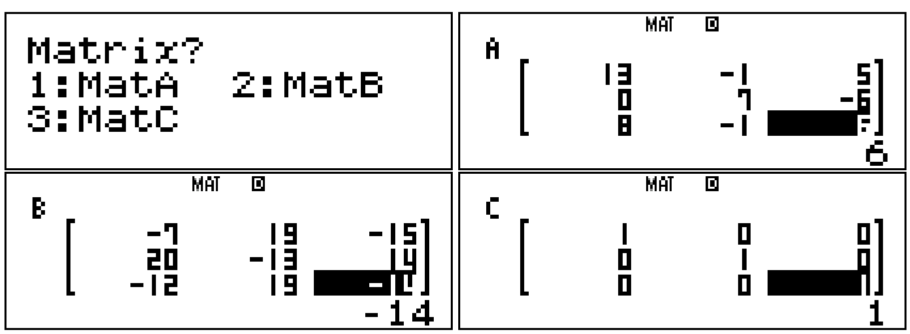
Câu 3.1. *Cho 2 ma trận*

$$A=\begin{pmatrix}13 & -1 & 5\\ 0 & 7 & -6\\ 8 & -1 & 6\end{pmatrix} \text{ và } B=\begin{pmatrix}-7 & 19 & -15\\ 20 & -13 & 14\\ -12 & 19 & -14\end{pmatrix}$$

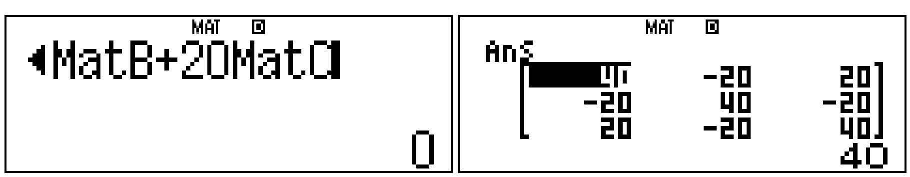
Tìm ma trận X sao cho $X-A+B=20I_3$, trong đó I_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

Hướng dẫn.
***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Nhập 3 ma trận A,B,I vô máy tính



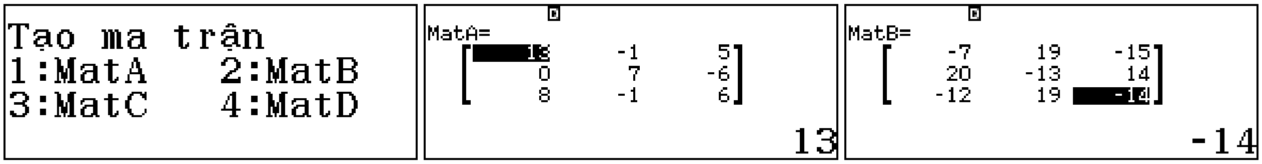
Thực hiện phép tính $X=A-B+20I_3$



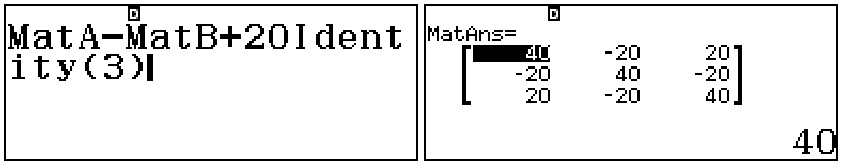
Vậy $X=\begin{pmatrix}40 & -20 & 20\\ -20 & 40 & -20\\ 20 & 20 & 40\end{pmatrix}$.

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

Nhập 2 ma trận A,B vô máy tính



Thực hiện phép tính $X = A - B + 20I_3$



Vậy $X = \begin{pmatrix} 40 & -20 & 20 \\ -20 & 40 & -20 \\ 20 & 20 & 40 \end{pmatrix}$. □

Câu 3.2. *Cho ma trận*

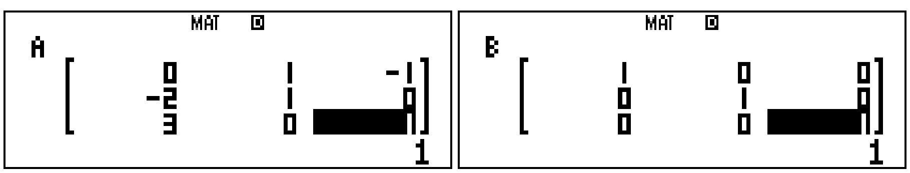
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính $A^2 + A^T - 5I_3$, trong đó I_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

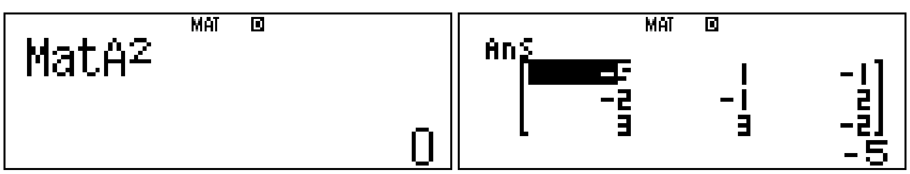
Hướng dẫn.

***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

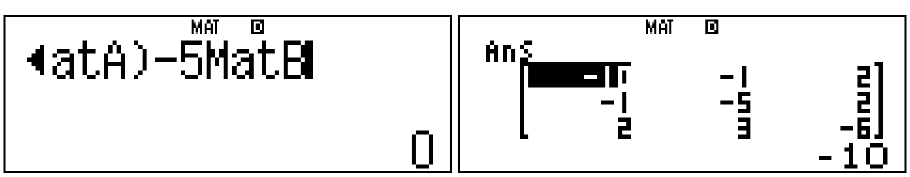
Nhập 2 ma trận A, I vào máy tính



Tính A^2



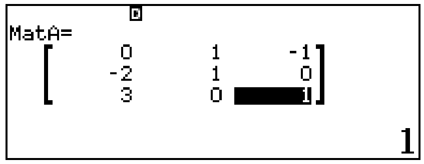
Tính $A^2 + A^T - 5I_3$



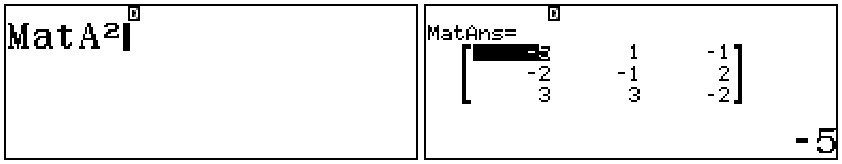
Vậy $A^2 + A^T - 5I = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

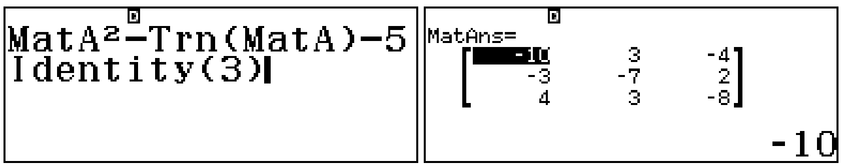
Nhập ma trận Avào máy tính



Tính A^2



Tính $A^2 + A^T - 5I_3$



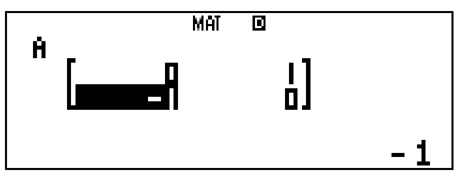
Vậy $A^2 + A^T - 5I = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$. □

Câu 3.3. *Cho* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Hãy tính* A^{2000}.

Hướng dẫn.

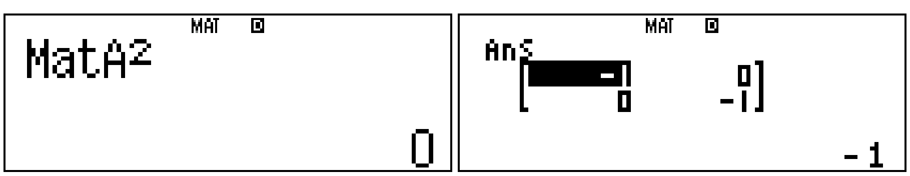
***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Nhập ma trận A vào máy tính

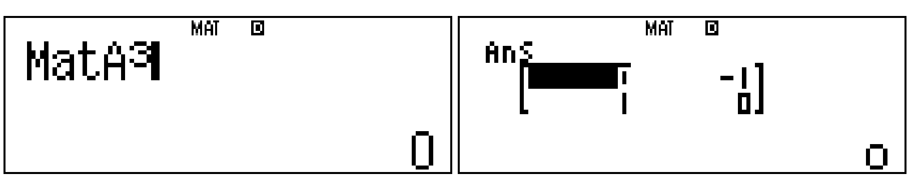


Ta tìm một số ma trận luỹ thừa của A

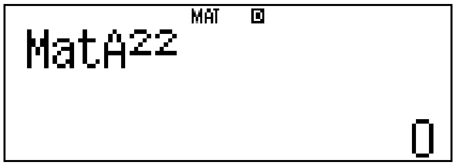
Tính A^2:

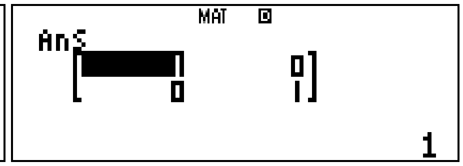


Tính A^3:



Tính A^4:



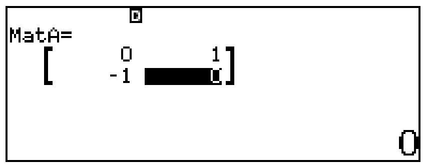


Mà 2000⋮4. Vậy

$$A^{2000} = (A^4)^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

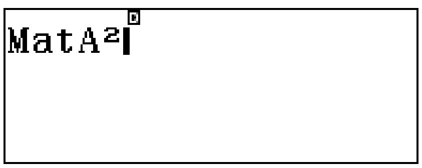
***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

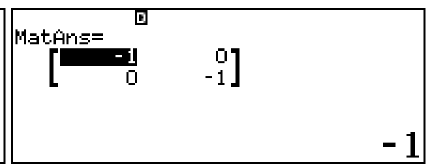
Nhập ma trận A vào máy tính



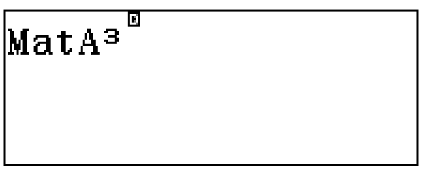
Ta tìm một số ma trận luỹ thừa của A

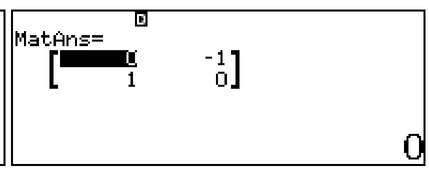
Tính A^2:



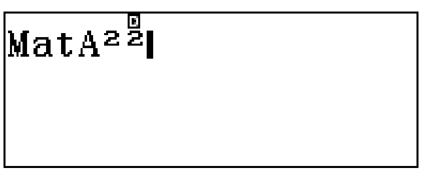


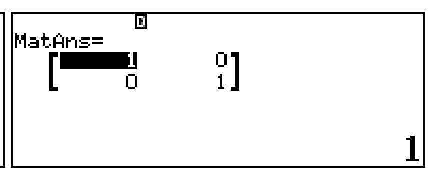
Tính A^3:





Tính A^4:





Mà 2000⋮4. Vậy

$$A^{2000} = (A^4)^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{500} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

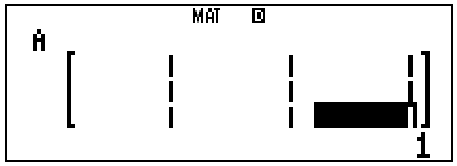
□

Câu 3.4. *Cho ma trận* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Hãy tính* A^n.

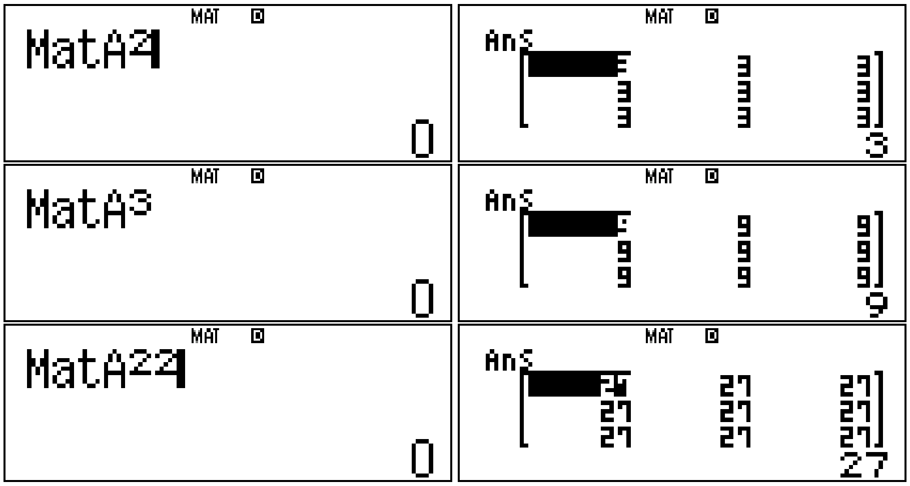
Hướng dẫn.

*** Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Nhập ma trận vào máy tính



Ta tính thử một số số hạng đầu của ma trận



Vậy ta có thể dự đoán công thức chung của ma trận như sau $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

Ta chứng minh quy nạp cho công thức

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ta có

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \\ 3^{1-1} & 3^{1-1} & 3^{1-1} \end{pmatrix} \text{(đúng)}$$

Ta giả sử công thức đúng với $n = k$:

$$A^k = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix}$$

Ta chứng minh công thức đúng với $n = k+1$:

$$A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Đpcm. $\square$

> **Lời bình.** Ở một số dạng toán luỹ thừa bậc cao, chúng ta nên sử dụng máy tính để tính toán trước những bậc mũ nhỏ. Từ đó, ta có thể dự đoán công thức chung của ma trận mũ đó rồi chứng minh quy nạp hoặc tính trực tiếp như câu số 3 để ra được kết quả.

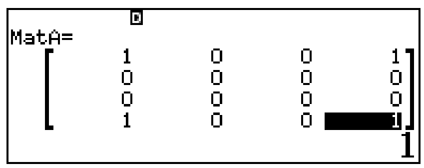
Câu 3.5. *Tính ma trận A^{2017} trong đó*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

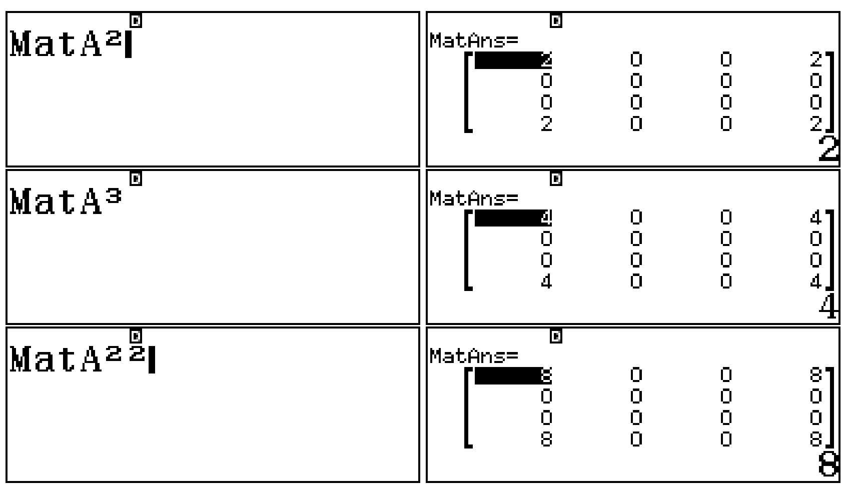
Hướng dẫn.

*** Trên máy tính Casio fx-580VNX**

Nhập ma trận vào máy tính



Ta tính thử một số luỹ thừa đầu



Ta dự đoán kết quả $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

Chứng minh qui nạp kết quả ta suy ra

$$A^{2017} = \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$$

□

Câu 3.6. *Cho ma trận* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Tính* M^n *ứng với mọi* n *nguyên dương cho trước.*

(Trích đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc năm 1995)

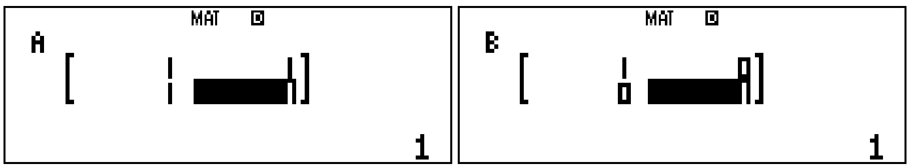
Hướng dẫn.

***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Ta có:

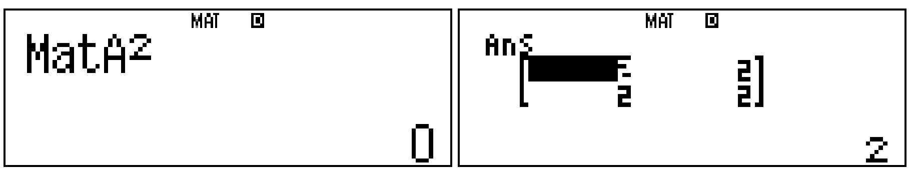
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2$$

Nhập ma trận A, I_2 vào máy tính

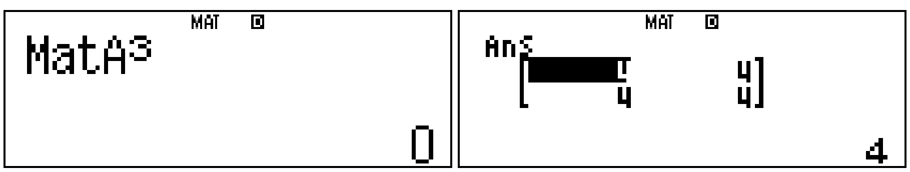


Ta tính thử một số ma trận luỹ thừa của A:

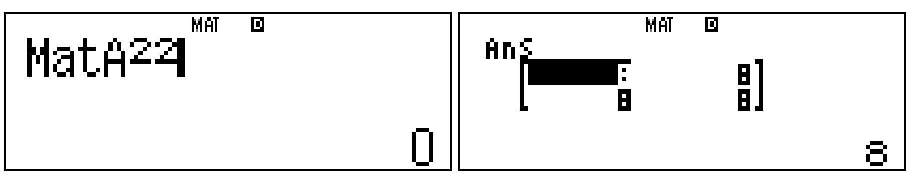
Tính A^2



Tính A^3



Tính A^4



Vậy ta có thể dự đoán

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chứng minh quy nạp ta được

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có:

$$M^n = (A + I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} {I_2}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 2^{n-k-1} A + I_2 = \frac{3^n - 1}{2} A + I_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n + 1}{2} & \dfrac{3^n - 1}{2} \\ \dfrac{3^n - 1}{2} & \dfrac{3^n + 1}{2} \end{bmatrix}$$

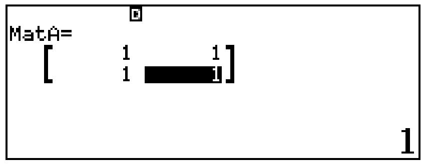
Vậy $M^n = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{bmatrix}$.

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

Ta có:

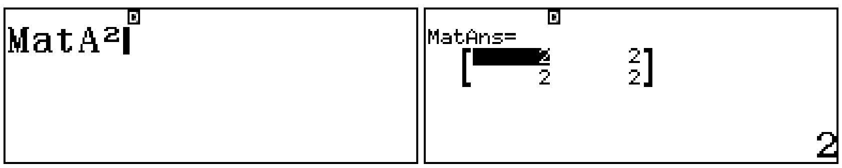
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A + I_2$$

Nhập ma trận A vào máy tính

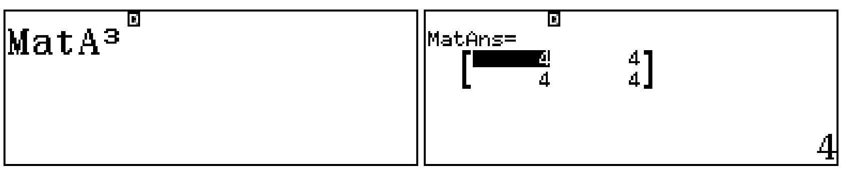


Ta tính thử một số ma trận luỹ thừa của A:

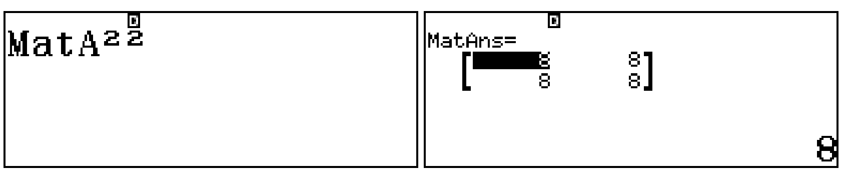
Tính A^2



Tính A^3



Tính A^4



Vậy ta có thể dự đoán

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chứng minh quy nạp ta được

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có:

$$M^n = (A+I_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} {I_2}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 2^{n-k-1} A + I_2 = \frac{3^n-1}{2} A + I_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{bmatrix}$$

Vậy $M^n = \begin{bmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{bmatrix}$. □

> **Lời bình.** Khi gặp một số ma trận khó tìm được công thức chung như bài toán trên, chúng ta thử tách ma trận đã cho thành tổng của 2 ma trận có thể dự đoán được công thức chung (thông thường là ma trận luỹ linh và ma trận luỹ đẳng).

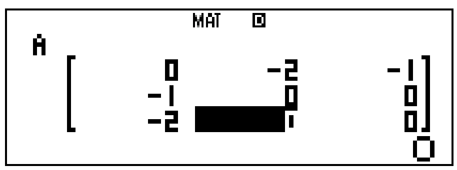
Sau đây là một số bài toán tương tự

Câu 3.7. *Cho ma trận* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Hãy tính* A^{100}.

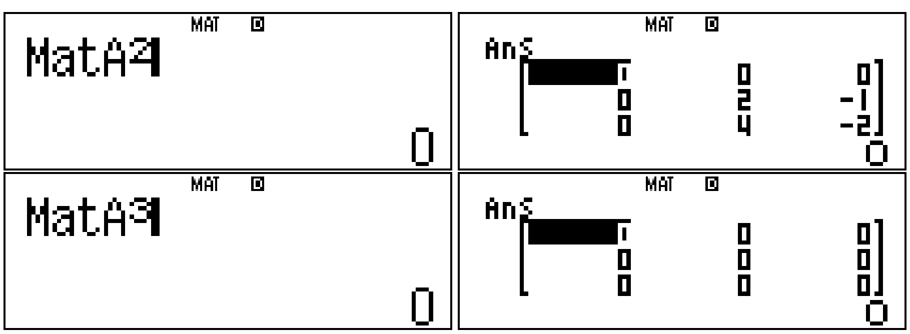
Hướng dẫn.

***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Đặt $A = B + I_3 \left(B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$,



từ đó $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B^3 = [0]$



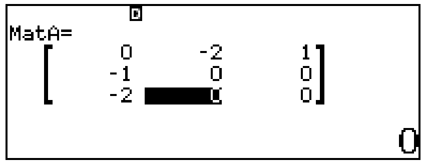
Dùng khai triển New-ton, ta có:

$$A^{100} = (B + I_3)^{100} = I_3 + 100B + \frac{100.99}{2} B^2$$

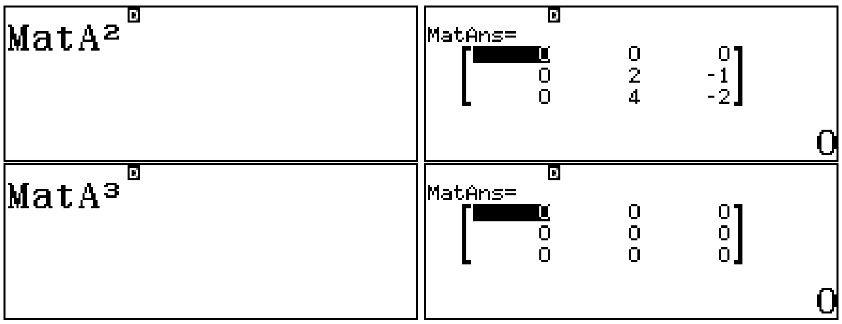
Suy ra $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

Đặt $A = B + I_3 \left(B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$,



từ đó $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}; B^3 = [0]$



Dùng khai triển New-ton, ta có:

$$A^{100} = (B + I_3)^{100} = I_3 + 100B + \frac{100.99}{2} B^2$$

Suy ra $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & -200 & 100 \\ -100 & 9901 & -4950 \\ -200 & 19800 & -9899 \end{pmatrix}$ □

Câu 3.8. *Cho ma trận* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính ma trận* A^n.

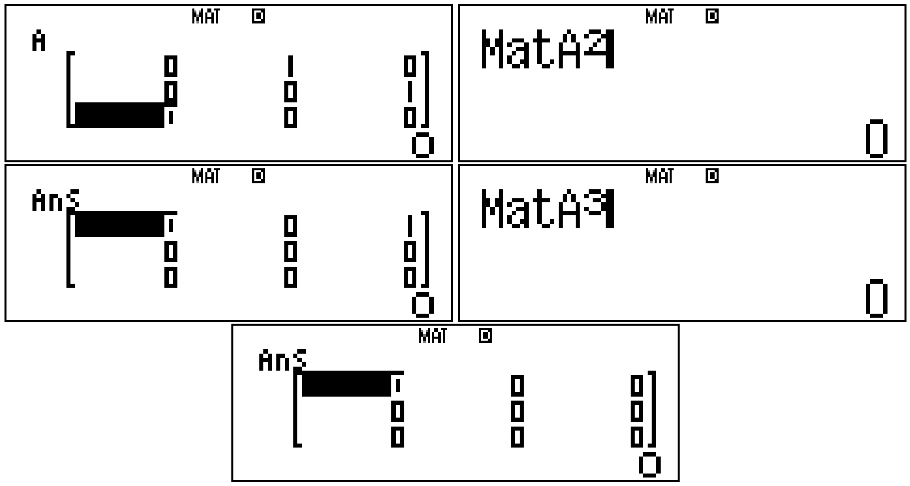
Hướng dẫn.

***Trên máy tính Casio fx-570VN Plus**

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$$

Mà $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Nên ta có

$$\Rightarrow A^n = (I_3+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I^{n-k} B^k = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

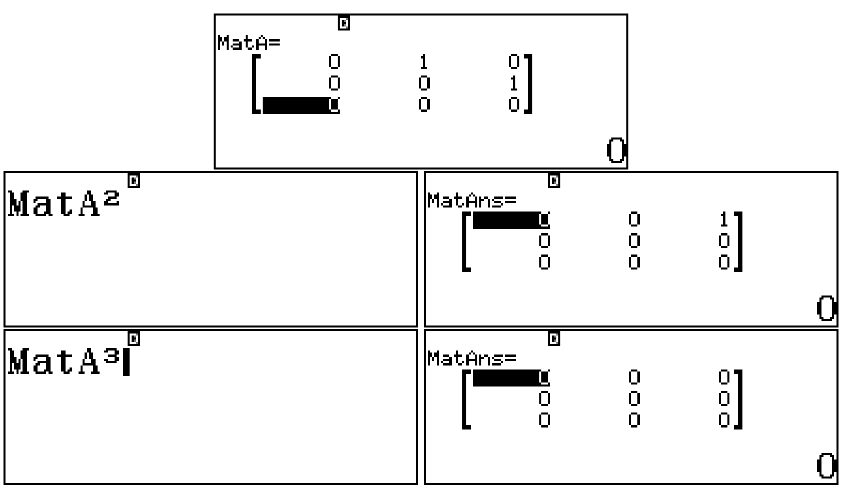
Vậy $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B$$

Mà $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Nên ta có

$$\Rightarrow A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I^{n-k} B^k = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 = \begin{bmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ □

Câu 3.9. *Cho ma trận*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hãy tính A^n.

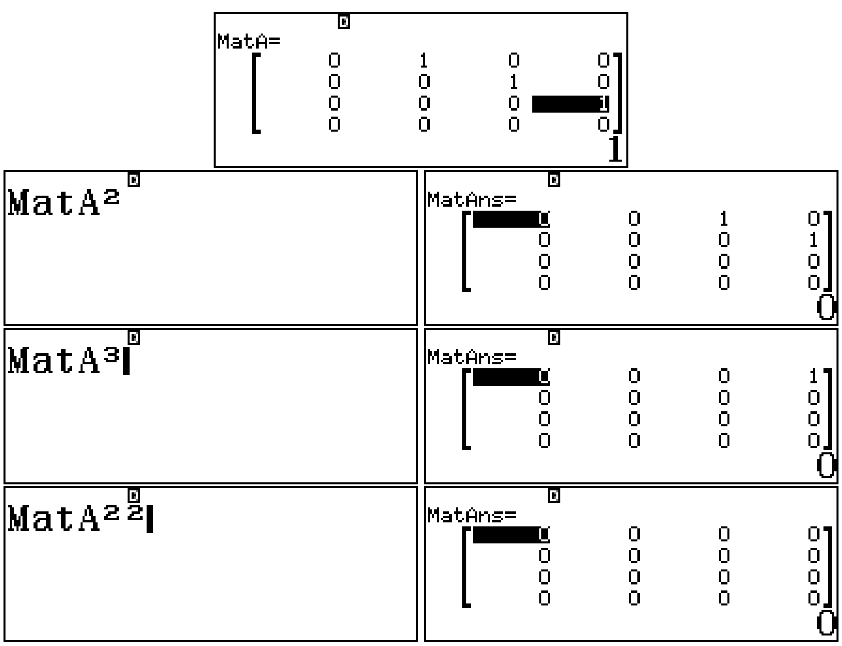
Hướng dẫn.

***Trên máy tính Casio fx-580VN X**

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2I - B$$

Ta lại có: $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



Từ đó, ta có thể tính A^n bằng cách khai triển nhị thức Newton như sau

$$\begin{aligned}A^n = (2I_4 - B)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} I^{n-k} (-1)^k B^k = 2^n I - C_n^1 2^{n-1} B + C_n^2 2^{n-2} B^2 - C_n^3 2^{n-3} B^3 \\ &= 2^n I - n2^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} B^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 2^{n-3} B^3 \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & -n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} & -\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} \\ 0 & 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

Câu 3.10. *Cho 3 dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ xác định như sau: $x_0 = y_0 = z_0$ và* $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$

Tính x_{2011}.

Hướng dẫn. Đặt $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Khi đó $X_n = A^n X_0$.

Do $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nên $\begin{cases} x_n = x_0 + ny_0 + \frac{n(n-1)}{2} z_0 \\ y_n = y_0 + nz_0 \\ z_n = z_0 \end{cases}$

(Việc tính toán ma trận A^n đã được thực hiện ở câu 3.8)

□

Câu 3.11. *Tìm u_n theo $n\,(0 \le n \in \mathbb{Z})$. Biết $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ và $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n, \forall n \ge 0$.*

Hướng dẫn. $\forall k \ge 0$, đặt $t_k = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix}$ thì $t_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ và

$$t_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+2} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} + 6u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_k = At_k \left(\text{Với } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Như vậy $\forall n \ge 0, t_n = A^n t_0 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n t_0$

Ta tìm ma trận chéo hóa của A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$ có $p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 6 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

$p_A(x)$ có 2 nghiệm hữu tỉ đơn nên A chéo hóa được trên R.

$$A-3I_2=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix} \text{ và } A+2I_2=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$E_3^A=\left\{X\in R^3|\,(A-3I_2)X=0\right\}=\{\alpha=(3a,a)=a(3,1)\,|a\in R\}$ có cơ sở $B_1=\{\alpha_1=(3,1)\}$ do

$$\begin{pmatrix}-2 & 6 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$E_{-2}^A=\left\{X\in R^3|\,(A-2I_2)X=0\right\}=\{\alpha=(-2a,a)=a(-2,1)\,|a\in R\}$ có cơ sở $B_2=\{\alpha_2=(-2,1)\}$ do

$$\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$R^3=E_3^A\oplus E_{-2}^A$ có cơ sở $B=B_1\cup B_2=\{\alpha_1;\alpha_2\}$.

Đặt $P=(C\to B)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ với C là cơ sở chính tắc của R^3 thì P khả nghịch, $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

Và $A=P\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}P^{-1}$.

Từ đó ta có

$$t_n=A^nt_0=PB^nP^{-1}.t_0=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & -2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4.3^{n+1}+2^{n+1}\\ 4.3^n-2^n\end{pmatrix}$$

Vậy $\begin{cases}u_{n+1}=4.3^{n+1}+2^{n+1}\\ u_n=4.3^n-2^n\end{cases}(n\geq 0).$ □

Lưu ý 3.12. *Một số bài toán dãy số có thể đưa về dạng các ma trận rồi từ đó sử dụng ma trận luỹ thừa để tìm ra công thức chung.*

Lời bình. Khi có những bài toán không thể tìm được công thức chung, thì chúng ta nên sử dụng ma trận chéo hoá tìm công thức chung cho luỹ thừa ma trận.

Kết luận. Với những bài toán tìm ma trận luỹ thừa bậc cao, chúng ta có thể ứng dụng một số cách sau để tìm ma trận luỹ thừa của chúng:
i. Sử dụng máy tính để dự đoán một số công thức chung cho công thức đó, từ đó dùng quy nạp để chứng minh bài toán.
ii. Sử dụng Nhị thức Newton để tách ma trận đã cho thành các ma trận luỹ linh hoặc luỹ đẳng rồi từ đó tìm được công thức chung.
iii. Sử dụng ma trận chéo hoá.

Kết luận

Trên đây là hướng dẫn sử dụng máy tính Casio fx-580VNX để giải những bài toán thực tế ở chương trình trung học cơ sở mà Diễn đàn sưu tầm được. Bài viết dù đã được chỉn chu, nhưng vẫn không tránh khỏi thiếu sót. Nên mong các bạn đọc bỏ qua những sai sót trong bài. Các bạn có thắc mắc/ bình luận/ góp ý gì thì đừng ngại góp ý qua fanpage cho ad nhá.

Quý thầy cô và các bạn có thể quét QR để xem thêm các tài liệu khác ở đây.

Xin trân trọng cám ơn!