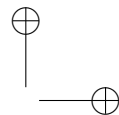
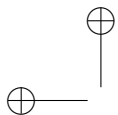
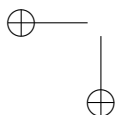


# Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros

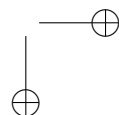


—

—



|



# Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Hugo Gonçalves Vieira de Assunção



Copyright © 2005 Editora Manole Ltda., por meio de contrato com os autores.

*Projeto gráfico e editoração eletrônica:* Oswaldo Luiz do Valle Costa e Hugo Gonçalves Vieira de Assunção

*Capa:* Sergio Kon

**CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE**  
**SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.**

---

C874a

Costa, Oswaldo Luiz do Valle, 1959-

Análise de risco e retorno em investimentos financeiros / Oswaldo Luiz do Valle Costa e Hugo Gonçalves Vieira de Assunção. - Barueri, SP : Manole, 2005

Inclui bibliografia

ISBN 85-204-2072-9

1. Administração financeira. 2. Matemática financeira. 3. Investimentos - Análise. 4. Títulos (Finanças). 5. Risco (Economia). I. Assunção, Hugo Gonçalves Vieira de, 1974-. II. Título.

04-1017

CDD 658.15

CDU 658.15

---

Todos os direitos reservados.

Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, por qualquer processo, sem a permissão expressa dos editores.

É proibida a reprodução por xerox.

1ª edição - 2005

Diretos adquiridos pela:

Editora Manole Ltda.

Av. Ceci, 672 – Tamboré

Barueri – SP – Brasil – 06460-120

Tel: (11) 4196-6000 - Fax: (11) 4196-6021

www.manole.com.br

info@manole.com.br

Impresso no Brasil

*Printed in Brazil*

## Sobre os Autores

**Oswaldo Luiz do Valle Costa** nasceu no Rio de Janeiro, em 19 de junho de 1959. Obteve os títulos de Bacharel e Mestre em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1981 e 1983, respectivamente. Realizou o seu doutorado no Departamento de Engenharia Elétrica do Imperial College, Inglaterra, onde obteve em 1987 o título de PhD pela Universidade de Londres. Desde 1989, vem trabalhando junto ao Laboratório de Automação e Controle do Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), lecionando diversas disciplinas na graduação e pós-graduação na ênfase Automação e Controle e no mestrado profissionalizante do IME/FEA-USP – “Modelagem Matemática em Finanças”. Atualmente exerce o cargo de Professor Titular da EPUSP, título obtido em concurso público realizado em 1998. Atua também em projetos de engenharia de controle, pesquisa operacional e finanças. Seus principais interesses de pesquisa são na área de controle, otimização, modelagem e simulação, modelos probabilísticos e sistemas financeiros. Possui diversos artigos publicados em congressos e periódicos internacionais.

**Hugo Gonçalves Vieira de Assunção** nasceu em São Paulo, em 5 de outubro de 1974. Graduiu-se em Engenharia Elétrica pela EPUSP em 1997 e obteve o título de Mestre em Engenharia de Sistemas, com ênfase em Finanças Matemáticas, também pela EPUSP em 2000. Iniciou sua carreira no mercado financeiro em abril de 1997, trabalhando na Corretora Trycomm como analista técnico, e responsável pela implantação de processos de análise dos mercados por técnicas gráficas de identificação de comportamentos. Em seguida, trabalhou no Banco AGF Braseg como *trader*, administrando recursos de terceiros na área de fundos de investimento. Trabalhou também na SAP do Brasil como engenheiro de soluções para o segmento de serviços financeiros, sendo responsável pela implementação de *software* de gestão para bancos e seguradoras. Desde abril de 2001, atua na modelagem de projetos e estruturação de financiamentos do setor elétrico na área de *Project Finance* do Unibanco, analisando a viabilidade de novos empreendimentos e estruturando negociações de energia e ativos ambientais. Exerce também o cargo de Professor Assistente da Universidade Presbiteriana Mackenzie, lecionando disciplinas de Finanças Internacionais para o curso de graduação em Administração de Empresas.

Para contato com os autores:

Oswaldo Luiz do Valle Costa:  
<http://www.lac.usp.br/~oswaldo>  
[oswaldo@lac.usp.br](mailto:oswaldo@lac.usp.br)  
[oswaldo.costa@poli.usp.br](mailto:oswaldo.costa@poli.usp.br)

Hugo Gonçalves Vieira de Assunção:  
[hugo\\_assuncao@hotmail.com](mailto:hugo_assuncao@hotmail.com)  
[hugo.assuncao@unibanco.com.br](mailto:hugo.assuncao@unibanco.com.br)

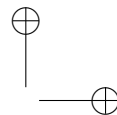
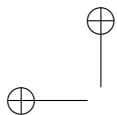
# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Apresentação</b>	<b>xv</b>
<b>Prefácio</b>	<b>xvii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xix</b>
<b>1 Análise de Carteiras por Média-Variância</b>	<b>1</b>
1.1 Risco e Retorno . . . . .	2
1.2 Média e Variância de Carteiras . . . . .	4
1.3 Carteiras com 2 Ativos de Risco . . . . .	7
1.4 Carteiras com 1 Ativo de Risco e 1 sem Risco . . . . .	14
1.5 Exercícios . . . . .	14
<b>2 O Modelo de Markowitz</b>	<b>17</b>
2.1 Carteiras com apenas Ativos de Risco . . . . .	18
2.2 A Fronteira Eficiente . . . . .	26
2.3 Carteiras com Ativos de Risco e 1 Ativo sem Risco . . . . .	31
2.4 A Fronteira Eficiente Geral . . . . .	32
2.5 Exercícios . . . . .	36
<b>3 Modelos de Equilíbrio</b>	<b>39</b>
3.1 CAPM — <i>Capital Asset Pricing Model</i> . . . . .	40
3.1.1 A Carteira de Mercado . . . . .	40
3.1.2 O Modelo de Sharpe-Lintner . . . . .	42
3.1.3 O Modelo de Black . . . . .	47
3.1.4 Posição Vendida na Taxa Livre de Risco Proibida . . . . .	49
3.1.5 Duas Taxas Livres de Risco . . . . .	53
3.2 Risco Sistemico e Não-sistemico . . . . .	58
3.3 Avaliação de Desempenho . . . . .	60

3.4	Apreçamento pelo CAPM . . . . .	63
3.5	Modelos com Fatores . . . . .	64
3.6	APT — <i>Arbitrage Pricing Theory</i> . . . . .	72
3.7	Relação entre o CAPM e o APT . . . . .	79
3.8	Exercícios . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Modelos de Rastreamento</b>	<b>85</b>
4.1	Fundos Ativos e Passivos . . . . .	85
4.2	Variância do Erro de Rastreamento . . . . .	86
4.3	Minimização do Erro de Rastreamento por Programação Linear . . . . .	90
4.4	Métodos Computacionais . . . . .	93
4.4.1	Modelo 1: Mínimo Erro Quadrático . . . . .	93
4.4.2	Modelo 2: Mínimo Risco Não-sistêmico . . . . .	94
4.4.3	Modelo 3: Mínima Variância do Erro . . . . .	95
4.5	Simulações . . . . .	95
4.5.1	Comparação entre os Modelos . . . . .	97
4.5.2	Variação da Representatividade . . . . .	99
4.5.3	Restrição ao Beta . . . . .	101
4.5.4	Conclusões . . . . .	102
4.6	Exercícios . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Funções Utilidade e Seleção de Carteiras</b>	<b>107</b>
5.1	Função Utilidade e Aversão ao Risco . . . . .	108
5.2	Coefficiente de Aversão ao Risco . . . . .	111
5.3	Montagem de uma Função Utilidade . . . . .	115
5.4	Otimização de Carteiras por meio da Função Utilidade . . . . .	119
5.5	Arbitragens e Seleção de Carteiras . . . . .	127
5.6	A Função Utilidade ln . . . . .	131
5.7	Exercícios . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Arbitragem e Apreçamento</b>	<b>145</b>
6.1	Arbitragem e Probabilidade Neutra ao Risco . . . . .	146
6.2	Apreçamento e Mercados Completos . . . . .	151
6.3	Otimização de Carteiras . . . . .	156
6.3.1	Otimização de Carteiras e Factibilidade . . . . .	156
6.3.2	A Formulação por Martingale . . . . .	158
6.4	Análise de Carteira por Média-Variância . . . . .	163
6.4.1	O Problema de Otimização por Média-Variância Revisto . . . . .	163
6.4.2	A Fórmula do CAPM Revista . . . . .	166
6.4.3	Apreçamento Neutro ao Risco e por CAPM . . . . .	168
6.5	Exercícios . . . . .	169

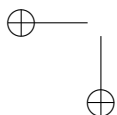


<b>7 Um Modelo de Markowitz Intertemporal</b>	<b>173</b>
7.1 Carteiras a Tempo Contínuo . . . . .	173
7.2 Máximo Crescimento com apenas Ativos de Risco . . . . .	178
7.3 Máximo Crescimento com 1 Ativo Livre de Risco . . . . .	184
7.4 Carteira Tangente . . . . .	187
7.5 Equações de Equilíbrio . . . . .	190
7.6 Exercícios . . . . .	193
<b>Apêndices</b>	<b>195</b>
<b>A Conceitos Básicos de Probabilidade</b>	<b>195</b>
<b>B Conceitos Básicos de Otimização</b>	<b>205</b>
<b>C Glossário</b>	<b>211</b>
<b>D Planilha Exercícios.xls</b>	<b>215</b>
<b>Respostas dos Exercícios com a Planilha Exercícios.xls</b>	<b>221</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>233</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>237</b>

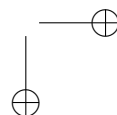


—

—



|



## Lista de Figuras

1.1	Correlação positiva perfeita . . . . .	8
1.2	Correlação negativa perfeita . . . . .	10
1.3	Gráfico risco-retorno para $\rho = 0,5$ . . . . .	13
1.4	Gráfico risco-retorno para diferentes $\rho$ . . . . .	13
1.5	Gráfico risco-retorno com 1 ativo livre de risco . . . . .	15
2.1	Gráfico risco-retorno . . . . .	25
2.2	Gráfico risco-retorno . . . . .	28
2.3	Gráfico risco-retorno . . . . .	30
2.4	Gráfico risco-retorno . . . . .	35
3.1	CML — <i>Capital Market Line</i> . . . . .	41
3.2	CML — <i>Capital Market Line</i> . . . . .	43
3.3	SML — <i>Security Market Line</i> . . . . .	45
3.4	SML e $\beta \times \mu$ . . . . .	47
3.5	Fronteira eficiente . . . . .	49
3.6	SML — <i>Security Market Line</i> . . . . .	52
3.7	Fronteira eficiente . . . . .	54
3.8	SML — <i>Security Market Line</i> . . . . .	57
3.9	Decomposição do risco . . . . .	59
4.1	Mínima variância para o erro de rastreamento . . . . .	89
4.2	Rentabilidade mensal para a reotimização de 5 dias . . . . .	98
4.3	Rentabilidade anual para a reotimização de 5 dias . . . . .	99
4.4	Rentabilidade acumulada para a reotimização de 5 dias . . . . .	99
4.5	Rentabilidade mensal para a reotimização de 20 dias . . . . .	100
4.6	Rentabilidade anual para a reotimização de 20 dias . . . . .	101
4.7	Rentabilidade acumulada para a reotimização de 20 dias . . . . .	101
4.8	Rentabilidade mensal para as diferentes representatividades . . . . .	102
4.9	Rentabilidade anual para as diferentes representatividades . . . . .	102
4.10	Rentabilidade acumulada para as diferentes representatividades . . . . .	103
4.11	Rentabilidade mensal com e sem restrição ao beta . . . . .	104

4.12	Rentabilidade anual com e sem restrição ao beta . . . . .	105
4.13	Rentabilidade acumulada com e sem restrição ao beta . . . . .	105
5.1	Função utilidade do Exemplo 5.4 . . . . .	117
5.2	Função $f(\omega)$ do Exemplo 5.4 . . . . .	118
5.3	Função utilidade do Exemplo 5.5 . . . . .	120
5.4	Percentual em $r_f$ para o Exemplo 5.6 . . . . .	125
5.5	Retornos dos ativos do Exemplo 5.14 . . . . .	135
5.6	Retornos dos ativos do Exemplo 5.15 . . . . .	137
7.1	Gráfico risco-taxa de crescimento . . . . .	184
7.2	Gráfico risco-taxa de crescimento . . . . .	190
D.1	SML — <i>Security Market Line</i> . . . . .	226

## Lista de Tabelas

1.1	Preços e retornos observados de Bradesco PN . . . . .	3
1.2	Retornos e riscos de Bradesco PN e Itaú PN . . . . .	8
3.1	Beta e retorno de ativos do IBovespa . . . . .	46
3.2	Risco sistêmico, não-sistêmico e total . . . . .	59
3.3	Retornos do fundo, do mercado e do título público . . . . .	62
3.4	Retornos de ativos e índice . . . . .	68
3.5	Retornos mensais . . . . .	70
3.6	Retorno dos ativos, do mercado e do título . . . . .	72
3.7	Excesso de retorno dos ativos e do mercado . . . . .	73
3.8	Parâmetros dos ativos do Exercício 7 . . . . .	82
3.9	Retornos dos ativos do Exercício 8 . . . . .	83
4.1	EQM e beta para o período de reotimização de 5 dias . . . . .	97
4.2	EQM e beta para o período de reotimização de 20 dias . . . . .	98
4.3	EQM e beta para as diferentes representatividades . . . . .	100
4.4	EQM e beta com e sem restrição ao beta . . . . .	103
5.1	Montagem da função utilidade . . . . .	116
5.2	Riqueza final do investidor . . . . .	117
5.3	Montagem da função utilidade . . . . .	119
5.4	Retornos do investimento do Exemplo 5.6 . . . . .	123
5.5	Retornos do investimento do Exemplo 5.7 . . . . .	125
5.6	Possíveis valores para a carteira ótima . . . . .	130
5.7	Montagem da função utilidade . . . . .	142
5.8	Montagem da função utilidade . . . . .	143
D.1	Nomes e códigos dos ativos . . . . .	216
D.2	Retorno e risco para as diferentes janelas . . . . .	221
D.3	Composição final da carteira . . . . .	222
D.4	Carteira de mínima variância . . . . .	224
D.5	Composição da carteira . . . . .	228

D.6 Composição da carteira . . . . .	228
D.7 Composição da carteira tangente . . . . .	231

## Apresentação

O estudo de Finanças teve, nos últimos 50 anos, impressionante evolução científica, tanto do ponto de vista dos conceitos quanto da modelagem matemática, como atestam os vários prêmios Nobel de Economia concedidos aos pesquisadores da área.

Nesse contexto, os textos de Finanças vêm sofrendo considerável transformação, com tratamento quantitativo cada vez mais sofisticado e adequado às necessidades dos novos conteúdos a serem estudados.

No Brasil, no entanto, são poucos os livros que tratam em profundidade e em detalhes dos conceitos, teorias e modelagem matemática das Finanças com o rigor demandado pela evolução e pela importância da área.

Portanto, é com muita satisfação que apresentamos o livro *Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros*, de Oswaldo Luiz do Valle Costa e Hugo Gonçalves Vieira de Assunção, que possui exatamente as características mencionadas.

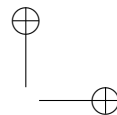
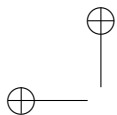
Com relação ao tratamento matemático, este livro não aborda a matéria com excessos desnecessários, mas, ao contrário, faz uso da matemática própria dos cursos de Administração, Economia e Engenharia, representada pelos conhecimentos mínimos do Cálculo Diferencial e Integral, da Álgebra Linear e da Estatística, desenvolvidos em nível de graduação.

O livro trata da Análise de Carteiras por Média-Variância, examina o Modelo de Markowitz e traz um belo capítulo sobre Modelos de Equilíbrio, seguido do capítulo sobre Modelos de Rastreamento, de grande importância para o controle de Risco de Carteiras.

O texto amplia-se no excelente estudo das Funções Utilidade e Seleção de Carteiras e ainda na questão da Arbitragem e Apreçamento de Títulos, encerrando-se com o tratamento do Modelo de Markowitz Intertemporal.

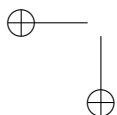
Trata-se de um livro de estudos para aqueles que querem se desenvolver e aprofundar seus conhecimentos em Finanças. Diria que é uma obra indispensável para o estudo das Finanças tal como a área merece ser abordada. Aproveitem a oportunidade.

Prof. Dr. José Roberto Securato  
Professor Associado do Departamento de Administração  
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade  
da Universidade de São Paulo

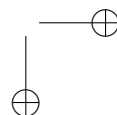


—

—



|





## Prefácio

O uso de modelos matemáticos no planejamento e gestão de carteiras de investimento vem se tornando cada vez mais evidente na área financeira. Isso se deve em parte à crescente preocupação com o desempenho de fundos de ativos financeiros de risco em um mercado integrado e altamente competitivo, sob grande influência de fatores externos e de difícil controle. A globalização e o desenvolvimento tecnológico proporcionam um enorme fluxo diário de informações, que deve ser rapidamente processado para auxiliar os gestores de fundos financeiros na tomada de suas decisões, tornando cada vez mais relevante o uso de ferramentas estatísticas e de otimização no planejamento e na gestão financeira.

Na nossa concepção, uma carteira equivale a um conjunto de ativos, sendo ativo tudo que tem valor e pode gerar algum retorno para o seu detentor. Por exemplo, terrenos, casas, carros e eletrodomésticos, ou, no caso de ativos financeiros, moedas estrangeiras, ações, opções, títulos públicos e derivativos, entre outros. O gestor da carteira decide o tipo e a quantidade de ativos que deseja adquirir na formação de sua carteira, podendo, para isso, levar em conta diversas análises possíveis. Neste livro, estaremos interessados em análises baseadas na atualmente conhecida como a Teoria Moderna de Investimento [Elton & Gruber, 1995], introduzida por Harry Markowitz em 1952 [Markowitz, 1959]. De certa forma, essa teoria comprova o ditado popular “não se deve colocar todos os ovos em uma única cesta”, já que propõe a otimização das relações de risco e retorno entre os ativos. Até o estabelecimento dessa teoria não havia um embasamento teórico matemático para o conceito empiricamente aceito de que a diversificação dos ativos diminui o risco do investimento. Esses princípios, discutidos nos Capítulos 1 e 2, encontraram aplicações práticas em instituições financeiras gestoras de recursos a partir do começo dos anos de 1970 e levaram ao desenvolvimento de novas teorias para o apreçamento de ativos, como o CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e o APT (*Arbitrage Pricing Theory*), apresentadas neste livro no Capítulo 3. Estratégias de investimento baseadas no acompanhamento de índices de referência do mercado financeiro deram origem aos primeiros fundos com gestões passivas e ao estudo de modelos de rastreamento de carteiras de investimento, analisados no Capítulo 4.

Mais recentemente, toda essa teoria foi revista e generalizada sob a ótica de funções utilidade e da existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco. Esses conceitos serão analisados no Capítulo 5. Arbitragem e apreçamento, bem como crescimento log-ótimo são vistos nos Capítulos 6 e 7, respectivamente. Nos Apêndices A e B, são descritos alguns conceitos básicos de probabilidade e otimização. O Apêndice C traz um glossário de termos utilizados ao longo do livro e de uso comum no mercado brasileiro. O livro utiliza a planilha Exercícios.xls, disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Essa planilha contém séries históricas de preços de alguns ativos do mercado brasileiro, bem como o cálculo ilustrativo de alguns dos principais resultados apresentados no livro. A descrição dessa planilha encontra-se no Apêndice D.

Atualmente, existe uma grande quantidade de autores que tratam da teoria moderna de investimento, entre os quais podemos citar [Campbell et al., 1997], [Elton & Gruber, 1995], [Fama, 1976], [Ingersoll Jr., 1987], [Luenberger, 1998], [Markowitz, 1959], [Ross, 1999] e [Securato, 1996]. Modelos multiperíodo e suas conexões com a existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco são bem retratados por S. R. Pliska [Pliska, 1997]. O presente livro versa sobre a administração de carteiras uniperíodo de investimento, utilizando ferramentas de otimização. Algumas das principais características desta obra são:

- tratamento teórico matemático baseado em problemas de otimização, adequado para os cursos de graduação e de pós-graduação;
- apresentação de alguns modelos de aplicação prática no mercado financeiro brasileiro;
- inclui um aplicativo de *software* de fácil utilização para a resolução de exercícios e aplicações no dia-a-dia de bancos e consultorias de investimento;
- exposição de algoritmos de estratégias passivas de investimento com ampla aplicação na indústria de fundos de investimento e na gestão de recursos.

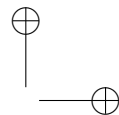
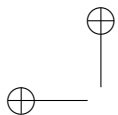
Visamos neste livro atender a estudantes de cursos de graduação em Análise de Carteiras de Investimento, Mercados Financeiros, Economia, Administração de Empresas e Matemática Financeira. O livro também pode ser utilizado em cursos de pós-graduação em Finanças, Teoria de Carteiras, Modelos de Otimização e MBAs em Gestão Financeira Empresarial, Estratégias de Investimento das Instituições e Administração de Recursos Financeiros. Acreditamos que o livro seja relevante tanto para universidades e MBAs, como para os bancos e consultorias de investimento.

Oswaldo Luiz do Valle Costa  
Hugo Gonçalves Vieira de Assunção

## Agradecimentos

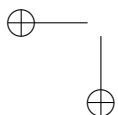
Oswaldo Luiz do Valle Costa expressa seus agradecimentos aos professores e alunos do Laboratório de Automação e Controle da EPUSP, ao Prof. Dr. José Roberto Securato da FEA/USP, pelas frutíferas discussões sobre o assunto, e ao Dr. Anselmo Bittar, pela ajuda na confecção das figuras. Agradece também aos ex-alunos do curso de mestrado profissionalizante do IME/FEA-USP – “Modelagem Matemática em Finanças”, que, de certa forma, foram os primeiros a usar as informações transmitidas nesta obra, ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro concedido. Por fim, o autor dedica o livro aos seus pais, Leonor e Oswaldo, à sua esposa Silvia e às filhas Debora e Gabriela, pelo constante estímulo durante a elaboração do trabalho.

Hugo Gonçalves Vieira de Assunção expressa seus agradecimentos aos professores e colegas do Mestrado em Engenharia de Sistemas da EPUSP. Agradece também aos seus gestores na carreira profissional, Professores Edson Fregni e Marcelo Adorno e Adhemar Kajita, que influenciaram sua formação na área financeira e permitiram o desenvolvimento deste livro. Por fim, agradece a seus pais Ana Palmira e Alcino pelo constante apoio, dedicando-lhes este livro.

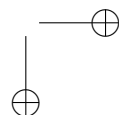


—

—



|



## Capítulo 1

# Análise de Carteiras por Média-Variância

Em administração financeira existe a percepção intrínseca de que investimentos mais arriscados podem gerar maiores lucros, ou seja, quanto maior o risco maior pode ser a rentabilidade e vice-versa. Para tornar este conceito mensurável, é preciso de alguma forma quantificar o que seria a rentabilidade e o risco de um determinado ativo. Existem várias maneiras de proceder, por exemplo, por projeção de cenários econômicos, ou por análise de séries históricas de preços. A metodologia mais utilizada, e que será adotada ao longo deste livro, consiste em considerar o retorno de um determinado ativo como uma variável aleatória, associar a medida de risco ao desvio-padrão dessa variável aleatória, e a rentabilidade ao seu valor esperado. Existem críticas a essa teoria, uma vez que a distribuição estatística de uma dada série histórica de retornos muda com o tempo, dependendo do momento econômico do mercado no qual o ativo está inserido. No entanto, de acordo com as circunstâncias econômicas e com a maneira como esses parâmetros são estimados, essa medida de risco e retorno pode ser apropriada.

Utilizando o conceito de rentabilidade e risco descritos anteriormente, serão apresentados e exemplificados neste capítulo alguns dos principais pontos que permeiam a abordagem por média-variância para a seleção ótima de ativos na composição de uma carteira. Nas Seções 1.1 e 1.2, definem-se formalmente os conceitos de risco e retorno para ativos financeiros e carteiras. A relação entre risco e retorno para as carteiras compostas por 2 ativos de risco é apresentada na Seção 1.3. O caso de carteiras compostas por um ativo de risco e um ativo livre de risco é considerado na Seção 1.4.

## 1.1 Risco e Retorno

Nesta seção, definem-se risco e retorno de ativos. Seja  $S_i(0)$  o valor de um ativo financeiro  $i$  no instante 0 e  $S_i(1)$  o valor desse ativo uma unidade de tempo depois. A taxa de retorno  $R_i$  desse ativo, que é uma variável aleatória, é dada por<sup>1</sup>

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)}. \quad (1.1)$$

O retorno esperado (ou rentabilidade esperada) do ativo financeiro  $R_i$  será denotado por  $r_i$ , ou seja,

$$r_i = E(R_i), \quad (1.2)$$

e o risco do ativo financeiro  $R_i$  será representado pelo desvio-padrão  $\sigma_i$  de  $R_i$

$$\sigma_i = \sqrt{E((R_i - r_i)^2)}. \quad (1.3)$$

A covariância  $cov(R_i, R_j)$ ,  $i \neq j$ , entre os ativos financeiros  $R_i$  e  $R_j$ , é dada por

$$cov(R_i, R_j) = E((R_i - r_i)(R_j - r_j)). \quad (1.4)$$

De posse de uma série histórica de valores, preços de uma ação, por exemplo, podem-se extrair estimativas para essas variáveis (1.2), (1.3) e (1.4), com diferentes períodos, sendo o diário o mais utilizado. Realmente, supondo que se tenha a série histórica do retorno de 2 ativos financeiros  $R_1(t)$  e  $R_2(t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , o retorno esperado  $r_i$ , o desvio-padrão  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2$  desses ativos e a covariância  $cov(R_1, R_2)$  entre esses dois ativos podem ser estimados por meio das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \hat{r}_i &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_i(t) \\ \hat{\sigma}_i &= \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_i(t) - \hat{r}_i)^2} \\ \widehat{cov}(R_1, R_2) &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_1(t) - \hat{r}_1)(R_2(t) - \hat{r}_2). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Note que para valores pequenos de  $x - x_0$ , tem-se pela expansão de 1ª ordem de Taylor que

$$\ln(x) \approx \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \approx \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

e, portanto, a taxa de retorno  $R_i$  pode ser aproximadamente calculada como

$$R_i = \ln\left(\frac{S_i(1)}{S_i(0)}\right).$$

TABELA 1.1: Preços e retornos observados de Bradesco PN

$t$	Data	$S_i(t)$	$R_i(t)$
0	14/11/97	6,47	—
1	17/11/97	7,22	0,1159
2	18/11/97	7,68	0,0637
3	19/11/97	7,97	0,0378
4	20/11/97	7,68	−0,0364
5	21/11/97	7,97	0,0378
6	24/11/97	7,59	−0,0477
7	25/11/97	7,68	0,0119
8	26/11/97	7,87	0,0247
9	27/11/97	7,78	−0,0114
10	28/11/97	7,59	−0,0244
11	01/12/97	7,65	0,0079
12	02/12/97	7,98	0,0431
13	03/12/97	8,02	0,0050
14	04/12/97	8,35	0,0411
15	05/12/97	8,44	0,0108
16	08/12/97	8,45	0,0012
17	09/12/97	8,48	0,0036
18	10/12/97	8,53	0,0059
19	11/12/97	8,04	−0,0574
20	12/12/97	8,53	0,0609

**Exemplo 1.1** *Segue um exemplo que trata do ativo Bradesco PN. O período de tempo considerado é o diário, e os preços correspondem às cotações de fechamento, ou seja, ao último negócio do dia. A Tabela 1.1 mostra os preços e os retornos observados para cada dia.*

*Considerando a janela de 20 dias indicada na Tabela 1.1, o retorno  $r_i$  é estimado como a média das taxas de retorno  $R_i$ :*

$$\hat{r}_i = \frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} R_i(t) = 0,014697.$$

*O risco  $\sigma_i$  associado a esse retorno é dado pela raiz quadrada da variância, ou seja, o desvio-padrão da taxa de retorno  $R_i$ :*

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{19} \sum_{t=1}^{20} (R_i(t) - \hat{r}_i)^2 = 0,001596 \Rightarrow \hat{\sigma}_i = 0,03995.$$

*Interpretando os resultados obtidos, o ativo Bradesco PN tem um retorno esperado de 1,4697% ao dia, com um risco associado de 3,995%. Esses resultados*

estão estreitamente relacionados com a janela considerada. Se em vez de 20 fossem considerados 10 ou 50 dias, os resultados seriam outros. Uma janela pequena fornece resultados mais sensíveis ao retorno e ao risco a curto prazo. Por sua vez, uma janela maior absorve grandes variações isoladas e fornece informações para prazos mais longos. Portanto, a escolha do tamanho da janela é muito importante e está relacionada com o horizonte das aplicações.

A título apenas de ilustração, existem outros modelos para se calcular o risco de um ativo. Um modelo muito utilizado é o EWMA — *Exponentially Weighted Moving Average*, encontrado no RiskMetrics [Ris, 1996], cuja fórmula é

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^T \lambda^{T-t} (R(t) - \hat{r}_i)^2}{\sum_{t=1}^T \lambda^{T-t}}$$

para  $0 < \lambda < 1$ . Percebe-se que, por meio de uma ponderação da amostra, o EWMA, ao priorizar as observações mais recentes pela utilização de um fator de desconto  $\lambda$  entre 0 e 1, consegue captar as mudanças no comportamento do mercado mais rápido que o cálculo do desvio-padrão tradicional.

## 1.2 Média e Variância de Carteiras

Serão consideradas na análise adiante posições a descoberto (ou vendidas), que representariam a seguinte situação. No instante inicial, toma-se emprestado de um agente financeiro um ativo cujo valor é  $S_i(0)$ . Vende-se esse ativo para possível investimento em outros ativos. No instante seguinte, compra-se esse mesmo ativo pelo valor de mercado  $S_i(1)$ , devolvendo-o ao agente financeiro que fez o empréstimo inicial. Logo, o investidor lucra com a queda do preço e perde com a alta.

Suponha agora que haja  $n$  ativos com valor inicial  $S_1(0), \dots, S_n(0)$ , e que se disponha de um valor  $V(0)$  para investir nesses ativos. Seja  $H_1, \dots, H_n$  uma estratégia de investimento para cada ativo financeiro (valores negativos representam posições a descoberto), isto é,  $H_i$  representa a quantidade do ativo  $i$  que se tem na carteira. Deve-se ter

$$V(0) = H_1 S_1(0) + \dots + H_n S_n(0). \quad (1.5)$$

Pode-se definir

$$\omega_i = \frac{H_i S_i(0)}{V(0)} \quad (1.6)$$

que representa a proporção do total investido no ativo  $i$ . Valores negativos representam uma posição a descoberto naquele ativo. Logicamente, tem-se de (1.5) e (1.6) que

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$



Seja  $P$  a taxa de retorno da carteira ao final de um período, e  $R_i$ , como em (1.1), o retorno do ativo  $i$ . Como o valor da carteira no período seguinte, denotado por  $V(1)$ , vale

$$V(1) = H_1 S_1(1) + \dots + H_n S_n(1), \quad (1.7)$$

tem-se de (1.5), (1.6) e (1.7) que

$$\begin{aligned} P &= \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \frac{H_1 S_1(1) + \dots + H_n S_n(1) - (H_1 S_1(0) + \dots + H_n S_n(0))}{V(0)} \\ &= \frac{H_1 (S_1(1) - S_1(0)) + \dots + H_n (S_n(1) - S_n(0))}{V(0)} \\ &= \frac{H_1 R_1 S_1(0) + \dots + H_n R_n S_n(0)}{V(0)} \\ &= \frac{H_1 S_1(0)}{V(0)} R_1 + \dots + \frac{H_n S_n(0)}{V(0)} R_n \\ &= \omega_1 R_1 + \dots + \omega_n R_n = \omega' R, \end{aligned}$$

em que

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

Define-se

$$\begin{aligned} r &= \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix}, \\ \Sigma &= \text{cov}(R) = E((R - r)(R - r)') \end{aligned}$$

e

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A média do retorno  $P$  da carteira, denotada por  $\mu$ , é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_n r_n \quad (1.8)$$

e a variância de  $P$ , denotada por  $\sigma^2$ , é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega, \quad (1.9)$$

lembrando-se também que

$$\omega' e = \omega_1 + \dots + \omega_n = 1. \quad (1.10)$$

Resumindo, tem-se a partir de (1.8), (1.9) e (1.10)

$$\begin{cases} P = \omega' R \\ \mu = \omega' r \\ \sigma^2 = \omega' \Sigma \omega \\ 1 = \omega' e \end{cases}.$$

**Exemplo 1.2** Considere 2 ativos com retornos  $R_1$  e  $R_2$ , retornos esperados  $r_1 = 0,12$  e  $r_2 = 0,15$ , e matriz de covariância

$$\Sigma = \text{cov}(R) = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,01 \\ 0,01 & 0,0324 \end{pmatrix}.$$

Considere uma carteira formada pelos pesos

$$\omega_1 = 0,25, \omega_2 = 0,75.$$

Calculam-se o retorno esperado e a variância da carteira, que seriam

$$\begin{aligned} \mu &= 0,25 \times 0,12 + 0,75 \times 0,15 = 0,1425 \\ \sigma^2 &= (0,25 \quad 0,75) \begin{pmatrix} 0,04 & 0,01 \\ 0,01 & 0,0324 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} = 0,0245, \end{aligned}$$

portanto  $\sigma = \sqrt{0,0245} = 0,1564 < \sqrt{0,0324} = 0,1800$ , ou seja, a variância é inferior à menor das 2 variâncias dos ativos.

Em geral, a variância de uma carteira pode ser reduzida incluindo mais ativos, processo conhecido como diversificação.

Considere o caso de um conjunto de  $n$  ativos cujos retornos  $R_1, \dots, R_n$  sejam variáveis aleatórias descorrelacionadas, todas com valor esperado igual a  $r_1$  e variância  $\sigma_1^2$ . Considere uma carteira com retorno  $P$  composta por proporções iguais, isto é,  $\frac{1}{n}$ , de cada um dos ativos  $i$ . O retorno esperado da carteira é:

$$\mu = \omega' r = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} r_1 = r_1$$

e a variância,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} (\sigma_1^2 I) \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 = \frac{1}{n} \sigma_1^2.$$

Portanto, a variância diminui à medida que aumenta o número de ativos ( $n$ ) na carteira.

**Exemplo 1.3** Considere agora o caso em que todos os ativos são correlacionados e  $\text{cov}(R_i, R_j) = 0,3\sigma_1^2$  para  $i \neq j$ . Note que

$$|\text{cov}(R_i, R_j)| = 0,3\sigma_1^2 < \sqrt{\text{Var}(R_i)\text{Var}(R_j)} = \sigma_1^2.$$

Tem-se, nesse caso, que

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}\right) \sigma_1^2 \begin{pmatrix} 1 & 0,3 & \dots & 0,3 \\ 0,3 & 1 & \dots & 0,3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,3 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{0,7}{n} \sigma_1^2 + 0,3\sigma_1^2.$$

Portanto, é impossível reduzir a variância abaixo de  $0,3\sigma_1^2$ .

Percebe-se que, se os retornos são descorrelacionados, é possível, por meio da diversificação, levar a variância da carteira para zero. No entanto, o Exemplo 1.3 mostra que, se os retornos são todos positivamente correlacionados, é mais difícil reduzir a variância, existindo um limite inferior que não é ultrapassado, como será apresentado adiante.

### 1.3 Carteiras com 2 Ativos de Risco

Sejam  $R_1$  e  $R_2$  os retornos de 2 ativos com retornos esperados  $r_1$  e  $r_2$ , variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  e coeficiente de correlação  $\rho$ . Seja uma carteira com retorno  $P$  composta pelos ativos com retornos  $R_1$  e  $R_2$  nas proporções  $\omega_1$  e  $(1 - \omega_1)$ , respectivamente. Segue

$$P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \omega_1 r_1 + (1 - \omega_1) r_2 \\ &= \omega_1 (r_1 - r_2) + r_2, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\omega_1 \quad 1 - \omega_1) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 1 - \omega_1 \end{pmatrix} \\ &= \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1(1 - \omega_1)\rho\sigma_1\sigma_2 + (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Obtêm-se os seguintes casos:

a)  $\rho = 1$  (correlação positiva perfeita).

Nesse caso, tem-se com base em (1.13) que

$$\sigma^2 = (\omega_1\sigma_1 + (1 - \omega_1)\sigma_2)^2 \Rightarrow \sigma = |\omega_1\sigma_1 + (1 - \omega_1)\sigma_2| = |\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 - \sigma_2)|.$$

Considerando  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ , pode-se escrever

$$\omega_1 = \frac{\sigma - \sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

TABELA 1.2: Retornos e riscos de Bradesco PN e Itaú PN

Ativo	$r_i$ (%)	$\sigma_i$ (%)
Bradesco PN ( $R_1$ )	1,39	3,90
Itaú PN ( $R_2$ )	0,15	2,67

e, portanto, a partir de (1.12),

$$\mu = \frac{(r_1 - r_2)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}\sigma + \frac{(\sigma_1 r_2 - \sigma_2 r_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Logo, apresenta-se uma relação linear entre o risco ( $\sigma$ ) e o retorno ( $\mu$ ). A conclusão que se tira a partir dessa relação é que, com uma carteira composta por ativos com correlação positiva perfeita, não se consegue melhorar a relação risco-retorno (ou seja, risco e retorno serão sempre linearmente proporcionais).

**Exemplo 1.4** *Tomando como exemplo dois ativos com coeficiente de correlação igual a 1 e seus respectivos riscos e retornos, em porcentagens, dados pela Tabela 1.2, e variando o valor de  $\omega_1$  de 0 a 1, tem-se a seguinte relação, mostrada no gráfico da Figura 1.1:*

$$\mu = 1,0081\sigma - 2,5417\%$$

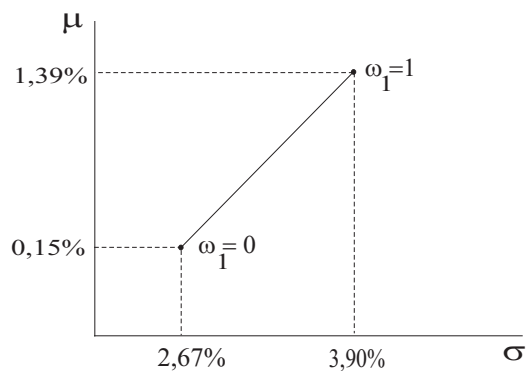


FIGURA 1.1: Correlação positiva perfeita

b)  $\rho = -1$  (correlação negativa perfeita).

Nesse caso, de (1.13),

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2)^2 \Rightarrow \\ \sigma &= |\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2| \\ &= |-\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2)|.\end{aligned}$$

Tem-se que

$$\sigma = \begin{cases} -\sigma_2 + \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{se } \omega_1 \geq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \sigma_2 - \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{se } \omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{cases}.$$

O risco nulo corresponde à situação

$$\sigma = 0 = \sigma_2 - \omega_1(\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \omega_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

A partir de (1.12) tem-se então 2 possibilidades:

$$1. \omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \mu = \frac{r_2 - r_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma + \frac{\sigma_2 r_1 + \sigma_1 r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

$$2. \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \leq \omega_1 \Rightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \Rightarrow \mu = \frac{r_1 - r_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma + \frac{\sigma_2 r_1 + \sigma_1 r_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

A conclusão a que se pode chegar é que, ao contrário do caso anterior, uma carteira composta por 2 ativos com correlação perfeitamente negativa diminui o risco relativo ao retorno, permitindo até mesmo a situação de risco nulo. Tem-se, nesse caso, sob o ponto de vista de redução do risco, uma vantagem em se montar a carteira.

**Exemplo 1.5** Tomando o exemplo da Tabela 1.2 com  $\rho = -1$ , resultam as seguintes equações, representadas na Figura 1.2:

$$\mu_1 = 0,1887\sigma + 0,6539$$

$$\mu_2 = -0,1887\sigma + 0,6539.$$

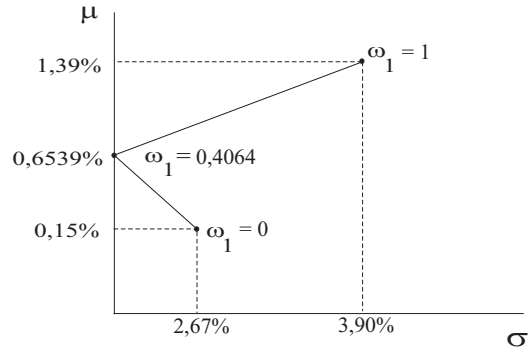


FIGURA 1.2: Correlação negativa perfeita

**Observação 1.1** Note que seria possível escrever

$$R = r + vZ, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{pmatrix},$$

em que  $Z$  é uma variável aleatória com média nula e variância igual a 1, já que, a partir de (1.11) tem-se

$$\begin{aligned} E(R) &= r + vE(Z) = r, \\ \text{cov}(R) &= E((R - r)(R - r)') = vE(Z^2)v' \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Com a composição  $\begin{pmatrix} 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{pmatrix}$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} R \\ &= \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \left( \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ -\sigma_2 \end{pmatrix} Z \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} (\sigma_2 r_1 + \sigma_1 r_2), \end{aligned}$$

portanto o termo com risco ( $Z$ ) foi eliminado.

Na prática, nenhuma das situações descritas ( $|\rho| = 1$ ) ocorre. A seguir, apresenta-se o caso em que  $|\rho| < 1$ .

c)  $|\rho| < 1$ .

Nesse caso, é conveniente reescrever a equação da variância (1.13) da seguinte forma:

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\omega_1^2 - 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\omega_1 + \sigma_2^2$$

e como de (1.12)

$$\mu = \omega_1(r_1 - r_2) + r_2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\mu - r_2}{(r_1 - r_2)}$$

(assume-se  $r_1 \neq r_2$ ), segue que

$$\sigma^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{\mu - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 + 2(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\left(\frac{\mu - r_2}{r_1 - r_2}\right) - \sigma_2^2 = 0.$$

Denotando

$$c = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2, \quad d = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2, \quad e = r_1 - r_2,$$

segue que

$$\sigma^2 - c\left(\frac{\mu - r_2}{e}\right)^2 + 2d\left(\frac{\mu - r_2}{e}\right) - \sigma_2^2 = 0$$

e após algumas manipulações, tem-se

$$\frac{1}{\sigma_2^2 - \frac{d^2}{c}}\sigma^2 - \frac{1}{(\sigma_2^2 - \frac{d^2}{c})(\frac{e^2}{c})}(\mu - (r_2 + \frac{de}{c}))^2 = 1. \quad (1.14)$$

Note que  $c > 0$ , pois

$$0 \leq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = c$$

e  $\sigma_2^2 - \frac{d^2}{c} > 0$ , tendo em vista que

$$\sigma_2^2 c - d^2 = \sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2) > 0.$$

A equação reduzida de uma hipérbole com centro  $(x_0, y_0)$  é dada pela equação

$$\frac{1}{a^2}(x - x_0)^2 - \frac{1}{b^2}(y - y_0)^2 = 1 \quad (1.15)$$

e as retas assíntotas, por

$$y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0 \quad (\text{inclinação positiva})$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0 \quad (\text{inclinação negativa}).$$

Chamando de

$$a = \sqrt{\sigma_2^2 - \frac{d^2}{c}}, \quad b = \sqrt{(\sigma_2^2 - \frac{d^2}{c})(\frac{e^2}{c})},$$

verifica-se que (1.14) pode ser colocada na forma

$$\frac{1}{a^2}\sigma^2 - \frac{1}{b^2}(\mu - (r_2 + \frac{de}{c}))^2 = 1. \quad (1.16)$$

Comparando (1.15) com (1.16), conclui-se que (1.16) representa uma hipérbole com centro em

$$(\sigma_0, \mu_0) = (0, r_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(r_1 - r_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2})$$

e assíntotas

$$\mu = \pm \frac{|r_1 - r_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}\sigma + (r_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(r_1 - r_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}).$$

Essa curva possui um ponto de mínimo risco,  $\sigma_{\min}$ , com retorno

$$r_2 + \frac{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)(r_1 - r_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Obtém-se

$$\sigma_{\min} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{1 - \rho^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}. \quad (1.17)$$

A conclusão a que se chega nesse caso é que é possível reduzir o risco (com eventual perda de rentabilidade) ao montar uma carteira com dois ativos.

**Exemplo 1.6** Tomando o exemplo da Tabela 1.2 com  $\rho = 0,5$  tem-se a seguinte equação, representada na Figura 1.3,

$$\sigma^2 - 7,7562\mu^2 + 5,4275\mu - 7,7685 = 0.$$

A composição da carteira que fornece o menor risco, bem como o seu retorno e risco associados, são dados por

$$\omega_1 = 0,1612, \quad \sigma = 2,6113\%, \quad \mu = 0,3499\%.$$

Deve-se notar que, à medida que  $\rho$  varia de 1 a  $-1$ , a curva risco-retorno, inicialmente uma reta ( $\rho = 1$ ), aproxima-se dos dois segmentos de reta que representam o caso  $\rho = -1$ . Existe um valor de  $\rho$  a partir do qual não se consegue reduzir o risco da carteira, quando comparado com os valores individuais



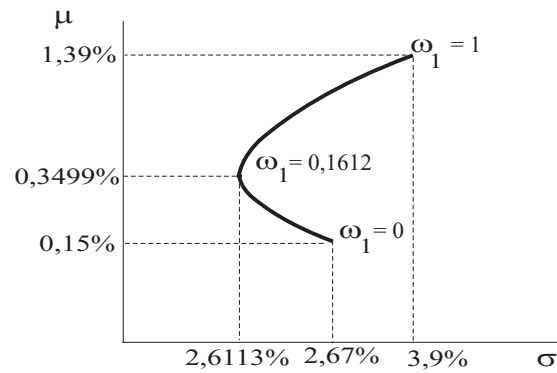


FIGURA 1.3: Gráfico risco-retorno para  $\rho = 0,5$

$\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Para calcular esse valor, basta fazer, em (1.17),  $\sigma_{\min} = \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Tem-se

$$\min\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}} \Rightarrow \rho = \frac{\min\{\sigma_1, \sigma_2\}}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}}.$$

Logo, para valores de  $\rho \geq \frac{\min\{\sigma_1, \sigma_2\}}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}}$ , não é possível reduzir o risco para valores menores que  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Essas situações são ilustradas na Figura 1.4, em que  $\min\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_2$ .

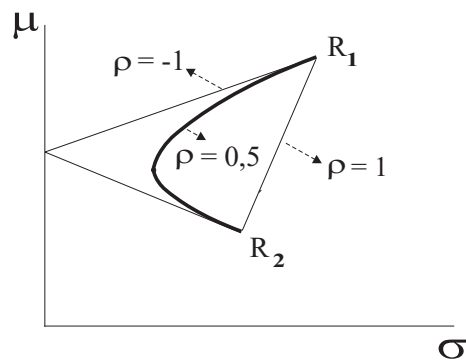


FIGURA 1.4: Gráfico risco-retorno para diferentes  $\rho$

## 1.4 Carteiras com 1 Ativo de Risco e 1 sem Risco

Considere agora uma carteira composta por 2 ativos, mas, neste caso, um deles sem risco. Utilizando a notação anterior e sendo o ativo sem risco com retorno  $R_1 = r_f$  (logo,  $\sigma_1 = 0$ ), o retorno da carteira é como em (1.11), isto é,

$$P = \omega_1 r_f + (1 - \omega_1) R_2,$$

portanto, o retorno esperado é dado por

$$\mu = \omega_1 r_f + (1 - \omega_1) r_2 = r_2 + (r_f - r_2) \omega_1.$$

Já a equação da variância fica na forma

$$\sigma^2 = (1 - \omega_1)^2 \sigma_2^2,$$

assim,

$$\omega_1 = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_2};$$

o que leva a

$$\begin{aligned} \mu &= r_2 + (r_f - r_2) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2}\right) \\ &= r_f + (r_2 - r_f) \frac{\sigma}{\sigma_2}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Portanto, a curva risco-retorno é uma reta com coeficiente angular

$$\frac{(r_2 - r_f)}{\sigma_2}.$$

**Exemplo 1.7** Tomando o exemplo da Tabela 1.2 com o ativo  $R_1$  substituído por uma aplicação livre de risco cujo retorno diário é 0,05%, tem-se a seguinte equação, representada na Figura 1.5:

$$\mu = 0,05\% + 0,0374\sigma.$$

## 1.5 Exercícios

Os Exercícios 1, 2 e 3 seguintes são solucionados e utilizam a planilha Exercícios.xls, disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. As respostas desses exercícios encontram-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

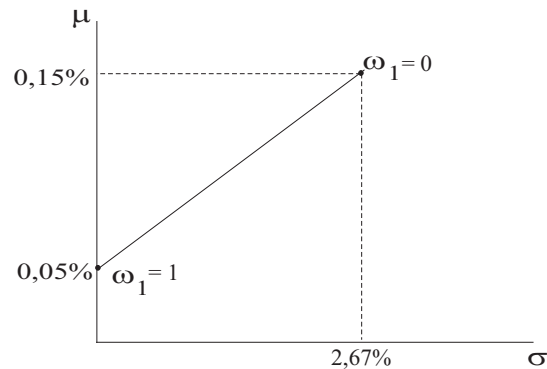


FIGURA 1.5: Gráfico risco-retorno com 1 ativo livre de risco

1) Após fazer uma seleção prévia das ações negociadas em bolsa de acordo com a liquidez e o setor de atuação da empresa entre outras análises fundamentalistas, um investidor montou um universo de ativos, cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados. Esse investidor busca obter um certo retorno e para atingir seu objetivo está disposto a correr um certo risco. Pede-se:

- Calcular os retornos e os riscos individuais desses ativos, usando para isso janelas de 200 e 300 dias.
- Classificar esses ativos de acordo com os seus retornos e riscos e analisar quais ativos seriam menos ou mais indicados para o investimento, uma vez que o investidor busca os maiores retornos com aversão ao risco.
- Quão importantes são os retornos e os riscos individuais das ações na montagem de uma carteira de investimentos? Que outros fatores são importantes?

2) Um investidor possui R\$ 100.000,00 para aplicar em ações. Dada a análise individual do exercício anterior, esse investidor decidiu montar uma carteira de investimento. Ele resolveu comprar R\$ 40.000,00 de ações Vale PNA e R\$ 30.000,00 de Eletrobrás PNB, por considerar papéis atrativos. Analogamente, ele quer evitar Telesp Celular PN, Globo Cabo PN e Embratel PN. Assumindo que o investidor vai alocar todo o saldo do investimento em um único ativo, pede-se:

- Qual ação do universo considerado ele deve comprar para manter o nível de risco diário da carteira abaixo de 1,8%, considerando uma janela de 400 dias?

- b) Supondo que o investidor monte a carteira indicada no item anterior, qual o retorno esperado para 1 ano? Sob o ponto de vista única e exclusivamente do retorno e para uma taxa de juros de 18,5% ao ano, vale a pena montar a carteira indicada?
- 3) Um investidor possui hoje 100% do seus investimentos em renda fixa a uma taxa de 18,5% ao ano e tem a oportunidade de alocar parte desses recursos em renda variável dentro do universo de ativos, cujas séries históricas de preços e retornos se encontram na pasta Dados. Para uma janela de 200, pede-se:
- a) Quais ativos de risco ele pode trazer para a carteira de maneira a melhorar o seu retorno?
- b) Qual seria o risco e o retorno da sua carteira se ele mantivesse 30% em renda fixa e distribuisse o restante igualmente nos outros ativos?
- c) Qual percentual ele deve manter em renda fixa se quer correr um risco máximo de 0,50%, e Vale PNA é a sua única opção de investimento em ativos de risco?

### Exercício Proposto

- 4) Considere 2 ativos com retornos  $R_1$  e  $R_2$ , fator de correlação  $\rho$ , e médias e desvios-padrão

$$r_1 = 10\%, r_2 = 18\%, \sigma_1 = 15\%, \sigma_2 = 30\%.$$

- a) Sendo  $\rho = 0,1$ , determine o peso  $\omega_1$  de modo a minimizar a variância da carteira com retorno  $P = \omega_1 R_1 + (1 - \omega_1) R_2$ . Qual é o valor da variância mínima  $\sigma_{\min}^2$  e o retorno esperado  $\mu_{\min}$ ?
- b) Ainda considerando  $\rho = 0,1$ , obtenha e trace a equação que relaciona  $\sigma \times \mu$ .
- c) Para qual valor de  $\rho$  obtém-se uma carteira com retorno esperado  $\mu = 15\%$  e desvio-padrão  $\sigma = 20\%$ ? Qual é o valor de  $\omega_1$  para essa carteira?

## Capítulo 2

# O Modelo de Markowitz

A abordagem clássica de média-variância foi inicialmente proposta por H. Markowitz [Markowitz, 1952] nos anos de 1950, posteriormente publicada em livros, [Markowitz, 1959] e [Markowitz, 1987], e lhe valeu o prêmio Nobel de Economia em 1990. Essa abordagem é uma ferramenta quantitativa que permite ao investidor alocar os seus recursos entre diferentes ativos financeiros, compondo sua carteira de forma a obter uma solução de compromisso ótima entre retorno e risco. Essa teoria é desenvolvida seguindo a premissa de que os investidores avaliariam suas carteiras apenas com base no valor esperado e na variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado, sendo essas as duas únicas variáveis de decisão para a seleção dos ativos. Quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo risco, os investidores sempre escolheriam a de maior retorno e, da mesma forma, quando postos a escolher entre duas carteiras de mesmo retorno, sempre escolheriam a de menor risco. Tendo com base essas duas hipóteses, Harry Markowitz desenvolveu a que é hoje conhecida como “Teoria Moderna de Carteiras”, estabelecendo, entre outros resultados, a fronteira eficiente para as carteiras de investimento.

A Seção 2.1 considera o caso em que se tem apenas ativos de risco, e apresenta a formulação do problema de média-variância como um problema de otimização quadrática com restrições. Utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange, apresentado no Apêndice B, obtém-se uma solução para o problema. Várias propriedades dessa solução, entre elas a fronteira eficiente para as carteiras de investimento e o “Teorema dos Dois Fundos”, são apresentadas na Seção 2.2. O caso em que, além dos ativos de risco, também se tem um ativo livre de risco, é analisado na Seção 2.3. Novamente formula-se o problema como de otimização quadrática com restrições e, utilizando-se o método dos multiplicadores de Lagrange, obtém-se a solução. A Seção 2.4 apresenta a fronteira eficiente para esse caso, bem como outras propriedades importantes. Os resultados deste capítulo fornecem as ferramentas básicas para o entendimento e o desenvolvimento de modelos que serão tratados nos próximos capítulos.

## 2.1 Carteiras com apenas Ativos de Risco

Inicialmente, considera-se o caso da carteira formada apenas por ativos de risco. De acordo com a notação já utilizada no Capítulo 1, considere uma carteira com retorno  $P$  composta por  $n$  ativos com retornos  $R_1, \dots, R_n$ , retorno esperado  $r_1, \dots, r_n$  e matriz covariância  $\Sigma$ . Investe-se uma proporção  $\omega_i$  no ativo com retorno  $R_i$ , de modo que

$$P = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1.$$

Como anteriormente, usa-se a seguinte notação vetorial

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \\ r &= \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = E(R) = \begin{pmatrix} E(R_1) \\ \vdots \\ E(R_n) \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \text{cov}(R) = E((R - r)(R - r)'). \end{aligned}$$

Segue que a média do retorno  $P$ , denotada por  $\mu$ , é dada por

$$\mu = E(P) = E(\omega' R) = \omega' E(R) = \omega' r$$

e a variância de  $P$ , denotada por  $\sigma^2$ , é dada por

$$\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega.$$

Resumindo, obtêm-se

$$\begin{cases} P = \omega' R \\ \mu = \omega' r \\ \sigma^2 = \omega' \Sigma \omega \\ 1 = \omega' e \end{cases}.$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização. Para um dado valor de  $\mu$  (rentabilidade desejada),

$$\begin{aligned} &\min \omega' \Sigma \omega \\ &\text{sujeito a} \\ &\omega' r = \mu \\ &\omega' e = 1 \\ &\omega \in R^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assume-se que

H1)  $\Sigma > 0$ ;

H2)  $r$  não é múltiplo de  $e$  ( $r \neq ae$ ).

A hipótese H1 apenas garante que todos os ativos são realmente de risco. A hipótese H2, que necessariamente implica  $n \geq 2$ , garante uma situação não-degenerada, pois, caso contrário, com  $r = ae$ , as restrições só seriam consistentes com  $\mu = a$ .

Definem-se as seguintes variáveis:

$$\alpha = e' \Sigma^{-1} e \quad (2.2)$$

$$\gamma = r' \Sigma^{-1} r \quad (2.3)$$

$$\psi = e' \Sigma^{-1} r \quad (2.4)$$

$$\delta = \alpha\gamma - \psi^2 = (e' \Sigma^{-1} e)(r' \Sigma^{-1} r) - (e' \Sigma^{-1} r)^2. \quad (2.5)$$

**Proposição 2.1** *As constantes  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ , definidas em (2.2), (2.3) e (2.5), são positivas. Mais precisamente,*

$$\alpha \in \left[ \frac{n}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right]$$

$$\gamma \in \left[ \frac{\|r\|^2}{\lambda_{\max}(\Sigma)}, \frac{\|r\|^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \right]$$

$$|\psi| < \sqrt{n} \frac{\|r\|}{\lambda_{\min}(\Sigma)},$$

em que  $\lambda_{\min}(\Sigma)$  e  $\lambda_{\max}(\Sigma)$  representam os autovalores mínimo e máximo da matriz  $\Sigma$ .

**Prova:** Como  $\Sigma > 0$ , tem-se que  $\Sigma$  pode ser escrita como

$$\Sigma = UDU',$$

em que  $U$  é uma matriz ortonormal ( $UU' = U'U = I$ ) e  $D$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores (todos reais positivos) de  $\Sigma$ . Logo,

$$0 < \frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} I \leq \Sigma^{-1} = UD^{-1}U' \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} I$$

de modo que

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} n = \frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} \|e\|^2 \leq e' \Sigma^{-1} e \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \|e\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} n$$

e

$$\frac{1}{\lambda_{\max}(\Sigma)} \|r\|^2 \leq r' \Sigma^{-1} r \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \|r\|^2.$$

Note que a matriz  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} e' \\ r' \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} e & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e' \Sigma^{-1} e & e' \Sigma^{-1} r \\ r' \Sigma^{-1} e & r' \Sigma^{-1} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \psi \\ \psi & \gamma \end{pmatrix}$$

é positiva definida, pois  $\Sigma^{-1} > 0$  e  $e$  e  $r$  são vetores linearmente independentes pela hipótese H2. Logo, o determinante dessa matriz, que representa o produto dos 2 autovalores positivos, é maior que zero, ou seja,

$$\delta = \alpha\gamma - \psi^2 = \det \begin{pmatrix} \alpha & \psi \\ \psi & \gamma \end{pmatrix} > 0.$$

Conseqüentemente,

$$|\psi| < \sqrt{(e' \Sigma^{-1} e)(r' \Sigma^{-1} r)} \leq \sqrt{\frac{n}{\lambda_{\min}(\Sigma)} \times \frac{\|r\|^2}{\lambda_{\min}(\Sigma)}} = \sqrt{n} \frac{\|r\|}{\lambda_{\min}(\Sigma)}.$$

■

Obtém-se a seguinte solução para o problema de média-variância formulado em (2.1).

**Teorema 2.1** *A solução do problema de média-variância (2.1) é dada por*

$$\omega = h\mu + g, \quad (2.6)$$

em que  $h$  e  $g$ , não-dependentes de  $\mu$ , são dados por,

$$h = \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} e \quad (2.7)$$

$$g = \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r. \quad (2.8)$$

**Prova:** Considere o lagrangiano

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = \omega' \Sigma \omega + \lambda_1(\mu - \omega' r) + \lambda_2(1 - \omega' e).$$

Derivando e igualando a zero, obtêm-se as condições necessárias de 1ª ordem.

$$\begin{cases} 2\Sigma\omega - \lambda_1 r - \lambda_2 e = 0 & (\omega) \\ \omega' r = \mu & (\lambda_1) \\ \omega' e = 1 & (\lambda_2) \end{cases}.$$

Segue que

$$\omega = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 r + \lambda_2 e), \quad (2.9)$$

portanto

$$\begin{cases} \frac{1}{2} r' \Sigma^{-1} (\lambda_1 r + \lambda_2 e) = \mu \\ \frac{1}{2} e' \Sigma^{-1} (\lambda_1 r + \lambda_2 e) = 1 \end{cases},$$



ou seja,

$$\begin{pmatrix} r'\Sigma^{-1}r & r'\Sigma^{-1}e \\ e'\Sigma^{-1}r & e'\Sigma^{-1}e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Decorre que

$$\begin{pmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

e, como visto na Proposição 2.1,  $\begin{pmatrix} \gamma & \psi \\ \psi & \alpha \end{pmatrix} > 0$ . Lembrando que para uma matriz 2 por 2 simétrica com determinante diferente de zero vale que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

tem-se que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{\delta}(\alpha\mu - \psi) \\ \lambda_2 = \frac{2}{\delta}(-\psi\mu + \gamma) \end{cases} \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), tem-se

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1 r + \lambda_2 e) = \frac{1}{\delta}\Sigma^{-1}((\alpha\mu - \psi)r + (\gamma - \psi\mu)e) \\ &= \left(\frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e\right)\mu + \left(\frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}r\right) \\ &= h\mu + g, \end{aligned}$$

em que  $h$  e  $g$  são dados por (2.7) e (2.8), mostrando (2.6). Aplicando as condições de 2ª ordem, obtém-se

$$L(\omega) = \Sigma > 0$$

e, portanto, a solução encontrada realmente corresponde a um ponto de mínimo local. Como a função objetivo é convexa, e o conjunto de soluções factíveis também, o ponto de mínimo obtido é global. ■

Note que

$$r'h = 1, r'g = 0, e'h = 0, e'g = 1;$$

portanto, conforme esperado,

$$\begin{aligned} r'\omega &= r'(h\mu + g) = r'h\mu + r'g = \mu \\ e'\omega &= e'(h\mu + g) = e'h\mu + e'g = 1. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1** Considere  $n = 3$ , os retornos dos ativos são descorrelacionados e com variância 1 e os retornos esperados são 1, 2, 3, respectivamente. Segue que

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Sigma = I$$

e

$$\alpha = 3$$

$$\gamma = 14$$

$$\psi = 6$$

$$\delta = 3 \times 14 - 36 = 6.$$

Portanto,

$$h = \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, g = \frac{14}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

e

$$\omega = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

A variância é dada por:

$$\sigma^2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\mu\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mu - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} - 2\mu + \frac{1}{2}\mu^2.$$

Calculando a derivada  $\frac{d\sigma^2}{d\mu}$ , e igualando a zero, obtém-se o ponto de mínima variância:

$$\frac{d\sigma^2}{d\mu} = 0 = \mu - 2 \Rightarrow \mu = 2, \sigma = \sqrt{\frac{7}{3} - 4 + 2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Note que foram permitidas posições a descoberto.

**Exemplo 2.2** Considere o caso do Exemplo 2.1, mas sem permitir posições a descoberto. Nesse caso o problema de otimização tem a seguinte forma:

$$\min \omega' \Sigma \omega$$

sujeito a

$$\omega' r = \mu$$

$$\omega' e = 1$$

$$\omega \geq 0, \omega \in R^n,$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \min \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3 = \mu \\ & \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1 \\ & -\omega_1 \leq 0, -\omega_2 \leq 0, -\omega_3 \leq 0. \end{aligned}$$

O lagrangiano nesse caso é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega, \lambda, \nu) &= \omega' \Sigma \omega + \lambda_1(\mu - \omega' r) + \lambda_2(1 - \omega' e) - \nu' \omega \\ &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \lambda_1(\mu - (\omega_1 + 2\omega_2 + 3\omega_3)) \\ &\quad + \lambda_2(1 - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)) - \nu_1\omega_1 - \nu_2\omega_2 - \nu_3\omega_3. \end{aligned}$$

As condições de otimalidade de 1ª ordem levam às seguintes equações:

$$2\Sigma\omega - \lambda_1 r - \lambda_2 e - \nu = 0, \quad (2.11)$$

$$r' \omega = \mu, \quad (2.12)$$

$$e' \omega = 1, \quad (2.13)$$

$$\nu_i \omega_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Consideram-se a seguir todos os casos possíveis para a resolução dessas equações:

1)  $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0, \omega_3 > 0 \implies \nu_i = 0, i = 1, 2, 3.$

Resolvendo as Equações (2.11), (2.12), (2.13) (que na verdade já foram resolvidas no exemplo anterior), obtêm-se:

$$\omega = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}.$$

Como  $\omega_1 \geq 0$  e  $\omega_3 \geq 0$ , deve-se ter

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\mu &\geq 0, \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\mu &\geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\frac{4}{3} \leq \mu \leq \frac{8}{3}$ . Lembrando que  $\sigma^2 = \omega' \Sigma \omega$ , tem-se que

$$\sigma = \sqrt{\frac{7}{3} - 2\mu + \mu^2 \frac{1}{2}}.$$

- 2) Para  $\mu \leq \frac{4}{3}$ , têm-se  $\omega_3 = 0$  e, portanto,  $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0, \nu_3 > 0, \nu_1 = 0, \nu_2 = 0$ . Resolvendo as Equações (2.11), (2.12), (2.13) para esse caso obtêm-se que

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \mu \\ \mu - 1 \\ 8 - 6\mu \end{pmatrix}.$$

Para não violar as condições de positividade, deve-se ter  $\mu \geq 1, \mu \leq 2$  e  $\mu \leq \frac{4}{3}$ , ou seja,  $1 \leq \mu \leq \frac{4}{3}$ . Segue nesse caso que

$$\omega = \begin{pmatrix} 2 - \mu \\ \mu - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, como anteriormente,

$$\sigma = \sqrt{2\mu^2 - 6\mu + 5}.$$

- 3) Para  $\mu \geq \frac{8}{3}$ , deve-se ter  $\omega_1 = 0$  e, portanto,  $\nu_1 > 0, \omega_2 > 0, \omega_3 > 0, \nu_2 = 0, \nu_3 = 0$ . Resolvendo as Equações (2.11), (2.12), (2.13) para este caso, obtêm-se

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 + 6\mu \\ 3 - \mu \\ \mu - 2 \end{pmatrix}.$$

Para não violar as condições de positividade, deve-se ter  $\mu \geq 2, \mu \leq 3$  e  $\mu \geq \frac{8}{3}$ , ou seja,  $\frac{8}{3} \leq \mu \leq 3$ . Segue que

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 - \mu \\ \mu - 2 \end{pmatrix}$$

e, como anteriormente,

$$\sigma = \sqrt{2\mu^2 - 10\mu + 13}.$$

Resumindo, têm-se os seguintes casos:

1. Para  $1 \leq \mu \leq \frac{4}{3}$ ,

$$\omega = \begin{pmatrix} 2 - \mu \\ \mu - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e hipérbole dada por

$$2\sigma^2 - 4\left(\mu - \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

2. Para  $\frac{4}{3} \leq \mu \leq \frac{8}{3}$ ,

$$\omega = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \mu \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \mu \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e hipérbole dada por

$$3\sigma^2 - \frac{3}{2}(\mu - 2)^2 = 1.$$

3. Para  $\frac{8}{3} \leq \mu \leq 3$ ,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 - \mu \\ \mu - 2 \end{pmatrix}$$

e hipérbole dada por

$$2\sigma^2 - 4\left(\mu - \frac{5}{2}\right)^2 = 1.$$

O gráfico no plano risco-retorno, com as três hipérboles encadeadas, é mostrado na Figura 2.1 por meio da curva contínua. A curva em \* representa o caso sem restrições (sendo, portanto, permitidas posições a descoberto).

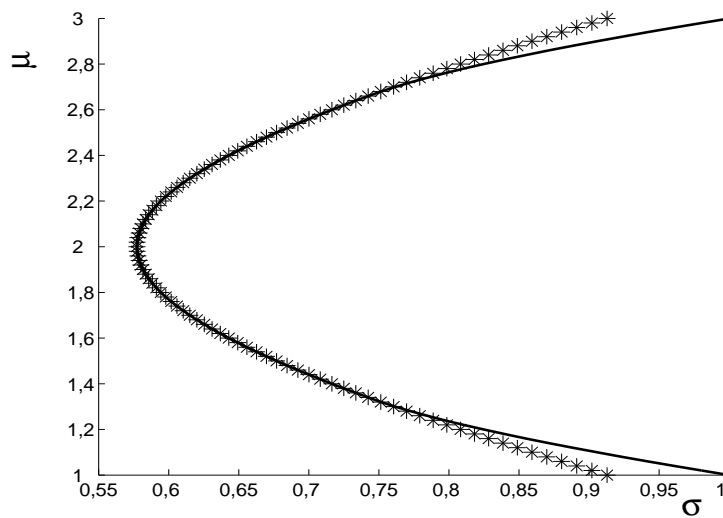


FIGURA 2.1: Gráfico risco-retorno

## 2.2 A Fronteira Eficiente

O próximo resultado mostra que qualquer carteira formada a partir de carteiras de mínima variância também é de mínima variância, resultado conhecido como o “Teorema dos Dois Fundos”.

**Proposição 2.2** *Qualquer carteira formada por carteiras de mínima variância também é de mínima variância.*

**Prova:** Sejam  $P_a$  e  $P_b$  os retornos de 2 carteiras de mínima variância, com retornos esperados  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , respectivamente. Seja uma carteira com retorno  $P_c$  dado por

$$P_c = \xi P_a + (1 - \xi) P_b.$$

Portanto,  $P_c$  tem retorno esperado  $\mu_c = \xi \mu_a + (1 - \xi) \mu_b$ . Também segue que  $\omega_a$ , a carteira cujo retorno é  $P_a$ , e  $\omega_b$ , a carteira cujo retorno é  $P_b$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_a &= h \mu_a + g, \quad P_a = \omega_a' R \\ \omega_b &= h \mu_b + g, \quad P_b = \omega_b' R. \end{aligned}$$

Logo,

$$P_c = \omega_c' R = \xi \omega_a' R + (1 - \xi) \omega_b' R = (\xi \omega_a + (1 - \xi) \omega_b)' R$$

e

$$\begin{aligned} \omega_c &= \xi \omega_a + (1 - \xi) \omega_b = \xi (h \mu_a + g) + (1 - \xi) (h \mu_b + g) \\ &= h (\xi \mu_a + (1 - \xi) \mu_b) + g = h \mu_c + g. \end{aligned}$$

Desse modo, a carteira com retorno  $P_c$  também é de mínima variância. ■

Calcula-se a seguir a correlação entre 2 carteiras de mínima variância.

**Proposição 2.3** *Sejam  $P_a$  e  $P_b$  os retornos de 2 carteiras de mínima variância, com retornos esperados  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , e composição  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , respectivamente. Então,*

$$\text{cov}(P_a, P_b) = \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha}.$$

**Prova:** Têm-se que

$$\begin{aligned} \omega_a &= h \mu_a + g, \quad P_a = \omega_a' R \\ \omega_b &= h \mu_b + g, \quad P_b = \omega_b' R, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \text{cov}(P_a, P_b) &= E((P_a - \mu_a)(P_b - \mu_b)) = E(\omega_a'(R - r)(R - r)'\omega_b) \\ &= \omega_a' E((R - r)(R - r)') \omega_b = \omega_a' \Sigma \omega_b \\ &= (h \mu_a + g)' \Sigma (h \mu_b + g). \end{aligned}$$

Após algumas manipulações, obtêm-se

$$\begin{aligned} h \mu_a + g &= \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} (\mu_a (r - \frac{\psi}{\alpha} e) + (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)) \\ h \mu_b + g &= \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} (\mu_b (r - \frac{\psi}{\alpha} e) + (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} cov(P_a, P_b) &= (\frac{\alpha}{\delta})^2 (\mu_a (r - \frac{\psi}{\alpha} e) \\ &\quad + (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r))' \Sigma^{-1} (\mu_b (r - \frac{\psi}{\alpha} e) + (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)) \\ &= (\frac{\alpha}{\delta})^2 (\mu_a \mu_b (r - \frac{\psi}{\alpha} e)' \Sigma^{-1} (r - \frac{\psi}{\alpha} e) \\ &\quad + (\mu_a + \mu_b) (r - \frac{\psi}{\alpha} e)' \Sigma^{-1} (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r) \\ &\quad + (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)' \Sigma^{-1} (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)). \end{aligned}$$

Mostra-se que

$$\begin{aligned} (r - \frac{\psi}{\alpha} e)' \Sigma^{-1} (r - \frac{\psi}{\alpha} e) &= \frac{\gamma}{\alpha}, \\ (r - \frac{\psi}{\alpha} e)' \Sigma^{-1} (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r) &= -\frac{\psi \delta}{\alpha^2}, \\ (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r)' \Sigma^{-1} (\frac{\gamma}{\alpha} e - \frac{\psi}{\alpha} r) &= \frac{\gamma \delta}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

o que leva a

$$\begin{aligned} cov(P_a, P_b) &= (\frac{\alpha}{\delta})^2 (\mu_a \mu_b \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\psi \delta}{\alpha^2} (\mu_a + \mu_b) + \frac{\gamma \delta}{\alpha^2}) \\ &= (\frac{\alpha}{\delta}) ((\mu_a - \frac{\psi}{\alpha}) (\mu_b - \frac{\psi}{\alpha}) + \frac{\gamma \alpha - \psi^2}{\alpha^2}) \\ &= \frac{\alpha}{\delta} (\mu_a - \frac{\psi}{\alpha}) (\mu_b - \frac{\psi}{\alpha}) + \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

■

A partir da Equação (2.14) obtém-se a curva risco-retorno, dada por:

$$\sigma^2 = Var(P) = \frac{\alpha}{\delta} (\mu - \frac{\psi}{\alpha})^2 + \frac{1}{\alpha},$$

portanto,

$$\frac{1}{(1/\alpha)} \sigma^2 - \frac{1}{(\delta/\alpha^2)} (\mu - \frac{\psi}{\alpha})^2 = 1. \quad (2.15)$$

Lembrando que  $\delta > 0$  e  $\alpha > 0$ , segue que a Equação (2.15) representa uma equação reduzida de uma hipérbole com centro em  $(0, \frac{\psi}{\alpha})$  e as retas assíntotas dadas por

$$\mu = \frac{\psi}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \sigma.$$

O gráfico no plano risco-retorno é mostrado na Figura 2.2.

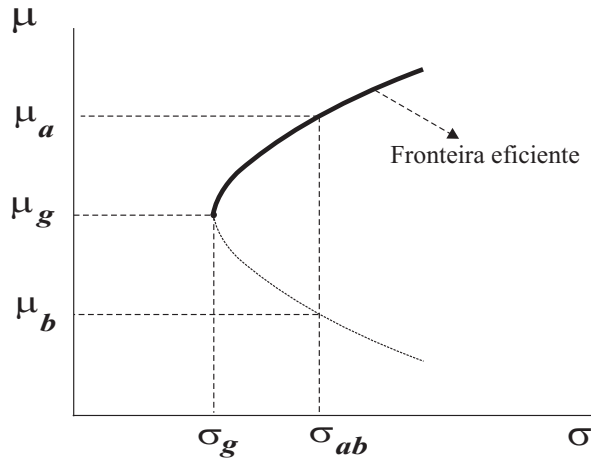


FIGURA 2.2: Gráfico risco-retorno

**Proposição 2.4** *Seja  $\omega_g$  a composição da carteira com mínima variância global,  $\mu_g$  o seu retorno e  $\sigma_g^2$  a sua variância. Segue que*

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e \quad (2.16)$$

$$\mu_g = \frac{\psi}{\alpha} \quad (2.17)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.18)$$

**Prova:** A partir da Proposição 2.4 tem-se que o ponto de mínima variância corresponde ao retorno  $\mu_g = \frac{\psi}{\alpha}$ , cuja variância vale  $\sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha}$ , verificando (2.17) e (2.18). Além disso, como  $\omega_g$  é uma carteira de mínima variância,

$$\begin{aligned} \omega_g &= \left( \frac{\alpha}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} e \right) \frac{\psi}{\alpha} + \left( \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r \right) \\ &= \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r - \frac{\psi^2}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e + \frac{\gamma}{\delta} \Sigma^{-1} e - \frac{\psi}{\delta} \Sigma^{-1} r \\ &= \frac{\gamma \alpha - \psi^2}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e = \frac{\delta}{\delta \alpha} \Sigma^{-1} e = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e, \end{aligned}$$

verificando (2.16). ■



As carteiras com  $\mu \geq \mu_g = \frac{\psi}{\alpha}$  são chamadas de carteiras eficientes. Elas possuem o maior retorno possível entre todas as carteiras com um determinado nível de risco especificado. A partir da Proposição 2.2 é fácil verificar que carteira de carteiras eficientes também é eficiente, e da Proposição 2.4 é imediato que:

**Proposição 2.5** *A covariância do retorno da carteira de mínima variância global com retorno  $P_g$ , com qualquer outra carteira com retorno  $P$  é:*

$$\text{cov}(P_g, P) = \frac{1}{\alpha}.$$

**Prova:** Tem-se que  $P_g = \omega'_g R$ ,  $P = \omega' R$ ,  $\omega_g = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e$ . Logo,

$$\begin{aligned} \text{cov}(P_g, P) &= E(\omega'_g (R - r)(R - r)' \omega) \\ &= \omega'_g E((R - r)(R - r)') \omega = \omega'_g \Sigma \omega \\ &= \frac{1}{\alpha} e' \Sigma^{-1} \Sigma \omega = \frac{1}{\alpha} e' \omega = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

■

**Exemplo 2.3** *Considere 3 ativos com*

$$r = \begin{pmatrix} 1,39 \\ 0,15 \\ 0,93 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 15,21 & 5,21 & 2 \\ 5,21 & 7,13 & 5 \\ 2 & 5 & 4,58 \end{pmatrix}.$$

*Obtêm-se*

$$\begin{aligned} \alpha &= e' \Sigma^{-1} e = 0,2834 \\ \gamma &= r' \Sigma^{-1} r = 1,3714 \\ \psi &= r' \Sigma^{-1} e = 0,4606 \\ \delta &= \gamma \alpha - \psi^2 = 0,1766. \end{aligned}$$

*A equação da hipérbole que descreve a região de mínima variância é dada por:*

$$0,2834\sigma^2 - 0,4550(\mu - 1,6250)^2 = 1.$$

*A carteira de mínima variância global  $\omega_g$ , que é o centro da hipérbole, possui risco, retorno esperado e composição dados por*

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = 1,8783 \\ \mu_g &= \frac{\psi}{\alpha} = 1,6250 \\ \omega_g &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e = \begin{pmatrix} 0,29 \\ -0,72 \\ 1,43 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e a covariância do retorno da carteira com qualquer outra é (veja a Figura 2.3):

$$\text{cov}(P_g, P) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,2834} = 3,5286.$$

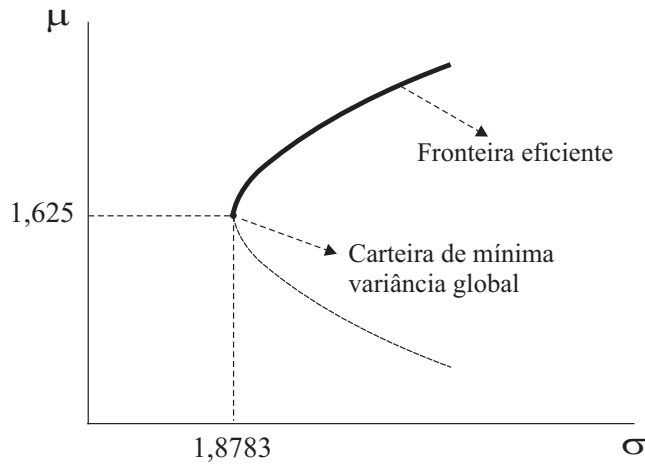


FIGURA 2.3: Gráfico risco-retorno

O seguinte resultado pode ser demonstrado (veja o Exercício 6):

**Proposição 2.6** *Para as carteiras eficientes, tem-se que*

$$\sigma \frac{d\mu}{d\sigma} = \mu - \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \frac{1}{\mu - \frac{\psi}{\alpha}}.$$

Para cada carteira eficiente define-se uma carteira, denominada de carteira zero-beta, da seguinte forma:

**Proposição 2.7** *Para cada carteira eficiente  $\omega_a$ , com retorno  $P_a$ , retorno esperado  $\mu_a > \frac{\psi}{\alpha}$  e variância  $\sigma_a^2$ , existe uma única carteira de mínima variância  $\omega_{oa}$ , denominada de carteira zero-beta, com retorno  $P_{oa}$  e retorno esperado  $\mu_{oa}$ , tal que*

$$\text{cov}(P_a, P_{oa}) = 0.$$

Além disso,

$$\left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_a} = \frac{\mu_a - \mu_{oa}}{\sigma_a}.$$

**Prova:** A partir da Proposição 2.3

$$\text{cov}(P_a, P_b) = \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_b - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha}.$$

Igualando a zero, obtêm-se

$$\text{cov}(P_a, P_{oa}) = \frac{\alpha}{\delta} \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) \left( \mu_{oa} - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} = 0,$$

portanto

$$\mu_{oa} - \frac{\psi}{\alpha} = \frac{-\delta}{\alpha^2 \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right)},$$

ou seja,

$$\mu_{oa} = \frac{\psi}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha^2 \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right)}.$$

Usando a Proposição 2.6, tem-se

$$\mu_{oa} = \mu_a - \left( \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right) + \frac{\delta}{\alpha^2 \left( \mu_a - \frac{\psi}{\alpha} \right)} \right) = \mu_a - \sigma_a \frac{d\mu}{d\sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_a}.$$

■

Carteiras zero-beta serão fundamentais para o desenvolvimento do modelo de Black, que será estudado no Capítulo 3.

## 2.3 Carteiras com Ativos de Risco e 1 Ativo sem Risco

Será apresentado o caso em que se tem um ativo sem risco na carteira. Como anteriormente,  $\omega$  representa o vetor de pesos dos ativos de risco, com a ressalva de que neste caso o somatório dos seus elementos não precisa valer 1, pois introduzimos um ativo sem risco, cujo retorno vale  $r_f$ . Note que da hipótese H2 segue que  $r \neq r_f e$ . Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \omega' \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega' r + (1 - \omega' e) r_f = \mu \\ & \omega \in R^n. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que se  $r = r_f e$ , a restrição

$$\omega' r + (1 - \omega' e) r_f = \omega' (r - r_f e) + r_f$$

só teria solução para o caso  $\mu = r_f$ . Segue a solução do problema.

**Teorema 2.2** A solução do problema de média-variância (2.19) é dada por

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} \Sigma^{-1} (r - r_f e). \quad (2.20)$$

**Prova:** O lagrangiano nesse caso é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega, \lambda) &= \omega' \Sigma \omega + \lambda (\mu - (\omega' r + (1 - \omega' e) r_f)) \\ &= \omega' \Sigma \omega + \lambda (\mu - \omega' (r - r_f e) - r_f). \end{aligned}$$

Derivando e igualando a zero, obtêm-se as condições necessárias de 1ª ordem:

$$\begin{cases} 2\Sigma\omega - \lambda(r - r_f e) = 0 & (\omega) \\ \omega'(r - r_f e) = \mu - r_f & (\lambda) \end{cases}. \quad (2.21)$$

Segue a partir da 1ª equação de (2.21) que

$$\omega = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} (r - r_f e) \quad (2.22)$$

e, substituindo (2.22) na 2ª equação de (2.21), tem-se

$$\frac{\lambda}{2} (r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e) = \mu - r_f,$$

portanto

$$\lambda = \frac{2(\mu - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)},$$

o que leva em (2.22) a

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} \Sigma^{-1} (r - r_f e),$$

mostrando (2.20). As condições de 2ª ordem garantem que a solução encontrada corresponde a um mínimo local e, da mesma forma que no Teorema 2.1, verifica-se que a solução corresponde a um mínimo global. ■

## 2.4 A Fronteira Eficiente Geral

O vetor  $\omega$  da Equação (2.20) apresenta a composição dos ativos de risco, enquanto  $1 - \omega' e$  representa a proporção a ser investida no ativo sem risco. Serão determinados a seguir os valores de  $\mu$ ,  $\sigma$ , e  $\omega$ , denotados por  $\mu_T$ ,  $\sigma_T$ , e  $\omega_T$  respectivamente, os quais correspondem a uma posição 100% em ativos de risco. Para isso, deve-se ter  $e' \omega_T = 1$ , ou seja,

$$1 = e' \omega_T = \frac{(\mu_T - r_f)}{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} e' \Sigma^{-1} (r - r_f e).$$

Conclui-se, portanto, que

$$\mu_T = r' \omega_T = \frac{r' \Sigma^{-1} (r - r_f e)}{\psi - r_f \alpha} = \frac{\gamma - r_f \psi}{\psi - r_f \alpha} \quad (2.23)$$

e, substituindo (2.23) na Equação (2.20), obtém-se que  $\omega_T$  vale

$$\omega_T = \frac{1}{e' \Sigma^{-1} (r - r_f e)} \Sigma^{-1} (r - r_f e) = \frac{1}{\psi - r_f \alpha} \Sigma^{-1} (r - r_f e). \quad (2.24)$$

A partir de (2.24) tem-se

$$\sigma_T^2 = \omega_T' \Sigma \omega_T = \frac{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)}{(\psi - r_f \alpha)^2}.$$

Denotar-se-á por  $P_T$  o retorno da carteira formada por  $\omega_T$ . Conforme demonstrado a seguir, a carteira com retorno  $P_T$  é eficiente para carteiras com 100% de ativos de risco. A Proposição 2.8 caracteriza a carteira com retorno  $P$  de mínima variância formada por  $\omega$ , assim como na Equação (2.20), como uma carteira das carteiras  $r_f$  e  $P_T$ . Em particular, a fronteira eficiente no plano risco-retorno para as carteiras com ativos de risco e 1 ativo sem risco será obtida. Para isso é necessário assumir que  $r_f < \frac{\psi}{\alpha}$ .

**Proposição 2.8** *A carteira com retorno  $P_T$  é eficiente para as carteiras com 100% de ativos de risco. Além disso, qualquer carteira eficiente com retorno  $P$ , formada com o ativo sem risco e ativos de risco, com retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , pode ser construída como uma combinação do ativo livre de risco e da carteira com retorno  $P_T$ . Mais precisamente,*

$$P = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}\right) r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T} P_T.$$

**Prova:** Primeiramente note que  $\mu_T > \frac{\psi}{\alpha}$ , pois, lembrando que  $\alpha > 0$  e  $r_f < \frac{\psi}{\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} 0 < \delta &= \gamma \alpha - \psi^2 \\ &\Rightarrow \gamma \alpha - r_f \psi \alpha > \psi^2 - r_f \psi \alpha \\ &\Rightarrow \alpha(\gamma - r_f \psi) > \psi(\psi - r_f \alpha) \\ &\Rightarrow \mu_T = \frac{\gamma - r_f \psi}{\psi - r_f \alpha} > \frac{\psi}{\alpha}. \end{aligned}$$

Note que para o retorno  $\mu_T$  como em (2.23), a carteira de mínima variância é dada por

$$\begin{aligned} h\mu_T + g &= \left(\frac{\alpha}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}e\right)\left(\frac{\gamma - r_f\psi}{\psi - r_f\alpha}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi}{\delta}\Sigma^{-1}r\right)\left(\frac{\psi - r_f\alpha}{\psi - r_f\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\psi - r_f\alpha}\left(\frac{\alpha\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\psi\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\psi\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi^2}{\delta}\Sigma^{-1}r + \left(\frac{\psi^2}{\delta}\Sigma^{-1}e - \frac{\psi\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}r\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \frac{\psi\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}r - \frac{\alpha\gamma}{\delta}\Sigma^{-1}e\right)r_f\right) \\ &= \frac{1}{\psi - r_f\alpha}\Sigma^{-1}(r - r_fe) = \omega_T. \end{aligned}$$

Logo  $\omega_T$ , definido em (2.24), é realmente uma carteira eficiente. Conforme visto na Equação (2.20), a carteira de mínima variância para o caso de ativos com risco e um ativo sem risco tem os seguintes pesos para os ativos de risco:

$$\omega = \frac{(\mu - r_f)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)} \Sigma^{-1} (r - r_fe) = \frac{(\mu - r_f)(\psi - r_f\alpha)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)} \omega_T.$$

Para o ativo sem risco, a proporção é dada por

$$1 - e'\omega = 1 - \frac{(\mu - r_f)(\psi - r_f\alpha)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)},$$

pois  $e'\omega_T = 1$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \omega' \Sigma \omega \\ &= \left( \frac{(\mu - r_f)(\psi - r_f\alpha)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)} \right)^2 \omega_T' \Sigma \omega_T \\ &= \left( \frac{(\mu - r_f)(\psi - r_f\alpha)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)} \right)^2 \sigma_T^2, \end{aligned}$$

já que  $\sigma_T^2 = \omega_T' \Sigma \omega_T$ . Logo,

$$\frac{\sigma}{\sigma_T} = \frac{(\mu - r_f)(\psi - r_f\alpha)}{(r - r_fe)' \Sigma^{-1} (r - r_fe)},$$

o que mostra

$$\omega = \frac{\sigma}{\sigma_T} \omega_T, \quad 1 - e'\omega = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_T}.$$

Portanto, como  $P_T = \omega'_T R$ , tem-se

$$P = (1 - e'\omega)r_f + \omega'R = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_T})r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}\omega'_T R = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_T})r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}P_T.$$

■

A partir da equação

$$P = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_T})r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}P_T$$

obtém-se

$$\mu = (1 - \frac{\sigma}{\sigma_T})r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}\mu_T = r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}(\mu_T - r_f). \quad (2.25)$$

Trata-se da equação no plano risco-retorno vista em (1.18) na Seção 1.4 para o caso de um ativo de risco e um ativo sem risco. Pode-se mostrar por meio da Proposição 2.6 que

$$\frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T} = \frac{d\mu}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma_T}.$$

O gráfico no plano risco-retorno é mostrado na Figura 2.4. Portanto, a reta (2.25) tangencia a parábola (2.15) no ponto  $(\sigma_T, \mu_T)$  e, por essa razão, a carteira  $\omega_T$  é chamada de carteira tangente.

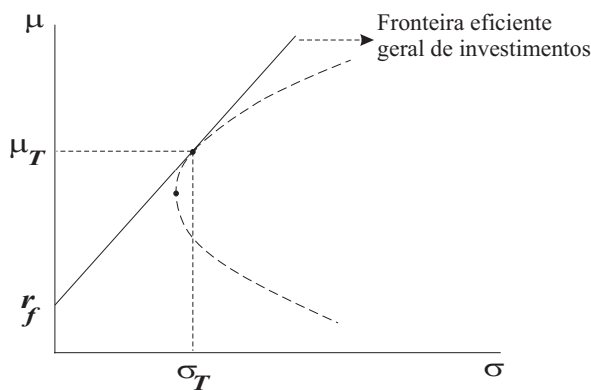


FIGURA 2.4: Gráfico risco-retorno

**Exemplo 2.4** Voltando ao Exemplo 2.1 em que

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \Sigma = I,$$

considerando um ativo sem risco com retorno  $r_f = 0,5$ , e lembrando que  $\alpha = 3$ ,  $\psi = 6$ ,  $\gamma = 14$ ,  $\delta = 6$  ( $0,5 = r_f < \frac{\psi}{\alpha} = 2$ ), tem-se que a carteira  $\omega_T$  é dada por

$$\omega_T = \frac{1}{\psi - r_f \alpha} \Sigma^{-1}(r - r_f e) = \frac{1}{6 - \frac{1}{2} \times 3} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

## 2.5 Exercícios

Os Exercícios 1, 2 e 3 seguintes são solucionados e utilizam a planilha Exercícios.xls, disponível no site [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. As respostas desses exercícios encontram-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

1) Um administrador de fundo de ações gostaria de montar um fundo composto por 100% de ações e que seja menos arriscado que o IBovespa. Após uma seleção prévia dos papéis que deseja ter no fundo, ele montou o universo de ativos, cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Data. Sabendo-se que o IBovespa, para o período considerado, possui um risco de  $\sigma = 3\%$ , pede-se:

- a) Qual o risco mínimo possível para o conjunto de ativos dado, utilizando uma janela de 200 dias?
- b) Qual o máximo retorno possível respeitando-se a restrição posta no enunciado? Qual a composição dessa carteira?

2) Um determinado tipo de fundo de investimento de renda fixa permite, pelo seu estatuto, uma exposição em renda variável de no máximo 49% do seu patrimônio líquido. O administrador desse fundo acredita que o mercado de ações deve ser favorável no curto prazo e, portanto, deseja alavancar ao máximo o fundo em renda variável. Para uma janela de 400 dias, o universo de ativos de risco da pasta Data e uma taxa livre de risco de 18,5%, pede-se:

- a) Qual a maior exposição ao risco que o fundo pode ter, pressupondo que esse investidor siga a estratégia de assumir apenas posições compradas em ações?
- b) Qual o máximo retorno esperado possível, pressupondo que o investidor opte por uma carteira eficiente (assume-se a possibilidade “posições a descoberto”)?



- c) Qual o percentual de renda variável que ele deve usar para ter o risco igual ao da carteira de mínima variância global, mas com um retorno esperado superior? Essa composição fere o estatuto do fundo?
- 3) Um investidor tem a capacidade creditícia de tomar recursos em ativos de renda fixa para alavancar sua posição em renda variável. Imagine que ele possua R\$ 1.000.000,00 em recursos e que possa se alavancar em até R\$ 500.000,00. Para uma opção de investimento em renda variável equivalente à carteira representativa dos ativos de risco e considerando-se uma janela de 400 dias, pede-se:
- a) Assumindo que ele capte recursos no seu limite a uma taxa de 18,5%, qual o risco e o retorno esperado da carteira desse investidor?
- b) Imaginando que o investidor aplique comparativamente todos os seus recursos na carteira representativa dos ativos de risco, quanto ele deve captar a 18,5% para alavancar sua posição de maneira a dobrar o risco da carteira?

### Exercícios Propostos

- 4) Considere a matriz de covariância  $\Sigma$  e vetor de retornos esperados  $r$  como a seguir:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 4 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine os pesos das carteiras de mínima variância em função do retorno esperado  $\mu$ . Obtenha e trace a equação que relaciona  $\sigma \times \mu$  para as carteiras de mínima variância e destaque no gráfico a fronteira eficiente.
- b) Determine a carteira de mínima variância global  $\omega_g$ , o valor da variância  $\sigma_g^2$  e o retorno esperado  $\mu_g$  e a covariância dessa carteira com qualquer outra ( $cov(P_g, P)$ ).
- c) Verifique se as carteiras seguintes são ou não de mínima variância e, caso sejam, determine o retorno esperado  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$ . Identifique nesse caso também se a carteira é ou não eficiente.

$$i) \omega = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad ii) \omega = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{pmatrix}, \quad iii) \omega = \begin{pmatrix} 0,71875 \\ 0,06250 \\ 0,21875 \end{pmatrix}.$$

- d) Considere um ativo sem risco com retorno  $r_f = 0,2$ . Repita o item 4a) para este caso. Determine também a carteira eficiente formada apenas por ativos de risco  $\omega_M$ , sua média  $\mu_M$  e sua variância  $\sigma_M^2$ .

- e) Considere o caso de carteiras apenas com ativos de risco e que posições a descoberto não sejam permitidas (ou seja,  $\omega \geq 0$ ). Repita o item 4a) para este caso.
- f) Considere o caso em que se tem um ativo livre de risco com retorno  $r_f = 0,2$ , e que posições a descoberto não sejam permitidas em nenhum ativo (ou seja,  $\omega \geq 0$  e  $1 - e'\omega \geq 0$ ). Repita o item 4a) para este caso.
- 5) Resolva o seguinte problema de otimização que tem como função objetivo uma combinação de risco e retorno (lembre-se de que  $\alpha = e'\Sigma^{-1}e$ ,  $\gamma = r'\Sigma^{-1}r$ ,  $\psi = r'\Sigma^{-1}e$ ,  $\delta = \alpha\gamma - \psi^2$ ):

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\omega'\Sigma\omega - \frac{(\alpha\mu - \psi)}{\delta}\omega'r \\ \text{sujeito a} \quad & \omega'e = 1 \\ & \omega \in R^n. \end{aligned}$$

Compare a solução obtida com a solução do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \omega'\Sigma\omega \\ \text{sujeito a} \quad & \omega'e = 1 \\ & \omega'r = \mu \\ & \omega \in R^n. \end{aligned}$$

- 6) Mostre que para carteiras eficientes ( $\mu > \frac{\psi}{\alpha}$ ), tem-se

$$\sigma \frac{d\mu}{d\sigma} = \mu - \frac{\psi}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \frac{1}{\mu - \frac{\psi}{\alpha}}.$$

## Capítulo 3

# Modelos de Equilíbrio

Como colocado em [Farrell Jr., 1997], enquanto o Modelo de Markowitz fornece uma maneira ótima de se distribuir os recursos de um investimento em um conjunto de ativos, o CAPM — *Capital Asset Pricing Model*, desenvolvido simultaneamente por John Lintner [Lintner, 1965] e Willian Sharpe [Sharpe, 1964], é um modelo para o apreçamento de ativos pelo mercado em equilíbrio e dentro de um contexto de otimização por média-variância. Por meio do CAPM, o qual assume que todos os investidores utilizam a otimização por média-variância para a alocação de seus recursos, verifica-se que o risco (variância) de um ativo qualquer pode ser decomposto em dois termos: um inerente ao mercado (risco sistêmico) e outro que pode ser eliminado pela diversificação dos ativos (risco não-sistêmico). Essa relação entre os retornos dos ativos e uma carteira de referência (carteira de mercado) levou aos modelos por fatores que, ao contrário do CAPM, assumem diretamente que os retornos dos ativos são proporcionais a alguns índices de referência e incertezas inerentes ao próprio ativo em questão. Novamente, em uma situação de equilíbrio de mercado, de forma que não haja operações de arbitragem, o modelo por fatores leva a uma teoria para o apreçamento de ativos, conhecida como APT — *Arbitrage Pricing Theory*.

O CAPM é apresentado na Seção 3.1. Inicialmente define-se na Subseção 3.1.1 a carteira de mercado e verifica-se que em uma situação de equilíbrio econômico, com todos os investidores adotando uma estratégia de otimização por média-variância (com os mesmos parâmetros de entrada para o modelo), a carteira de mercado coincidirá com a carteira tangente  $\omega_T$  apresentada em (2.24). Na Subseção 3.1.2, apresenta-se o modelo de Sharpe-Lintner e o CAPM. Assume-se nesse caso que exista no mercado um ativo livre de risco, com uma taxa igual, tanto para emprestar como para tomar emprestado. Na Subseção 3.1.3, apresenta-se o modelo de Black, que não assume a existência desse ativo livre de risco. Casos alternativos, em que a taxa para emprestar é diferente da taxa para tomar emprestado, são analisados nas Subseções 3.1.4 e 3.1.5. As Seções 3.2, 3.3 e 3.4 discutem o conceito de risco sistêmico e não-sistêmico, análise de desempenho e uma fórmula de apreçamento utilizando o CAPM.

A Seção 3.5 trata de modelos de fatores que assumem que os retornos dos ativos do mercado são influenciados por alguns índices de referência, além de incertezas inerentes ao próprio ativo em questão. Em uma situação de equilíbrio do mercado, caracterizada pela inexistência de arbitragens, o modelo de fatores leva a uma teoria de apreçamento, descrita na Seção 3.6 e conhecida por APT. A Seção 3.7 descreve como o CAPM e o APT podem ser relacionados.

### 3.1 CAPM — *Capital Asset Pricing Model*

#### 3.1.1 A Carteira de Mercado

Inicialmente, define-se a carteira de mercado  $\omega_M$ . Considere  $m$  investidores atuando no mercado, cada um com uma carteira  $\omega^j$ , o valor total do investimento dado por  $V^j(0)$  e a estratégia de investimento dada por

$$H^j = \begin{pmatrix} H_1^j \\ \vdots \\ H_n^j \end{pmatrix}.$$

Representa-se por  $H_0^j$  o valor investido no ativo livre de risco. Logo,

$$V^j(0) = H_0^j + H_1^j S_1(0) + \dots + H_n^j S_n(0).$$

Lembra-se que

$$\omega_i^j = \frac{H_i^j S_i(0)}{V^j(0)}.$$

A carteira de mercado é definida como o valor total investido no ativo  $i$  em relação ao valor total de investimentos de risco, isto é

$$\omega_{Mi} = \frac{\sum_{j=1}^m H_i^j S_i(0)}{\sum_{j=1}^m e^j \omega^j V^j(0)} = \frac{\sum_{j=1}^m \omega_i^j V^j(0)}{\sum_{j=1}^m e^j \omega^j V^j(0)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Suponha que todos os investidores utilizem a solução ótima dada pela otimização por média-variância para o caso com um ativo sem risco com retorno  $r_f$ . Assim, o retorno  $P^j$  de todos os investidores, no equilíbrio, será da forma

$$P^j = \vartheta^j r_f + (1 - \vartheta^j) P_T, \quad j = 1, \dots, m, \quad P_T = \omega'_T R.$$

Ou seja, todos os investidores aplicam uma parcela no ativo livre de risco e outra na carteira tangente  $\omega_T$  com retorno  $P_T$ , comum a todos. Logo, o total investido no ativo  $i$  será simplesmente

$$\omega_{Ti} \sum_{j=1}^m (1 - \vartheta^j) V^j(0),$$

portanto, a carteira de mercado será

$$\omega_{Mi} = \frac{\omega_{Ti} \sum_{j=1}^m (1 - \vartheta^j) V^j(0)}{\sum_{j=1}^m (1 - \vartheta^j) V^j(0)} = \omega_{Ti}, i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

No equilíbrio, a carteira de mercado deve coincidir com a carteira tangente comum aos investidores que otimizam por média-variância. Desse modo, escreve-se  $\omega_M, \mu_M, \sigma_M$  em vez de  $\omega_T, \mu_T, \sigma_T$ .

A fronteira eficiente consiste uma linha partindo do retorno livre de risco  $r_f$  e tangenciando a carteira de mercado. Essa linha é chamada de linha do mercado, ou CML — *Capital Market Line* (veja a Figura 3.1). Note que, à medida que o risco aumenta, a rentabilidade também aumenta de forma linear, já que

$$\mu = r_f + \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M} \sigma. \quad (3.2)$$

O coeficiente angular  $b$  da reta (3.2), dado por  $b = \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M}$ , é chamado de “preço do risco”, pois diz em quanto aumenta a rentabilidade esperada da carteira quando é aumentado o risco em uma unidade.

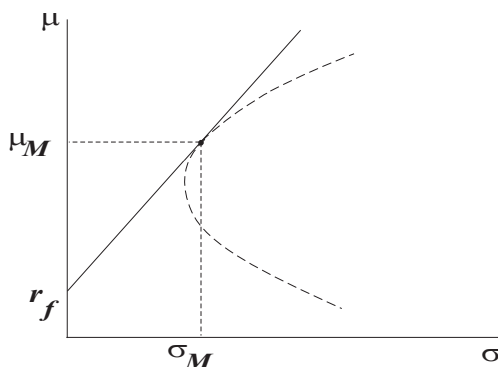


FIGURA 3.1: CML — *Capital Market Line*

**Exemplo 3.1** Suponha que ao ano apresentem-se os seguintes parâmetros:

$$r_f = 18\%, \mu_M = 25\%, \sigma_M = 40\%.$$

Considere uma pessoa que queira, partindo de R\$ 1.000,00, passar para R\$ 5.000,00 em 5 anos. Somente com o investimento livre de risco esse objetivo não seria alcançado, pois ao final de 5 anos o investidor teria  $(1,18)^5 \times 1.000,00 = 2.2878,00$ . Para atingir o objetivo desejado, a rentabilidade anual

da carteira deveria ser de  $5^{0,2} - 1 = 0,3797$ . Logo, a carteira eficiente para atingir esse objetivo teria o seguinte risco  $\sigma$ , dado pela Equação (3.2):

$$0,3797 = 0,18 + \frac{(0,25 - 0,18)}{0,40} \sigma \Rightarrow \sigma = 1,1413 = 114,13\%$$

que representa uma carteira com um risco elevado.

**Exemplo 3.2** Considere um investimento cujo retorno esperado após um ano seja  $\mu_I = 20\%$ , mas com risco  $\sigma_I = 30\%$ . A taxa de juros anual livre de risco no momento é  $r_f = 18\%$ . A rentabilidade esperada do mercado é  $\mu_M = 25\%$  e o desvio-padrão vale  $\sigma_M = 40\%$ . Vejamos como esse investimento se compara com a linha do mercado. Para um  $\sigma = 30\%$ , o retorno esperado pela linha do mercado seria

$$\mu = r_f + \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M} \sigma = 0,18 + \frac{(0,25 - 0,18)}{0,40} 0,30 = 23,25\%.$$

Logo, o valor esperado do investimento está abaixo do esperado pela linha do mercado (não representando uma carteira eficiente).

**Exemplo 3.3** Considera-se o mercado acionário da Bolsa de Valores de São Paulo, com a carteira de mercado sendo o IBovespa (que corresponde a uma carteira teórica composta por ações que, em conjunto, representam em torno de 80% do volume transacionado na Bolsa). O ativo livre de risco será a taxa de juros CDI — Certificado de Depósito Interbancário, que é a taxa pela qual os bancos emprestam e tomam emprestado recursos entre si. Para efeito de cálculo, considera-se o retorno médio no período. Os dados, tanto de juros como de renda variável, foram considerados em uma janela de 20 dias no período de 18/1/99 a 17/2/99. Os resultados são os seguintes:

$$\begin{aligned}\mu_M &= 1,43\%, \\ \sigma_M &= 3,26\%, \\ r_f &= 0,12\%.\end{aligned}$$

Com base nesses valores, é possível traçar a CML, conforme a Figura 3.2.

### 3.1.2 O Modelo de Sharpe-Lintner

Denota-se por  $\omega_M$  a carteira de mercado, com retorno  $P_M$ , retorno esperado  $\mu_M$  e variância  $\sigma_M^2$ . Supõe-se que a carteira de mercado  $P_M$  seja eficiente e coincida com a carteira tangente, isto é,  $\omega_M = \omega_T$ , conforme deduzido em (3.1). Obtém-se o seguinte resultado:

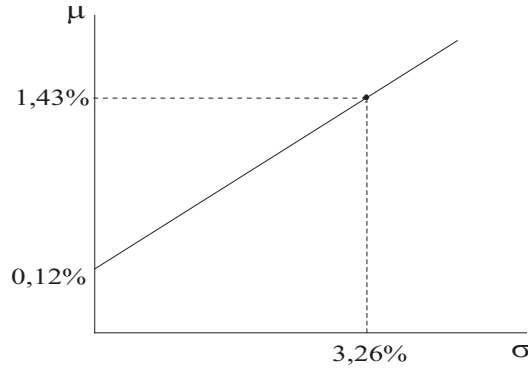


FIGURA 3.2: CML — *Capital Market Line*

**Teorema 3.1** *CAPM — Capital Asset Pricing Model: Para qualquer carteira  $\omega$  com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  tem-se que*

$$\mu = r_f + (\mu_M - r_f)\beta; \quad (3.3)$$

onde

$$\beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma_M^2}. \quad (3.4)$$

**Prova:** Considere uma carteira  $\omega(\xi)$  formada por uma proporção  $\xi$  na carteira  $\omega$  e  $1-\xi$  na carteira  $\omega_M$  (permite-se  $\xi < 0$ , que corresponde a tomar emprestado a uma taxa  $P$ ). Segue que o retorno dessa carteira  $P(\xi)$  é

$$P(\xi) = \xi P + (1 - \xi)P_M,$$

e o retorno esperado  $\mu(\xi)$  dessa carteira  $P(\xi)$  é dado por

$$\mu(\xi) = \xi\mu + (1 - \xi)\mu_M.$$

A variância  $\sigma^2(\xi)$  é dada por

$$\sigma^2(\xi) = (\xi \quad 1 - \xi) \begin{pmatrix} \sigma^2 & \text{cov}(P_M, P) \\ \text{cov}(P_M, P) & \sigma_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 1 - \xi \end{pmatrix}.$$

À medida que  $\xi$  varia, tem-se uma curva (hipérbole) no plano risco-retorno. Em  $\xi = 0$ , tem-se a carteira  $P_M$ , enquanto em  $\xi = 1$ , tem-se a carteira  $P$ . Essa curva não pode cruzar a linha do mercado, pois, se cruzasse, a carteira correspondente ao ponto logo acima da linha do mercado estaria violando a otimalidade da fronteira eficiente. Portanto, à medida que  $\xi$  varia em torno de

zero, a curva resultante deve ser tangente à linha do mercado correspondente à carteira  $\omega_M$ . Como visto no Capítulo 2, denotando

$$c = \sigma^2 + \sigma_M^2 - 2cov(P_M, P), d = \sigma_M^2 - cov(P_M, P), e = \mu - \mu_M,$$

segue que

$$\frac{1}{\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c}} \sigma(\xi)^2 - \frac{1}{(\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c})(\frac{e^2}{c})} (\mu(\xi) - (\mu_M + \frac{de}{c}))^2 = 1,$$

portanto,

$$\mu(\xi) = \sqrt{(\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c})(\frac{e^2}{c})} \sqrt{\frac{\sigma(\xi)^2}{\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c}} - 1} + \mu_M + \frac{de}{c}.$$

Calculando a derivada  $\frac{d\mu(\xi)}{d\sigma(\xi)}$ , obtém-se

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\sigma(\xi)} = \sqrt{(\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c})(\frac{e^2}{c})} \frac{\frac{\sigma(\xi)}{\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c}}}{\sqrt{\frac{\sigma(\xi)^2}{\sigma_M^2 - \frac{d^2}{c}} - 1}}$$

e, no ponto  $\sigma_M$  ( $\xi = 0$ ), segue que

$$\frac{d\mu(\xi)}{d\sigma(\xi)}|_{\sigma(0)=\sigma_M} = \frac{\mu_M - \mu}{\sigma_M^2 - cov(P_M, P)} \sigma_M.$$

Por sua vez, a linha do mercado possui derivada constante igual a

$$\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}.$$

Logo, igualando esses dois termos, obtém-se

$$\frac{\mu_M - \mu}{\sigma_M^2 - cov(P_M, P)} \sigma_M = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M},$$

ou seja,

$$\mu = r_f + \frac{cov(P_M, P)}{\sigma_M^2} (\mu_M - r_f).$$

■

O valor  $\beta$  é chamado de beta do ativo. O valor  $\mu - r_f$  é chamado de taxa de excesso de retorno esperado do investimento com retorno esperado  $\mu$  e, da mesma forma,  $\mu_M - r_f$  é chamado de taxa de excesso de retorno da carteira de mercado. O CAPM muda o conceito de risco do  $\sigma$  para o  $\beta$ , como ficará mais claro adiante.



**Exemplo 3.4** A taxa de juros anual livre de risco no momento é  $r_f = 18\%$ . A rentabilidade esperada do mercado é  $\mu_M = 25\%$  e o desvio-padrão vale  $\sigma_M = 40\%$ . Considere um investimento cuja covariância com o mercado seja 0,3. Conseqüentemente, conclui-se que o beta desse investimento é:

$$\beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma_M^2} = \frac{0,3}{0,40^2} = 1,87.$$

Portanto, o valor esperado deve ser

$$\mu = 0,18 + 1,87 \times (0,25 - 0,18) = 31,09\%.$$

A reta em  $(\mu, \beta)$

$$\mu = r_f + (\mu_M - r_f)\beta$$

é chamada de SML — *Security Market Line* (veja a Figura 3.3). Para  $\beta = 0$ , tem-se  $\mu = r_f$ , enquanto, para  $\beta = 1$ , tem-se  $\mu = \mu_M$ . Note que para as carteiras  $\omega$  na fronteira eficiente, com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , obtêm-se que

$$P = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_M}\right)r_f + \frac{\sigma}{\sigma_M}P_M$$

e

$$\mu = \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_M}\right)r_f + \frac{\sigma}{\sigma_M}\mu_M.$$

Logo,

$$\text{cov}(P, P_M) = E\left(\frac{\sigma}{\sigma_M}(P_M - \mu_M)^2\right) = \frac{\sigma}{\sigma_M}\sigma_M^2 = \sigma\sigma_M,$$

e, portanto, os valores de  $\beta$  ao longo das carteiras eficientes são:

$$\beta = \frac{\sigma\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma}{\sigma_M},$$

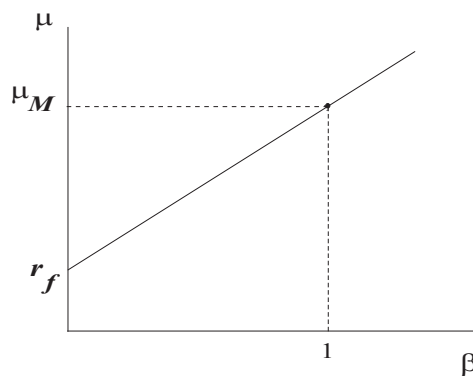


FIGURA 3.3: SML — *Security Market Line*

e, pela fórmula do CAPM,

$$\mu = r_f + (\mu_M - r_f) \frac{\sigma}{\sigma_M},$$

estando de acordo com a equação para a linha do mercado.

Empresas conservadoras possuem  $\beta$  menor, enquanto empresas mais agressivas possuem o  $\beta$  maior. Note que

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\sum_{i=1}^n \omega_i R_i, P_M\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n \omega_i (R_i - r_i)\right)(P_M - \mu_M)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i E((R_i - r_i)(P_M - \mu_M)) = \sum_{i=1}^n \omega_i \text{cov}(R_i, P_M), \end{aligned}$$

portanto, chamando de  $\beta_P$  o beta de uma carteira  $\omega$  com retorno

$$P = (1 - \omega' e) r_f + \omega' R,$$

e  $\beta_i$  os betas dos ativos básicos, decorre que

$$\begin{aligned} \beta_P &= \frac{\text{cov}(P, P_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(\sum_{i=1}^n \omega_i R_i, P_M)}{\sigma_M^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\text{cov}(R_i, P_M)}{\sigma_M^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_i. \end{aligned}$$

TABELA 3.1: Beta e retorno de ativos do IBovespa

Ativo $A_i$	$\beta$	$\mu(\%)$
Telesp rctb RPN	1,11	1,43
Eletróbrás PNB	0,39	3,85
Petrobras PN	0,04	2,72
Cemig PN	0,66	1,57
Telesp PN	0,93	1,15
Banespa PN	1,14	1,35
Vale PNA	0,40	0,48
Bradesco PN	0,50	1,71
Telesp cl PNB	0,56	1,52

**Exemplo 3.5** Retornando ao Exemplo 3.3 e tomando as principais ações que, em conjunto, representam praticamente todo o IBovespa. As ações, com seus respectivos betas e retornos calculados no período mencionado no Exemplo 3.3, são apresentadas na Tabela 3.1. Para verificar o modelo CAPM nas condições do mercado acionário brasileiro, considerando o IBovespa como carteira de mercado, traçam-se a SML teórica e os pontos da Tabela 3.1, conforme a Figura 3.4. Percebe-se a partir da Figura 3.4 que, dentro de certa tolerância, 4 dos 9 pontos se comportam de acordo com a SML teórica do modelo.

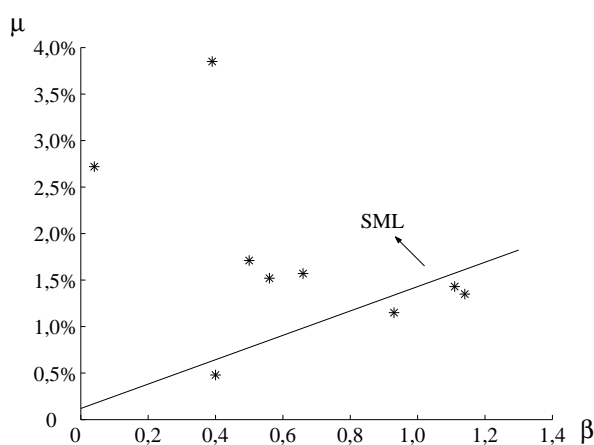


FIGURA 3.4: SML e  $\beta \times \mu$

Finalmente, conclui-se esta seção ressaltando que o Teorema 3.1 permaneceria válido mesmo se posições a descoberto nos ativos de risco fossem proibidas. De fato, a fronteira eficiente nesse caso seria formada por hipérboles concatenadas (veja o Exemplo 2.2), de modo que o raciocínio da prova do Teorema 3.1 permaneceria válido.

### 3.1.3 O Modelo de Black

A hipótese de que os investidores podem emprestar e tomar emprestado sem restrições à taxa  $r_f$  pode não ser razoável. Empréstado a essa taxa pode ser aceitável, pois corresponderia a comprar títulos públicos. Entretanto, tomar emprestado não parece ser ideal. Considera-se inicialmente a situação em que não se tem um ativo sem risco  $r_f$ . Outras situações serão abordadas mais adiante.

Suponha que todos os investidores utilizem a solução ótima eficiente dada pela otimização por média-variância para o caso apenas com ativos de risco.

Assim, o retorno  $P^j$  de todos os investidores, no equilíbrio, será da forma

$$P^j = \omega^{j'} R, \quad \omega_i^j = \frac{H_i^j(0)S_i(0)}{V^j(0)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Como todas as carteiras são eficientes, têm-se os retornos  $\mu^j > \frac{\psi}{\alpha}$ . Portanto, a carteira de mercado será

$$\omega_{Mi} = \frac{\sum_{j=1}^m H_i^j(0)S_i(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)} = \frac{\sum_{j=1}^m \omega_i^j V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)}$$

e o retorno será dado por

$$\begin{aligned} P_M &= \omega'_M R = \sum_{i=1}^n \omega_{Mi} R_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\omega_i^j V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)} R_i \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)} \sum_{i=1}^n \omega_i^j R_i \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)} \omega^{j'} R \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)} P^j \\ &= \sum_{j=1}^m \xi^j P^j, \end{aligned}$$

em que

$$\xi^j = \frac{V^j(0)}{\sum_{k=1}^m V^k(0)}.$$

Obviamente,  $0 < \xi^j < 1$  e

$$\sum_{j=1}^m \xi^j = 1.$$

A carteira de mercado é formada por carteiras de mínima variância e, da Proposição 2.2 segue que também é de mínima variância. Como  $\mu^j > \frac{\psi}{\alpha}$  para todo  $j$ , tem-se que

$$\mu_M = \sum_{j=1}^m \xi^j \mu^j > \frac{\psi}{\alpha} \sum_{j=1}^m \xi^j = \frac{\psi}{\alpha};$$

portanto, no equilíbrio, a carteira de mercado é eficiente. Obtém-se, então, o modelo de Black para o apreçamento de ativos.

**Teorema 3.2** *O Modelo de Black: Suponha que a carteira de mercado  $\omega_M$ , com retorno  $P_M$ , retorno esperado  $\mu_M$  e variância  $\sigma_M^2$ , seja eficiente quando se consideram apenas ativos de risco, e seja  $\omega_{oM}$  a carteira zero-beta em relação à carteira de mercado, com retorno  $\mu_{oM}$ . Para qualquer carteira  $\omega$  com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , tem-se que*

$$\mu = \mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta, \quad (3.5)$$

em que

$$\beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma_M^2}.$$

**Prova:** Segue o mesmo raciocínio que a prova do Teorema 3.1. ■

### 3.1.4 Posição Vendida na Taxa Livre de Risco Proibida

Considera-se a situação em que se pode emprestar, mas não se pode tomar emprestado à taxa livre de risco. Desse modo, o gráfico da fronteira eficiente no plano risco-retorno consistiria em um segmento de reta de  $r_f$  até o ponto de tangência da hipérbole (3.6) e a partir desse ponto seguiria a equação da hipérbole,

$$\frac{1}{(1/\alpha)}\sigma^2 - \frac{1}{(\delta/\alpha^2)}\left(\mu - \frac{\psi}{\alpha}\right)^2 = 1, \quad (3.6)$$

conforme descrito na Figura 3.5 (linha contínua). Esse ponto de tangência representaria uma carteira que será denominada de carteira tangente e denotada por  $\omega_T$ , com retorno  $P_T$ , retorno esperado  $\mu_T$  e variância  $\sigma_T^2$ . A partir desse ponto, a fronteira eficiente seguiria a hipérbole, visto que não seria possível obter rentabilidades maiores do que  $\mu_T$  mantendo o ativo sem risco na

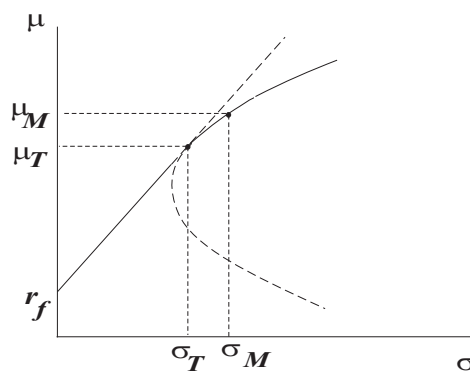


FIGURA 3.5: Fronteira eficiente

carteira. Essas rentabilidades seriam obtidas por meio de carteiras compostas inteiramente por ativos de risco.

Da mesma forma que nas Subseções 3.1.1 e 3.1.3, assuma que todos os investidores montem as suas estratégias de investimento de forma eficiente, conforme a Figura 3.5. Para  $j = 1, \dots, m_r$ , considere  $P^j$  os retornos de todos os investidores (eficientes) com apenas ativos de risco nas suas carteiras, ou seja, da forma

$$P^j = \omega^{j'} R, \omega_i^j = \frac{H_i^j S_i(0)}{V^j(0)}, j = 1, \dots, m_r.$$

Nesse caso, todos os retornos esperados  $\mu^j$  são maiores que  $\mu_T$  (isto é,  $\mu^j \geq \mu_T$ ). Para  $j = m_r + 1, \dots, m$ , considere  $P^j$  os retornos de todos os outros investidores (eficientes), ou seja, com ativos de risco e sem risco nas suas carteiras, da forma

$$P^j = (1 - \vartheta^j) r_f + \vartheta^j P_T, j = m_r + 1, \dots, m.$$

Note que  $0 \leq \vartheta^j \leq 1$ , pois não são permitidas posições a descoberto no ativo livre de risco. Deve-se ter nesse caso  $r_f \leq \mu^j \leq \mu_T$ . Portanto, a carteira de mercado será

$$\begin{aligned} \omega_{Mi} &= \frac{\sum_{j=1}^m H_i^j S_i(0)}{\sum_{k=1}^{m_r} V^k(0) + \sum_{k=m_r+1}^m \vartheta^k V^k(0)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_r} \omega_i^j V^j(0) + \sum_{j=m_r+1}^m \vartheta^j \omega_{Ti} V^j(0)}{\sum_{k=1}^{m_r} V^k(0) + \sum_{k=m_r+1}^m \vartheta^k V^k(0)} \end{aligned}$$

e o retorno será dado por

$$\begin{aligned} P_M &= \omega'_M R = \sum_{i=1}^n \omega_{Mi} R_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_r} \frac{\omega_i^j V^j(0)}{\Upsilon} R_i + \sum_{j=m_r+1}^m \frac{\vartheta^j \omega_{Ti} V^j(0)}{\Upsilon} R_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m_r} \frac{V^j(0)}{\Upsilon} \omega^{j'} R + \sum_{j=m_r+1}^m \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} \omega'_T R \\ &= \sum_{j=1}^{m_r} \frac{V^j(0)}{\Upsilon} P^j + \sum_{j=m_r+1}^m \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} P_T \\ &= \sum_{j=1}^{m_r} \xi^j P^j + \sum_{j=m_r+1}^m \xi^j P_T, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \sum_{k=1}^{m_r} V^k(0) + \sum_{k=m_r+1}^m \vartheta^k V^k(0), \\ \xi^j &= \frac{V^j(0)}{\Upsilon}, \quad j = 1, \dots, m_r, \\ \xi^j &= \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon}, \quad j = m_r + 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Obviamente,  $0 \leq \xi^j \leq 1$  e

$$\sum_{j=1}^m \xi^j = 1.$$

Como  $\mu^j \geq \mu_T$ ,  $j = 1, \dots, m_r$ , tem-se

$$\mu_M = \sum_{j=1}^{m_r} \xi^j \mu^j + \left( \sum_{j=m_r+1}^m \xi^j \right) \mu_T \geq \sum_{j=1}^m \xi^j \mu_T = \mu_T.$$

Logo, a carteira de mercado é eficiente e tem rentabilidade esperada maior que  $\mu_T$  (veja a Figura 3.5). Portanto, a carteira zero-beta  $\omega_{oM}$  em relação à carteira de mercado possui rentabilidade esperada  $\mu_{oM}$  que satisfaz

$$\mu_{oM} \geq r_f.$$

A partir do Teorema 3.2, qualquer carteira  $\omega$  com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e composta apenas por ativos de risco satisfaz à equação

$$\mu = \mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta, \quad (3.7)$$

em que

$$\beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma_M^2}.$$

Considere uma carteira  $\omega$  qualquer com rentabilidade  $P$  dada por

$$P = (1 - \vartheta)r_f + \vartheta P_r, \quad (3.8)$$

na qual  $P_r$  representa a rentabilidade de uma carteira com 100% de ativos de risco, isto é,  $P = \omega'_r R$  com  $\omega'_r e = 1$  e  $0 \leq \vartheta \leq 1$ . Como

$$\begin{aligned}\text{cov}(P, P_M) &= E((P - E(P))(P_M - E(P_M))) \\ &= \vartheta E((P_r - E(P_r))(P_M - E(P_M))) \\ &= \vartheta \text{cov}(P_r, P)\end{aligned} \quad (3.9)$$

segue de (3.9) que

$$\beta = \vartheta \beta_r. \quad (3.10)$$

A partir da Equação (3.7), e lembrando que  $P_r$  é formada com 100% de ativos de risco, segue que

$$E(P_r) = \mu_r = \mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta_r. \quad (3.11)$$

De (3.8), (3.10) e (3.11), tem-se que

$$\begin{aligned} \mu &= E(P) \\ &= (1 - \vartheta)r_f + \vartheta\mu_r \\ &= r_f + \vartheta(\mu_r - r_f) \\ &= r_f + \frac{\beta}{\beta_r}(\mu_r - r_f) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= r_f + \frac{\beta}{\beta_r}(\mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta_r - r_f) \\ &= r_f + \beta\left(\frac{1}{\beta_r}(\mu_{oM} - r_f) + (\mu_M - \mu_{oM})\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

com  $0 \leq \frac{\beta}{\beta_r} \leq 1$ . No plano  $\beta \times \mu$ , a Equação (3.13) representa um segmento de reta de  $r_f$  até a reta (3.7) em  $\beta = \beta_r$ . Para  $\beta = \beta_r$  em (3.12), tem-se  $\mu = \mu_r$ . A Figura 3.6 mostra um exemplo do gráfico representado pela Equação (3.13). Para carteiras eficientes, tem-se  $P_r = P_T$ , de modo que  $\beta_r = \beta_T$  e, lembrando que

$$P = (1 - \vartheta)r_f + \vartheta P_T \Rightarrow Var(P) = \vartheta^2 Var(P_T),$$

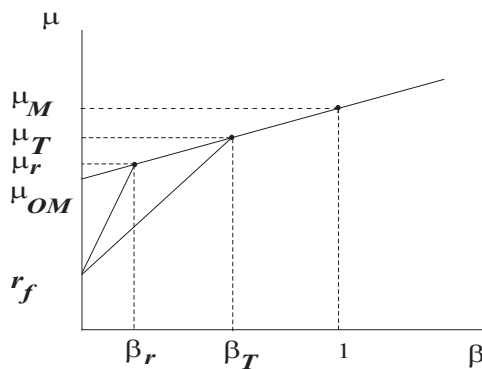


FIGURA 3.6: SML — *Security Market Line*



segue a partir de (3.12) que

$$\begin{aligned}\mu &= r_f + \frac{\beta}{\beta_T}(\mu_T - r_f) \\ &= r_f + \vartheta(\mu_T - r_f) \\ &= r_f + \frac{\sigma}{\sigma_T}(\mu_T - r_f),\end{aligned}\tag{3.14}$$

a qual corresponde ao segmento de reta da carteira eficiente entre  $r_f$  e a hipérbole (3.6), conforme apresentado na Figura 3.5.

### 3.1.5 Duas Taxas Livres de Risco

Considere a situação em que a taxa livre de risco para tomar emprestado, denotada por  $r_b$ , é maior que a taxa livre de risco para emprestar, denotada por  $r_a$  (ou seja,  $r_b > r_a$ ). A fronteira eficiente nesse caso é formada por um segmento de reta, um segmento de hipérbole e uma semi-reta. O primeiro trecho da fronteira eficiente consiste em um segmento de reta partindo de  $r_a$  até o ponto em que a reta tangencia a hipérbole (3.6), representando carteiras eficientes que investem no ativo livre de risco  $r_a$  (posições compradas) e na carteira tangente, denotada por  $\omega_a$ , com retorno  $P_a$ , retorno esperado  $\mu_a$  e variância  $\sigma_a^2$ . O segundo trecho da fronteira eficiente acompanha a hipérbole (3.6) do ponto  $(\sigma_a, \mu_a)$  até o ponto de tangência da reta que parte do ponto  $r_b$  com a hipérbole (3.6), o qual representa a carteira tangente denotada por  $\omega_b$ , com retorno  $P_b$ , retorno esperado  $\mu_b$  e variância  $\sigma_b^2$ . Carteiras nesse trecho correspondem a carteiras eficientes com 100% de ativos de risco, e com remuneração esperada entre  $\mu_a$  e  $\mu_b$ . Por fim, o último trecho da fronteira eficiente segue a semi-reta partindo do ponto  $(\sigma_b, \mu_b)$ , com coeficiente angular  $\frac{\mu_b - r_b}{\sigma_b}$ , representando carteiras eficientes com posições a descoberto no ativo livre de risco  $r_b$ , alavancadas na carteira tangente  $\omega_b$  e com retorno esperado maior que  $\mu_b$ . A Figura 3.7 ilustra a fronteira eficiente (em linha contínua) para esse caso.

Assuma novamente, como nas Subseções 3.1.1, 3.1.3 e 3.1.4, que todos os investidores montem as suas estratégias de investimento de forma eficiente, conforme a Figura 3.7. Para  $m_a \leq j \leq m_b$ , considere  $P^j$  os retornos de todos os investidores (eficientes) com apenas ativos de risco nas suas carteiras, ou seja, da forma

$$P^j = \omega^{j'} R, \quad \omega_i^j = \frac{H_i^j S_i(0)}{V^j(0)}, \quad m_a \leq j \leq m_b.$$

Nesse caso, os retornos esperados  $\mu^j$  são maiores que  $\mu_a$  e menores que  $\mu_b$  (isto é,  $\mu_a \leq \mu^j \leq \mu_b$ ). Para  $j = 1, \dots, m_a - 1$ , considere  $P^j$  os retornos de todos os investidores (eficientes) com ativos de risco e sem risco  $r_a$  (posição comprada)

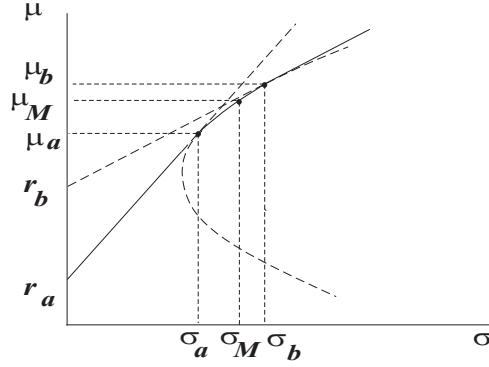


FIGURA 3.7: Fronteira eficiente

nas suas carteiras, ou seja, da forma

$$P^j = (1 - \vartheta^j)r_a + \vartheta^j P_a, \quad j = 1, \dots, m_a - 1.$$

Note que  $0 \leq \vartheta^j \leq 1$ , pois não são permitidas posições a descoberto no ativo livre de risco  $r_a$ . Deve-se ter nesse caso  $r_a \leq \mu^j \leq \mu_a$ . Por fim, considere para  $j = m_b + 1, \dots, m$ ,  $P^j$  os retornos de todos os investidores (eficientes) com ativos de risco e sem risco  $r_b$  (posição vendida) nas suas carteiras, ou seja, da forma

$$P^j = (1 - \vartheta^j)r_b + \vartheta^j P_b, \quad j = m_b + 1, \dots, m.$$

Observe que  $\vartheta^j \geq 1$ , pois somente posições a descoberto são permitidas no ativo livre de risco  $r_b$ . Deve-se ter nesse caso  $\mu^j \geq \mu_b$ .

Portanto, a carteira de mercado será

$$\begin{aligned} \omega_{Mi} &= \frac{\sum_{j=1}^m H_i^j S_i(0)}{\sum_{k=1}^{m_a-1} \vartheta^k V^k(0) + \sum_{k=m_a}^{m_b} V^k(0) + \sum_{k=m_b+1}^m \vartheta^k V^k(0)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_a-1} \vartheta^j \omega_{ai} V^j(0) + \sum_{j=m_a}^{m_b} \omega_i^j V^j(0) + \sum_{j=m_b+1}^m \vartheta^j \omega_{bi} V^j(0)}{\sum_{k=1}^{m_a-1} \vartheta^k V^k(0) + \sum_{k=m_a}^{m_b} V^k(0) + \sum_{k=m_b+1}^m \vartheta^k V^k(0)}, \end{aligned}$$

e o retorno será dado por

$$\begin{aligned}
 P_M &= \omega'_M R = \sum_{i=1}^n \omega_{Mi} R_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{m_a-1} \frac{\vartheta^j \omega_{ai} V^j(0)}{\Upsilon} R_i + \sum_{j=m_a}^{m_b} \frac{\omega_i^j V^j(0)}{\Upsilon} R_i + \sum_{j=m_b+1}^m \frac{\vartheta^j \omega_{bi} V^j(0)}{\Upsilon} R_i \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{m_a-1} \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} \omega'_a R + \sum_{j=m_a}^{m_b} \frac{V^j(0)}{\Upsilon} \omega'^j R + \sum_{j=m_b+1}^m \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} \omega'_b R \\
 &= \sum_{j=1}^{m_a-1} \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} P_a + \sum_{j=m_a}^{m_b} \frac{V^j(0)}{\Upsilon} P^j + \sum_{j=m_b+1}^m \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon} P_b \\
 &= \sum_{j=1}^{m_a-1} \xi^j P_a + \sum_{j=m_a}^{m_b} \xi^j P^j + \sum_{j=m_b+1}^m \xi^j P_b,
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \Upsilon &= \sum_{k=1}^{m_a-1} \vartheta^k V^k(0) + \sum_{k=m_a}^{m_b} V^k(0) + \sum_{k=m_b+1}^m \vartheta^k V^k(0), \\
 \xi^j &= \frac{V^j(0)}{\Upsilon}, \quad j \in \{m_a, \dots, m_b\}, \\
 \xi^j &= \frac{\vartheta^j V^j(0)}{\Upsilon}, \quad j \in \{1, \dots, m_a-1\} \cup \{m_b+1, \dots, m\}.
 \end{aligned}$$

Obviamente,  $0 \leq \xi^j \leq 1$ , e

$$\sum_{j=1}^m \xi^j = 1.$$

Como  $\mu_a \leq \mu^j \leq \mu_b$ , para  $j = m_a, \dots, m_b$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
 \mu_M &= \sum_{j=1}^{m_a-1} \xi^j \mu_a + \sum_{j=m_a}^{m_b} \xi^j \mu^j + \sum_{j=m_b+1}^m \xi^j \mu_b \\
 &\geq \sum_{j=1}^{m_a-1} \xi^j \mu_a + \sum_{j=m_a}^{m_b} \xi^j \mu_a + \sum_{j=m_b+1}^m \xi^j \mu_a = \mu_a,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mu_M &= \sum_{j=1}^{m_a-1} \xi^j \mu_a + \sum_{j=m_a}^{m_b} \xi^j \mu^j + \sum_{j=m_b+1}^m \xi^j \mu_b \\
 &\leq \sum_{j=1}^{m_a-1} \xi^j \mu_b + \sum_{j=m_a}^{m_b} \xi^j \mu_b + \sum_{j=m_b+1}^m \xi^j \mu_b = \mu_b.
 \end{aligned}$$

Logo, a carteira de mercado é eficiente e tem rentabilidade esperada entre  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , isto é,  $\mu_a \leq \mu_M \leq \mu_b$  (veja a Figura 3.7). Portanto, a carteira zero-beta  $\omega_{oM}$  em relação à carteira de mercado possui rentabilidade esperada  $\mu_{oM}$ , satisfazendo

$$r_a \leq \mu_{oM} \leq r_b.$$

Obtém-se agora uma relação entre o retorno esperado e o beta de uma carteira qualquer. A partir do Teorema 3.2, qualquer carteira  $\omega$  com retorno  $P$  e retorno esperado  $\mu$ , e composta apenas por ativos de risco, satisfaz à Equação (3.7), em que

$$\beta = \frac{\text{cov}(P_M, P)}{\sigma_M^2}.$$

Considere uma carteira  $\omega$  qualquer com rentabilidade  $P$  dada por

$$P = (1 - \vartheta)r_a + \vartheta P_r,$$

na qual  $P_r$  representa a rentabilidade de uma carteira com 100% de ativos de risco, isto é,  $P = \omega'_r R$  com  $\omega'_r e = 1$  e  $0 \leq \vartheta \leq 1$ . Como analisado na Subseção 3.1.4, a Equação (3.13) (substituindo  $r_f$  por  $r_a$ ) representa a relação entre  $\mu$  e  $\beta$  no plano  $\beta \times \mu$  (um segmento de reta de  $r_a$  até a reta (3.7) em  $\beta = \beta_r$ ). Será considerada agora uma carteira  $\omega$  qualquer com rentabilidade  $P$  dada por

$$P = (1 - \vartheta)r_b + \vartheta P_r, \quad (3.15)$$

em que novamente  $P_r$  representa a rentabilidade de uma carteira com 100% de ativos de risco, isto é,  $P = \omega'_r R$  com  $\omega'_r e = 1$  e  $\vartheta \geq 1$  (posições a descoberto em  $r_b$ ). Da mesma forma que em (3.9), tem-se que

$$\begin{aligned} \text{cov}(P, P_M) &= E((P - E(P))(P_M - E(P_M))) \\ &= \vartheta E((P_r - E(P_r))(P_M - E(P_M))) \\ &= \vartheta \text{cov}(P_r, P) \end{aligned} \quad (3.16)$$

e segue a partir de (3.16) que

$$\beta = \vartheta \beta_r. \quad (3.17)$$

A partir da Equação (3.7) e lembrando que  $P_r$  é formada com 100% de ativos de risco, segue que

$$E(P_r) = \mu_r = \mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta_r. \quad (3.18)$$

De (3.15), (3.17) e (3.18), tem-se que

$$\begin{aligned}\mu &= E(P) \\ &= (1 - \vartheta)r_b + \vartheta\mu_r \\ &= r_b + \vartheta(\mu_r - r_b) \\ &= r_b + \frac{\beta}{\beta_r}(\mu_r - r_b)\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&= r_b + \frac{\beta}{\beta_r}(\mu_{oM} + (\mu_M - \mu_{oM})\beta_r - r_b) \\ &= r_b + \beta\left(\frac{1}{\beta_r}(\mu_{oM} - r_b) + (\mu_M - \mu_{oM})\right)\end{aligned}\tag{3.20}$$

com  $\beta \geq \beta_r$ . No plano  $\beta \times \mu$ , a Equação (3.20) representa uma semi-reta partindo do ponto  $(\beta_r, \mu_r)$  com inclinação  $\frac{\mu_r - r_b}{\beta_r}$ , como pode ser facilmente verificado a partir de (3.19). A Figura 3.8 mostra um exemplo do gráfico representado pelas Equações (3.13) e (3.20). Para carteiras eficientes, tem-se  $P_r = P_b$ , de modo que  $\beta_r = \beta_b$  e, lembrando que

$$P = (1 - \vartheta)r_b + \vartheta P_b \Rightarrow \text{Var}(P) = \vartheta^2 \text{Var}(P_b),$$

segue a partir de (3.19)

$$\begin{aligned}\mu &= r_b + \frac{\beta}{\beta_b}(\mu_b - r_b) \\ &= r_b + \vartheta(\mu_b - r_b) \\ &= r_b + \frac{\sigma}{\sigma_b}(\mu_b - r_b),\end{aligned}$$

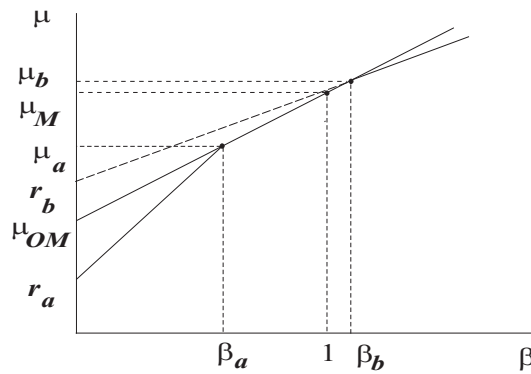


FIGURA 3.8: SML — *Security Market Line*

a qual corresponde à semi-reta da carteira eficiente partindo de  $(\sigma_b, \mu_b)$  e com inclinação  $\frac{\mu_b - r_b}{\sigma_b}$ , conforme mostrando na Figura 3.7. Para carteiras eficientes da forma  $P = (1 - \vartheta)r_a + \vartheta P_a$ , verifica-se com base em (3.14) que a fronteira eficiente corresponde ao segmento de reta partindo de  $r_a$  até a hipérbole (3.6), conforme apresentado na Figura 3.7.

### 3.2 Risco Sistemico e Não-sistêmico

É possível representar o retorno  $P$  de uma carteira da seguinte forma:

$$P = r_f + \beta(P_M - r_f) + Z,$$

em que  $Z$  é uma variável aleatória. Com base na fórmula do CAPM,

$$\mu = E(P) = r_f + \beta(\mu_M - r_f) = r_f + \beta(\mu_M - r_f) + E(Z),$$

portanto  $E(Z) = 0$ . Além disso, como

$$Z = (P - \mu) - (r_f + \beta(P_M - r_f) - \mu) = (P - \mu) - \beta(P_M - \mu_M)$$

decorre que

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z, P_M) &= E(Z(P_M - \mu_M)) \\ &= E(((P - \mu) - \beta(P_M - \mu_M))(P_M - \mu_M)) \\ &= \text{cov}(P, P_M) - \beta\sigma_M^2 \\ &= \text{cov}(P, P_M) - \frac{\text{cov}(P, P_M)}{\sigma_M^2}\sigma_M^2 = 0, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\sigma^2 = \text{Var}(P) = \beta^2 \text{Var}(P_M) + \text{Var}(Z) = \beta^2 \sigma_M^2 + \text{Var}(Z). \quad (3.21)$$

O termo  $\beta^2 \sigma_M^2$  representa o risco sistemico associado ao mercado e não pode ser reduzido por diversificação. O termo  $\text{Var}(Z)$  representa o risco não-sistêmico, pois  $Z$  é descorrelacionado da carteira de mercado e é específico da carteira em questão. Pode ser atenuado à medida que se aumenta a diversificação dos ativos que compõem a carteira. No caso de carteiras eficientes,  $\beta = \frac{\sigma}{\sigma_M}$ , portanto,

$$\sigma^2 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_M}\right)^2 \sigma_M^2 + \text{Var}(Z) = \sigma^2 + \text{Var}(Z),$$

ou seja,  $\text{Var}(Z) = 0$ . Logo, para carteiras eficientes tem-se apenas o risco sistemico.

**Exemplo 3.6** Para verificar o comportamento do risco não-sistêmico na diversificação dos ativos são montadas carteiras com diferentes números de ativos. Para tanto, são considerados os ativos da Tabela 3.1. Montou-se, então, a Tabela 3.2, na qual cada nova linha representa a inclusão de um novo ativo, com o mesmo peso dos anteriores, na composição de uma carteira  $C$ . A Figura 3.9 apresenta o gráfico do risco  $\sigma_C$  da carteira  $C$  pelo número de ativos  $n$  que a compõem.

TABELA 3.2: Risco sistêmico, não-sistêmico e total

$n$	Ativo	$\beta^2 \sigma_M^2 (\%^2)$	$Var(Z) (\%^2)$	$\sigma_C (\%)$
1	Eletrobrás PNB	0,0165	0,7217	8,59
2	Petrobras	0,0051	0,2657	5,20
3	Cemig PN	0,0143	0,1327	3,83
4	Telesp PN	0,0273	0,0766	3,22
5	Banespa PN	0,0425	0,0565	3,15
6	Vale PNA	0,0375	0,0448	2,87
7	Bradesco PN	0,0358	0,0340	2,64
8	Telesp cl PNB	0,0355	0,0302	2,56

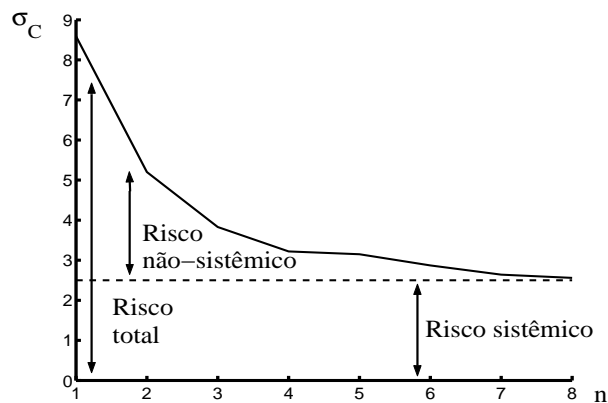


FIGURA 3.9: Decomposição do risco

### 3.3 Avaliação de Desempenho

A teoria CAPM pode ser usada para avaliar o desempenho de uma carteira de investimentos. Considere que um determinado fundo de investimento tenha tido retorno  $P(k)$  em cada instante de tempo  $k = 1, \dots, T$ . No mesmo período, suponha que a carteira de mercado tenha tido retornos  $P_M(k)$ , e o investimento livre de risco, retornos  $r_f(k)$ .

A partir desses dados, pode-se estimar o retorno esperado  $\hat{\mu}$  para o fundo de investimento, o retorno esperado da carteira de mercado  $\hat{\mu}_M$  e o retorno esperado do ativo livre de risco  $\hat{r}_f$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T P(k) \\ \hat{\mu}_M &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T P_M(k) \\ \hat{r}_f &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T r_f(k).\end{aligned}$$

Da mesma maneira, é possível estimar a variância  $\hat{\sigma}^2$  para o fundo de investimento, a variância  $\hat{\sigma}_M^2$  para a carteira de mercado e o beta  $\hat{\beta}$  do fundo de investimento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (P(k) - \hat{\mu})^2 \\ \hat{\sigma}_M^2 &= \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (P_M(k) - \hat{\mu}_M)^2 \\ \widehat{cov}(P, P_M) &= \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (P(k) - \hat{\mu})(P_M(k) - \hat{\mu}_M) \\ \hat{\beta} &= \frac{\widehat{cov}(P, P_M)}{\hat{\sigma}_M^2}.\end{aligned}$$

Pela fórmula do CAPM, a seguinte equação deveria ser satisfeita:

$$\mu = r_f + \beta(\mu_M - r_f).$$

O índice de Jensen  $J$  representa a diferença entre a rentabilidade observada na prática e a rentabilidade teórica da fórmula do CAPM, isto é,

$$J = \hat{\mu} - \hat{r}_f - (\hat{\beta}(\hat{\mu} - \hat{r}_f)).$$



Portanto, valores positivos de  $J$  sugerem que a rentabilidade observada foi acima do que seria esperado, indicando um bom desempenho do fundo segundo esse critério. Por sua vez, valores negativos indicariam um desempenho abaixo do esperado. Note que essa análise não considera o risco da carteira, comparando apenas a rentabilidade observada com o seu valor teórico previsto pela fórmula do CAPM.

Um outro índice de desempenho fornecido pela análise por média-variância e que levaria em conta o risco  $\hat{\sigma}^2$  do fundo seria o índice de Sharpe  $S_F$ . Se o fundo de investimento considerado fosse uma carteira eficiente, a seguinte equação (CML) deveria ser satisfeita:

$$\mu = r_f + \frac{\sigma}{\sigma_M}(\mu_M - r_f),$$

ou seja,

$$\frac{\mu - r_f}{\sigma} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}.$$

Definindo

$$S_M = \frac{\hat{\mu}_M - \hat{r}_f}{\hat{\sigma}_M}, \quad S_F = \frac{\hat{\mu} - \hat{r}_f}{\hat{\sigma}},$$

resultaria, para o caso em que o fundo de investimento é uma carteira eficiente,  $S_M = S_F$ . Valores de  $S_F$ , tais que  $S_F \geq S_M$ , indicariam um desempenho do fundo, considerando o seu risco e retorno, acima do que seria esperado para uma carteira eficiente (o que teoricamente não seria possível). Da mesma forma, valores de  $S_F$ , tais que  $S_F \leq S_M$ , indicariam um desempenho, em termos de risco e retorno, abaixo de uma carteira eficiente.

Apresenta-se uma aplicação desses índices por meio de um exemplo.

**Exemplo 3.7** Considere um fundo de investimento, cujo retorno nos últimos 10 anos tenha sido como na Tabela 3.3. Considere também o retorno da carteira de mercado (IBovespa) e do título público do governo (CDI), como mostrado na tabela. Deseja-se avaliar esse fundo usando a teoria do CAPM. Para isso calcula-se a média e a variância do fundo, ou seja,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}$  do fundo:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} P(k) = 20,9\% \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (P(k) - \hat{\mu})^2 = (16,9\%)^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma, calcula-se  $\hat{\mu}_M$  e  $\hat{\sigma}_M$  do mercado:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_M &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} P_M(k) = 18,9\% \\ \hat{\sigma}_M^2 &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (P_M(k) - \hat{\mu}_M)^2 = (13,9\%)^2. \end{aligned}$$

TABELA 3.3: Retornos do fundo, do mercado e do título público

Ano	Fundo	Mercado	Título
1	35,0%	30,0%	15,0%
2	18,0%	19,0%	15,0%
3	30,0%	25,0%	15,5%
4	-8,0%	-2,0%	16,0%
5	25,0%	12,0%	18,0%
6	30,0%	25,0%	18,0%
7	23,0%	17,0%	18,5%
8	42,0%	38,0%	21,0%
9	-9,0%	-5,0%	18,0%
10	23,0%	30,0%	19,0%

Por fim, calcula-se  $\hat{r}_f$ :

$$\hat{r}_f = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_f(k) = 17,5\%.$$

Pode-se agora calcular  $\hat{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{cov}(P, P_M) &= \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{10} (P(k) - \hat{\mu})(P_M(k) - \hat{\mu}_M) = 198\%^2 \\ \hat{\beta} &= \frac{\widehat{cov}(P, P_M)}{\hat{\sigma}_M^2} = 1,021. \end{aligned}$$

O índice de Jensen  $J$  para esse caso é dado pela fórmula

$$\hat{\mu} - \hat{r}_f = J + \hat{\beta}(\hat{\mu} - \hat{r}_f),$$

ou seja,

$$20,9 - 17,5 = J + 1,021 \times (18,9 - 17,5),$$

o que leva a

$$J = 1,97 \text{ (índice de Jensen).}$$

Para  $J > 0$ , tem-se que o fundo rendeu mais do que o previsto pelo CAPM (acima da SML).

O índice de Sharpe  $S$  determina onde o fundo se localiza na linha do mercado (CML). Escreve-se

$$\hat{\mu} - \hat{r}_f = S_F \hat{\sigma},$$

portanto,

$$S_F = \frac{20,9 - 17,5}{16,9} = 0,201 \text{ (índice de Sharpe).}$$

Deve-se comparar esse índice com o obtido pelo mercado:

$$\hat{\mu}_M - \hat{r}_f = S_M \hat{\sigma}_M.$$

Obtém-se, então,

$$S_M = \frac{18,9 - 17,5}{13,9} = 0,101.$$

Ou seja,  $S_F = 0,201 > 0,101 = S_M$ ; portanto, o fundo por essa análise teve um bom desempenho.

### 3.4 Apreçamento pelo CAPM

Pode-se notar que o CAPM representa um modelo de apreçamento. De fato, suponha que um ativo seja adquirido por um valor  $S(0)$  conhecido e vendido por um valor  $S(1)$ . Segue que o retorno  $P$  é dado por:

$$P = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)}$$

e pela fórmula CAPM,

$$\mu = E(P) = \frac{E(V(1)) - V(0)}{V(0)} = r_f + \beta(\mu_M - r_f),$$

ou seja,

$$V(0) = \frac{E(V(1))}{1 + r_f + \beta(\mu_M - r_f)}. \quad (3.22)$$

**Exemplo 3.8** Considere

$$r_f = 18\%, \mu_M = 23\%$$

e um investimento com um valor final esperado igual a R\$ 1.000,00 e beta 0,6. Qual deve ser o valor desse investimento hoje? Usando a Fórmula (3.22), obtém-se que

$$V(0) = \frac{1.000,00}{1 + 0,18 + 0,6(0,23 - 0,18)} = 826,45.$$

Demonstra-se, então, que a fórmula de apreçamento (3.22) é linear, ou seja, o apreçamento da soma de 2 ativos é a soma dos apreçamentos, e o apreçamento de um múltiplo de um ativo é o múltiplo do apreçamento do ativo (se isso não

ocorresse, existiriam arbitragens). Note que, para 2 ativos  $V_1(0)$  e  $V_2(0)$  com betas  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ,

$$V_1(0) = \frac{E(V_1(1))}{1 + r_f + \beta_1(\mu_M - r_f)}, \quad V_2(0) = \frac{E(V_2(1))}{1 + r_f + \beta_2(\mu_M - r_f)},$$

e não é claro que

$$V_1(0) + V_2(0) = \frac{E(V_1(1)) + E(V_2(1))}{1 + r_f + \beta_{1+2}(\mu_M - r_f)},$$

em que  $\beta_{1+2}$  seria o beta da soma dos ativos 1 e 2. Para verificar a linearidade, observe inicialmente que

$$\beta = \frac{\text{cov}(P, P_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}\left(\frac{V(1)}{V(0)} - 1, P_M\right)}{\sigma_M^2} = \frac{\text{cov}(V(1), P_M)}{\sigma_M^2 V(0)},$$

já que  $V(0)$  é conhecido. Logo,

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{E(V(1))}{1 + r_f + \beta(\mu_M - r_f)} = \frac{E(V(1))}{1 + r_f + \frac{\text{cov}(V(1), P_M)}{\sigma_M^2 V(0)}(\mu_M - r_f)} \Rightarrow \\ 1 &= \frac{E(V(1))}{V(0)(1 + r_f) + \frac{\text{cov}(V(1), P_M)}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(0) = \left( \frac{1}{1 + r_f} \right) \left( E(V(1)) - \frac{\text{cov}(V(1), P_M)}{\sigma_M^2}(\mu_M - r_f) \right). \quad (3.23)$$

Torna-se claro que a fórmula de apreçamento é linear em  $V(1)$ , pois o valor esperado e a covariância em  $V(1)$  são funções lineares. Essa fórmula é chamada de “forma equivalente à certeza”. O valor entre parênteses pode ser visto como o valor esperado do ativo menos um pagamento devido aos riscos envolvidos. O termo  $\frac{1}{1+r_f}$  traz a valor presente o termo entre parênteses.

### 3.5 Modelos com Fatores

Note que as informações requeridas pela análise de média-variância crescem substancialmente à medida que o número  $n$  de ativos aumenta. Há  $n$  médias,  $n$  variâncias e  $\frac{n(n-1)}{2}$  correlações, totalizando  $2n + \frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros a serem estimados. Por exemplo, se  $n = 100$ , é necessário calcular 5.150 valores para especificar totalmente o modelo de média-variância. Portanto, é interessante estudar modelos mais simples.

Modelos com 1 fator são os mais simples com fatores que podem ser analisados, mas ilustram bem as idéias básicas. Suponha que se tenha  $n$  ativos com retornos  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e 1 fator comum  $F$  (aleatório). Assume-se que

$$R_i = a_i + b_i F + Z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

em que  $a_i$ ,  $b_i$  são constantes fixas. Os  $Z_i$  são variáveis aleatórias que representam incertezas. Sem perda de generalidade, assume-se que

$$E(Z_i) = 0.$$

Também se assume que  $Z_i$  e  $F$  são descorrelacionados e  $Z_i, Z_j$  são descorrelacionados para  $i \neq j$ , isto é,

$$\begin{aligned} E(Z_i(F - E(F))) &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ E(Z_i Z_j) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Por último, considera-se que as variâncias dos  $Z_i$  são conhecidas e valem

$$\sigma_{Z_i}^2 = E(Z_i^2).$$

Graficamente, há uma reta no plano  $R_i \times F$  com coeficiente angular  $b_i$  e passando pelo ponto  $a_i$  em  $F = 0$ . Os valores de  $R_i$  estariam ao redor dessa reta. Denotando

$$Var(F) = \sigma_F^2, \quad E(F) = \mu_F,$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned} r_i &= E(R_i) = a_i + b_i \mu_F \\ \sigma_i^2 &= Var(R_i) = b_i^2 \sigma_F^2 + \sigma_{Z_i}^2 \\ cov(R_i, R_j) &= E((R_i - r_i)(R_j - r_j)) \\ &= E((b_i(F - E(F)) + Z_i)(b_j(F - E(F)) + Z_j)) \\ &= b_i b_j \sigma_F^2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Também observa-se que

$$\begin{aligned} cov(R_i, F) &= E((R_i - r_i)(F - \mu_F)) \\ &= E((b_i(F - \mu_F) + Z_i)(F - \mu_F)) = b_i \sigma_F^2, \end{aligned}$$

portanto

$$b_i = \frac{cov(R_i, F)}{\sigma_F^2}.$$

Conforme comentado anteriormente, pela análise de média-variância precisa-se de  $2n + \frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros. Nessa representação é necessário identificar os  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\sigma_{Z_i}$ ,  $\mu_F$  e  $\sigma_F^2$ , totalizando  $3n + 2$  parâmetros.

Verifica-se, então, como é possível representar uma carteira quando são utilizados modelos com 1 fator. Como antes,

$$R_i = a_i + b_i F + Z_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Seja uma carteira com retorno  $P$  e pesos  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ , com  $\omega' e = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} P &= \omega' R = \omega_1 R_1 + \dots + \omega_n R_n \\ &= \omega_1 (a_1 + b_1 F + Z_1) + \dots + \omega_n (a_n + b_n F + Z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i a_i + \left( \sum_{i=1}^n \omega_i b_i \right) F + \sum_{i=1}^n \omega_i Z_i \\ &= a_P + b_P F + Z_P, \end{aligned}$$

em que

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} a_P &= \sum_{i=1}^n \omega_i a_i = \omega' a, \\ b_P &= \sum_{i=1}^n \omega_i b_i = \omega' b, \\ Z_P &= \sum_{i=1}^n \omega_i Z_i = \omega' Z. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} E(Z_P) &= \omega' E(Z) = 0 \\ \text{cov}(Z_P, F) &= E(Z_P (F - \mu_F)) \\ &= \omega' E(Z (F - \mu_F)) \\ &= 0 \quad (Z_P \text{ e } F \text{ são descorrelacionados}) \\ \sigma_{Z_P}^2 &= \text{Var}(Z_P) \\ &= E(Z_P^2) \\ &= \omega' E(Z_P Z_P') \omega \\ &= \omega' \text{Cov}(Z_P) \omega \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2 \omega_i^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

A Equação (3.26) mostra que por meio da diversificação é possível reduzir o risco, mas não eliminá-lo completamente. O retorno esperado  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  da carteira com retorno  $P$  são dados por

$$\begin{aligned}\mu &= E(P) = a_P + b_P \mu_F \\ \sigma^2 &= Var(P) = Var(b_P F + Z_P) = b_P^2 \sigma_F^2 + \sigma_{Z_P}^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma^2 = \left( \sum_{i=1}^n \omega_i b_i \right)^2 \sigma_F^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2 \omega_i^2 \right).$$

Enquanto o termo  $\sum_{i=1}^n \omega_i b_i$  permanece aproximadamente constante quando  $n$  cresce, o termo  $\sum_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2 \omega_i^2$  pode ser reduzido a zero. Por exemplo, assuma que existam infinitos ativos básicos, com

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i &= \bar{b} \\ \sup_i \{ \sigma_{Z_i}^2 \} &\leq \sigma_{\max}^2\end{aligned}$$

e considere  $\omega_i^n = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Segue que quando  $n$  tende a infinito,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega_i^n b_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \rightarrow \bar{b} \\ \sum_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2 (\omega_i^n)^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{Z_i}^2 \leq \sigma_{\max}^2 \frac{n}{n^2} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Portanto, conclui-se que há duas fontes de risco, uma devida aos  $Z_i$ , que é diversificável, pois sua contribuição para o risco global pode ser reduzida a zero. A outra é devida ao fator  $b_i F$ , que continua presente mesmo em uma carteira diversificada, e é chamada de risco sistêmico ou não-diversificável.

**Exemplo 3.9** (4 ativos e um índice): A Tabela 3.4 mostra os retornos históricos para 4 ativos negociados no IBovespa em um período de 19 meses. Também apresenta um índice de inflação (IGP-M) utilizado como fator de referência no mesmo período.

Será construído um modelo com 1 fator para cada ativo usando o índice como fator. Sendo  $\hat{r}_i$ ,  $\hat{\mu}_F$  os retornos esperados estimados da tabela:

$$\begin{aligned}\hat{r}_i &= \frac{1}{19} \sum_{k=1}^{19} R_i(k) \\ \hat{\mu}_F &= \frac{1}{19} \sum_{k=1}^{19} F(k),\end{aligned}$$

TABELA 3.4: Retornos de ativos e índice

	TNLP4	TSPP4	EBTP4	VALE5	IGPM
09/2000	-0,0948	-0,0895	-0,1563	-0,0775	0,0038
10/2000	-0,0075	-0,0715	-0,0992	-0,0497	0,0029
11/2000	-0,1410	-0,2620	-0,2129	-0,1067	0,0063
12/2000	0,1729	0,2337	0,2280	0,2082	0,0062
01/2001	0,1673	0,0539	0,1359	0,1958	0,0023
02/2001	-0,0964	-0,1286	-0,2565	-0,0037	0,0056
03/2001	-0,2099	-0,3236	-0,1751	0,0077	0,0100
04/2001	0,0972	0,2094	0,0148	-0,0397	0,0086
05/2001	-0,0188	0,0856	-0,0359	0,1199	0,0098
06/2001	-0,0473	-0,1449	-0,1113	-0,0802	0,0148
07/2001	-0,1163	0,0177	-0,2499	0,0071	0,0138
08/2001	-0,1075	-0,0871	-0,1843	-0,0283	0,0031
09/2001	-0,1291	-0,5641	-0,3065	0,0291	0,0118
10/2001	0,1239	-0,0403	0,0147	0,0666	0,0110
11/2001	0,2165	0,3869	0,4079	0,0235	0,0022
12/2001	0,1027	0,1184	-0,0748	0,0170	0,0036
01/2002	-0,1238	-0,1412	-0,1313	-0,0035	0,0006
02/2002	0,1179	0,0288	0,0174	0,1213	0,0009
03/2002	-0,1720	-0,2290	-0,1429	0,0233	0,0056
$a$	0,0420	0,0474	0,0202	0,0418	
$b$	-8,6580	-15,0369	-13,8451	-2,9595	
$\hat{\sigma}_Z^2$	0,0165	0,0429	0,0280	0,0074	
$\hat{\sigma}_{R,F}$	-0,0002	-0,0003	-0,0003	-0,0001	
$\hat{\sigma}^2$	0,0179	0,0472	0,0316	0,0076	0,000019
$\hat{\mu}$	-0,0140	-0,0499	-0,0694	0,0226	0,0065

as variâncias estimadas  $\hat{\sigma}_i$ ,  $\hat{\sigma}_F$  são dadas por:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{19} (R_i(k) - \hat{r}_i)^2$$

$$\hat{\sigma}_F^2 = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{19} (F(k) - \hat{\mu}_F)^2.$$

Determinam-se as covariâncias estimadas  $\hat{\sigma}_{R_i,F}$  entre  $R_i$  e  $F$ :

$$\hat{\sigma}_{R_i,F} = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{19} (R_i(k) - \hat{r}_i) (F(k) - \hat{\mu}_F).$$



Pode-se agora determinar  $a_i$  e  $b_i$ :

$$b_i = \frac{\hat{\sigma}_{R_i, F}}{\hat{\sigma}_F^2},$$

$$a_i = \hat{r}_i - b_i \hat{\mu}_F.$$

Por fim, tem-se que

$$\hat{\sigma}_{Z_i}^2 = \hat{\sigma}_i^2 - b_i^2 \hat{\sigma}_F^2.$$

Na Tabela 3.4, apresentam-se os resultados obtidos. Note que a contribuição de  $\hat{\sigma}_{Z_i}^2$  para  $\hat{\sigma}_i^2$  é, respectivamente, de 92%, 91%, 88,48% e 97,8%, o que indica que, para esse modelo, uma porcentagem muito considerável do risco é devida ao risco não-sistêmico. Logo, o modelo com 1 fator, para o fator escolhido, não é bom para este exemplo.

Pode-se generalizar o caso visto no Exemplo 3.9 para mais fatores. Por exemplo, se há 2 fatores  $F_1$  e  $F_2$ , é possível relacionar os retornos dos ativos  $R_1$  e  $R_2$  da seguinte forma;

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + Z_i. \quad (3.27)$$

Novamente, sem perda de generalidade, pode-se assumir que  $E(Z_i) = 0$ . Assume-se também que o erro  $Z_i$  é descorrelacionado com os 2 fatores  $F_1$  e  $F_2$ , e com os outros erros  $Z_j$ ,  $j \neq i$ . Os 2 fatores  $F_1$  e  $F_2$  não precisam ser descorrelacionados. Tem-se que

$$r_i = E(R_i) = a_i + b_{i1}\mu_{F_1} + b_{i2}\mu_{F_2} \quad (3.28)$$

$$\sigma_i^2 = E\left((R_i - r_i)^2\right) = Var(b_{i1}(F_1 - \mu_{F_1}) + b_{i2}(F_2 - \mu_{F_2}) + Z_i)$$

$$= b_{i1}^2\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F_2}^2 + 2b_{i1}b_{i2}cov(F_1, F_2) + \sigma_{Z_i}^2$$

$$\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j) = E((b_{i1}(F_1 - \mu_{F_1}) + b_{i2}(F_2 - \mu_{F_2}) + Z_i) \times$$

$$(b_{j1}(F_1 - \mu_{F_1}) + b_{j2}(F_2 - \mu_{F_2}) + Z_j))$$

$$= b_{i1}b_{j1}\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{F_2}^2 + (b_{i1}b_{j2} + b_{j1}b_{i2})cov(F_1, F_2).$$

Os valores de  $b_{i1}$  e  $b_{i2}$  podem ser obtidos da seguinte forma:

$$cov(R_i, F_1) = E((b_{i1}(F_1 - \mu_{F_1}) + b_{i2}(F_2 - \mu_{F_2}) + Z_i)(F_1 - \mu_{F_1}))$$

$$= b_{i1}\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}cov(F_1, F_2)$$

$$cov(R_i, F_2) = b_{i1}cov(F_1, F_2) + b_{i2}\sigma_{F_2}^2,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{F_1}^2 & cov(F_1, F_2) \\ cov(F_1, F_2) & \sigma_{F_2}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} cov(R_i, F_1) \\ cov(R_i, F_2) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

TABELA 3.5: Retornos mensais

	TNLP4	IBovespa	Dólar	IGPM	CDI
09/2000	-0,0948	-0,0817	0,0354	0,0038	0,0129
10/2000	-0,0075	-0,0666	0,0265	0,0029	0,0128
11/2000	-0,1410	-0,1063	-0,0021	0,0063	0,0126
12/2000	0,1729	0,1484	0,0080	0,0062	0,0121
01/2001	0,1673	0,1581	0,0376	0,0023	0,0119
02/2001	-0,0964	-0,1008	0,0569	0,0056	0,0120
03/2001	-0,2099	-0,0914	0,0107	0,0100	0,0125
04/2001	0,0972	0,0332	0,0802	0,0086	0,0128
05/2001	-0,0188	-0,0180	-0,0233	0,0098	0,0134
06/2001	-0,0473	-0,0061	0,0548	0,0148	0,0143
07/2001	-0,1163	-0,0553	0,0495	0,0138	0,0146
08/2001	-0,1075	-0,0665	0,0469	0,0031	0,0146
09/2001	-0,1291	-0,1717	0,0134	0,0118	0,0146
10/2001	0,1239	0,0685	-0,0659	0,0110	0,0146
11/2001	0,2165	0,1379	-0,0824	0,0022	0,0146
12/2001	0,1027	0,0500	0,0422	0,0036	0,0146
01/2002	-0,1238	-0,0630	-0,0290	0,0006	0,0146
02/2002	0,1179	0,1031	-0,0105	0,0009	0,0144
03/2002	-0,1720	-0,0563	0,0167	0,0056	0,0142

Outra forma de estimar os coeficientes  $a_i, b_{ij}$  seria por meio de uma regressão linear, conforme exemplificado a seguir.

**Exemplo 3.10** Para exemplificar a estimativa dos coeficientes  $a_i, b_{ij}$  por meio de uma regressão linear, considere uma ação do mercado brasileiro, influenciada por outras variáveis macroeconômicas, como taxa de câmbio, inflação e taxa de juros. Seja o ativo em questão a ação Telemar PN (TNLP4) e os seguintes fatores:

$F_1$  — Taxa de câmbio (Dólar)

$F_2$  — Índice geral de preços do mercado (IGP-M)

$F_3$  — Taxa de juros (CDI)

O retorno  $R$  de TNLP4 em função desses fatores pode ser escrito como:

$$R = a + b_1F_1 + b_2F_2 + b_3F_3 + Z.$$

Segue na Tabela 3.5 uma série histórica dos retornos mensais do ativo e dos fatores anteriormente descritos. Por regressão linear multivariável, pode-se

calcular os valores de  $a, b_1, b_2$  e  $b_3$ :

$$\begin{aligned} a &= 1,2579 \\ b_1 &= -0,0555 \\ b_2 &= -0,6013 \\ b_3 &= 1,2874. \end{aligned}$$

Pode-se agora verificar que o CAPM pode ser visto como um modelo de 1 fator. Considera-se um modelo de 1 fator com a carteira de mercado com retorno  $P_M$ , retorno esperado  $\mu_M$  e variância  $\sigma_M^2$ . Por simplicidade, consideram-se os excessos de retorno, subtraindo  $r_f$  dos retornos esperados dos ativos. Segue que

$$(R_i - r_f) = \alpha_i + \beta_i(P_M - r_f) + Z_i. \quad (3.30)$$

Novamente, assume-se que  $E(Z_i) = 0$  e que  $Z_i$  é descorrelacionado de  $P_M - r_f$  e de  $Z_j$ , para  $i \neq j$ . A equação característica, ou linha característica, é obtida traçando a equação da reta  $(R_i - r_f) \times (P_M - r_f)$  quando  $Z_i$  é igual a zero. O valor esperado é dado por

$$r_i - r_f = \alpha_i + \beta_i(\mu_M - r_f),$$

o qual é idêntico ao CAPM, exceto pela presença de  $\alpha_i$ , que seria 0 pelo CAPM. Tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma_{i,M} &= \text{cov}(R_i, P_M) = E((R_i - r_i)(P_M - \mu_M)) \\ &= E((\beta_i(P_M - \mu_M) + Z_i)(P_M - \mu_M)) \\ &= \beta_i \sigma_M^2 \Rightarrow \beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}. \end{aligned}$$

Logo,  $\beta_i$  tem o mesmo valor que no caso CAPM, sendo o modelo com 1 fator mais geral que o CAPM, pois permite  $\alpha_i \neq 0$ . Note que o CAPM considera uma matriz de covariância arbitrária, mas exige que o mercado seja eficiente, enquanto o modelo com 1 fator exige uma estrutura mais específica para a matriz de covariância, sem entretanto impor hipóteses sobre a eficiência do mercado.

**Exemplo 3.11** Voltando ao Exemplo 3.9, mas agora considerando o excesso de retorno dos ativos  $(R_i - r_f)$  como variáveis básicas e o excesso de retorno do mercado  $(\mu_M - r_f)$  como o fator. Assume-se que a carteira de mercado é o IBovespa. Também apresenta-se na Tabela 3.6 o retorno do ativo livre de risco no período (taxa CDI).

Na Tabela 3.7, são apresentados o excesso de retorno dos ativos e do mercado e os resultados obtidos.

Pode-se notar que o percentual de erro devido a  $\hat{\sigma}_{Z_i}^2$  em  $\hat{\sigma}_i^2$  são respectivamente 15,26%, 34,76%, 19,13% e 56,21%, sendo bem menores que no Exemplo

TABELA 3.6: Retorno dos ativos, do mercado e do título

	TNLP4	TSPP4	EBTP4	VALE5	IBovespa	CDI
09/2000	-0,0948	-0,0895	-0,1563	-0,0775	-0,0817	0,0129
10/2000	-0,0075	-0,0715	-0,0992	-0,0497	-0,0666	0,0128
11/2000	-0,1410	-0,2620	-0,2129	-0,1067	-0,1063	0,0126
12/2000	0,1729	0,2337	0,2280	0,2082	0,1484	0,0121
01/2001	0,1673	0,0539	0,1359	0,1958	0,1581	0,0119
02/2001	-0,0964	-0,1286	-0,2565	-0,0037	-0,1008	0,0120
03/2001	-0,2099	-0,3236	-0,1751	0,0077	-0,0914	0,0125
04/2001	0,0972	0,2094	0,0148	-0,0397	0,0332	0,0128
05/2001	-0,0188	0,0856	-0,0359	0,1199	-0,0180	0,0134
06/2001	-0,0473	-0,1449	-0,1113	-0,0802	-0,0061	0,0143
07/2001	-0,1163	0,0177	-0,2499	0,0071	-0,0553	0,0146
08/2001	-0,1075	-0,0871	-0,1843	-0,0283	-0,0665	0,0146
09/2001	-0,1291	-0,5641	-0,3065	0,0291	-0,1717	0,0146
10/2001	0,1239	-0,0403	0,0147	0,0666	0,0685	0,0146
11/2001	0,2165	0,3869	0,4079	0,0235	0,1379	0,0146
12/2001	0,1027	0,1184	-0,0748	0,0170	0,0500	0,0146
01/2002	-0,1238	-0,1412	-0,1313	-0,0035	-0,0630	0,0146
02/2002	0,1179	0,0288	0,0174	0,1213	0,1031	0,0144
03/2002	-0,1720	-0,2290	-0,1429	0,0233	-0,0563	0,0142

3.9. Portanto, para esse modelo a maior parte da volatilidade das ações é devida ao mercado, com uma contribuição menor do erro não-sistêmico. Logo, esse modelo com 1 fator é melhor que o modelo do Exemplo 3.9.

### 3.6 APT — Arbitrage Pricing Theory

A modelagem por fatores leva a uma nova alternativa de apreçamento de ativos, chamada de teoria de apreçamento por arbitragem — APT. Não é necessário assumir que os investidores avaliem as carteiras por média-variância, apenas que, quando retornos são certos, eles prefiram valores maiores. Nesse sentido, o APT é melhor que o CAPM, que requer uma abordagem por média-variância e uma noção de equilíbrio mais forte, pois assume que todos os investidores utilizam o mesmo modelo de média-variância. O APT assume, entretanto, que o universo de ativos básicos é grande e que eles são diferentes entre si de uma forma não-trivial.

TABELA 3.7: Excesso de retorno dos ativos e do mercado

	TNLP4	TSPP4	EBTP4	VALE5	IBovespa
09/2000	-0,1077	-0,1024	-0,1692	-0,0903	-0,0946
10/2000	-0,0203	-0,0843	-0,1120	-0,0625	-0,0794
11/2000	-0,1536	-0,2746	-0,2255	-0,1193	-0,1189
12/2000	0,1608	0,2216	0,2159	0,1961	0,1363
01/2001	0,1554	0,0420	0,1240	0,1839	0,1462
02/2001	-0,1084	-0,1406	-0,2685	-0,0157	-0,1128
03/2001	-0,2224	-0,3361	-0,1876	-0,0048	-0,1039
04/2001	0,0844	0,1966	0,0020	-0,0525	0,0204
05/2001	-0,0322	0,0722	-0,0493	0,1065	-0,0314
06/2001	-0,0616	-0,1592	-0,1256	-0,0945	-0,0204
07/2001	-0,1309	0,0031	-0,2645	-0,0075	-0,0699
08/2001	-0,1221	-0,1017	-0,1989	-0,0429	-0,0811
09/2001	-0,1437	-0,5787	-0,3211	0,0145	-0,1863
10/2001	0,1093	-0,0549	0,0001	0,0520	0,0539
11/2001	0,2019	0,3723	0,3933	0,0089	0,1233
12/2001	0,0881	0,1038	-0,0894	0,0024	0,0354
01/2002	-0,1384	-0,1558	-0,1459	-0,0181	-0,0776
02/2002	0,1035	0,0144	0,0030	0,1069	0,0887
03/2002	-0,1862	-0,2432	-0,1571	0,0091	-0,0705
$a$	0,0020	-0,0212	-0,0445	0,0229	
$b$	1,2715	1,8132	1,6525	0,5962	
$\hat{\sigma}_Z^2$	0,0027	0,0164	0,0061	0,0043	
$\hat{\sigma}_{R.F}$	0,0119	0,0170	0,0155	0,0056	
$\hat{\sigma}^2$	0,0179	0,0473	0,0317	0,0076	0,0094
$\hat{\mu}$	-0,0276	-0,0635	-0,0830	0,0090	-0,0233

A versão mais simples do APT assume que todos os retornos satisfazem o seguinte modelo de 1 fator:

$$R_i = a_i + b_i F.$$

Logo, a incerteza é unicamente devida ao fator  $F$ . Para não haver arbitragens, as constantes  $a_i$  e  $b_i$  devem ser relacionadas entre si. Considere agora outro ativo

$$R_j = a_j + b_j F.$$

Assumindo que  $b_i \neq b_j$ , para uma carteira com pesos  $\omega_i = \xi$ ,  $\omega_j = 1 - \xi$ , obtém-se o retorno  $P$  dado por

$$\begin{aligned} P &= \xi(a_i + b_i F) + (1 - \xi)(a_j + b_j F) \\ &= \xi a_i + (1 - \xi)a_j + (\xi b_i + (1 - \xi)b_j)F. \end{aligned}$$

Escolhe-se  $\xi$  de forma a anular o coeficiente em  $F$ , ou seja,

$$\xi b_i + (1 - \xi)b_j = 0 \Rightarrow \xi = \frac{b_j}{b_j - b_i}.$$

Com isso, o retorno da carteira é

$$P = \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} - \frac{b_i a_j}{b_j - b_i}. \quad (3.31)$$

Essa carteira é livre de risco e tem de ser igual a  $r_f$ , pois, caso contrário, haveria uma arbitragem (veja a Definição 5.2). Mesmo no caso em que não há um ativo livre de risco, todas as carteiras construídas dessa forma (sem dependência em  $F$ ) devem possuir a mesma taxa de retorno. Essa taxa é denotada por  $\lambda_0$ , com  $\lambda_0 = r_f$  se uma taxa livre de risco existir. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{a_i b_j}{b_j - b_i} - \frac{b_i a_j}{b_j - b_i} \Rightarrow \\ \lambda_0(b_j - b_i) &= a_i b_j - b_i a_j \Rightarrow \\ \frac{a_i - \lambda_0}{b_i} &= \frac{a_j - \lambda_0}{b_j} = c, \end{aligned}$$

para todo  $i, j$ . Conseqüentemente,

$$a_i = \lambda_0 + c b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim, estabelece-se uma relação entre  $a_i$  e  $b_i$ . Por exemplo, se  $a_i = r_f$ ,

$$a_i = r_f = r_f + c b_i \Rightarrow b_i = 0,$$

o que é razoável (a partir da Equação (3.31), percebe-se que se  $b_i \neq 0$ , é possível montar uma carteira livre de risco, com rentabilidade diferente de  $r_f$ , o que levaria a uma arbitragem).

O retorno esperado  $r_i$  seria dado por:

$$\begin{aligned} r_i &= E(R_i) = E(a_i + b_i F) = \lambda_0 + c b_i + b_i \mu_F \\ &= \lambda_0 + b_i(c + \mu_F) = \lambda_0 + b_i \lambda_1, \end{aligned}$$

em que  $\lambda_1 = c + \mu_F$ . Uma vez que  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  sejam determinados,  $r_i$  é totalmente definido por  $b_i$ , pois

$$r_i = \lambda_0 + b_i \lambda_1.$$

Se  $F = P_M - r_f$ ,  $\lambda_0 = r_f$ ,  $\lambda_1 = \mu_M - r_f$ , a fórmula se reduz ao CAPM com  $b_i = \beta_i$ .

**Teorema 3.3** *APT simples: Suponha que existam  $n$  ativos cujas taxas de retorno sejam governadas por  $m < n$  fatores de acordo com*

$$R_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.32)$$

*Portanto, existem constantes  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ , tais que*

$$r_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Prova:** Pode-se escrever a Equação (3.32) como

$$R = a + \mathcal{B}F,$$

em que

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Considere um vetor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

tal que

$$x'e = 0, \quad x'\mathcal{B} = 0.$$

Pode-se tratar  $x_i$  como o capital investido no ativo  $i$ , isto é,

$$x_i = H_i S_i(0),$$

em que  $H_i$  representa a quantidade comprada/vendida do ativo  $i$  na carteira e  $S_i(0)$  o valor do ativo  $i$  no instante inicial. Logo,

$$x'e = H_1 S_1(0) + \dots + H_n S_n(0) = V(0) = 0,$$

ou seja, o valor da carteira no instante inicial vale 0. No instante seguinte, a carteira vale

$$\begin{aligned} V(1) &= H_1 S_1(1) + \dots + H_n S_n(1) \\ &= H_1(1 + R_1)S_1(0) + \dots + H_n(1 + R_n)S_n(0) \\ &= V(0) + H_1 S_1(0)R_1 + \dots + H_n S_n(0)R_n \\ &= x_1 R_1 + \dots + x_n R_n = x'R \\ &= x'(a + \mathcal{B}F) = x'a + x'\mathcal{B}F \\ &= x'a. \end{aligned}$$

Para não haver arbitragens, deve-se ter

$$x'a = 0.$$

Caso não fosse zero, seria possível construir uma carteira que vale 0 no início e um valor maior que zero ( $x'a$  ou  $-x'a$ ) no instante seguinte. Conseqüentemente, deve-se ter a seguinte condição:

$$\text{se } x \in R^n \text{ é tal que } x'(e - B) = 0, \text{ então } x'a = 0.$$

Ou seja, para todo  $x \perp e$  ( $x$  ortogonal a  $e$ ),  $x \perp b^j$  (em que  $b^j$  representa o  $j^{\text{ésimo}}$  vetor coluna de  $B$ ), tem-se  $x \perp a$ . Logo,

$$a \in \text{Im}\{(e - B)\}$$

e deve-se ter

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

tal que

$$(e - B) \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ 1 & b_{21} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$a_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij}c_j.$$

Conseqüentemente,

$$r_i = E(R_i) = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij}\mu_{F_j} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij}(c_j + \mu_{F_j}) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij}\lambda_j,$$

em que

$$\lambda_j = c_j + \mu_{F_j}.$$

■

Se todos os  $b_{ij}$  valem zero, não existe risco, e, como esperado,

$$r_i = \lambda_0, i = 1, \dots, n.$$

O termo  $\lambda_j$  para  $j = 1, \dots, m$  é chamado de preço do risco, pois, à medida que  $b_{ij}$  aumenta, o risco aumenta a uma proporção  $\lambda_j$ .



Considera-se agora o caso mais real, no qual os modelos com fatores possuem incertezas. Suponha que existam  $n$  ativos com taxas de retorno dadas por

$$R_i = a_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j + Z_i,$$

em que  $E(Z_i) = 0$ ,  $E(Z_i^2) = \sigma_{Z_i}^2$ ,  $Z_i, F_j$  são descorrelacionados e  $Z_i, Z_j$  são descorrelacionados para  $i \neq j$ . Forma-se uma carteira com pesos  $\omega_i$ ,  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ , tal que  $\omega' e = 1$ . A taxa de retorno da carteira é

$$P = \omega' a + \omega' B F + \omega' Z = a_p + b_p F + Z_p,$$

em que

$$a_p = \omega' a, b_p = \omega' B, Z_p = \omega' Z.$$

Tem-se que

$$\sigma_{Z_p}^2 = \omega' E(Z Z') \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{Z_i}^2.$$

Suponha que para cada  $i$  tenha-se que

$$\sigma_{Z_i}^2 \leq \sigma_{\max}^2.$$

Considere também que para todo  $i$  e  $n$ ,

$$|\omega_i| \leq \frac{v}{n}.$$

Dessa forma, nenhum ativo é ponderado de forma intensa. Segue que

$$\sigma_{Z_p}^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_{Z_i}^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{v}{n}\right)^2 \sigma_{\max}^2 = \frac{1}{n} v^2 \sigma_{\max}^2.$$

Portanto, para  $n$  suficientemente grande, o termo relativo ao risco não-sistêmico tem variância aproximadamente zero. Considera-se nesse caso que a carteira é bem diversificada.

Combinando as idéias do APT simples com carteiras bem diversificadas, obtém-se o APT geral<sup>1</sup>. São apresentadas apenas algumas idéias desses resultados. Considere a situação na qual se tem  $n$  carteiras bem diversificadas, cada uma com o termo relativo ao risco não-sistêmico praticamente zero. Portanto, tem-se aproximadamente que

$$P_i = a_{P_i} + \sum_{j=1}^m b_{P_i j} F_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

<sup>1</sup>Uma prova formal do APT geral pode ser encontrada em [Shiryaev, 1999], p. 56-60.

Pelo APT simples, existem constantes  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ , tais que

$$\mu_i = E(P_i) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{P_i j} \lambda_j. \quad (3.35)$$

Definindo

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, a_P = \begin{pmatrix} a_{P_1} \\ \vdots \\ a_{P_n} \end{pmatrix}, \mathcal{B}_P = \begin{pmatrix} b_{P_1 1} & \dots & b_{P_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{P_n 1} & \dots & b_{P_n m} \end{pmatrix},$$

as Equações (3.34) e (3.35) podem ser escritas em forma matricial, como

$$\begin{aligned} P &= a_P + \mathcal{B}_P F \\ \mu &= \lambda_0 e + \mathcal{B}_P \lambda, \end{aligned} \quad (3.36)$$

em que  $F$  está definido na Equação (3.33), e

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Suponha que  $P_i = \omega^{i'} R$  e defina a matriz  $M$ ,  $n \times n$ , como

$$M = \begin{pmatrix} \omega^{1'} \\ \vdots \\ \omega^{n'} \end{pmatrix}.$$

Logo,  $P = MR$ . Utilizando a notação da Equação (3.33), segue que  $\mu = Mr$ ,  $a_P = Ma$  e  $\mathcal{B}_P = M\mathcal{B}$ . Suponha que  $M$  seja não-singular. Consequentemente, a partir da Equação (3.36),

$$\begin{aligned} r &= M^{-1} \mu = M^{-1} (\lambda_0 e + \mathcal{B}_P \lambda) \\ &= \lambda_0 M^{-1} e + M^{-1} \mathcal{B}_P \lambda \\ &= \lambda_0 M^{-1} e + \mathcal{B} \lambda. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Note que como  $\omega^{i'} e = 1$  decorre que

$$Me = \begin{pmatrix} \omega^{1'} e \\ \vdots \\ \omega^{n'} e \end{pmatrix} = e,$$

portanto  $e = M^{-1} e$ . Desse modo, a partir da Equação (3.37),

$$r = \lambda_0 e + \mathcal{B} \lambda,$$

mostrando que a Equação (3.35) também vale para os ativos básicos, de modo que

$$r_i = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m b_{ij} \lambda_j.$$

Observe entretanto que os resultados são aproximados, pois para a Equação (3.34) ser válida, seria necessário ter um conjunto infinito de ativos ( $n = \infty$ ).

### 3.7 Relação entre o CAPM e o APT

Verifica-se nesta sessão que o APT e o CAPM podem coexistir de forma consistente. Usando o modelo de 2 fatores:

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + Z_i.$$

Pode-se achar a covariância desses ativos com a carteira de mercado:

$$\begin{aligned} \text{cov}(P_M, R_i) &= E((P_M - \mu_M)(R_i - r_i)) \\ &= E((P_M - \mu_M)(b_{i1}(F_1 - E(F_1)) + b_{i2}(F_2 - E(F_2)) + Z_i)) \\ &= b_{i1}E((P_M - \mu_M)(F_1 - E(F_1))) \\ &\quad + b_{i2}E((P_M - \mu_M)(F_2 - E(F_2))) + E((P_M - \mu_M)Z_i) \\ &= b_{i1}\text{cov}(P_M, F_1) + b_{i2}\text{cov}(P_M, F_2) + \text{cov}(P_M, Z_i). \end{aligned}$$

Se o mercado é uma carteira bem diversificada, é possível desprezar o termo  $\text{cov}(P_M, Z_i)$ . Logo,

$$\beta_i = b_{i1}\beta_{F_1} + b_{i2}\beta_{F_2}, \quad (3.38)$$

em que

$$\beta_{F_1} = \frac{\text{cov}(P_M, F_1)}{\sigma_M^2}, \beta_{F_2} = \frac{\text{cov}(P_M, F_2)}{\sigma_M^2}.$$

A conclusão a que se chega é de que o beta dos ativos é obtido a partir dos betas dos fatores considerados, ponderados pelos pesos dos fatores no ativo.

Verifica-se a seguir que o APT e CAPM fornecem o mesmo resultado. Para o caso em que se tem um ativo livre de risco, segue a partir do APT que

$$r_i = r_f + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2, \quad (3.39)$$

portanto

$$E(F_1) = r_f + \lambda_1, \quad E(F_2) = r_f + \lambda_2, \quad (3.40)$$

pois,

$$F_1 = 0 + 1F_1 + 0F_2, \quad F_2 = 0 + 0F_1 + 1F_2,$$

isto é,  $a_{F_1} = 0$ ,  $b_{F_1 1} = 1$ ,  $b_{F_1 2} = 0$ ,  $Z_{F_1} = 0$ , e similarmente para  $F_2$ .

Pela fórmula do CAPM,

$$r_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f). \quad (3.41)$$

A partir de (3.40) e (3.41),

$$E(F_1) = r_f + \beta_{F_1}(\mu_M - r_f) = r_f + \lambda_1,$$

$$E(F_2) = r_f + \beta_{F_2}(\mu_M - r_f) = r_f + \lambda_2.$$

Logo,

$$\lambda_1 = \beta_{F_1}(\mu_M - r_f), \lambda_2 = \beta_{F_2}(\mu_M - r_f). \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.39) e utilizando (3.38), segue que

$$r_i = r_f + (b_{i1}\beta_{F_1} + b_{i2}\beta_{F_2})(\mu_M - r_f) = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f),$$

mostrando que (3.39) e (3.41) fornecem o mesmo resultado.

### 3.8 Exercícios

Os Exercícios 1, 2 e 3 seguintes são solucionados e utilizam a planilha Exercícios.xls, disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. As respostas desses exercícios encontram-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

1) Um investidor acredita que o mercado acionário, como um todo, deve ter um bom desempenho em um determinado prazo. Ele poderia simplesmente investir em um fundo de ações passivo, ou seja, que acompanha um benchmark. No caso de ações negociadas na Bovespa, seria o próprio IBovespa. No entanto, esse investidor acredita que analisando alguns papéis sob o ponto de vista de quão mais (ou menos) arriscados eles são em relação ao IBovespa, ele pode montar uma carteira de ações que tenha risco parecido ao do IBovespa, mas com um retorno esperado maior. Adotando-se os ativos da pasta Data e uma janela de 100 dias, pede-se:

- a) Para uma taxa de juros de 18,5%, que seja traçada a SML — *Security Market Line* e os pontos  $(\mu, \beta)$  de cada ativo.
- b) De acordo com o gráfico criado, quais ativos devem ser escolhidos para compor a carteira?

2) Um administrador de um fundo de ações com gestão ativa necessita correr algum risco acima do risco do benchmark no intuito de obter retornos também acima desse benchmark. No entanto, ele deve tomar cuidado para não deixar o risco total do fundo (risco sistêmico mais risco não-sistêmico) muito alto, pois

poderia acarretar perdas acima do esperado. Esse administrador, por meio de outras análises, selecionou os ativos que gostaria de ter na sua carteira em ordem de preferência. Sendo os ativos da pasta Data as ações selecionadas pelo administrador em ordem de preferência, pede-se, para uma janela de 100 dias:

- a) Verificar o que acontece com o risco não-sistêmico do fundo à medida que se incluem novos ativos. Quanto vale o risco sistêmico?
  - b) Qual o número mínimo de ativos no fundo, de maneira a deixá-lo com o risco não-sistêmico inferior ao menor dos riscos não-sistêmicos individuais dos ativos?
- 3) Um investidor possui em carteira ativos com baixa liquidez. Portanto, para projetar o retorno da carteira, ele precisa encontrar uma maneira de projetar o retorno dos ativos. Uma alternativa seria usar o CAPM com valores de betas estimados a partir de ativos de liquidez do mesmo setor econômico. Sendo os ativos da pasta Data as ações com liquidez que servem de referência para a estimativa dos betas, o retorno livre de risco de 18,5% e a janela de 100 dias, pede-se:
- a) Para um ativo sem liquidez pertencente ao setor financeiro, o investidor decide estimar o seu beta a partir do beta da ação Bradesco PN. Qual o valor do beta? Qual o retorno projetado para o ativo?
  - b) Imagine que esse investidor leu na análise de um relatório financeiro que o preço dessa ação tem potencial para chegar a R\$ 100,00 em um ano. Baseado nesse relatório e no retorno projetado no item anterior, qual seria o preço justo desse ativo hoje?

### Exercícios Propostos

- 4) Suponha que o retorno esperado da carteira de mercado seja  $\mu_M = 23\%$ , e a taxa de juros livre de risco  $r_f = 7\%$ . O desvio-padrão da carteira de mercado é  $\sigma_M = 32\%$ . Considerando-se que o mercado é eficiente:
- a) Qual é a equação da linha do mercado?
  - b) Se deseja-se uma carteira eficiente com retorno esperado  $\mu = 39\%$ , qual deve ser o desvio-padrão dessa carteira?
  - c) Se forem investidos R\$ 100,00, como devem ser alocados os recursos para obter uma carteira com retorno esperado  $\mu = 30\%$ ?
  - d) Se forem investidos R\$ 30,00 na taxa de juros livre de risco e R\$ 70,00 na carteira de mercado, qual será o rendimento esperado e o desvio-padrão dessa carteira?

5) Considere  $n$  ativos descorrelacionados, cada um com variância  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sendo  $\omega_M = \begin{pmatrix} \omega_{M1} \\ \vdots \\ \omega_{Mn} \end{pmatrix}$  a carteira de mercado, obtenha uma expressão para  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  em função de  $\sigma_i^2$  e  $\omega_{Mi}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

6) Sendo  $\omega_g$  a carteira de mínima variância global, com variância  $\sigma_g^2$ , e  $\omega_a$  uma carteira eficiente com variância  $\sigma_a^2$ ; sendo  $\omega_{oa}$  a carteira zero-beta em relação a  $\omega_a$ , determine  $\zeta$  em função de  $\sigma_a^2$  e  $\sigma_g^2$  de forma que

$$\omega_{oa} = (1 - \zeta)\omega_g + \zeta\omega_a.$$

Suponha que  $\mu_M = 15\%$ ,  $\mu_{oM} = 9\%$ ,  $\rho_{aM} = 0,5$  (coeficiente de correlação entre os retornos da carteira  $\omega_a$  e  $\omega_M$ ),  $\sigma_M = 15\%$ ,  $\sigma_a = 5\%$ . Determine o retorno esperado  $\mu_a$ , usando o modelo de Black.

7) Considere o modelo com 1 fator, com a carteira de mercado sendo o fator do modelo. Suponha uma carteira formada por 3 ativos conforme os parâmetros mostrados na Tabela 3.8, e  $\mu_M = 12\%$ ,  $\sigma_M = 18\%$ . A taxa livre de risco é  $r_f = 5\%$ . Determine:

- O retorno esperado da carteira.
- O desvio-padrão do retorno da carteira.

TABELA 3.8: Parâmetros dos ativos do Exercício 7

Ativo	$\beta$	$\sigma_{Z_i}$	Peso na carteira
$R_1$	1,1	7%	20%
$R_2$	0,8	2,3%	50%
$R_3$	1	1%	30%

8) Suponha que o seguinte modelo com 2 fatores descreva os retornos dos ativos

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + Z_i.$$

Considere as 3 carteiras seguintes com retornos  $P_i$  conforme a Tabela 3.9:

- Determine os parâmetros  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  que caracterizam no  $R^3$  os retornos de equilíbrio.
- Se  $\mu_M - r_f = 4\%$ , encontre os valores das variáveis seguintes de forma que os modelos CAPM e APT sejam consistentes entre si:

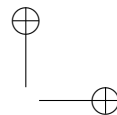
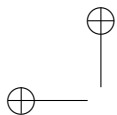
TABELA 3.9: Retornos dos ativos do Exercício 8

Carteira	Retorno esperado	$b_{P_i1}$	$b_{P_i2}$
$P_1$	12%	1	0,5
$P_2$	13,4%	3	0,2
$P_3$	12%	3	-0,5

b.1)  $\beta_{F_1}$  e  $\beta_{F_2}$  (em que  $\beta_{F_i} = \frac{\text{cov}(F_i, P_M)}{\sigma_M^2}$ );

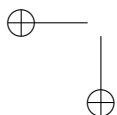
b.2)  $\beta_{P_1}, \beta_{P_2}, \beta_{P_3}$  (em que  $\beta_{P_i} = \frac{\text{cov}(P_i, P_M)}{\sigma_M^2}$ );

b.3)  $r_f$ .

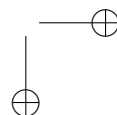


—

—



|





## Capítulo 4

# Modelos de Rastreamento

Neste capítulo, discorre-se sobre alguns algoritmos de otimização na administração de carteiras de investimento. O objetivo é, dado um conjunto de ativos financeiros, compor carteiras que rastreiem determinados benchmarks. Para isso, são considerados alguns métodos de otimização apresentados recentemente na literatura internacional, baseados em programação linear, modelos de mínimos quadrados, CAPM e Markowitz. Após uma breve discussão na Seção 4.1 sobre fundos de investimento ativos e passivos, são apresentados na Seção 4.2 modelos de rastreamento baseados na minimização da variância do erro. Na Seção 4.3, descrevem-se modelos de programação linear para o rastreamento de um benchmark. A Seção 4.4 é dedicada a um estudo comparativo de alguns dos métodos apresentados nas seções anteriores, aplicados à Bolsa de Valores de São Paulo, nos anos de 1998 e 1999, tendo o IBovespa como benchmark.

### 4.1 Fundos Ativos e Passivos

Atualmente existe no mercado financeiro um grande número de fundos de investimento que montam suas carteiras com o objetivo de seguir (rastrear) determinados índices de referência (benchmarks). Existem dois tipos de estratégia de escolha de ativos para a composição de uma carteira de investimento: passiva e ativa. A estratégia passiva de investimento visa obter retornos mais próximos possíveis dos de um dado benchmark. O administrador será avaliado quanto à sua capacidade de montar uma carteira que siga fielmente o comportamento de um índice predefinido, ou seja, os riscos envolvidos nesse tipo de estratégia são apenas sistêmicos e inerentes ao índice de referência. Já a estratégia ativa de investimento tem como finalidade ganhar, em termos de rentabilidade, de um benchmark específico. Nesse caso, o administrador também aceita correr algum risco não-sistêmico para, por meio de uma escolha acertada de ativos, obter retornos superiores aos do benchmark.

Uma solução simples para se adotar uma estratégia passiva de investimento seria verificar como é composto o índice que serve de benchmark e montar uma carteira com as mesmas proporções dos ativos. Entretanto, na prática, esses índices são compostos de um número muito grande de ativos, dos quais muitos não possuem a liquidez desejada, sendo de difícil negociação. Torna-se inviável para o administrador ter de comprar e vender esses ativos toda vez que houver novas entradas ou saques no fundo. Faz-se, portanto, necessário um estudo para decidir, entre os ativos com liquidez aceitável, quais e em que proporções devem ser escolhidos.

O primeiro passo na administração de fundos que se propõem a rastrear um índice de referência é a sua escolha. Deve-se levar em consideração a sua composição e, principalmente, a sua aceitação como um número que, de fato, meça o comportamento do mercado como um todo. Um índice pode ser composto por muitos ativos, mas, se as pessoas que operam naquele mercado não acreditarem nele, será apenas uma média dos movimentos dos ativos e nada mais. Ao passo que, se ele for observado e acompanhado, irá realmente traduzir o “humor” daquele mercado. Um exemplo é o índice Dow Jones da Bolsa de Nova York que, apesar de ser composto por apenas 30 ações, é capaz de influenciar o movimento de ativos isolados no mundo inteiro.

Uma vez determinado o índice que servirá de benchmark para o fundo de investimento, a próxima etapa é decidir sobre a composição da carteira do fundo. Como discutido anteriormente, uma solução simples seria compor a carteira nas mesmas proporções do benchmark. Mas como isso não é viável na maioria das vezes, faz-se necessária a adoção de modelos de otimização.

Nas próximas seções, são descritos alguns modelos que, de acordo com suas características, geram como solução uma composição de carteira que minimiza as diferenças entre os retornos da carteira e os do índice de referência adotado como benchmark.

## 4.2 Variância do Erro de Rastreamento

Os resultados desta seção são baseados em [Roll, 1992]. Considera-se uma carteira de referência (benchmark)  $\omega_B$ , com retorno  $P_B$ , retorno esperado  $\mu_B$ , e variância  $\sigma_B^2$ , que se deseja rastrear, e como sendo  $\mu_e$  o ganho de erro desejado. Sendo  $\omega$ , uma carteira com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , define-se o erro de rastreamento como

$$P_e = P - P_B = (\omega - \omega_B)' R$$

que representa o erro entre o retorno da carteira e o retorno da carteira de referência. Define-se também o erro de rastreamento e a sua variância como

$\mu_e$  e  $\sigma_e^2$ , respectivamente. Segue que

$$\begin{aligned}\mu_e &= \mu - \mu_B \\ &= (\omega - \omega_B)'r, \\ \sigma_e^2 &= E((P_e - \mu_e)^2) \\ &= (\omega - \omega_B)'E((R - r)(R - r)')(\omega - \omega_B) \\ &= (\omega - \omega_B)'\Sigma(\omega - \omega_B).\end{aligned}$$

Considera-se inicialmente o caso em que se investe em todos os ativos  $n$  e se deseja ter um ganho  $\mu_e \geq 0$  em relação à carteira de referência  $\omega_B$ . Denomina-se  $x = \omega - \omega_B$ . Note que

$$\mu_e = x'r, x'e = \omega'e - \omega_B'e = 1 - 1 = 0, \sigma_e^2 = x'\Sigma x.$$

Deseja-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned}\min & x'\Sigma x \\ \text{sujeito a} & \\ & x'r = \mu_e, \\ & x'e = 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

O lagrangiano para o Problema (4.1) é

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x'\Sigma x + \lambda_1(\mu_e - x'r) - \lambda_2 x'e.$$

As condições de otimalidade são

$$\begin{aligned}2\Sigma x - \lambda_1 r - \lambda_2 e &= 0 \\ x'r &= \mu_e \\ x'e &= 0.\end{aligned}$$

Como anteriormente, obtém-se que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\delta} \begin{pmatrix} \alpha & -\psi \\ -\psi & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_e \\ 0 \end{pmatrix},$$

(veja as definições  $\alpha, \psi, \gamma$  em (2.2), (2.3), (2.4), (2.5)) e

$$x = \frac{\mu_e}{\delta} (\alpha \Sigma^{-1} r - \psi \Sigma^{-1} e) = \frac{\mu_e}{\frac{\gamma}{\psi} - \frac{\psi}{\alpha}} \left( \frac{1}{\psi} \Sigma^{-1} r - \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right). \tag{4.2}$$

Lembrando-se que, a partir das Equações (2.16), (2.17), (2.18), a carteira com mínima variância global é dada por

$$\omega_g = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e, \mu_g = \frac{\psi}{\alpha}, \sigma_g^2 = \frac{1}{\alpha},$$

e que, para um retorno  $\mu_a = \frac{\gamma}{\psi}$ , tem-se que a carteira de mínima variância correspondente é dada por

$$\omega_a = h\mu_a + g = \frac{1}{\psi}\Sigma^{-1}r,$$

com variância

$$\sigma_a^2 = \frac{\gamma}{\psi^2},$$

segue, a partir de (4.2), que

$$x = \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} (\omega_a - \omega_g).$$

Note que

$$\mu_a - \mu_g = \frac{\gamma\alpha - \psi^2}{\psi\alpha} = \frac{\delta}{\psi\alpha} > 0.$$

Portanto, a estratégia de alteração da carteira  $\omega$  não depende de  $\omega_B$ . Sempre será

$$\omega - \omega_B = \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} (\omega_a - \omega_g). \quad (4.3)$$

Conclui-se que dois investidores com os mesmos parâmetros adotarão as mesmas estratégias de alterações de carteiras em relação à carteira de referência  $\omega_B$ , independentemente de qual seja ela. A variância do erro é dada por:

$$\sigma_e^2 = \text{Var}(P - P_B) = \left( \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\omega_a - \omega_g)' \Sigma (\omega_a - \omega_g). \quad (4.4)$$

Tem-se entretanto que

$$\sigma_a^2 = \omega_a' \Sigma \omega_a = \frac{\gamma}{\psi^2}, \quad \sigma_g^2 = \text{cov}(P_g, P_a) = \omega_a' \Sigma \omega_g = \frac{1}{\alpha}. \quad (4.5)$$

Portanto, a partir de (4.4) e (4.5),

$$\sigma_e^2 = \left( \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\sigma_a^2 - 2\sigma_g^2 + \sigma_g^2) = \left( \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2). \quad (4.6)$$

Nota-se a partir de (4.6) que a variância do erro não vai depender da carteira de referência  $\omega_B$ . A variância da carteira  $P$  é

$$\sigma^2 = (x + \omega_B)' \Sigma (x + \omega_B) = \sigma_B^2 + \sigma_e^2 + 2x' \Sigma \omega_B. \quad (4.7)$$

A partir de (4.2) segue que

$$x' \Sigma \omega_B = \frac{\mu_e \sigma_g^2}{\mu_a - \mu_g} \left( \frac{\mu_B}{\mu_g} - 1 \right). \quad (4.8)$$

Logo, a partir de (4.7) e (4.8),

$$\sigma^2 = \sigma_B^2 + \left( \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} \right)^2 (\sigma_a^2 - \sigma_g^2) + 2 \frac{\mu_e \sigma_g^2}{\mu_a - \mu_g} \left( \frac{\mu_B}{\mu_g} - 1 \right). \quad (4.9)$$

Seja  $\hat{P}$  o retorno de uma carteira eficiente com o mesmo retorno esperado que a carteira com retorno  $P$  (ou seja,  $\mu_e + \mu_B$ ) e variância  $\hat{\sigma}^2$ . Da mesma forma, considera-se  $\hat{P}_B$  o retorno de uma carteira eficiente com o mesmo retorno esperado que a carteira com retorno  $P_B$  (isto é,  $\mu_B$ ) e variância  $\hat{\sigma}_B^2$ . A partir de (4.6) e (4.9),

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_B^2 + \sigma_e^2 + 2 \frac{\mu_e \sigma_g^2}{\mu_a - \mu_g} \left( \frac{\mu_B}{\mu_g} - 1 \right). \quad (4.10)$$

Subtraindo as expressões (4.9) e (4.10), obtém-se que

$$\sigma^2 - \hat{\sigma}^2 = \sigma_B^2 - \hat{\sigma}_B^2. \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) mostra que a diferença entre a variância  $\sigma^2$  da carteira e a variância  $\hat{\sigma}^2$  da carteira eficiente se mantém constante e igual à diferença inicial,  $\sigma_B^2 - \hat{\sigma}_B^2$ . Se a carteira de referência  $\omega_B$  é eficiente,  $\sigma_B^2 = \hat{\sigma}_B^2$  e, portanto,  $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$ , ou seja, como seria esperado, a solução do Problema (4.1) leva a uma carteira eficiente (e a curva no plano risco-retorno coincide com a fronteira eficiente). Mas, se a carteira de referência  $\omega_B$  não for eficiente, a solução do Problema (4.1) sempre levará a uma carteira não-eficiente, e a curva no plano risco-retorno estará sempre distante da fronteira eficiente, de acordo com a Equação (4.11) (ou seja, a “ineficiência” se mantém constante). A Figura 4.1 ilustra essa última situação.

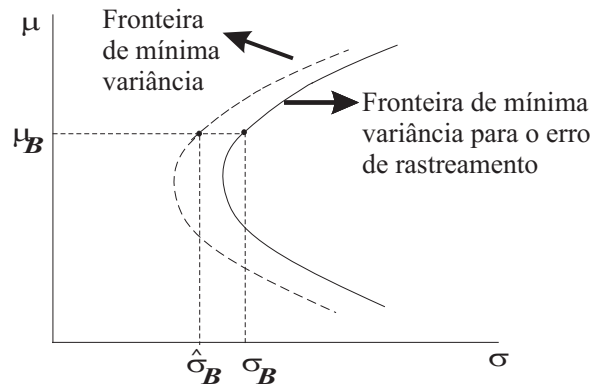


FIGURA 4.1: Mínima variância para o erro de rastreamento

Calcula-se o  $\beta$  da carteira, assumindo que a carteira de mercado seja a carteira de referência  $\omega_B$ . Segue que

$$\beta = \frac{\text{cov}(P, P_B)}{\sigma_B^2}. \quad (4.12)$$

Mas a partir de (4.8)

$$\begin{aligned} \text{cov}(P, P_B) &= (x + \omega_B)' \Sigma \omega_B \\ &= \sigma_B^2 + x' \Sigma \omega_B \\ &= \sigma_B^2 + \frac{\mu_e \sigma_g^2}{\mu_a - \mu_g} \left( \frac{\mu_B}{\mu_g} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Logo, com base em (4.12) e (4.13),

$$\beta = 1 + \frac{\mu_e}{\mu_a - \mu_g} \left( \frac{\sigma_g}{\sigma_B} \right)^2 \left( \frac{\mu_B}{\mu_g} - 1 \right).$$

Portanto, para  $\mu_e > 0$  e  $\mu_B > \mu_g$  o beta da carteira com retorno  $P$  (solução do Problema (4.1)) será maior que 1 (carteiras desse tipo serão mais rentáveis quando o mercado sobe). Pode-se mostrar que carteiras que dominam a carteira de referência, isto é, têm retorno esperado maior e volatilidade menor, possuem beta menor que 1. Sendo  $\beta_d$  o beta de uma carteira  $\omega_d$  que domina a carteira de mercado, denotando por  $\rho_{d,B} \in [-1, 1]$  o fator de correlação entre o retorno  $P_d$  da carteira  $\omega_d$  e o retorno  $P_B$  da carteira  $\omega_B$  e lembrando que  $\text{cov}(P_d, P_B) = \rho_{d,B} \sigma_d \sigma_B$  (em que  $\sigma_d$  representa o desvio-padrão da carteira  $\omega_d$ ), segue que

$$\beta_d = \frac{\rho_{d,B} \sigma_d \sigma_B}{\sigma_B^2} = \frac{\rho_{d,B} \sigma_d}{\sigma_B} \leq |\rho_{d,B}| \frac{\sigma_d}{\sigma_B} < |\rho_{d,B}| \leq 1,$$

pois por hipótese,  $\frac{\sigma_d}{\sigma_B} < 1$ .

### 4.3 Minimização do Erro de Rastreamento por Programação Linear

Suponha que se tenha uma série histórica com  $T$  dados sobre um índice que se deseja rastrear, bem como de  $p$  ativos básicos que compõem esse índice. Sendo  $y$  o vetor  $T$ -dimensional com as observações do índice que se deseja rastrear, e  $\Gamma$  a matriz  $T \times p$  com  $T$  observações dos  $p$  ativos básicos que se considera, tem-se,

$$y = \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_B(1) \\ \vdots \\ P_B(T) \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} R_1(1) & \dots & R_p(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(T) & \dots & R_p(T) \end{pmatrix}.$$

Em [Rudolf et al., 1999] os seguintes modelos de rastreamento foram propostos:

- i) MODELO MAD: deseja-se minimizar os desvios absolutos da média (MAD)

$$\begin{aligned} \min e' (|y - \Gamma\omega|) \\ \text{sujeito a} \\ \omega'e = 1, \\ \omega \geq 0, \\ \omega \in R^p, \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que

$$|y - \Gamma\omega| = \begin{pmatrix} |y(1) - \Gamma(1)\omega| \\ \vdots \\ |y(T) - \Gamma(T)\omega| \end{pmatrix},$$

e

$$\Gamma(t) = (R_1(t) \quad \dots \quad R_p(t)).$$

- ii) MODELO Min-Max: deseja-se minimizar o maior desvio entre a carteira de referência e a carteira (Min-Max):

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \max_t |y(t) - \Gamma(t)\omega| \\ \text{sujeito a} \\ \omega'e = 1, \\ \omega \geq 0, \\ \omega \in R^p. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Duas variações do modelo MAD e Min-Max ocorrem quando se penaliza apenas o caso em que o retorno está abaixo da carteira de referência. Nesse caso, há o MADD e o DMin-Max.

- iii) MODELO MADD:

$$\begin{aligned} \min e' ((y - \Gamma\omega)^+) \\ \text{sujeito a} \\ \omega'e = 1, \\ \omega \geq 0, \\ \omega \in R^n, \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que

$$(y - \Gamma\omega)^+ = \begin{pmatrix} (y(1) - \Gamma(1)\omega)^+ \\ \vdots \\ (y(T) - \Gamma(T)\omega)^+ \end{pmatrix}$$

e

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

iv) MODELO DMin-Max:

$$\begin{aligned} & \min_{\omega} \max_t (y(t) - \Gamma(t)\omega)^+ \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega' e = 1, \\ & \omega \geq 0, \\ & \omega \in R^p. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Os Problemas (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17) são formulados como programação linear (P.L.). Inicia-se pelo Problema (4.15). Pode-se reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} & \min z \\ & \text{sujeito a} \\ & z \geq y(t) - \Gamma(t)\omega, \\ & -z \leq y(t) - \Gamma(t)\omega, \\ & \omega' e = 1, \\ & \omega \in R^p, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

No caso (4.17), a única restrição relevante é  $z \geq y(t) - \Gamma(t)\omega$  (pois não importa se  $z \leq y(t) - \Gamma(t)\omega$ ). Logo, o problema pode ser reescrito como P.L. da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min z \\ & \text{sujeito a} \\ & z \geq y(t) - \Gamma(t)\omega, \\ & \omega' e = 1, \\ & \omega \in R^p, \quad t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Para o caso (4.14), sendo

$$z_t^+ = (y(t) - \Gamma(t)\omega)^+, z_t^- = (\Gamma(t)\omega - y(t))^+,$$

tem-se que

$$|y(t) - \Gamma(t)\omega| = z_t^+ + z_t^-.$$

Note que

$$\begin{aligned} \Gamma(t)\omega - y(t) &\geq 0 \Rightarrow z_t^- = \Gamma(t)\omega - y(t) \\ \Gamma(t)\omega - y(t) &\leq 0 \Rightarrow z_t^+ = y(t) - \Gamma(t)\omega \end{aligned}$$



e que  $z_t^- \times z_t^+ = 0$ . Logo,

$$y(t) - \Gamma(t)\omega = z_t^+ - z_t^-$$

e o problema de P.L. pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^T (z_t^+ + z_t^-) \\ & \text{sujeito a} \\ & y(t) - \Gamma(t)\omega = z_t^+ - z_t^-, \quad t = 1, \dots, T \\ & \omega' e = 1, \\ & z_t^+ \geq 0, z_t^- \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ & \omega \in R^p. \end{aligned}$$

Para o caso (4.15), impõem-se restrições apenas quando o retorno está abaixo do retorno da carteira de referência, isto é,  $z_t^+$ . Conseqüentemente, o problema de P.L. é

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^T z_t^+ \\ & \text{sujeito a} \\ & y(t) - \Gamma(t)\omega \leq z_t^+, \quad t = 1, \dots, T \\ & \omega' e = 1, \\ & z_t^+ \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ & \omega \in R^p. \end{aligned}$$

## 4.4 Métodos Computacionais

Diversos artigos tratam de métodos computacionais na literatura internacional. Entre eles podem ser citados os artigos [Jorion, 1992], [Zenios, 1993], [Duarte Jr., 1999] e [Hanza & Janssen, 1998]. Problemas de otimização de carteiras com incertezas paramétricas foram considerados, entre outros, nos artigos [Howe & Rustem, 1997], [Howe et al., 1996], [Rustem et al., 1995], [Costa & Paiva, 2002] e [Costa & Nabholz, 2002]. Os resultados desta seção são baseados em [Rudolf et al., 1999], que utilizam métodos de programação matemática na otimização de carteiras.

### 4.4.1 Modelo 1: Mínimo Erro Quadrático

O método consiste em encontrar a composição da carteira que minimize a diferença ao quadrado entre seus retornos e os retornos do benchmark. Supondo

que o benchmark é composto por  $n$  ativos, inicialmente é necessário definir um universo de  $p$  ativos, em que  $p < n$ , que será considerado na otimização. O critério utilizado na seleção desses ativos será o percentual de participação na composição do índice, o qual será detalhado adiante quando forem considerados alguns exemplos numéricos.

O problema consiste em minimizar o seguinte erro  $err$ :

$$err = y - \Gamma\omega.$$

O vetor  $\omega$ , que dá a composição da carteira, é escolhido segundo a seguinte minimização, lembrando que  $0$  corresponde ao vetor  $n$ -dimensional de zeros:

$$\begin{aligned} & \min (y - \Gamma\omega)'(y - \Gamma\omega) \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega \geq 0, \\ & \omega'e = 1, \\ & \omega \in R^p. \end{aligned} \tag{4.18}$$

As restrições  $\omega \geq 0$  e  $\omega'e = 1$  significam que será trabalhado apenas com posições compradas e com o somatório de todos os pesos dos ativos sendo igual a 1.

#### 4.4.2 Modelo 2: Mínimo Risco Não-sistêmico

Conforme visto no Capítulo 4, para uma carteira com retorno  $P$ , retorno esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,

$$\sigma^2 = Var(P) = \beta^2 Var(P_M) + Var(Z) = \beta^2 \sigma_M^2 + Var(Z).$$

Assumindo que a carteira de referência seja a carteira de mercado, segue que rastrear  $P_M$  seria equivalente a minimizar  $\sigma^2$  sujeito a  $\beta = 1$ . Logo, pode-se enunciar o modelo proposto da seguinte maneira, em que a matriz de covariância  $\Sigma$  e os  $\beta_i$  são estimados para uma janela de  $T$  dias:

$$\begin{aligned} & \min \omega' \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega \geq 0, \\ & \omega'e = 1, \\ & \sum_{i=1}^p \beta_i \omega_i = 1, \\ & \omega \in R^p. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Cabe salientar que não há nenhuma restrição direta à rentabilidade da carteira a ser otimizada.

#### 4.4.3 Modelo 3: Mínima Variância do Erro

Este modelo é baseado no modelo apresentado na Seção 4.2, com  $\mu_g = 0$  e  $p < n$ . Diferentemente dos Modelos 1 e 2, neste caso considera-se que  $\omega$  tem dimensão  $n$ , mas possui valores não-nulos apenas para um universo de  $p$  ativos considerados na otimização, o qual é definido segundo os critérios mencionados anteriormente. Ou seja,  $\omega_i$  assume valores não-nulos para  $1 \leq i \leq p$  e  $\omega_i$  vale zero para  $n-p+1 \leq i \leq n$ . Seguindo a notação da Seção 4.2, deseja-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min (\omega - \omega_B)' \Sigma (\omega - \omega_B) \\ & \text{sujeito a} \\ & (\omega - \omega_B)' r = 0, \\ & \omega' e = 1, \\ & \omega \geq 0, \\ & \omega_i = 0, i = n - p + 1, \dots, n, \\ & \omega \in R^n. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Este modelo minimiza a volatilidade existente entre o retorno da carteira e o do benchmark.

### 4.5 Simulações

Os resultados apresentados nesta seção são baseados na dissertação de mestrado [Assunção, 2000] e publicados em [Assunção & Costa, 2000].

São apresentadas simulações desses modelos a partir de dados reais do mercado acionário da Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), tendo o IBovespa como benchmark.

Para selecionar os ativos passíveis de negociação, deve-se associá-los a um custo de liquidez. Entende-se, por custo de liquidez, o diferencial percentual entre o preço do ativo utilizado nas simulações e o preço pelo qual efetivamente se fecharia o negócio em uma eventual compra ou venda do ativo. Isso acontece em razão do *spread* (diferença) entre os preços de compra e de venda. Quanto menor a liquidez, maior o *spread* e, conseqüentemente, maior o custo de liquidez.

No período considerado para as simulações (anos de 1998 e 1999), o número de ativos que compuseram o IBovespa variou em torno de 50, dependendo do quadrimestre.

Percebe-se que, aceitando trabalhar com um custo de liquidez de até 0,5%, o universo de ativos a ser considerado para as simulações não deve exceder, quando muito, 20 dos ativos mais líquidos do Índice.

Um outro ponto importante são os custos operacionais, dos quais o mais relevante é a corretagem. A cada negociação de compra ou venda de ações,

um percentual do volume financeiro transacionado é pago sob a forma de corretagem. Essa taxa varia de acordo com a corretora, o cliente e o volume transacionado. Para efeito de cálculos, assume-se um custo operacional de 0,2%, que equivale a uma média das taxas cobradas no mercado.

As simulações dos modelos de otimização descritos anteriormente foram feitas sobre uma massa de dados que compreende os fechamentos diários dos ativos que compuseram o IBovespa, em seus respectivos quadrimestres, nos anos de 1998 e 1999. A janela de otimização utilizada foi de 180 dias para todas as simulações.

As minimizações foram feitas adotando-se uma ponderação exponencial com fator de decaimento de 0,94 sobre as funções objetivos dos modelos. No caso do Modelo 1, foi considerada com a incidência da ponderação sobre o termo  $y - \Gamma\omega$ . Já no Modelo 2 e no Modelo 3, foram tomadas com a ponderação na matriz de covariância  $\Sigma$ .

Utilizam-se diferentes períodos de reotimização, sendo aplicado um custo de liquidez de 0,2% mais um custo operacional de 0,5% sobre o volume financeiro transacionado a cada realocação da carteira. Cabe salientar que esses percentuais incidem, penalizando o retorno da carteira, apenas nos dias de reotimização, sendo desconsiderados no restante do período.

Como critério limitador de escolha dos ativos, são tomados os percentuais de participação no IBovespa. A cada dia de reotimização da carteira define-se um novo universo de ativos, o qual será fixo para o próximo período. Esses ativos são escolhidos por ordem decrescente de participação até satisfazerem o percentual limitador considerado.

Outra análise realizada foi o estudo da relevância de se utilizar uma restrição extra, de o beta da carteira em relação ao benchmark valer 1. Essa verificação cabe apenas para os Modelos 1 e 3, uma vez que o Modelo 2 já possui essa restrição.

Como ferramenta de software para as simulações práticas, utiliza-se o MATLAB. As otimizações propriamente ditas foram feitas por meio da rotina do MATLAB `constr.m`. Essa encontra o mínimo de uma função de uma série de variáveis, sujeito a uma matriz de restrições, o que atendeu perfeitamente aos propósitos dos autores.

As simulações foram montadas da seguinte maneira: a cada período de realocação, otimiza-se a carteira considerando-se a janela descrita e assume-se esta composição até o próximo período de realocação, quando o processo se repete. Por exemplo, tomando-se uma simulação com período de reotimização de 20 dias e representatividade do IBovespa de 70%. Supõe-se que o dia 5/10/1999 seja um dia de reotimização. Nesse dia o Ativo Tele rctb RPN é o mais líquido com uma participação de 37,11%. O segundo mais líquido é Petrobras PN, com 10,39%. Caso fossem tomados apenas esses dois ativos, seriam obtidos 47,50% do IBovespa. Como o critério para a definição do universo de ativos é uma representatividade de 70%, é necessário considerar mais ativos, os quais, em ordem decrescente de liquidez, são: Tele rctb RON, Eletrobrás

PNB, Telesp PN, Eletrobrás ON e Bradesco PN. Portanto, a otimização é feita sobre o universo de ativos definido por essas 7 ações, considerando uma janela de dados históricos de retornos de 180 dias, ou seja, desde o dia 14/1/1999. No dia da otimização, a rentabilidade da carteira sofre a incidência de 0,7% sobre o volume financeiro transacionado na realocação. Se 40% da carteira tiver sido realocada, sua rentabilidade é penalizada em 0,28%. Uma vez encontrada a composição ótima, ela é utilizada durante os próximos 20 dias, ou seja, até 4/11/1999, que seria o dia da próxima reotimização.

Os resultados foram obtidos para os diferentes pontos de vista. Primeiro, foi realizada uma comparação entre os modelos, considerando diferentes períodos de reotimização. Depois, foram observadas as implicações em se utilizar diferentes representatividades do IBovespa para compor o universo de ativos. Por fim, será estudada a relevância de se restringir o valor do beta da carteira a 1 durante as otimizações para o Modelo 3.

Como critério de desempenho das simulações e de comparação entre os modelos, são utilizados: comparativos de rentabilidade em períodos fechados; o EQM — Erro Quadrático Médio, que é a média das diferenças entre as rentabilidades obtidas nas simulações e as do IBovespa, dia a dia no período considerado, ao quadrado; e o beta das rentabilidades obtidas nas simulações em relação às rentabilidades do IBovespa.

#### 4.5.1 Comparação entre os Modelos

Os resultados nas Figuras 4.2 a 4.4 foram obtidos para um universo de ativos que possui uma representatividade de 80% do IBovespa e seguem os demais parâmetros especificados. Para um período de reotimização de 5 dias, apresentam-se nas Figuras 4.2 a 4.4 e na Tabela 4.1 os resultados para os Modelo 1, Modelo 2 e Modelo 3:

TABELA 4.1: EQM e beta para o período de reotimização de 5 dias

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
EQM diário	0,001454%	0,003572%	0,001632%
$\beta$	1,0267	0,9909	1,0401

Percebe-se que, apesar de o Modelo 1 possuir um EQM diário menor, o Modelo 3 acompanhou melhor o IBovespa em um número maior de meses. Isso era esperado pela própria idéia do modelo, que visa minimizar a volatilidade do erro de rastreamento. Em outras palavras, o Modelo 3 mostrou-se mais regular que os demais.

Outro ponto importante foi quanto aos bons resultados obtidos pelo Modelo 2 que, mesmo não possuindo nenhuma restrição direta à rentabilidade,

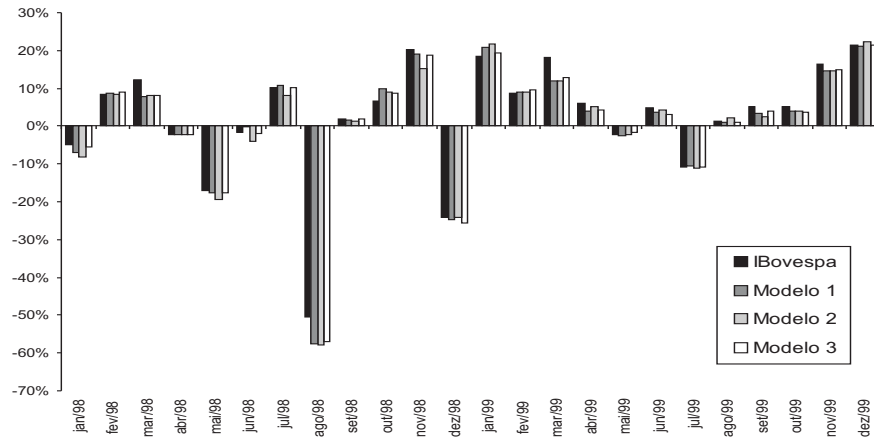


FIGURA 4.2: Rentabilidade mensal para a reotimização de 5 dias

acompanhou o IBovespa relativamente bem, sendo considerado o melhor modelo para a rentabilidade fechada do ano de 1999. Esse fato mostra que, apesar das imperfeições e de ser extremamente concentrado, o IBovespa representa uma carteira de mercado, no sentido do CAPM, tendo em vista que exerce uma grande influência no risco sistêmico dos ativos em questão.

Tomando-se as mesmas condições das simulações do caso anterior, só que utilizando um período de reotimização de 20 dias, chega-se aos valores apresentados nas Figuras 4.5 a 4.7 e na Tabela 4.2:

TABELA 4.2: EQM e beta para o período de reotimização de 20 dias

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
EQM diário	0,001704%	0,003910%	0,001706%
$\beta$	1,0346	0,984	1,0436

É possível notar que reotimizações em um período de 20 dias possuem um EQM diário maior que as simulações com reotimizações de 5 dias.

Entretanto, a rentabilidade acumulada está mais próxima do benchmark, em virtude do menor impacto dos custos assumidos, uma vez que esses incidem apenas nos dias de realocação da carteira e, portanto, menos volume financeiro é transacionado no final.

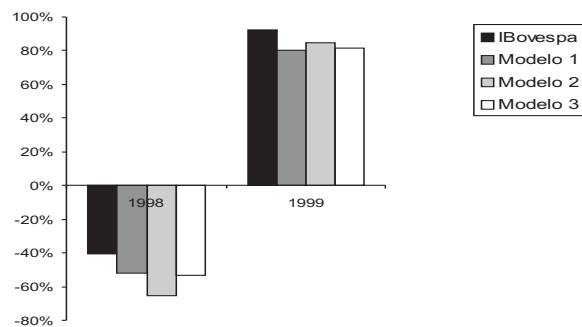


FIGURA 4.3: Rentabilidade anual para a reotimização de 5 dias

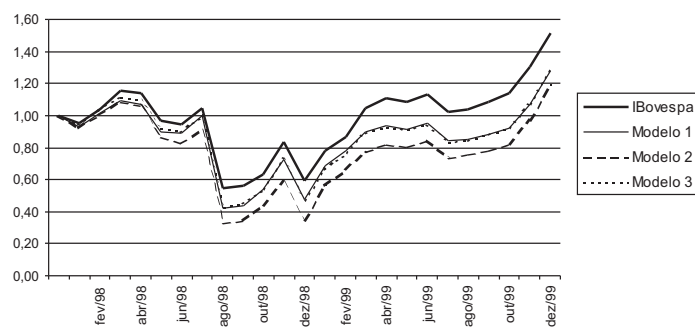


FIGURA 4.4: Rentabilidade acumulada para a reotimização de 5 dias

#### 4.5.2 Variação da Representatividade

As simulações descritas apresentaram resultados comparativos entre os modelos para um mesmo nível de representatividade do IBovespa. Agora são consideradas simulações para os diferentes percentuais de participação. Considera-se para a análise o Modelo 1, pois o Modelo 2 não obteve solução para a representatividade 70% e o Modelo 3 apresentou resultados semelhantes ao Modelo 1. Os resultados nas Figuras 4.8 a 4.10 e na Tabela 4.3 foram obtidos para os diferentes universos de ativos com representatividade de 70%, 80% e 90% do IBovespa e com um período de reotimização de 20 dias.

Comparando diferentes tamanhos de universos de ativos, percebe-se que, quanto maior a representatividade, mais próximo de 1 fica o beta e, portanto, menor o risco não-sistêmico. No limite da diversificação, haveria 100% do IBovespa e beta 1. Outra consequência observada é a diminuição gradual do EQM diário com o aumento da representatividade.

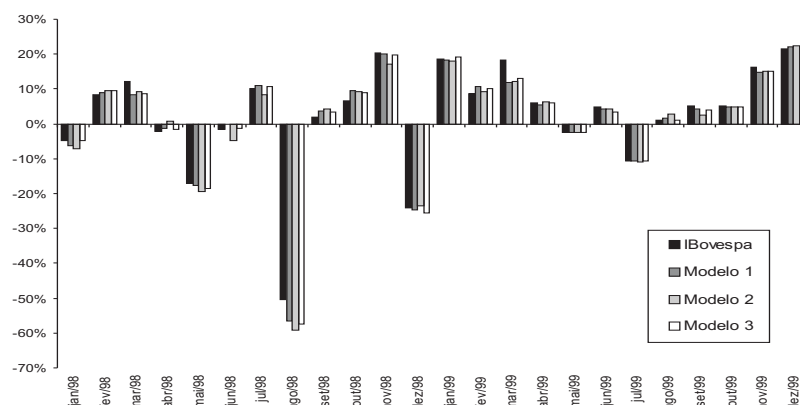


FIGURA 4.5: Rentabilidade mensal para a reotimização de 20 dias

TABELA 4.3: EQM e beta para as diferentes representatividades

	70%	80%	90%
EQM diário	0,003147%	0,001704%	0,00077%
$\beta$	1,0851	1,0349	1,0104

Quanto à rentabilidade nos períodos fechados amostrados, verifica-se que houve um equilíbrio entres os três casos estudados. Se, por um lado, no gráfico mensal a representatividade de 90% se comportou melhor, no anual, as representatividades de 70% e 80% acompanharam mais o IBOvespa.

Mercados com alta volatilidade caracterizam-se por concentrarem a liquidez em apenas alguns ativos. Em momentos de altas e baixas expressivas nos preços, os investidores têm que tomar decisões rápidas e, muitas vezes, não encontram a liquidez necessária na maioria dos ativos, sendo forçados a negociar outros mais líquidos. Isso explica o fato de a representatividade de 70%, que engloba um universo pequeno de ativos com bastante liquidez, ter tido um desempenho ruim, em termos de rentabilidade acumulada, até janeiro de 1999 (desvalorização cambial), quando o IBOvespa apresentou fortes quedas, e ter apresentado um desempenho muito melhor a partir desse ponto, à medida que o índice iniciou uma tendência expressiva de alta.



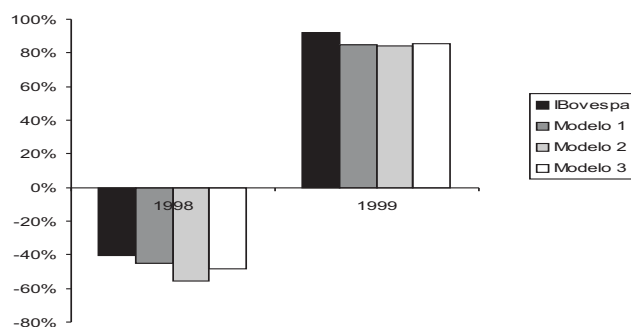


FIGURA 4.6: Rentabilidade anual para a reotimização de 20 dias

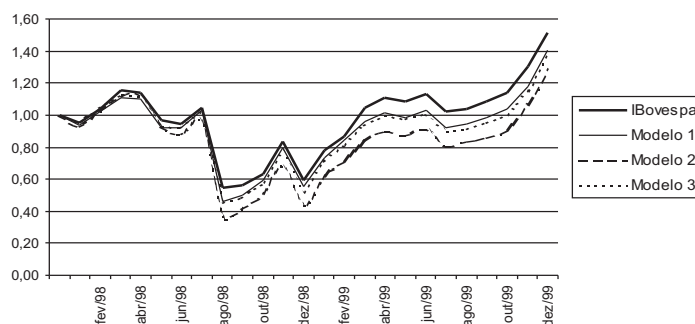


FIGURA 4.7: Rentabilidade acumulada para a reotimização de 20 dias

### 4.5.3 Restrição ao Beta

Seguindo uma questão levantada em [Roll, 1992], analisa-se a relevância de se utilizar a restrição de o beta da carteira otimizada ser igual a 1 nas minimizações. A idéia básica é que, ainda que fosse imposta uma restrição a mais ao modelo, seriam obtidos melhores resultados futuros, já que a sua robustez aumentaria. Para essa análise, utiliza-se o Modelo 3 com um universo de ativos de representatividade de 80% e um período de reotimização de 20 dias. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 4.11 a 4.13 e na Tabela 4.4.

Por fim, percebe-se que a estratégia de restrição ao beta não levou a melhores resultados. Isso pode ser observado tanto no EQM diário como nas rentabilidades amostradas.

A falta da robustez encontrada com o uso de uma restrição a mais se explica, basicamente, por dois fatores: um é a ineficiência da carteira do

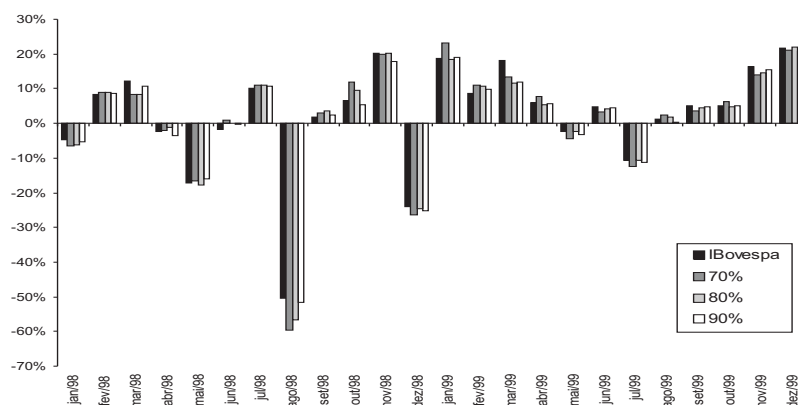


FIGURA 4.8: Rentabilidade mensal para as diferentes representatividades

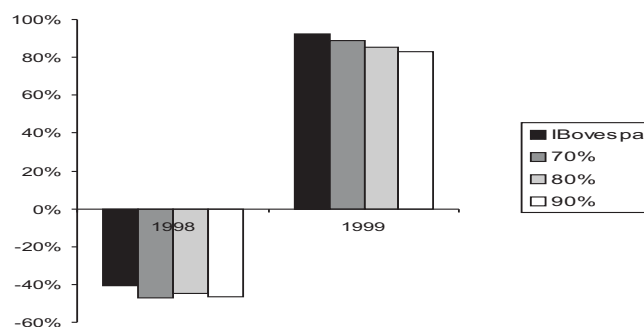


FIGURA 4.9: Rentabilidade anual para as diferentes representatividades

IBovespa; o outro, é a alta volatilidade do mercado no período amostrado, a qual faz com que nem sempre dados históricos garantam comportamentos futuros.

#### 4.5.4 Conclusões

Os modelos de otimização de carteiras propostos foram testados para o mercado acionário da Bolsa de Valores de São Paulo, tendo o IBovespa como benchmark. As principais conclusões a que se chegou, para as diferentes bases de comparação, foram:

1. Quanto aos modelos propostos

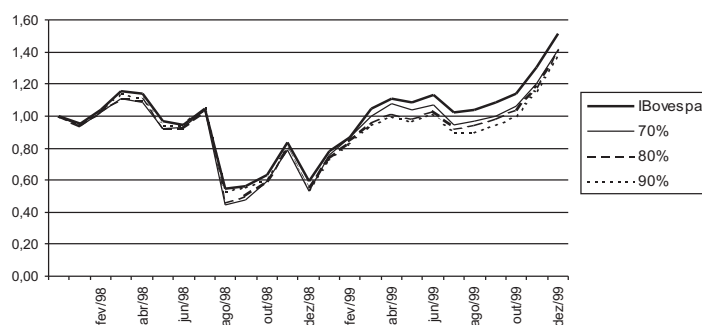


FIGURA 4.10: Rentabilidade acumulada para as diferentes representatividades

TABELA 4.4: EQM e beta com e sem restrição ao beta

	Com restrição ao $\beta$	Sem restrição ao $\beta$
EQM diário	0,004297%	0,001704%
$\beta$	0,9958	1,0349

Entre os três modelos, percebeu-se que o Modelo 1 e o Modelo 3, apesar de terem filosofias completamente diferentes, obtiveram resultados muito parecidos e acompanharam o benchmark de uma maneira mais efetiva que o Modelo 2. No entanto, o Modelo 3 se mostrou mais regular, pois manteve o erro de rastreamento menos volátil dia a dia, o que acaba gerando melhores resultados em diferentes períodos de amostragem. Isso pode ser observado na Figura 4.2, na qual ele acompanhou melhor o benchmark que os demais modelos. Portanto, pode-se dizer que esse foi o modelo que se comportou melhor, segundo este critério.

## 2. Quanto aos períodos de reotimização

A utilização de diferentes períodos de reotimização está diretamente ligada aos custos das transações financeiras. Os dois períodos utilizados, de 5 e de 20 dias, tiveram resultados semelhantes de uma maneira geral, mas as reotimizações de 20 dias se comportaram melhor no decorrer do período, como pode-se observar nas Figuras 4.4 e 4.7. Logo, com a estrutura de custos assumida, conclui-se que fazer as realocações da carteira de 20 em 20 dias é a melhor estratégia.

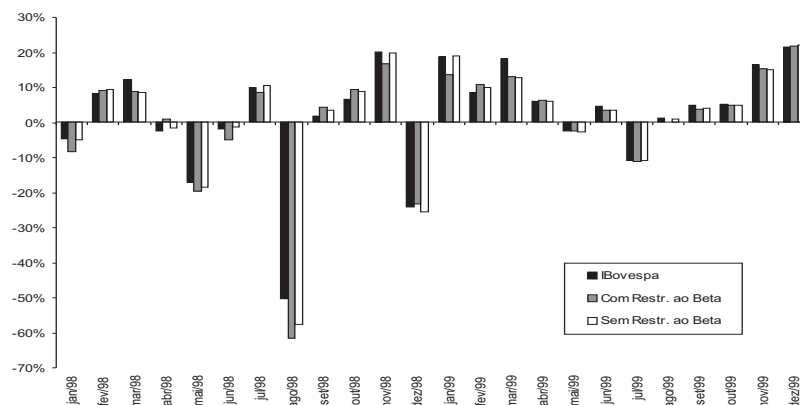


FIGURA 4.11: Rentabilidade mensal com e sem restrição ao beta

### 3. Quanto aos universos de ativos

O número de ativos considerados nas otimizações está relacionado ao custo de liquidez assumido. Dentro dessa limitação, tomam-se diferentes percentuais de representatividade do Ibovespa: 70%, 80% e 90%. Verificou-se que universos maiores de ativos nem sempre geraram melhores resultados. Pelo contrário, a representatividade de 70% foi a que melhor acompanhou o benchmark, como observado na Figura 4.10.

## 4.6 Exercícios

Os Exercícios 1 e 2 seguintes são solucionados e utilizam a planilha Exercícios.xls, disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. As respostas desses exercícios encontram-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

1) Um administrador de fundos é responsável pela gerência de um fundo de ações com gestão passiva. Em outras palavras, ele deve escolher, entre os papéis com um mínimo de liquidez desejada, qual a composição que melhor simula o comportamento do Ibovespa. Assumindo os ativos da pasta Data como aqueles que farão parte do fundo e adotando-se uma janela de 150 dias, pede-se:

- Simular algumas possíveis composições de carteiras de modo que se encontre aquela que minimiza o erro quadrático conforme o Modelo 1.

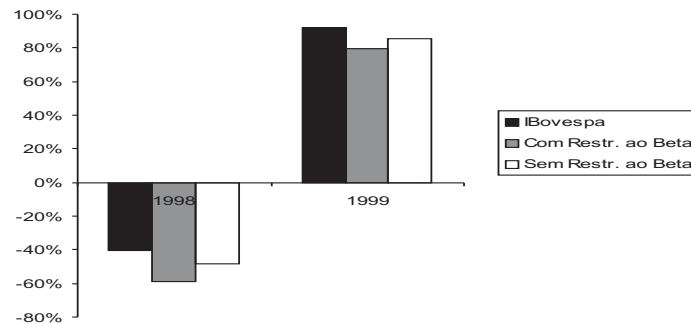


FIGURA 4.12: Rentabilidade anual com e sem restrição ao beta

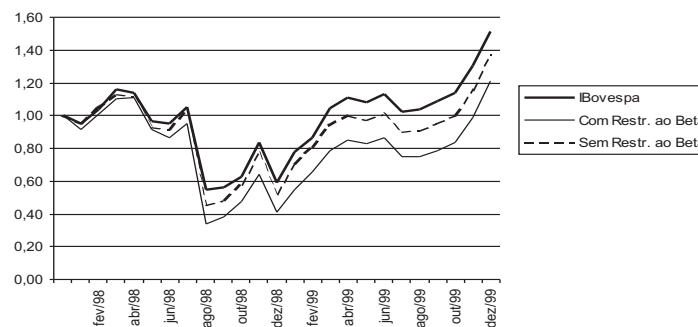


FIGURA 4.13: Rentabilidade acumulada com e sem restrição ao beta

- b) Simular algumas possíveis composições de carteiras de modo que se encontre aquela que minimiza o erro não-sistêmico conforme o Modelo 2.
- 2) Se o administrador do fundo tivesse que escolher apenas um ativo para simular o IBovespa, qual dos ativos entre os da pasta Data ele deveria escolher? Utilize como critério de seleção o Modelo 1 e uma janela de 150 dias.

### Exercícios Propostos

- 3) Considere a mesma notação usada na Seção 4.2.
- a) Utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, resolva o Problema (4.21), em que  $\beta$  representa o beta desejado e  $\mu_e$  o ganho de rentabilidade acima do benchmark esperado. Note que a Equação (4.22) representa o beta da carteira (pois  $x = \omega - \omega_B$ ). Obtenha uma expressão explícita

em função dos parâmetros  $\alpha, \psi, \gamma, \delta$  para a carteira ótima. Mostre que o  $x$  ótimo tem a seguinte forma:

$$x = \tau_1 \omega_1 + \tau_2 \omega_2 + \tau_B \omega_B,$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são carteiras eficientes especiais e os escalares  $\tau_1, \tau_2, \tau_B$ , são obtidos a partir das condições de otimalidade do Problema (4.21).

$$\min x' \Sigma x \quad (4.21)$$

sujeito a

$$x' r = \mu_e,$$

$$x' e = 0,$$

$$\frac{1}{\sigma_B^2} (x + \omega_B)' \Sigma \omega_B = \beta, \quad (4.22)$$

- b) Compare a solução do Problema (4.1) com a solução obtida para o Problema (4.21).
- c) Esboce a fronteira eficiente para o erro de rastreamento. Compare com a Figura 4.1.

4) Considere os dados da Tabela 3.6 com 4 ativos de risco e 1 ativo livre de risco. Suponha que se deseja montar uma carteira que siga o índice de mercado apresentado na Tabela 3.6, com apenas os ativos de risco 1 e 3.

- a) Formule os problemas de programação linear MAD, MADD, Min-Max, e DMin-Max apresentados na Seção 4.3.
  - b) Resolva os problemas de programação linear formulados no item a).
  - c) Utilizando a Equação (3.30), com  $Z_i$  sendo uma variável aleatória gaussiana, e os dados da Tabela 3.7, gere uma série de 50 retornos aleatórios para os ativos 1, 2, 3 e 4.
  - d) Compare o desempenho das 4 carteiras obtidas no item b) em termos da rentabilidade total acumulada para esses 50 retornos gerados no item c).
- 5) Repita o Exercício 4, considerando agora o Modelo de otimização (4.18).
- 6) Repita o Exercício 4, considerando agora o Modelo de otimização (4.19).
- 7) Repita o Exercício 4, considerando agora o Modelo de otimização (4.20).

## Capítulo 5

# Funções Utilidade e Seleção de Carteiras

Considere a situação em que há diferentes formas de investir um capital, com retorno a um período de tempo específico. Como decidir a melhor forma de alocar esse capital, dado que os retornos dos possíveis investimentos são aleatórios? Para responder a essa pergunta, torna-se necessária uma forma de ordenar esses investimentos. A função utilidade tem esse papel, ou seja, fornece uma maneira de ordenar os investimentos disponíveis, tendo em vista a aversão ao risco do investidor. Uma vez escolhida a função utilidade, o próximo passo é como decidir a melhor forma de investir o capital. Matematicamente, esse problema pode ser formulado como um problema de seleção ótima de carteiras, que, por sua vez, tem importantes relações com os conceitos de arbitragens e apreçamento de contratos. Em particular, a fórmula de apreçamento da função utilidade  $\ln$ , bem como suas propriedades, serão analisadas neste capítulo. No Capítulo 6, a relação entre o problema de otimização de carteiras e os conceitos de arbitragens e apreçamento de contratos será revista sob a ótica das medidas de probabilidade neutra ao risco.

Inicia-se este capítulo apresentando na Seção 5.1 a definição de funções utilidade e aversão ao risco. A Seção 5.2 apresenta formas de quantificar a aversão ao risco entre as funções utilidades por meio do coeficiente de aversão ao risco. Montagens de funções utilidades baseadas em questionários serão discutidas na Seção 5.3. O problema de otimização de carteiras por uma função utilidade será analisado na Seção 5.4 e a relação entre esse problema e os conceitos de arbitragens e apreçamento, na Seção 5.5. As propriedades da função utilidade  $\ln$  serão apresentadas e discutidas na Seção 5.6.

## 5.1 Função Utilidade e Aversão ao Risco

Conforme mencionado anteriormente a função utilidade fornece uma maneira de ordenar os investimentos disponíveis. Mais especificamente, a função utilidade  $u$  é definida para cada  $\varpi \in \Omega$  fixo, dos reais (representando os possíveis níveis de riqueza) para os reais;  $u(\cdot, \cdot) : R \times \Omega \rightarrow R$ . Uma vez definida, os investimentos são ordenados calculando-se o valor esperado da função utilidade para cada investimento. Por exemplo, dois investimentos com valores aleatórios de riqueza  $X$  e  $Y$  são comparados simplesmente calculando  $E(u(X))$  e  $E(u(Y))$ . O investimento preferido será aquele com o maior valor.

A escolha da função utilidade varia de indivíduo para indivíduo, de acordo com a sua tolerância ao risco. A função utilidade mais simples é a linear, isto é,  $u(x) = x$ . O investidor que usa essa função utilidade apenas ordena os investimentos de acordo com o seu valor esperado, sendo, portanto, neutra ao risco. A restrição geral e inicial imposta é de que a função utilidade deva ser crescente e contínua para cada  $\varpi \in \Omega$  fixo. Para  $x > y$ , tem-se  $u(x, \varpi) > u(y, \varpi)$ . Mais adiante são apresentadas outras restrições à família de funções utilidade. Alguns exemplos de funções utilidade são:

- a) Exponencial:  $u(x) = -e^{-ax}$ ,  $a > 0$ .
- b) Logarítmica:  $u(x) = \ln(x)$ .
- c) Potência:  $u(x) = bx^b$ ,  $b \leq 1$ ,  $b \neq 0$ .
- d) Quadrática:  $u(x) = x - bx^2$ ,  $b > 0$ ,  $x < \frac{1}{2b}$ .

**Exemplo 5.1** Considere uma função utilidade dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ , e 2 investimentos possíveis para um capital inicial de R\$ 100,00:

- i) Comprar um título público que levará a riqueza com certeza para R\$ 120,00 após um ano.
- ii) Um investimento de risco que poderá levar a riqueza para R\$ 140,00, R\$ 120,00, R\$ 110,00, ou R\$ 90,00 com probabilidades 0,2, 0,3, 0,3 e 0,2 respectivamente no mesmo período.

Por essa função utilidade deve-se escolher o investimento i), pois

- i)  $u(120) = \sqrt{120} = 10,95$ ;
- ii)  $E(u(X)) = 0,2 \times \sqrt{140} + 0,3 \times \sqrt{120} + 0,3 \times \sqrt{110} + 0,2 \times \sqrt{90} = 10,691$ .

Utilizando como função utilidade  $u(x) = \ln x$  também deve-se escolher o investimento i), pois

- i)  $u(120) = 4,7875$ ;
- ii)  $E(u(X)) = 0,2 \times \ln 140 + 0,3 \times \ln 120 + 0,3 \times \ln 110 + 0,2 \times \ln 90 = 4,7347$ .



Como a função utilidade só é usada para ordenar os investimentos, o seu valor numérico não é relevante, portanto certas modificações podem ser feitas sem alterar a sua forma de ordenação. Realmente

$$u(X) \quad \text{e} \quad au(X) + b, \quad a > 0$$

ordenarão os investimentos da mesma forma e, conseqüentemente, essas funções utilidade são consideradas equivalentes. Por exemplo, para  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \quad \text{e} \\ u(x) &= \ln(cx^a) = a \ln(x) + \ln(c) \end{aligned}$$

são funções utilidade equivalentes.

Lembrando que uma função  $f(x)$  definida no intervalo  $[a, b]$  é dita ser côncava se para todo  $\lambda \in [0, 1]$  e qualquer  $x, y \in [a, b]$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad (5.1)$$

e que a função é dita ser estritamente côncava se a desigualdade (5.1) for estrita ( $>$ ) para todo  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \neq y$ , apresenta-se a seguinte definição:

**Definição 5.1** A função utilidade  $u$  é dita ser aversa ao risco em  $[a, b]$  se for estritamente côncava em  $[a, b]$ . Se  $u$  for estritamente côncava em todo o intervalo  $[0, \infty)$ , é dita ser aversa ao risco.

A explicação para essa definição é a seguinte. Considere dois investimentos que, para o mesmo capital inicial, fornecem os seguintes níveis de riqueza  $X$  e  $Y$ :

- i)  $X = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$  com certeza;
- ii)  $Y = \begin{cases} x & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ y & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Se  $u$  é estritamente côncava, segue que

$$E(u(X)) = u(X) = u\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) > \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(y) = E(u(Y)),$$

portanto o investimento sem risco i) seria preferível ao investimento com risco ii), apesar de os dois possuírem o mesmo retorno esperado  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ .

Note que  $u(x) = x$  (ou equivalentemente  $ax + b$ ) representa o caso limite de uma função côncava (haveria igualdade em (5.1) para todos os pontos  $x$  e  $y$ ) e, conseqüentemente, sem aversão ao risco. Para evitar essa situação, considera-se na Definição 5.1 apenas funções estritamente côncavas.

**Exemplo 5.2** Suponha dois investimentos possíveis para um capital inicial  $v_0$  que vai gerar  $X$  ou  $Y$  como:

i)  $X = x$  com certeza;

ii)  $Y = \begin{cases} y & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$ .

Considere inicialmente que  $y = 2x$ . Portanto, nesse caso os dois investimentos teriam valor esperado igual a  $x$ . Considere a seguinte função utilidade:

$$u(x) = x - 0,005x^2, \quad x \in [0, 100].$$

Pode-se verificar que a função é estritamente crescente e côncava. Para isso basta verificar que  $u'(x) > 0$  (função crescente) e  $u''(x) < 0$  (função estritamente côncava), para  $x \in [0, 100)$ . De fato,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 - 0,01x > 0 \text{ para } x \in [0, 100), \\ u''(x) &= -0,01 < 0. \end{aligned}$$

Note que para i) e ii)

$$i) E(u(X)) = x - 0,005x^2;$$

$$ii) E(u(Y)) = \frac{1}{2}(2x - 0,02(x)^2) = x - 0,01x^2,$$

portanto a alternativa i), que geraria  $x$  com certeza, seria preferível ao investimento ii) que poderia gerar  $2x$  ou 0 com 50% de chances para cada um.

Qual seria o valor de  $x$  em função de  $y$  de modo que os dois investimentos fossem indiferentes segundo a função utilidade  $u$ ? Para isso basta calcular o valor de  $x$  de modo que a função utilidade para os dois investimentos forneça o mesmo valor, isto é,

$$\begin{aligned} 0,5 \times (y - 0,005 \times y^2) &= (x - 0,005 \times x^2) \Rightarrow \\ x^2 - 200x + (100 - 0,5y)y &= 0 \Rightarrow \\ x &= 100 - \sqrt{10.000 - (100 - 0,5y)y} \end{aligned}$$

Note que o valor que interessa deve ser menor que  $y$ , e por esse motivo toma-se a parte negativa da raiz quadrada. Por exemplo, se  $y = 100$ , o valor de  $x$  é obtido resolvendo a equação  $x^2 - 200x + 5.000 = 0$ , que leva a  $x = 29,2893$ . Portanto, se  $x = 29,2893$ , seria indiferente, segundo a função utilidade  $u$  descrita, ter 29,2893 com certeza ou 100 ou 0 com 50% de chances para cada um.

## 5.2 Coeficiente de Aversão ao Risco

Conforme mencionado anteriormente, é possível obter algumas propriedades importantes da função utilidade por meio das suas duas primeiras derivadas. Se  $u'(x) > 0$ , a função é crescente em  $x$ , e se  $u''(x) < 0$ , a função é côncava em  $x$ . Alguns exemplos são:

- i)  $u(x) = -e^{-ax} \Rightarrow u'(x) = ae^{-ax} > 0, u''(x) = -a^2e^{-ax} < 0;$
- ii)  $u(x) = bx^b, b < 1, b \neq 0 \Rightarrow u'(x) = b^2x^{b-1} > 0, u''(x) = b^2(b-1)x^{b-2} < 0;$
- i)  $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} > 0, u''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$

Quanto maior a magnitude da inclinação da função utilidade, maior será a sua aversão ao risco. É possível quantificar esse conceito por meio do coeficiente de aversão ao risco absoluto Arrow-Pratt. Para induzir um investidor averso ao risco com riqueza  $x$  a entrar em um jogo justo (isto é, que tenha valor esperado igual a zero), um prêmio  $\pi_c$  deve ser oferecido. Esse prêmio deve ser tal que

$$E(u(x + \pi_c + Z)) = u(x),$$

em que  $Z$ , o resultado do jogo justo, é tal que  $E(Z) = 0$  e  $Var(Z) = E(Z^2) = \sigma_Z^2$ . Da mesma forma, um investidor averso ao risco estaria disposto a pagar um seguro contra risco cujo prêmio  $\pi_i$  é tal que

$$E(u(x + Z)) = u(x - \pi_i).$$

Pode-se determinar o prêmio do risco por meio de uma expansão por Taylor da última equação. Segue que

$$u(x + Z) = u(x) + u'(x)Z + \frac{1}{2}u''(x)Z^2 + \dots$$

e, tomando o valor esperado, obtém-se

$$\begin{aligned} E(u(x + Z)) &= u(x) + u'(x)E(Z) + \frac{1}{2}u''(x)\sigma_Z^2 + \dots \\ &= u(x) + \frac{1}{2}u''(x)\sigma_Z^2 + \dots \end{aligned}$$

Entretanto, fazendo a expansão por Taylor de  $u(x - \pi)$ , decorre que

$$u(x - \pi) = u(x) - u'(x)\pi + \dots$$

e, como  $E(u(x + Z)) = u(x - \pi)$ , tem-se sob certas condições (veja a Proposição 5.1), que

$$-u'(x)\pi \approx \frac{1}{2}u''(x)\sigma_Z^2,$$

ou seja,

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\sigma_Z^2 \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Como o termo  $\frac{1}{2}\sigma_Z^2$  é constante,  $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$  mede a aversão infinitesimal (ou local) ao risco da função utilidade  $u$ . Este coeficiente,

$$a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad (5.2)$$

é chamado de coeficiente de aversão ao risco absoluto Arrow-Pratt. Note que para as funções utilidades equivalentes ( $u(x)$  e  $au(x) + b$ ,  $a > 0$ ) o coeficiente de aversão ao risco é o mesmo. Como a partir de (5.2)

$$a(x) = -\frac{d \ln(u'(x))}{dx}, \quad (5.3)$$

segue com base em (5.3) que a função utilidade pode ser recuperada a partir do coeficiente de aversão ao risco absoluto Arrow-Pratt da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x a(z)dz &= -\ln\left(\frac{u'(x)}{u'(x_0)}\right) \\ \Rightarrow u'(x) &= u'(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a(z)dz} \\ \Rightarrow u(x) &= u(x_0) + u'(x_0) \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^y a(z)dz} dy, \quad u'(x_0) > 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.3** *Tem-se que:*

- i)  $u(x) = -e^{-ax} \Rightarrow u'(x) = ae^{-ax}$ ,  $u''(x) = -a^2e^{-ax}$ , e  $a(x) = a$ , ou seja, a aversão ao risco é igual para todos os valores de  $x$ ;
- ii)  $u(x) = 1 - be^{-ax} \Rightarrow u'(x) = abe^{-ax}$ ,  $u''(x) = -a^2be^{-ax}$ , e  $a(x) = a$ , ou seja, novamente a aversão ao risco é igual para todos os valores de  $x$ ;
- iii)  $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $u''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , e  $a(x) = \frac{1}{x}$ , ou seja, a aversão ao risco diminui à medida que a riqueza aumenta.

Define-se a medida equivalente à certeza de uma riqueza aleatória  $X$  como o valor  $c$  tal que

$$u(c) = E(u(X)).$$

É claro que a equivalência à certeza é igual para todas as funções utilidade equivalentes. No caso do Exemplo 5.2, a equivalência à certeza foi de 29,2893. Supondo que  $X$  possa assumir um conjunto discreto  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de valores, cada um com probabilidade  $p_i$ , segue que

$$u(c) = E(u(X)) = \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \leq u\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) = u(E(X))$$

e, como a função  $u$  é crescente,  $c \leq E(X)$ . Esse resultado vale em geral, e mostra que para uma função utilidade aversa ao risco, a medida equivalente à certeza de uma riqueza aleatória é sempre menor ou igual ao valor esperado da riqueza aleatória.

Para dois investidores 1 e 2 que utilizam funções utilidades  $u_1(x), u_2(x)$  e respectivos coeficientes de Arrow-Pratt  $a_1(x), a_2(x)$ , deve-se ter que se  $a_1(x) \geq a_2(x)$  para todo  $x$  (ou seja, o investidor 1 é mais averso ao risco que o investidor 2), então o investidor 1 estaria disposto a pagar um prêmio  $\pi_1$  maior que o prêmio do investidor  $\pi_2$  para não correr riscos. O resultado seguinte apresenta essa e outras condições equivalentes para aversão ao risco.

**Proposição 5.1** *Para funções  $u_1(x), u_2(x)$  estritamente crescentes e duas vezes diferenciáveis com respectivos coeficientes de Arrow-Pratt  $a_1(x)$  e  $a_2(x)$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- a)  $a_1(x) \geq a_2(x)$  para todo  $x$ ;
- b) existe uma função  $g(z)$  com  $g'(z) > 0$  e  $g''(z) \leq 0$  para todo  $z$  tal que  $u_1(x) = g(u_2(x))$ ;
- c) a função  $u_1(u_2^{-1}(z))$  é côncava;
- d)  $\pi_1(x) \geq \pi_2(x)$  para todo  $x$  e todo jogo justo  $Z$ .

**Prova:** a)  $\Leftrightarrow$  b)  $\Leftrightarrow$  c): Para uma função  $h(x)$  estritamente crescente e diferenciável em todos os pontos, vale

$$\frac{dh^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} > 0. \quad (5.4)$$

Para funções  $u_1(x), u_2(x)$  estritamente crescentes e duas vezes diferenciáveis, tem-se que

$$u_1(x) = u_1(u_2^{-1}(u_2(x))) = g(u_2(x)), \quad g(z) = u_1(u_2^{-1}(z)),$$

e

$$\frac{dg(z)}{dz} = \frac{du_1(u_2^{-1}(z))}{dz} = u_1'(u_2^{-1}(z)) \frac{1}{u_2'(u_2^{-1}(z))} > 0.$$

Mais ainda,

$$u_1'(x) = g'(u_2(x))u_2'(x)$$

e

$$\begin{aligned} u_1''(x) &= g'(u_2(x)) \times u_2''(x) + g''(u_2(x))u_2'(x) \times u_2'(x) \\ &= g'(u_2(x))u_2''(x) + g''(u_2(x))u_2'(x)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g''(u_2(x)) &= \frac{1}{u_2'(x)^2} (u_1''(x) - g'(u_2(x))u_2''(x)) \\ &= \frac{1}{u_2'(x)} \left( \frac{u_1'(x)}{u_2'(x)} \times \frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} - g'(u_2(x)) \frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} \right) \\ &= \frac{g'(u_2(x))}{u_2'(x)} (a_2(x) - a_1(x)) \end{aligned}$$

e, como  $g'(u_2(x)) > 0$  e  $u_2'(x) > 0$ , decorre que

$$g''(z) \leq 0 \text{ para todo } z \Leftrightarrow a_2(x) - a_1(x) \leq 0 \text{ para todo } x.$$

b)  $\Rightarrow$  d): Como  $g(z)$  é uma função côncava, tem-se pela desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} u_1(x - \pi_1(x)) &= E(u_1(x + Z)) = E(g(u_2(x + Z))) \\ &\leq g(E(u_2(x + Z))) = g(u_2(x - \pi_2(x))) \\ &= u_1(x - \pi_2(x)) \end{aligned}$$

e, como  $u_1(\cdot)$  é estritamente crescente, decorre que

$$x - \pi_2(x) \geq x - \pi_1(x) \Rightarrow \pi_1(x) \geq \pi_2(x).$$

d)  $\Rightarrow$  a): Considere um jogo justo tal que

$$Z = \begin{cases} \epsilon & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ -\epsilon & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

e logicamente  $\sigma_Z^2 = \epsilon^2$ . Pela expansão em Taylor,

$$u_1(x + Z) = u_1(x) + u_1'(x)Z + \frac{1}{2}u_1''(x)Z^2 + \frac{1}{3!}u_1'''(x)Z^3 + \dots$$

e, tomando o valor esperado (e lembrando que  $E(Z^k) = 0$  para  $k$  ímpar), segue que

$$E(u_1(x + Z)) = u_1(x) + \frac{1}{2}u_1''(x)\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{4!}u_1''''(x)\frac{\epsilon^4}{2} + \dots$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} x - \pi_1(x) &= u_1^{-1}(E(u_1(x + Z))) \\ &= u_1^{-1} \left( u_1(x) + \frac{1}{2}u_1''(x)\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{1}{4!}u_1''''(x)\frac{\epsilon^4}{2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Fazendo novamente uma expansão em série de Taylor, segue que

$$x - \pi_1(x) = u_1^{-1}(u_1(x)) + (u_1^{-1})'(u_1(x)) u_1''(x) \frac{\epsilon^2}{4} - \frac{\epsilon^4}{4} \Psi_1(x, \epsilon), \quad (5.5)$$

para uma função  $\Psi_1(x, \epsilon)$ . Como

$$u_1^{-1}(u_1(x)) = x$$

e a partir de (5.4)

$$(u_1^{-1})'(u_1(x)) = \frac{1}{u_1'(x)},$$

tem-se com base em (5.5) que

$$\pi_1(x) = a_1(x) \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^4}{4} \Psi_1(x, \epsilon). \quad (5.6)$$

Da mesma forma, para uma função  $\Psi_2(x, \epsilon)$ ,

$$\pi_2(x) = a_2(x) \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^4}{4} \Psi_2(x, \epsilon) \quad (5.7)$$

e, subtraindo (5.7) de (5.6), segue que

$$\pi_1(x) - \pi_2(x) = \frac{\epsilon^2}{4} ((a_1(x) - a_2(x)) + \epsilon^2(\Psi_1(x, \epsilon) - \Psi_2(x, \epsilon))).$$

Como por hipótese  $\pi_1(x) - \pi_2(x) \geq 0$ , segue que para todo  $\epsilon > 0$

$$(a_1(x) - a_2(x)) + \epsilon^2(\Psi_1(x, \epsilon) - \Psi_2(x, \epsilon)) \geq 0.$$

Determinando o limite quando  $\epsilon$  vai a zero, obtém-se que  $a_1(x) \geq a_2(x)$ . ■

### 5.3 Montagem de uma Função Utilidade

A seguir, são apresentados alguns procedimentos para a montagem de função utilidade, seguindo a formulação em [Luenberger, 1998]:

1. São fixados dois valores  $a$  e  $b$  de riqueza como referência.
2. Propõe-se um jogo em que se ganha  $a$  com probabilidade  $p$ , e  $b$  com probabilidade  $1 - p$ .
3. Pergunta-se que valor  $c(p)$  o investidor aceitaria em troca desse jogo. O jogo tem como valor esperado  $pa + (1 - p)b$ . Um investidor averso ao risco aceitaria menos do que esse valor para evitar o jogo. Logo,

$$c(p) < pa + (1 - p)b.$$

4. Plota-se um gráfico do valor de  $c(p)$  pelo valor esperado  $pa + (1 - p)b$ .
5. Define-se  $u(a) = a$  e  $u(b) = b$ , sem perda de generalidade. De fato, se isso não ocorresse, seria possível com o coeficiente angular e um termo constante achar uma função utilidade equivalente a essa, já que

$$\hat{u}(a) = \hat{a}, \hat{u}(b) = \hat{b} \Rightarrow u(x) = a + \frac{b - a}{\hat{b} - \hat{a}}(\hat{u}(x) - \hat{a})$$

e  $u(x)$  e  $\hat{u}(x)$  seriam funções utilidade equivalentes. Logo, o valor esperado é dado por

$$pu(a) + (1 - p)u(b) = pa + (1 - p)b = e(p) = E(u(X))$$

e

$$u(c) = c(p) = E(u(X)) = e(p) \Rightarrow c(e) = u^{-1}(e),$$

de modo que a curva  $x \times u(x)$  é obtida invertendo os eixos da curva  $e(p) \times c(e)$ .

**Exemplo 5.4** Uma pessoa deseja investir R\$ 100,00 em dois ativos, um sem risco com rentabilidade  $r_f = 23\%$ , e outro ativo de risco com rentabilidade  $R$  que pode valer 50%, 25% e 5%, com probabilidades de 0,25, 0,5 e 0,25, respectivamente. Para determinar o seu grau de aversão ao risco, o investidor responde a um questionário em que é considerado um investimento hipotético  $I$ , com rentabilidade de 50% e probabilidade  $1 - p$  de ocorrer, ou com rentabilidade de 0% e probabilidade  $p$  de ocorrer. Varia-se  $p$  e pergunta-se qual seria o valor da rentabilidade equivalente à certeza  $R_c$  que o investidor aceitaria em troca de não participar do investimento com risco. Obtém-se a Tabela 5.1. Para um

TABELA 5.1: Montagem da função utilidade

$p$	$E(I)$	$R_c$
0	50%	50%
0,1	45%	35%
0,2	40%	29%
0,3	35%	24%
0,4	30%	20%
0,5	25%	16%
0,6	20%	13%
0,7	15%	10%
0,8	10%	6%
0,9	5%	3%
1,0	0%	0%



TABELA 5.2: Riqueza final do investidor

$p$	$u(c) = e$	$c$
0	150	150
0,1	145	135
0,2	140	129
0,3	135	124
0,4	130	120
0,5	125	116
0,6	120	113
0,7	115	110
0,8	110	106
0,9	105	103
1,0	100	100

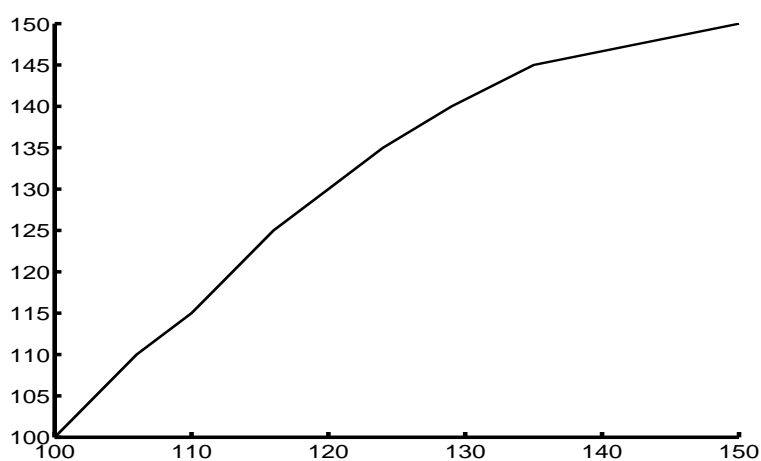


FIGURA 5.1: Função utilidade do Exemplo 5.4

investimento inicial de R\$ 100,00, obtêm-se os possíveis valores para a riqueza final do investidor conforme a Tabela 5.2. Tem-se que  $u(c) = e$ . Aplica-se uma interpolação linear para traçar o gráfico da função utilidade, obtendo-se a Figura 5.1. De modo que se determine o melhor investimento, deve-se resolver o problema

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in [0,1]} & E(u((1+P)v_0)) \\ \text{sujeito a} & \\ P = & \omega r_f + (1-\omega)R, \end{aligned}$$

ou seja, é necessário resolver o problema

$$\max_{\omega \in [0,1]} f(\omega), \quad (5.8)$$

em que

$$f(\omega) = 0,25u(150 - 27\omega) + 0,5u(125 - 2\omega) + 0,25u(105 + 18\omega).$$

Traçando o gráfico de  $f(\omega)$  para  $\omega \in [0, 1]$ , obtém-se a Figura 5.2. Segue, portanto, que o máximo do Problema (5.8) é dado por  $\omega = 0,6110$ , isto é, segundo o perfil de aversão ao risco do investidor, deve-se aplicar 61,1% dos recursos no ativo livre de risco e 38,9% no ativo de risco.

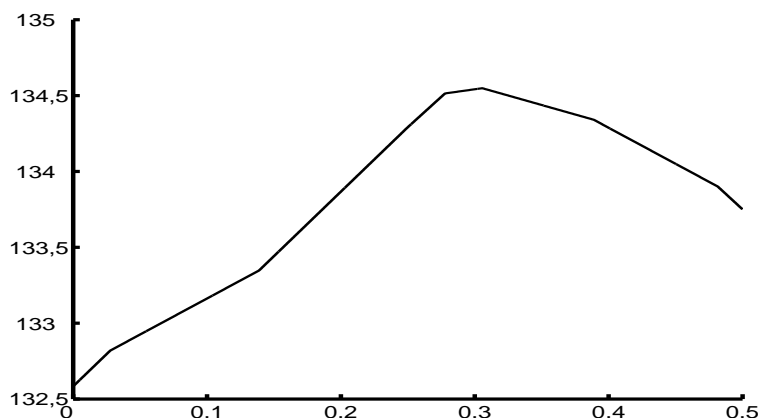


FIGURA 5.2: Função  $f(\omega)$  do Exemplo 5.4

Outra forma de determinar a função utilidade consiste em fixar uma família de funções dependentes de alguns parâmetros. O exemplo a seguir ilustra esta situação.

**Exemplo 5.5** Para um investimento inicial de R\$ 10,00, obtém-se, por meio de um questionário seguindo os moldes do Exemplo 5.4, os possíveis valores para a riqueza final do investidor, conforme a Tabela 5.3. Deseja-se achar os parâmetros da função utilidade  $u(x) = ax^\nu + b$  que melhor aproximam os pontos obtidos na Tabela 5.3. Deve-se ter

$$u(10) = 10, u(200) = 200 \Rightarrow \begin{cases} a \times 10^\nu + b = 10 \\ a \times 200^\nu + b = 200 \end{cases},$$

TABELA 5.3: Montagem da função utilidade

$p$	$u(c)$	$c$
0	200	200
0,0263	195	182,7
0,1	181	165
0,1526	171	148
0,2105	160	131
0,2632	150	113,8
0,3474	134	96
0,4211	120	80
0,5263	100	61
0,6316	80	45
0,7699	53,7	27
1,0	10	10

portanto  $a(\nu) = \frac{190}{200^\nu - 10^\nu}$ ,  $b(\nu) = \frac{10 \times 200^\nu - 200 \times 10^\nu}{200^\nu - 10^\nu}$ . Basta agora calcular  $\nu$  de modo a que se minimize a função objetivo

$$\sum_{i=1}^{12} (u(c_i) - (a(\nu)c_i^\nu + b(\nu)))^2,$$

em que  $c_i$  e  $u(c_i)$  são obtidos da Tabela 5.3. A solução para esse problema é:

$$\nu = 0,343, \quad a = 47,9713, \quad b = -95,7503.$$

A Figura 5.3 apresenta o gráfico da função utilidade.

## 5.4 Otimização de Carteiras por meio da Função Utilidade

Conforme mencionado no início do capítulo, uma função utilidade fornece uma maneira de ordenar os investimentos disponíveis no mercado, de forma que o investimento preferido será aquele com o maior valor esperado. Sendo assim, faz sentido procurar o investimento com o maior valor esperado, ou seja, desejar-se encontrar o investimento que maximize o valor esperado da função utilidade sobre o valor da riqueza final.

Seja, como no Capítulo 2, um mercado formado por  $n$  ativos de risco com valor inicial  $S_1(0), \dots, S_n(0)$ , e que se disponha de um valor  $V(0)$  para investir nesses ativos. Seja  $H_0, H_1, \dots, H_n$  uma estratégia de investimento para cada ativo financeiro (valores negativos representam posições a descoberto), isto é,

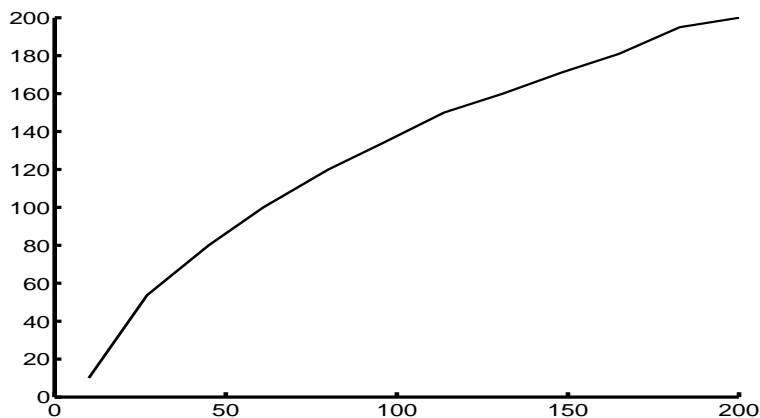


FIGURA 5.3: Função utilidade do Exemplo 5.5

$H_i$  representa a quantidade do ativo  $i$  que se tem na carteira. O vetor de preços e estratégia de investimento é representado como

$$H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} \in R^{n+1}, \quad S(0) = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \\ \vdots \\ S_n(0) \end{pmatrix} \in R^n.$$

Considera-se uma remuneração livre de risco com valor no instante 1 igual a  $B(1)$ , e no instante zero igual a  $B(0) = 1$ . O retorno dessa remuneração é

$$r_f = \frac{1}{B(0)}(B(1) - B(0)) \geq 0.$$

O valor da carteira nos instantes  $t = 0$  e  $t = 1$  é dado por

$$V(0) = H_0 B(0) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(0) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i(0) \quad (5.9)$$

e

$$V(1) = H_0 B(1) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1). \quad (5.10)$$

Conforme visto no Capítulo 2,

$$\omega_i = \frac{H_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1, \dots, n$$

representa a proporção do total investido no ativo  $i$ . Define-se também como  $P$  a taxa de retorno da carteira ao final de um período de tempo, e

$$R_i = \frac{S_i(1) - S_i(0)}{S_i(0)}$$

como o retorno do ativo  $i$ . A partir de (5.9) e (5.10) tem-se que

$$\begin{aligned} P &= \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} \\ &= \frac{H_0 B(1) + H_1 S_1(1) + \dots + H_n S_n(1) - (H_0 + H_1 S_1(0) + \dots + H_n S_n(0))}{V(0)} \\ &= \frac{H_0 (B(1) - 1) + H_1 (S_1(1) - S_1(0)) + \dots + H_n (S_n(1) - S_n(0))}{V(0)} \\ &= \frac{H_0 r_f + H_1 R_1 S_1(0) + \dots + H_n R_n S_n(0)}{V(0)} \\ &= \frac{H_0}{V(0)} r_f + \frac{H_1 S_1(0)}{V(0)} R_1 + \dots + \frac{H_n S_n(0)}{V(0)} R_n \\ &= (1 - (\omega_1 + \dots + \omega_n)) r_f + \omega_1 R_1 + \dots + \omega_n R_n = (1 - e' \omega) r_f + \omega' R. \end{aligned}$$

As variações dos ativos são representadas por

$$\Delta S_i(1) = S_i(1) - S_i(0), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.11)$$

e

$$\Delta B(1) = B(1) - B(0) = (1 + r_f). \quad (5.12)$$

Como o ganho ou a perda do ativo  $i$  é dado por  $H_i \Delta S_i(1)$ , pode-se definir o ganho da carteira como

$$G(1) = V(1) - V(0) = H_0 \Delta B(1) + \sum_{i=1}^n H_i \Delta S_i(1). \quad (5.13)$$

Definem-se também os preços dos ativos com desconto e a variação dos ativos com desconto como

$$S_i^*(k) = \frac{S_i(k)}{B(k)}, \quad k = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

e

$$\Delta S_i^*(1) = S_i^*(1) - S_i^*(0), \quad i = 1, \dots, n; \quad (5.15)$$

o valor e ganho da carteira com desconto como

$$V^*(k) = \frac{V(k)}{B(k)} = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i^*(k) \quad (5.16)$$

e

$$G^*(1) = V^*(1) - V^*(0) = \sum_{i=1}^n H_i \Delta S_i^*(1). \quad (5.17)$$

Os retornos dos ativos com risco com desconto são definidos como

$$R_i^* = \frac{S_i^*(1) - S_i^*(0)}{S_i^*(0)} = \frac{\Delta S_i^*(1)}{S_0^*}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.18)$$

Segue que

$$V^*(1) = \frac{V(1)}{B(1)} = V^*(0) + G^*(1). \quad (5.19)$$

Considera-se  $u(.,.) : R \times \Omega \rightarrow R$  uma função utilidade côncava, diferenciável, e estritamente crescente para cada  $\omega \in \Omega$ . O investidor, com riqueza inicial  $v_0$ , deseja montar uma carteira que maximize o valor esperado de sua função utilidade calculado sobre sua riqueza  $V(1)$ . Logo, o investidor deseja resolver o seguinte problema de otimização:

$$\max_{H \in R^{n+1}} E(u(V(1))) \quad (5.20)$$

sujeito a

$$V(0) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i(0) = v_0,$$

$$V(1) = H_0 B(1) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1).$$

Lembrando a partir de (5.9)-(5.19) que

$$V^*(1) = V(0) + G^*(1), \quad V(1) = B(1)V(0), \quad G^*(1) = \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1),$$

segue que

$$E(u(V(1))) = E \left( u \left( B(1) \left( v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1) \right) \right) \right).$$

Introduzindo os multiplicadores de Lagrange ao Problema de otimização (5.20), tem-se que

$$\mathcal{L}(H, \lambda) = E(u(H_0 B(1) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1))) - \lambda (H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i(0) - v_0)$$

TABELA 5.4: Retornos do investimento do Exemplo 5.6

	1+retorno	Probabilidade
IBovespa em alta	1,28 ( $R_1 = 28\%$ )	0,25
IBovespa neutro	1,18 ( $R_1 = 18\%$ )	0,5
IBovespa em baixa	1,05 ( $R_1 = 5\%$ )	0,25
CDI	1,17 ( $r_f = 17\%$ )	1,0

e as condições necessárias de otimalidade levam a

$$\begin{cases} E(u'(H_0 B(1) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1)) B(1)) - \lambda = 0 \\ E(u'(H_0 B(1) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1)) S_i(1)) - \lambda S_i(0) = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i(0) = v_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Denotando por  $\hat{H}$  a solução ótima do Problema de otimização (5.20), segue a partir de (5.21) que as condições de otimalidade de 1ª ordem são

$$\begin{cases} E(u'(\hat{H}_0 B(1) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(1)) B(1)) = \lambda \\ E(u'(\hat{H}_0 B(1) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(1)) S_i(1)) = \lambda S_i(0) \quad i = 1, \dots, n \\ \hat{H}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(0) = v_0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Se a taxa de juros for constante e valer  $r_f$ , decorre com base em (5.22) que as condições de otimalidade de 1ª ordem podem ser reescritas como

$$\begin{cases} \lambda = E(u'(\hat{H}_0 B(1) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(1))) (1 + r_f) \\ S_i(0) = \frac{E(u'(\hat{H}_0 B(1) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(1)) S_i(1))}{E(u'(\hat{H}_0 B(1) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i(1))) (1 + r_f)} \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.23)$$

que representa uma fórmula de apreçamento de carteiras, a ser analisada mais adiante.

A seguir são apresentados alguns exemplos de otimização de carteiras.

**Exemplo 5.6** Suponha que um investidor deseje montar uma carteira composta por dois tipos de fundos. Um fundo lastreado ao IBovespa e outro lastreado ao CDI. A Tabela 5.4 apresenta os possíveis cenários de retornos para o fundo lastreado ao IBovespa e ao CDI em um ano. Considere a seguinte função utilidade:  $u(x) = \ln(x)$ . Quais devem ser os valores de  $H_0$  e  $H_1$  que maximizam a função utilidade? Note que o retorno total esperado do investimento é:

$$0,25 \times 1,28 + 0,5 \times 1,17 + 0,25 \times 1,05 = 1,1725 > 1,7$$

e que

$$V(1) = H_0(1 + r_f) + H_1 S_1(0)(1 + R_1).$$

Chamando de  $\theta_0 = H_0$ ,  $\theta_1 = H_1 S_1(0)$ , segue que

$$\begin{aligned} V(1) &= \theta_0(1 + r_f) + \theta_1(1 + R_1) \\ v_0 &= \theta_0 + \theta_1 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} E(\ln(V(1))) &= 0,25 \times \ln(1,28\theta_1 + 1,17\theta_0) \\ &+ 0,5 \times \ln(1,18\theta_1 + 1,17\theta_0) + 0,25 \times \ln(1,05\theta_1 + 1,17\theta_0). \end{aligned}$$

Deseja-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max \{ &0,25 \times \ln(1,28\theta_1 + 1,17\theta_0) \\ &+ 0,5 \times \ln(1,18\theta_1 + 1,17\theta_0) + 0,25 \times \ln(1,05\theta_1 + 1,17\theta_0) \} \\ \text{sujeito a} \\ &\theta_0 + \theta_1 = v_0. \end{aligned}$$

Escrevendo o lagrangiano desse problema, obtém-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, \lambda) = &0,25 \times \ln(1,28\theta_1 + 1,17\theta_0) + 0,5 \times \ln(1,18\theta_1 + 1,17\theta_0) \\ &+ 0,25 \times \ln(1,05\theta_1 + 1,17\theta_0) + \lambda(v_0 - \theta_0 - \theta_1). \end{aligned}$$

As condições de otimalidade são:

$$\begin{cases} \frac{0,25 \times 1,28}{1,28\theta_1 + 1,17\theta_0} + \frac{0,5 \times 1,18}{1,18\theta_1 + 1,17\theta_0} + \frac{0,25 \times 1,05}{1,05\theta_1 + 1,17\theta_0} = \lambda \\ \frac{0,25 \times 1,17}{1,28\theta_1 + 1,17\theta_0} + \frac{0,5 \times 1,17}{1,18\theta_1 + 1,17\theta_0} + \frac{0,25 \times 1,17}{1,05\theta_1 + 1,17\theta_0} = \lambda \\ \theta_0 + \theta_1 = v_0 \end{cases}.$$

Resolvendo essas equações, obtém-se

$$\theta_0 = 0,565v_0, \theta_1 = 0,435v_0, \lambda = 1/v_0.$$

Portanto, essa solução indica que se deve investir 56,5% no fundo rastreado ao CDI e 43,5% no fundo rastreado ao IBovespa. A Figura 5.4 apresenta um gráfico mostrando o percentual a ser investido no fundo rastreado ao CDI à medida que se varia o retorno  $r_f$  de 16,5% a 17,3%.

**Exemplo 5.7** Além dos fundos lastreados ao IBovespa e CDI com cenários de retorno de acordo com a Tabela 5.4, suponha que o investidor também possa investir em um fundo lastreado ao dólar, que apresenta possíveis cenários de



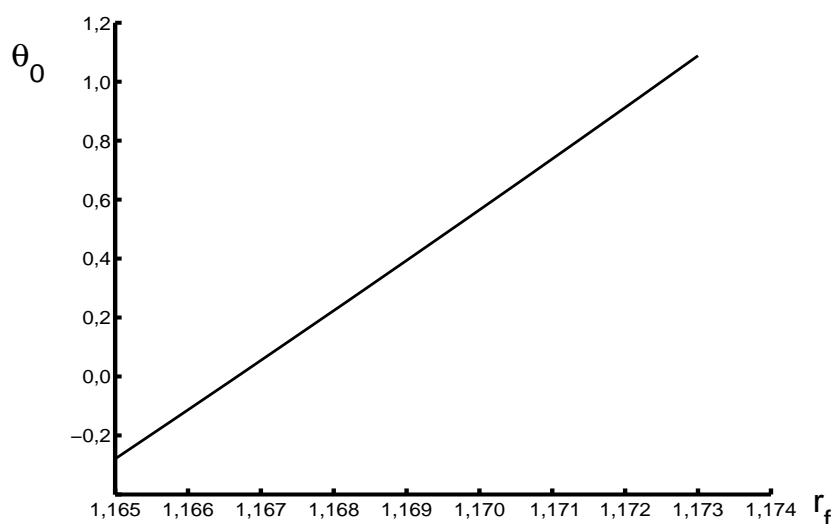


FIGURA 5.4: Percentual em  $r_f$  para o Exemplo 5.6

TABELA 5.5: Retornos do investimento do Exemplo 5.7

	1+retorno	Probabilidade
Retorno alto	1,2463 ( $R_2 = 24,63\%$ )	0,25
Retorno neutro	1,17 ( $R_2 = 17\%$ )	0,50
Retorno baixo	1,1 ( $R_2 = 10\%$ )	0,25

retorno de acordo com a Tabela 5.5 e, como antes,  $u(x) = \ln(x)$ . Quais devem ser os valores de  $H_0$ ,  $H_1$  e  $H_2$  nesse caso? Note que o retorno total esperado do investimento 2 é:

$$0,25 \times 1,2463 + 0,5 \times 1,17 + 0,25 \times 1,1 = 1,1716 > 1,17$$

e que

$$V(1) = H_0(1 + r_f) + H_1S_1(0)(1 + R_1) + H_2S_2(0)(1 + R_2).$$

Chamando de  $\theta_0 = H_0$ ,  $\theta_1 = H_1S_1(0)$ ,  $\theta_2 = H_2S_2(0)$ , segue que as condições de otimalidade são:

$$\begin{cases} \frac{0,25 \times 1,28}{1,17\theta_0 + 1,28\theta_1 + 1,2463\theta_2} + \frac{0,5 \times 1,18}{1,17\theta_0 + 1,18\theta_1 + 1,17\theta_2} + \frac{0,25 \times 1,05}{1,17\theta_0 + 1,05\theta_1 + 1,1\theta_2} = \lambda \\ \frac{0,25 \times 1,2463}{1,17\theta_0 + 1,28\theta_1 + 1,2463\theta_2} + \frac{0,5 \times 1,17}{1,17\theta_0 + 1,18\theta_1 + 1,17\theta_2} + \frac{0,25 \times 1,1}{1,17\theta_0 + 1,05\theta_1 + 1,1\theta_2} = \lambda \\ \frac{0,25 \times 1,17}{1,17\theta_0 + 1,28\theta_1 + 1,2463\theta_2} + \frac{0,5 \times 1,17}{1,17\theta_0 + 1,18\theta_1 + 1,17\theta_2} + \frac{0,25 \times 1,17}{1,17\theta_0 + 1,05\theta_1 + 1,1\theta_2} = \lambda, \end{cases}$$

além da equação  $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = v_0$ . Resolvendo essas equações, obtém-se

$$\theta_0 = 0,4725v_0, \theta_1 = 0,2813v_0, \theta_2 = 0,2462v_0, \lambda = \frac{1}{v_0}.$$

Portanto, essa solução indica que devem ser investidos 28,13%% no fundo rastreado ao IBovespa, 24,62% no fundo rastreado ao dólar e 47,25% no fundo rastreado ao CDI.

**Exemplo 5.8** Pode-se verificar que o critério de média-variância no modelo de Markowitz pode ser visto no contexto de função utilidade. Tem-se que a função utilidade quadrática pode ser escrita como

$$u(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2, a > 0, b > 0, x \leq \frac{a}{b}.$$

Suponha uma carteira que tenha valor aleatório  $V(1)$  no instante  $t = 1$ ,  $V(0) = 1$ , retorno  $P$ , e composição  $\omega$ . Então

$$V(1) = (1 + P)V(0) = (1 + \omega'R)$$

e decorre que

$$\begin{aligned} u(V(1)) &= a(1 + \omega'R) - \frac{1}{2}b(1 + \omega'R)^2 \\ &= a(1 + \omega'R) - \frac{1}{2}b(1 + 2\omega'R + (\omega'R)^2). \end{aligned}$$

Lembrando que  $E(R) = r$ ,  $cov(R) = \Sigma = E(RR') - rr'$ , segue que

$$\begin{aligned} E(u(V(1))) &= a(1 + \omega'r) - \frac{1}{2}b(1 + 2\omega'r + \omega'E(RR')\omega) \\ &= (a - \frac{1}{2}b) + (a - b)\omega'r - \frac{1}{2}b((\omega'r)^2 + \omega'\Sigma\omega). \end{aligned}$$

Se os retornos dos  $n$  ativos básicos  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  fossem conjuntamente normais, qualquer carteira  $P = \omega'R$  também seria uma variável normal com média  $\omega'r$  e variância  $\omega'\Sigma\omega$ . Desse modo,  $V(1) = (1 + \omega'R)$  será normal com média  $(1 + \omega'r)$  e variância  $\sigma^2 = \omega'\Sigma\omega$ . Considere uma função utilidade  $u$  aversa ao risco, de modo que  $E(u(V(1)))$  seja crescente com  $\mu$  e decrescente com  $\sigma$ . Logo, para  $\mu$  fixo, o problema de maximizar  $E(u(V(1)))$  também seria equivalente a achar a carteira de mínima variância.

## 5.5 Arbitragens e Seleção de Carteiras

Nesta subsecção será apresentado como o problema de seleção ótima de carteiras está relacionado com a existência de arbitragens. Inicialmente, apresenta-se a seguinte definição:

**Definição 5.2** *Uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia  $H$  tal que*

- a)  $V(0) = 0 = H' \begin{pmatrix} 1 \\ S(0) \end{pmatrix};$
- b)  $V(1)(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega;$
- c)  $P(V(1) > 0) > 0.$

Ou seja, uma oportunidade de arbitragem é uma estratégia  $H$ , tal que, começando de zero, é possível montar uma carteira que, ao final do período, será certamente positiva, com probabilidade não-nula de ser estritamente maior que zero. Pode-se mostrar a partir de (5.9)-(5.19) o seguinte resultado:

**Proposição 5.2** *Existe uma arbitragem  $H$  se e somente se*

- i)  $G^*(1)(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega;$
- ii)  $P(G^*(1) > 0) > 0.$

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $H$  seja uma arbitragem. Então,

$$G^*(1)(\omega) = V^*(1)(\omega) - V^*(0) = V^*(1)(\omega) \geq 0,$$

para todo  $\omega \in \Omega$ , e

$$P(G^*(1) > 0) = P(V^*(1) > 0) > 0.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que i) e ii) ocorram para alguma estratégia  $\hat{H}$ . Considere  $H$  tal que

$$H_0 = - \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i^*(0), \quad H_i = \hat{H}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Segue que

$$V(0) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i^*(0) = - \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i^*(0) + \sum_{i=1}^n \hat{H}_i S_i^*(0) = 0$$

e

$$V^*(1) = V^*(0) + G^*(1) = G^*(1) \geq 0.$$

Além disso,

$$P(V^*(1) > 0) = P(G^*(1) > 0) > 0.$$

■

Passa-se a relacionar oportunidades de arbitragem com problemas de otimização de carteiras, por meio da seguinte proposição.

**Proposição 5.3** *Se o Problema (5.20) tem uma solução, então não existem oportunidades de arbitragem.*

**Prova:** Suponha que exista uma oportunidade de arbitragem  $H$ . Desse modo,

$$G^*(1) \geq 0, E(G^*(1)) > 0.$$

Suponha por contradição que esse problema tenha uma solução  $\hat{H}$ . Defina

$$\tilde{H} = H + \hat{H}.$$

Como  $V(0) = 0$ , tem-se  $\tilde{V}(0) = V(0) + \hat{V}(0) = v_0$ . Segue que

$$\begin{aligned} v_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j \Delta S_j^*(1) &= v_0 + \sum_{j=1}^n \hat{H}_j \Delta S_j^*(1) + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1) \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^n \hat{H}_j \Delta S_j^*(1) + G^*(1) \\ &\geq v_0 + \sum_{j=1}^n \hat{H}_j \Delta S_j^*(1) \end{aligned}$$

e, definindo  $\mathcal{I} = \{\omega \in \Omega; G^*(1)(\omega) > 0\}$ , tem-se para  $\omega \in \mathcal{I}$  que

$$v_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{H}_j \Delta S_j^*(1)(\omega) > v_0 + \sum_{j=1}^n \hat{H}_j \Delta S_j^*(1)(\omega).$$

Como  $u(\cdot, \omega)$  é uma função côncava e estritamente crescente para cada  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{cases} u(\tilde{V}(1)(\omega), \omega) \geq u(\hat{V}(1)(\omega), \omega) & \omega \in \Omega \\ u(\tilde{V}(1)(\omega), \omega) > u(\hat{V}(1)(\omega), \omega) & \omega \in \mathcal{I} \end{cases}.$$

e tendo em vista que  $P(\mathcal{I}) > 0$ ,

$$E(u(\tilde{V}(1))) > E(u(\hat{V}(1))),$$

o que contraria a otimalidade de  $\hat{H}$ . ■

Com  $u(x) = \ln(x)$ , verifica-se a seguir como a Fórmula de apreçamento (5.23) pode ser usada para obter os preços iniciais  $S_i(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , assumindo como conhecida a estratégia ótima  $\hat{H}$ . O retorno ótimo é:

$$\hat{P} = \frac{\hat{V}(1) - V(0)}{V(0)} = \frac{\hat{V}(1) - 1}{1} = \hat{V}(1) - 1$$

e deseja-se maximizar  $E(\ln(V(1)))$ . Como  $u'(x) = \frac{1}{x}$ , tem-se que a Fórmula de apreçamento (5.23) leva a

$$S_i(0) = \frac{E\left(\frac{S_i(1)}{\hat{V}(1)}\right)}{(1 + r_f) E\left(\frac{1}{\hat{V}(1)}\right)}, i = 1, \dots, n$$

e

$$\lambda = (1 + r_f) E\left(\frac{1}{\hat{V}(1)}\right), \lambda S_i(0) = E\left(\frac{S_i(1)}{\hat{V}(1)}\right), i = 1, \dots, n.$$

Como  $\hat{H}'\left(\frac{1}{S(0)}\right) = 1$ ,  $\hat{H}'\left(\frac{1+r_f}{S(1)}\right) = \hat{V}(1)$ , tem-se que

$$\hat{H}'\left(\frac{1}{S(0)}\right) = \lambda = E\left(\frac{1}{\hat{V}(1)} \hat{H}'\left(\frac{1+r_f}{S(1)}\right)\right) = E\left(\frac{\hat{V}(1)}{\hat{V}(1)}\right) = 1,$$

ou seja,

$$\lambda = 1 = (1 + r_f) E\left(\frac{1}{\hat{V}(1)}\right)$$

e

$$S_i(0) = E\left(\frac{S_i(1)}{\hat{V}(1)}\right), i = 1, \dots, n.$$

Segue que para qualquer carteira  $H$ , com

$$V(0) = H'\left(\frac{1}{S(0)}\right), V(1) = H'\left(\frac{1+r_f}{S(1)}\right),$$

tem-se que o apreçamento log-ótimo resulta em

$$V(0) = E\left(\frac{H'\left(\frac{1+r_f}{S(1)}\right)}{\hat{V}(1)}\right) = E\left(\frac{V(1)}{\hat{V}(1)}\right). \quad (5.24)$$

TABELA 5.6: Possíveis valores para a carteira ótima

	Retorno alto	Retorno neutro	Retorno baixo
$\widehat{V}(1)$	1,2197	1,1728	1,119

**Exemplo 5.9** Considere o Exemplo 5.7. Lembrando que

$$V(1) = \theta_0(1 + r_f) + \theta_1(1 + R_1) + \theta_2(1 + R_2),$$

tem-se

$$\begin{aligned}\widehat{V}(1) &= \widehat{\theta}_0(1 + r_f) + \widehat{\theta}_1(1 + R_1) + \widehat{\theta}_2(1 + R_2) \\ &= (1,2197 + 0,2813(1 + R_1) + 0,2462(1 + R_2))v_0 \\ &= (1,0803 + 0,2813R_1 + 0,2462R_2)v_0,\end{aligned}$$

já que  $\widehat{\theta}_0 = 0,4725v_0$ ,  $\widehat{\theta}_1 = 0,2813v_0$ ,  $\widehat{\theta}_2 = 0,2462v_0$  e, portanto, para  $v_0 = 1$ , têm-se os valores da carteira ótima mostrados na Tabela 5.6.

Considere um investimento que paga  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  para os casos de retorno alto, neutro e baixo. Assim, o valor desse investimento no instante inicial, de acordo com a fórmula de apreçamento (5.24), é

$$V(0) = 0,25 \times \frac{d_1}{1,2197} + 0,5 \times \frac{d_2}{1,1728} + 0,25 \times \frac{d_3}{1,119}. \quad (5.25)$$

Por exemplo, se fosse montada uma carteira com 100% dos recursos no fundo lastreado ao IBovespa, e começando com  $v_0 = 1$ , então  $d_1 = 1,28$ ,  $d_2 = 1,18$ ,  $d_3 = 1,05$ , e seria obtido a partir de (5.25) que o valor desse investimento no instante 0 vale  $V(0) = 1$ , como era esperado. Igualmente, o fundo lastreado ao dólar paga  $d_1 = 1,2463$ ,  $d_2 = 1,17$ ,  $d_3 = 1,1$  e, novamente, tem-se com base em (5.25) que  $V(0) = 1$ . Para o fundo lastreado ao CDI,  $d_1 = d_2 = d_3 = 1,17$  e, novamente, a partir de (5.25) segue que  $V(0) = 1$ . Considere agora um investimento (uma opção no fundo lastreado ao IBovespa) que valha

$$V(1) = (1,2 - S_1(1))^+,$$

em que  $S(1)$  represente o valor do fundo lastreado ao IBovespa, começando com  $S_1(0) = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned}d_1 &= (1,2 - 1,28)^+ = 0, \\ d_2 &= (1,2 - 1,18)^+ = 0,02, \\ d_3 &= (1,2 - 1,05)^+ = 0,15\end{aligned}$$

e esse investimento, de acordo com (5.25), vale

$$V(0) = 0,25 \times \frac{0}{1,2197} + 0,5 \times \frac{0,02}{1,1728} + 0,25 \times \frac{0,15}{1,119} = 0,042.$$

## 5.6 A Função Utilidade $\ln$

Nesta seção, será descrito como a função utilidade  $\ln$  está associada à taxa de crescimento de uma carteira de investimento. Ilustra-se essa situação por meio de um jogo de roletas, conforme apresentado em [Luenberger, 1998]. Considere uma roleta com  $n$  seções. Cada seção  $i$  corresponde a um retorno total de  $g_i$  e tem probabilidade  $p_i$  de ocorrer, com  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Um jogador pode apostar em qualquer uma das  $n$  seções. Apostando-se R\$ 1,00 na seção  $i$  tem-se um ganho esperado de

$$g_i \times p_i + 0 \times (1 - p_i) - 1 = g_i \times p_i - 1.$$

Seja  $X(k)$  a riqueza do investidor no instante  $k$ . Chamando de

$$\omega_i(k) \rightarrow \text{proporção investida na seção } i \text{ no instante } k,$$

e definindo a variável aleatória  $\theta(k)$  tal que

$$\theta(k) = i \text{ com probabilidade } p_i,$$

tem-se que

$$X(k+1) = \left( 1 - \sum_{i=1}^n \omega_i(k+1) + g_{\theta(k+1)} \omega_{\theta(k+1)}(k+1) \right) X(k).$$

**Exemplo 5.10** Considere  $n = 3$ ,  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ ,  $p_3 = \frac{1}{6}$  e uma estratégia que investe sempre 50% da riqueza na seção 1 e guarda o restante. Nesse caso

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \left( \frac{1}{2} + \frac{g_1}{2} 1_{\{\theta(k+1)=1\}} \right) X(k) \\ &= \begin{cases} \frac{g_1+1}{2} X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$X(k+1) = R(k+1)X(k) = R(k+1) \dots R(1)X(0),$$

em que

$$R(k) = \begin{cases} \frac{g_1+1}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

**Exemplo 5.11** *Suponha uma estratégia que coloque sempre 25% na seção 1 e guarde o restante. Nesse caso*

$$X(k+1) = \left(\frac{3}{4} + \frac{g_1}{4} 1_{\{\theta(k+1)=1\}}\right) X(k) = \begin{cases} \frac{g_1+3}{4} X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4} X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ou seja,

$$X(k+1) = R(k+1)X(k) = R(k+1) \dots R(1)X(0),$$

em que

$$R(k) = \begin{cases} \frac{g_1+3}{4} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Considera-se a seguir a fórmula geral para a riqueza no instante  $k$

$$X(k+1) = R(k+1)X(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.26)$$

Assume-se que  $\{R(k)\}_{k=1,2,\dots}$  sejam independentes e igualmente distribuídas. A Fórmula (5.26) estabelece que

$$X(k) = R(k) \dots R(1)X(0) \quad (5.27)$$

e, aplicando a função  $\ln$  em (5.27), obtém-se

$$\ln(X(k)) = \ln(X(0)) + \sum_{t=1}^k \ln(R(t)),$$

ou seja,

$$\frac{1}{k} \ln \left( \frac{X(k)}{X(0)} \right) = \ln \left( \left( \frac{X(k)}{X(0)} \right)^{\frac{1}{k}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \ln(R(t)). \quad (5.28)$$

Pela lei forte dos grandes números [Ross, 1997], quando  $k \uparrow \infty$ , tem-se que

$$\frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \ln(R(t)) \rightarrow E(\ln(R(1))) \quad \text{com probabilidade 1.} \quad (5.29)$$

Portanto, escrevendo  $\nu = E(\ln(R(1)))$ , segue a partir de (5.28) e (5.29) que quando  $k \uparrow \infty$

$$\ln \left( \left( \frac{X(k)}{X(0)} \right)^{\frac{1}{k}} \right) \rightarrow \nu \quad \text{com probabilidade 1.} \quad (5.30)$$

Assim, com base em (5.30), quando  $k \uparrow \infty$ ,

$$\left( \frac{X(k)}{X(0)} \right)^{\frac{1}{k}} \rightarrow e^\nu \quad \text{com probabilidade 1.} \quad (5.31)$$



Logo, faz sentido procurar uma estratégia que maximize  $\nu = E(\ln(R(1)))$ . Note que

$$\begin{aligned}\nu + \ln(X(0)) &= E(\ln(R(1))) + \ln(X(0)) \\ &= E(\ln(R(1)X(0))) \\ &= E(\ln(X(1))),\end{aligned}$$

portanto maximizar  $E(\ln(R(1)))$  é equivalente a maximizar  $E(\ln(X(1)))$ . Definindo a função utilidade  $u(x) = \ln(x)$ , segue que maximizar a taxa de crescimento  $\nu$  é equivalente a maximizar o valor esperado da função utilidade  $\ln(x)$  para o problema de 1 período.

Apresenta-se a seguir uma série de exemplos que ilustram a Expressão (5.31).

**Exemplo 5.12** Nos Exemplos 5.10 e 5.11,

$$\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+g_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+g_1}{4}\right)$$

e

$$\nu_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3+g_1}{4}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{9+3g_1}{16}\right).$$

Logo, para ter-se  $\nu_{\frac{1}{2}} \leq \nu_{\frac{1}{4}}$ , deve-se ter

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{9+3g_1}{16}\right) \geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+g_1}{4}\right),$$

ou seja,

$$\ln\left(\frac{9+3g_1}{16}\right) - \ln\left(\frac{1+g_1}{4}\right) = \ln\left(\frac{4(9+3g_1)}{16(1+g_1)}\right) \geq 0,$$

portanto

$$\frac{9+3g_1}{4(1+g_1)} \geq 1,$$

que é equivalente a  $g_1 \leq 5$ . Para o caso  $g_1 = 3$ , segue que

$$\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{2} \ln(1) = 0 \quad (5.32)$$

e

$$\nu_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right), \quad (5.33)$$

ou seja, a estratégia de investir sempre 25% da riqueza na seção 1 é mais interessante do que investir sempre 50% pois, conforme visto na Equação (5.33), tem-se um retorno de 6% por jogada (pois  $\frac{3}{\sqrt{8}} = 1,0607$ ) a longo prazo, enquanto, no primeiro caso (Equação (5.32)), o retorno a longo prazo é zero.

**Exemplo 5.13** Considere um investimento que pode dobrar ou anular o que foi investido. A probabilidade de dobrar é  $p$ . Suponha um capital inicial  $X(0)$  e que é possível reinvestir quantas vezes se desejar. Quanto se deve investir em cada instante de tempo  $k$ ? Seja  $\omega(k)$  a proporção investida no instante  $k$ , e  $X(k)$  a riqueza no instante  $k$ . Logo,

$$X(k+1) = R(k+1)X(k),$$

em que

$$R(k+1) = \begin{cases} 1 + \omega(k+1) & \text{com probabilidade } p \\ 1 - \omega(k+1) & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}.$$

Considerando  $\omega(k) = \omega$ , segue que

$$R(k+1) = \begin{cases} 1 + \omega & \text{com probabilidade } p \\ 1 - \omega & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases},$$

portanto

$$\nu = p \ln(1 + \omega) + (1 - p) \ln(1 - \omega).$$

Derivando em  $\omega$  e igualando a zero, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d\nu(\omega)}{d\omega} &= \frac{p}{1 + \omega} - \frac{1 - p}{1 - \omega} = 0 \Rightarrow p(1 - \omega) = (1 - p)(1 + \omega) \\ &\Rightarrow \omega = (2p - 1)^+. \end{aligned}$$

Essa estratégia dará um retorno de

$$\begin{aligned} \nu &= p \ln(1 + \omega) + (1 - p) \ln(1 - \omega) \\ &= p \ln(2p) + (1 - p) \ln(2(1 - p)) \\ &= \ln(2) + p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p). \end{aligned}$$

Por exemplo, suponha que a chance de ganhar uma jogada seja de 51%. Logo, a estratégia ótima seria investir  $w = 2 \times 0,51 = 2\%$  da riqueza a cada jogada. Tem-se  $\nu = 0,00020001$ , que corresponde a um crescimento de aproximadamente 0,02% por jogada a longo prazo.

**Exemplo 5.14** Considere 2 ativos, tais que

$$S_1(k+1) = \begin{cases} g_{1s}S_1(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ g_{1d}S_1(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

e  $S_2(k+1) = S_2(k)$  (equivalente a não fazer nada). Considere uma estratégia de investir 50% no ativo 1, 50% no ativo 2. Segue que

$$X(k+1) = R(k+1)X(k)$$

com

$$R(k+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} + g_{1s} \times \frac{1}{2} = \frac{g_{1s}+1}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{g_{1d}}{2} = \frac{g_{1d}+1}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Para esse caso tem-se que

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{g_{1s}+1}{2} \right) + \ln \left( \frac{g_{1d}+1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(g_{1s}+1)(g_{1d}+1)}{4} \right).$$

Por exemplo, se  $g_{1s} = 1,1$ ,  $g_{1d} = 0,905$ , tem-se que  $\nu = 0,000062496$  e a longo prazo essa estratégia leva a um ganho de 0,0062% por unidade de tempo. A Figura 5.5 apresenta os retornos compostos do ativo 1 (curva contínua fina), da carteira que investe 50% no ativo 1 e 50% no ativo 2 (curva em asterisco), e a curva  $e^{k\nu}$  (curva contínua grossa), para  $k$  variando de 0 a 1.000. Essa estratégia segue o ditado “compre na baixa, venda na alta”. De fato, suponha que  $g_{1s} = 2$ ,  $g_{1d} = 0,5$ . Se o ativo 1 sobe em um período de tempo, na nova carteira, parte dos ganhos são colocados de lado (ativo 2). Caso contrário, se o ativo 1 desce, na nova carteira tira-se parte do que estava investido no ativo 2 para investir no ativo 1. Por exemplo, se a carteira vale inicialmente 1 ( $X(0) = 1$ ), tem-se pela regra descrita que 0,5 está investido no ativo 1 e 0,5 no ativo 2. Se o ativo 1 subir, a carteira no instante seguinte vale  $\frac{3}{2}$ .

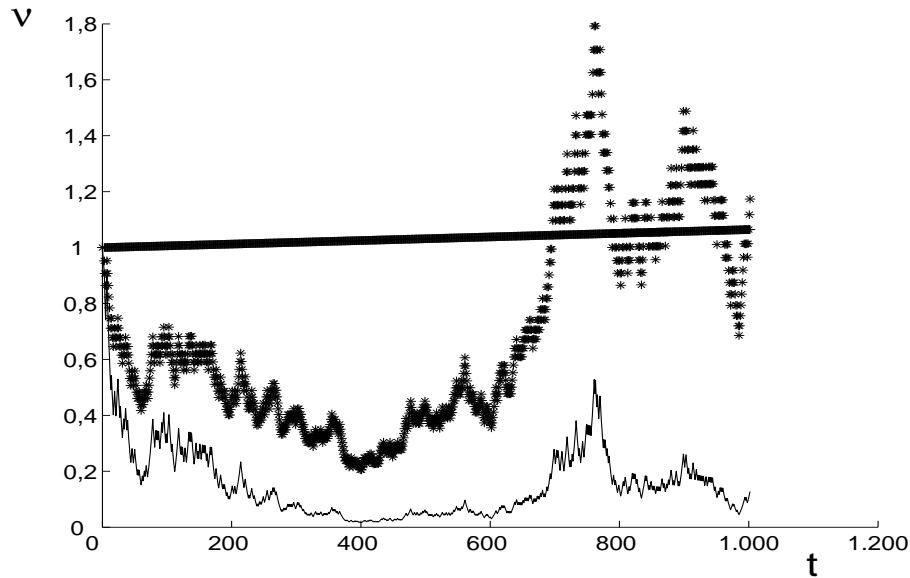


FIGURA 5.5: Retornos dos ativos do Exemplo 5.14

Pela nova realocação, coloca-se metade do ganho de 0,5 obtido no ativo 1 no ativo 2 (que vai de 0,5 para 0,75), e a outra metade é reaplicada no ativo 1 (totalizando 0,75). Mas, se o ativo 1 cair, a carteira no instante seguinte vale  $\frac{3}{4}$ . Nesse caso, tira-se parte do que estava investido no ativo 2 (0,125, pois o total investido no ativo 2 vai de 0,5 para 0,375) para ser investido no ativo 1, totalizando  $\frac{3}{8}$  em cada ativo.

**Exemplo 5.15** Considere 2 ativos independentes, tais que para  $i = 1, 2$

$$S_i(k+1) = \begin{cases} g_{is}S_i(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ g_{id}S_i(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suponha novamente uma estratégia de investir 50% no ativo 1, 50% no ativo 2. Segue que

$$X(k+1) = R(k+1)X(k)$$

com

$$R(k+1) = \begin{cases} g_{1s} \times \frac{1}{2} + g_{2s} \times \frac{1}{2} = \frac{g_{1s}+g_{2s}}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{4} \\ g_{1s} \times \frac{1}{2} + g_{2d} \times \frac{1}{2} = \frac{g_{1s}+g_{2d}}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{4} \\ g_{2s} \times \frac{1}{2} + g_{1d} \times \frac{1}{2} = \frac{g_{2s}+g_{1d}}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{4} \\ g_{1d} \times \frac{1}{2} + g_{2d} \times \frac{1}{2} = \frac{g_{1d}+g_{2d}}{2} & \text{com probabilidade } \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Para esse caso tem-se que

$$\nu = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{g_{1s} + g_{2s}}{2}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{g_{1s} + g_{2d}}{2}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{g_{2s} + g_{1d}}{2}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{g_{1d} + g_{2d}}{2}\right).$$

Supondo novamente que  $g_{1s} = g_{2s} = 1,1$ ,  $g_{1d} = g_{2d} = 0,905$ , tem-se que  $\nu = 0,00012090$ , que corresponde a um ganho por período a longo prazo de 0,0121%. Portanto, quando comparado com o Exemplo 5.14, percebe-se um aumento considerável no ganho da carteira. A Figura 5.6 apresenta os retornos compostos do ativo 1 (curva contínua fina), da carteira que investe 50% no ativo 1 e 50% no ativo 2 (curva em asterisco) e a curva  $e^{k\nu}$  (curva contínua grossa), para  $k$  variando de 0 a 1.000.

**Exemplo 5.16** Considere o caso em que se tem  $n$  ativos de risco com retorno aleatório

$$R(k) = \begin{pmatrix} R_1(k) \\ \vdots \\ R_n(k) \end{pmatrix}.$$

Suponha que os retornos sejam independentes e igualmente distribuídos. Deseja-se achar

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

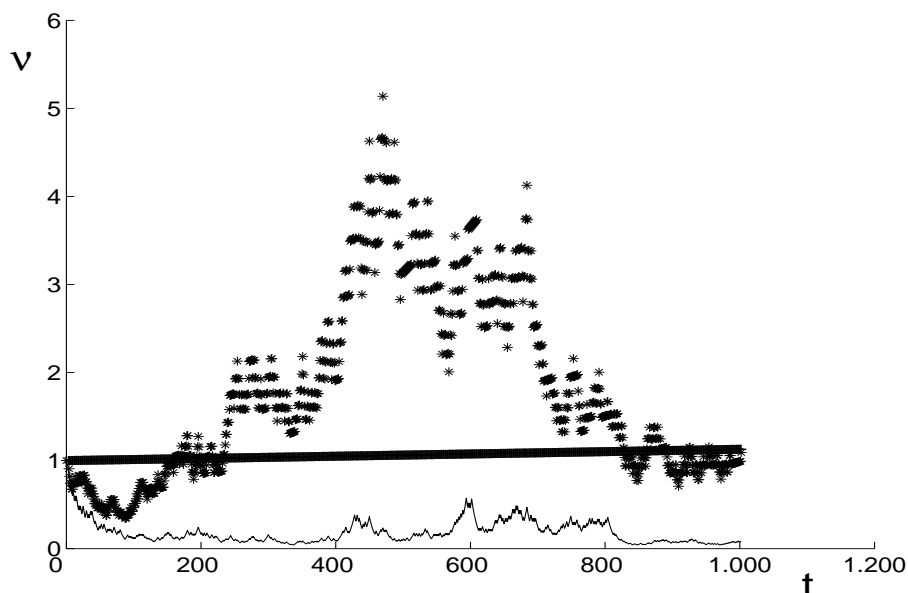


FIGURA 5.6: Retornos dos ativos do Exemplo 5.15

para formar uma carteira  $P = \omega' R$  e maximizar  $E(\ln(1 + P))$ . A taxa de crescimento dessa carteira deve ser, a longo prazo, de aproximadamente  $(e^\nu)^k$ , em que  $k$  representa o número de períodos. Este problema será revisto no Capítulo 7.

**Exemplo 5.17** Voltando ao problema da roleta com  $n = 3$  seções, será determinada a estratégia ótima  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Seja  $v_1 = g_1 - 1, v_2 = g_2 - 1, v_3 = g_3 - 1$ . Segue que

$$X(k+1) = \begin{cases} (1 + v_1\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ (1 - \omega_1 + v_2\omega_2 - \omega_3)X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{3} \\ (1 - \omega_1 - \omega_2 + v_3\omega_3)X(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{6} \end{cases},$$

portanto

$$\begin{aligned} \nu = & p_1 \ln(1 + v_1\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + p_2 \ln(1 - \omega_1 + v_2\omega_2 - \omega_3) \\ & + p_3 \ln(1 - \omega_1 - \omega_2 + v_3\omega_3). \end{aligned}$$

Deve-se maximizar essa função com a restrição de que  $\omega_i \geq 0$ . Em alguns casos, pode-se obter a solução desse problema derivando-se e igualando-se a zero, o que leva às equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \omega_1} &= p_1 \frac{v_1}{1 + v_1 \omega_1 - \omega_2 - \omega_3} - p_2 \frac{1}{1 - \omega_1 + v_2 \omega_2 - \omega_3} \\ &\quad - p_3 \frac{1}{1 - \omega_1 - \omega_2 + v_3 \omega_3} = 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial \omega_2} &= -p_1 \frac{1}{1 + v_1 \omega_1 - \omega_2 - \omega_3} + p_2 \frac{v_2}{1 - \omega_1 + v_2 \omega_2 - \omega_3} \\ &\quad - p_3 \frac{1}{1 - \omega_1 - \omega_2 + v_3 \omega_3} = 0 \\ \frac{\partial \nu}{\partial \omega_3} &= -p_1 \frac{1}{1 + v_1 \omega_1 - \omega_2 - \omega_3} - p_2 \frac{1}{1 - \omega_1 + v_2 \omega_2 - \omega_3} \\ &\quad + p_3 \frac{v_3}{1 - \omega_1 - \omega_2 + v_3 \omega_3} = 0.\end{aligned}$$

Pode-se verificar que para  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ ,  $p_3 = \frac{1}{6}$ ,  $g_1 = 2$ ,  $g_2 = 3$ ,  $g_3 = 6$ , a solução do problema é

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \omega_2 = \frac{1}{3}, \omega_3 = \frac{1}{6}$$

e  $\nu = 0$ , ou seja, a melhor estratégia levará a um retorno nulo a longo prazo.

**Exemplo 5.18** Suponha que se deseja maximizar  $E(\ln(X(T)))$ . Como

$$X(T) = R(T) \dots R(1)X(0)$$

tem-se que

$$\ln(X(T)) = \ln(X(0)) + \sum_{k=1}^T \ln(R(k)),$$

portanto

$$\begin{aligned}E(\ln(X(T))) &= E(\ln(X(0))) + \sum_{k=1}^T E(\ln(R(k))) \\ &= E(\ln(X(0))) + TE(\ln(R(1))); \end{aligned}$$

pois, por hipótese, as variáveis aleatórias  $R(k)$  são independentes e igualmente distribuídas. Logo, maximizar  $E(\ln(X(T)))$  é novamente equivalente a maximizar  $E(\ln(R(1)))$ .

Conclui-se esta seção analisando a família de funções utilidade

$$u(x) = \frac{1}{\zeta} x^\zeta, \quad \zeta \leq 1. \quad (5.34)$$

Note que

$$x^\zeta = e^{\ln(x^\zeta)} = e^{\zeta \ln(x)} \Rightarrow \frac{d(x^\zeta)}{d\zeta} = \frac{d(e^{\zeta \ln(x)})}{d\zeta} = e^{\zeta \ln(x)} \ln(x),$$

portanto, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\zeta} (x^\zeta - 1) \right) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left( e^{\zeta \ln(x)} \ln(x) \right) = \ln(x).$$

Entretanto, a função utilidade  $\frac{1}{\zeta} x^\zeta$  é equivalente a  $\frac{1}{\zeta}(x^\zeta - 1)$ , pois apenas adiciona-se uma constante. Logo, fazendo o limite quando  $\zeta \rightarrow 0$ , conclui-se que  $u(x) = \frac{1}{\zeta}(x^\zeta - 1)$  tende a  $\ln(x)$ . Portanto, no limite, a família de funções utilidade descrita inclui, após uma transformação de equivalência,  $\ln(x)$ . Também inclui a função linear  $u(x) = x$  (fazendo  $\zeta = 1$ ). Considerando que a estratégia é única ao longo do tempo, tem-se que

$$\begin{aligned} E(u(X(k))) &= \frac{1}{\zeta} E \left( (R(k) \dots R(1) X(0))^\zeta \right) \\ &= \frac{1}{\zeta} E(R(k)^\zeta) \dots E(R(1)^\zeta) X(0) \\ &= \frac{1}{\zeta} E(R(1)^\zeta)^k X(0) \\ &= E(u(R(1)))^k X(0), \end{aligned}$$

desse modo maximizar  $E(u(X(k)))$  é equivalente a maximizar  $E(u(R(1)))$ . Há os seguintes casos:

- a)  $0 < \zeta \leq 1$ : estratégias agressivas, que podem levar à falência, com o caso extremo sendo  $\zeta = 1$  (maximizar o valor esperado). Por exemplo, considere  $\zeta = \frac{1}{2}$  e dois investimentos:

- a.1) o capital dobra com probabilidade de 90%, ou vai a zero com probabilidade de 10%;
- a.2) o capital cresce certamente à taxa de 25%.

Como  $0,9 \times \sqrt{2} > 1 \times \sqrt{1,25}$ , a estratégia a.1) seria a escolhida, mesmo que levasse certamente à falência a longo prazo.

- b)  $\zeta < 0$ : estratégias que podem ser muito conservadoras. Por exemplo, considere  $\zeta = -\frac{1}{2}$  e dois investimentos:

- b.1) o capital quadruplica certamente;
- b.2) há 50% de chance da riqueza ficar constante e 50% de chance da riqueza ser multiplicada por 100.

Como  $-\frac{1}{\sqrt{4}} = -0,5 > -\left(\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = -0,55$ , a estratégia b.1) seria a escolhida, mesmo com a estratégia b.2) podendo multiplicar a riqueza por 100.

Portanto, para funções utilidade da família (5.34), valores com  $\zeta < 0$  e próximos de zero seriam os mais interessantes. No limite, estaria a função  $\ln$ . Também tem-se que, para  $\zeta < 0$  e próximo de zero,

$$\frac{1}{\zeta} (x^\zeta - 1) \cong \ln(x) + \frac{1}{2}\zeta (\ln(x))^2$$

e, tomando o valor esperado, a maximização da função utilidade seria equivalente a maximizar uma combinação linear do valor esperado do logaritmo do retorno menos a sua variância.

## 5.7 Exercícios

O Exercício 1 seguinte é solucionado e utiliza a planilha Exercícios.xls, disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. A resposta desse exercício encontra-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

1) Conforme discutido na Seção 5.1, o conceito de função utilidade pode ser usado como uma ferramenta para a tomada de decisão em relação aos possíveis investimentos disponíveis. Diante de dois investimentos diferentes, uma função utilidade pode indicar um ou outro, dependendo da calibragem dos seus parâmetros. Seguindo esse raciocínio, seja  $u(x) = x^p$  a função utilidade a ser considerada, em que  $0 < p \leq 1$  é o parâmetro a ser calibrado de acordo com o perfil de risco do investidor. Pede-se:

- a) Calcular o coeficiente de aversão ao risco da família de funções utilidade  $u(x) = x^p$ . Qual a conclusão que se tira?
- b) O valor esperado da função utilidade do investidor, considerando-se que ele pode aplicar em dois fundos:
  - b.1) renda fixa (ativo sem risco) com rentabilidade  $r_f$ ;
  - b.2) fundo carteira livre (ativo com risco) com rentabilidade  $R$ , rentabilidade esperada  $r$  e risco (desvio-padrão)  $\sigma$ . Assuma que  $R$  possui distribuição uniforme.

Defina  $\omega$  como o valor aplicado no fundo carteira livre e  $1 - \omega$  como o valor aplicado na renda fixa.

- c) Simular alguns possíveis conjuntos de respostas para as perguntas do questionário da pasta Utilidade, adotando-se os seguintes parâmetros de risco e retorno:
  - c.1) renda fixa (ativo sem risco):  $r_f = 18\%$ ;



- c.2) fundo carteira livre (ativo com risco):  $r = 25\%$ ,  $\sigma = 40\%$ .
- d) Considere as seguintes respostas: 1. d) 2. a) 3. a) 4. Qual investimento é mais recomendável para esse perfil de risco?
- e) Leve  $\sigma$  para 45% e verifique qual é o melhor investimento nesse caso. Aumente e diminua o valor de  $p$  e verifique o que acontece.

### Exercícios Propostos

2) Considere uma função utilidade  $u$  e um mercado com  $n$  ativos de risco com retornos  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e um ativo livre de risco com retorno  $r_f$ . O investidor possui um capital inicial  $v_0$  para investir. Suponha o problema de seleção ótima de carteira

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in R^n} E(u(V(1))) \\ \text{sujeito a} \\ V(1) = (1 + P)v_0, \\ P = (1 - w'e)r_f + \omega'R, \end{aligned}$$

em que  $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ . Seja  $\hat{V}(1)$  o valor ótimo desse problema:

a) Mostre que

$$E \left( u' \left( \hat{V}(1) \right) (R_i - r_f) \right) = 0, i = 1, \dots, n.$$

b) Suponha que

$$u(x) = x - \frac{1}{2}cx^2.$$

Seja  $\hat{P}$  o retorno da carteira ótima, isto é,

$$\hat{P} = \frac{\hat{V}(1) - v_0}{v_0}.$$

Mostre que

$$r_i - r_f = \beta_i (\hat{\mu} - r_f), i = 1, \dots, n,$$

em que

$$\begin{aligned} r_i &= E(R_i), \hat{\mu} = E(\hat{P}) \\ \beta_i &= \frac{\text{cov}(\hat{P}, R_i)}{\hat{\sigma}^2}, \hat{\sigma}^2 = \text{var}(\hat{P}). \end{aligned}$$

TABELA 5.7: Montagem da função utilidade

$p$	$E(I)$	$R_c$
0	50%	50,00%
0,1	45%	44,10%
0,2	40%	37,60%
0,3	35%	31,50%
0,4	30%	26,70%
0,5	25%	21,75%
0,6	20%	17,00%
0,7	15%	12,45%
0,8	10%	8,20%
0,9	5%	4,00%
1,0	0%	0%

3) Uma pessoa deseja investir R\$ 100,00 em dois ativos, um sem risco com rentabilidade  $r_f = 15\%$ , e outro ativo de risco com rentabilidade  $R$  que pode valer 25%, 20%, 17%, 12%, 10% e 2% com probabilidades de 0,1, 0,2, 0,3, 0,2, 0,1 e 0,1, respectivamente. Para determinar o seu grau de aversão ao risco, o investidor responde a um questionário em que é considerado um investimento hipotético  $I$ , com rentabilidade de 50% e probabilidade  $1 - p$  de ocorrer, ou rentabilidade de 0% e probabilidade  $p$  de ocorrer. Varia-se  $p$  e pergunta-se qual seria o valor da rentabilidade equivalente à certeza  $R_c$  que o investidor aceitaria em troca de não participar do investimento com risco. Obtém-se a Tabela 5.7.

- a) Trace a função utilidade desse investidor.
  - b) Determine quanto o investidor deve aplicar no ativo livre de risco  $r_f$  e no ativo de risco  $R$  de forma a maximizar o valor esperado da sua função utilidade.
- 4) Para um investimento inicial de R\$ 100,00, obtém-se, por meio de um questionário seguindo os moldes do Exemplo 5.4, os possíveis valores para a riqueza final do investidor conforme a Tabela 5.8.
- a) Determine os parâmetros da função utilidade  $u(x) = ax^\nu + b$  que melhor se aproximam dos pontos obtidos na Tabela 5.8.
  - b) Trace o gráfico dessa função utilidade.
- 5) Considere uma roleta com  $n$  seções. Se a seção  $i$  é sorteada, o pagamento obtido é  $g_i$  vezes o que foi apostado nessa seção. A chance da seção  $i$  ser sorteada é  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sendo  $\omega_i \geq 0$  a fração da riqueza do jogador apostada na seção  $i$ , escreve-se

TABELA 5.8: Montagem da função utilidade

$p$	$u(c)$	$c$
0	500	500
0,0739	470,4525	460
0,1510	439,5898	430
0,232	407,2190	389
0,3173	373,0947	348
0,4078	336,8966	310
0,5045	298,1935	270
0,6091	256,3797	230
0,7236	210,5573	190
0,8518	159,2899	143
1	100	100

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Supõe-se que  $\omega'e = \sum_{i=1}^n \omega_i \leq 1$ :

- a) Mostre que a estratégia de máximo crescimento é obtida resolvendo o problema

$$\max \sum_{j=1}^n p_j \ln(\omega_j g_j + 1 - \omega'e).$$

sujeito a  $\omega'e \leq 1, \omega \geq 0$ .

- b) Assumindo que  $\omega_i > 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , mostre que os valores ótimos devem satisfazer

$$\frac{p_k g_k}{g_k \omega_k + 1 - \omega'e} - \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{g_j \omega_j + 1 - \omega'e} = 0,$$

para todo  $k = 1, \dots, n$ .

- c) Suponha que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{g_i} = 1$ . Mostre que nesse caso a solução do problema é dada por

$$\omega_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- d) Para o caso  $n = 3, p_1 = 1/2, p_2 = 1/3, p_3 = 1/6, g_1 = 3, g_2 = 2, g_3 = 6$ , obtenha a solução ótima e a taxa de crescimento máxima.

6) Considere 3 ativos independentes, tais que para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$S_i(k+1) = \begin{cases} g_{is}S_i(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ g_{id}S_i(k) & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Considere uma estratégia de investir  $\frac{1}{3}$  no ativo 1,  $\frac{1}{3}$  no ativo 2, e  $\frac{1}{3}$  no ativo 3. Denote por  $X(k)$  a riqueza no instante  $k$ . Tem-se que

$$X(k+1) = R(k+1)X(k).$$

- Obtenha a expressão para  $R(k)$ .
- Determine a taxa de crescimento  $\nu$  para esse caso.
- Supondo  $g_{1s} = g_{2s} = g_{3s} = 1,1$ ,  $g_{1d} = g_{2d} = g_{3d} = 0,905$ , determine  $\nu$ , e compare com o Exemplo 5.15.
- Simule e trace um gráfico com os retornos compostos do ativo 1, a carteira que investe  $\frac{1}{3}$  em cada ativo, e a curva  $e^{k\nu}$  para  $k$  variando de 0 a 1.000.

## Capítulo 6

# Arbitragem e Apreçamento

Demonstrou-se no capítulo anterior que a existência de uma solução para o Problema de otimização de carteiras (5.20) implica a não existência de arbitragens e uma fórmula para apreçamento de ativos (5.23). Neste capítulo, será apresentada uma generalização desses resultados. Mais especificamente, será demonstrado que a não existência de arbitragens é equivalente à existência de uma probabilidade, chamada de probabilidade neutra ao risco, que pode ser obtida por meio de uma solução ótima para o Problema de otimização de carteiras (5.20). Portanto, a existência de uma solução para o Problema de otimização de carteiras (5.20) implica a existência de probabilidade neutra ao risco, o qual, por sua vez, é equivalente à não existência de arbitragens. Também será apresentado que a probabilidade neutra ao risco serve para o apreçamento de ativos em mercados completos.

Seguindo uma formulação análoga à apresentada em [Pliska, 1997], considera-se que o mercado financeiro pode ser representado por um conjunto discreto de possíveis cenários futuros, cada cenário com sua respectiva probabilidade de ocorrência. Inicialmente, será apresentada na Seção 6.1 a definição de probabilidade neutra ao risco. A equivalência entre a não existência de arbitragens e a existência de uma probabilidade neutra ao risco será apresentada na Seção 6.2, bem como a fórmula de apreçamento em mercados completos. A relação entre o problema de otimização de carteiras e a probabilidade neutra ao risco é apresentada na Seção 6.3. Em particular, será apresentada uma formulação para a resolução do problema de otimização de carteiras, chamada de formulação por Martingale, baseada na probabilidade neutra ao risco. Utilizando essa formulação, o problema de média-variância será revisto na Seção 6.4, permitindo mostrar a equivalência entre as fórmulas de apreçamento neutro ao risco e a fórmula do CAPM.

## 6.1 Arbitragem e Probabilidade Neutra ao Risco

Neste capítulo são considerados modelos com espaço amostral finito, ou seja, o espaço amostral será da forma  $\Omega = \{\varpi_1, \dots, \varpi_\kappa\}$ , com cada  $\varpi_i$  representando um possível cenário de ocorrência. No que segue denota-se por  $p(\varpi_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$  a probabilidade (real) de o cenário  $\varpi_i$  ocorrer. Inicialmente, define-se o que seria uma probabilidade neutra ao risco.

**Definição 6.1** *Uma medida de probabilidade neutra ao risco (ou medida de probabilidade de Martingale) é uma medida de probabilidade  $\pi$  tal que*

$$1) \pi(\varpi) > 0, \forall \varpi \in \Omega;$$

$$2) \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

$$E_\pi(S_i^*(1)) = S_i^*(0),$$

isto é,

$$E_\pi\left(\frac{S_i(1)}{B(1)}\right) = S_i(0).$$

Segue que se  $\pi$  é uma medida de probabilidade de Martingale, então

$$\begin{aligned} E_\pi(V^*(1)) &= E_\pi\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i^*(1)\right) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i E_\pi(S_i^*(1)) \\ &= H_0 + \sum_{i=1}^n H_i S_i^*(0) = V^*(0). \end{aligned}$$

Nota-se que quando  $B(1) = (1 + r_f)$ ,

$$\begin{aligned} S_j^*(1) - S_j^*(0) &= \frac{S_j(1) - B(1)S_j(0)}{B(1)} = \frac{(1 + R_j)S_j(0) - (1 + r_f)S_j(0)}{(1 + r_f)} \\ &= \frac{(R_j - r_f)}{(1 + r_f)} S_j(0) = \Delta S_j^*(1). \end{aligned}$$

Obviamente tem-se a partir desse resultado que  $\pi$  é uma probabilidade neutra ao risco se e somente se  $\pi(\varpi) > 0$  para cada  $\varpi \in \Omega$  e

$$E_\pi(R_j) = r_f, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

O Teorema 6.2 a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de arbitragens. Para provar esse resultado, precisa-se do Teorema de Farkas, apresentado a seguir.

**Teorema 6.1** [Schrijver, 1996] *Teorema de Farkas: Somente um destes sistemas possui solução:*

$$\text{Sistema 1 : } Ax \leq 0, \quad c'x > 0$$

$$\text{Sistema 2 : } w'A = c', \quad w \geq 0.$$

Define-se a seguinte matriz  $M$  (por simplicidade, elimina-se a dependência temporal):

$$M = \begin{pmatrix} \Delta S_1^*(\varpi_1) & \dots & \Delta S_n^*(\varpi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta S_1^*(\varpi_\kappa) & \dots & \Delta S_n^*(\varpi_\kappa) \end{pmatrix}.$$

**Teorema 6.2** *Não existem oportunidades de arbitragem se e somente se existe uma medida de probabilidade de Martingale  $\pi$ .*

**Prova:** ( $\Leftarrow$ ) : Seja  $\pi$  uma medida de probabilidade de Martingale e suponha que exista uma oportunidade de arbitragem. Logo, para uma estratégia  $H$ ,  $V(0) = 0$ ,  $V^*(1) = G^*(1) \geq 0$ ,  $E(G^*(1)) > 0$ . Como  $\pi(\varpi) > 0$  para todo  $\varpi \in \Omega$ , segue que  $E_\pi(V^*(1)) > 0$ . Mas, como visto anteriormente,

$$E_\pi(V^*(1)) = V^*(0) = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, não pode haver arbitragens.

( $\Rightarrow$ ) : Seja

$$\mathcal{W} = \text{Im}\{M\}, \mathcal{S} = \{x \in R^\kappa; x \geq 0, x \neq 0\}.$$

Tem-se a partir da Proposição 5.2 que existe uma arbitragem  $H$  se e somente se  $\mathcal{W} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ . Segue que

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{S} = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} Mz = x, \\ x \geq 0, x \neq 0 \end{cases} \text{ não tem solução em } z, x,$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M & -I \\ -M & I \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \leq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & e' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} > 0 \end{cases} \text{ não tem solução em } z, x. \quad (6.2)$$

Pelo Teorema da Farkas, o Sistema (6.2) não ter solução é equivalente ao Sistema (6.3) ter solução:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u' & r' & s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & -I \\ -M & I \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u' & r' & s' \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}. \quad (6.3)$$

Portanto, não ter arbitragem é equivalente a existir  $u, r, s$ , tal que satisfaça ao Sistema (6.3), que pode ser reescrito como

$$(u - r)'M = 0, (r - u)' - s' = e', u \geq 0, r \geq 0, s \geq 0. \quad (6.4)$$

Chamando  $t = u - r$ , tem-se a partir de (6.4) que

$$t'M = 0, t = s + e, s \geq 0,$$

e, portanto,  $t > 0$ . Define-se

$$\pi(\varpi_k) = \frac{t_k}{t'e} > 0, k = 1, \dots, \kappa.$$

Segue a partir de  $t'M = 0$  que

$$E_\pi(\Delta S_i^*) = \sum_{k=1}^{\kappa} \pi(\varpi_k) \Delta S_i^*(\varpi_k) = 0, i = 1, \dots, n,$$

ou seja, para  $i = 1, \dots, n$ ,

$$E_\pi(S_i^*(1)) = S_i^*(0).$$

■

**Exemplo 6.1** [Pliska, 1997] Considere  $r_f = \frac{1}{9}$ ,  $S_1(1)(\varpi_1) = \frac{20}{3}$ ,  $S_1(1)(\varpi_2) = \frac{40}{9}$ ,  $S_1(0) = 5$ . Segue que

$$\begin{aligned} V(0) &= H_0 + 5H_1 \\ V(1)(\varpi) &= (1 + \frac{1}{9})H_0 + S_1(1)(\varpi) \end{aligned}$$

e, para obter uma medida de probabilidade de Martingale é necessário achar  $\pi$ , tal que

$$\begin{aligned} \left( \frac{20}{3}\pi(\varpi_1) + \frac{40}{9}\pi(\varpi_2) \right) / \left( \frac{10}{9} \right) &= 5, \\ \pi(\varpi_1) + \pi(\varpi_2) &= 1, \pi(\varpi_1) > 0, \pi(\varpi_2) > 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema obtém-se que

$$\pi(\varpi_1) = \frac{1}{2}, \pi(\varpi_2) = \frac{1}{2},$$

que é uma medida de probabilidade de Martingale e, portanto, não existem oportunidades de arbitragem. Suponha agora que  $\Omega = \{\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3\}$  e

$$S_1(1)(\varpi_3) = \frac{30}{9}.$$

Nesse caso, a condição para a existência de uma medida de probabilidade de Martingale é

$$\begin{aligned} \left( \frac{20}{3}\pi(\varpi_1) + \frac{40}{9}\pi(\varpi_2) + \frac{30}{9}\pi(\varpi_3) \right) / \left( \frac{10}{9} \right) &= 5, \\ \pi(\varpi_1) + \pi(\varpi_2) &= 1, \pi(\varpi_1) > 0, \pi(\varpi_2) > 0. \end{aligned}$$



Resolvendo em função de  $\pi(\varpi_1)$ , obtém-se a seguinte solução:

$$\begin{aligned}\pi(\varpi_2) &= 2 - 3\pi(\varpi_1), \\ \pi(\varpi_3) &= -1 + 2\pi(\varpi_1), \pi(\varpi_1) > 0, \pi(\varpi_2) > 0, \pi(\varpi_3) > 0.\end{aligned}$$

Portanto, deve-se ter

$$\begin{aligned}\pi(\varpi_1) &= a, \\ \pi(\varpi_2) &= 2 - 3a, \\ \pi(\varpi_3) &= -1 + 2a, \quad \frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Novamente, não existem oportunidades de arbitragem (note que nesse caso existem infinitas medidas de Martingale).

**Exemplo 6.2** [Pliska, 1997] Considere agora  $\kappa = 3$ ,  $r_f = \frac{1}{9}$ ,  $n = 2$ , e

$i$	$S_i(0)$	$S_i(1)$		
		$\varpi_1$	$\varpi_2$	$\varpi_3$
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Portanto, os preços com desconto são dados por

$i$	$S_i^*(0)$	$S_i^*(1)$		
		$\varpi_1$	$\varpi_2$	$\varpi_3$
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Para não haver arbitragens, deve-se achar  $\pi(\varpi_1) > 0, \pi(\varpi_2) > 0, \pi(\varpi_3) > 0$ , tais que

$$\begin{aligned}5 &= 6 \times \pi(\varpi_1) + 6 \times \pi(\varpi_2) + 4 \times \pi(\varpi_3) \\ 10 &= 12 \times \pi(\varpi_1) + 8 \times \pi(\varpi_2) + 8 \times \pi(\varpi_3) \\ 1 &= \pi(\varpi_1) + \pi(\varpi_2) + \pi(\varpi_3).\end{aligned}$$

Há apenas uma solução para o sistema de equações descrito, dado por  $\pi(\varpi_1) = \pi(\varpi_3) = \frac{1}{2}, \pi(\varpi_2) = 0$ . Essa solução viola a restrição de que  $\pi(\varpi_2) > 0$  e, portanto, existe uma oportunidade de arbitragem.

Os exemplos ilustram todos os casos possíveis, a saber:

1. existe uma única medida de probabilidade neutra ao risco;
2. existem infinitas medidas de probabilidade neutra ao risco;
3. não existe uma medida de probabilidade neutra ao risco.

Para os casos 1 e 2, não existem oportunidades de arbitragem. Para o caso 3, existem.

**Exemplo 6.3** [Pliska, 1997] *Conforme visto na prova do Teorema 6.2, existe uma oportunidade de arbitragem  $H$  se e somente se  $\mathcal{W} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ . Computa-se  $\mathcal{W} \cap \mathcal{S}$  no caso do Exemplo 6.2. Tem-se que*

$$M = \begin{pmatrix} 6-5 & 12-10 \\ 6-5 & 8-10 \\ 4-5 & 8-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \text{Im}\{M\} &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1 = z_1 + 2z_2, x_2 = z_1 - 2z_2, x_3 = -(z_1 + 2z_2) \right\} \\ &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1 + x_3 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo a interseção com  $\mathcal{S}$  tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \cap \mathcal{S} &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1 + x_3 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1 = 0, x_3 = 0, x_2 > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$ , tal que

$$H_1 + 2H_2 = 0, H_1 - 2H_2 = x_2 > 0, H_0 = -H_1S_1(0) - H_2S_2(0),$$

ou seja, para  $x_2 > 0$  fixo,

$$H_1 = \frac{x_2}{2}, H_2 = -\frac{x_2}{4}, H_0 = -\frac{x_2}{2} \times 5 - \left(\frac{x_2}{4}\right) \times 10 = 0$$

tem-se que  $V(0) = 0$  e

$$G^*(1) = V^*(1) - V^*(0) = \sum_{i=1}^2 H_i \Delta S_i^*(1) = \frac{x_2}{2} \times \Delta S_1^*(1) - \frac{x_2}{4} \times \Delta S_2^*(1),$$

que leva a

$$\begin{pmatrix} G^*(1)(\varpi_1) \\ G^*(1)(\varpi_2) \\ G^*(1)(\varpi_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2/2 \\ -x_2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $H$  é uma oportunidade de arbitragem.

## 6.2 Apreçamento e Mercados Completos

Um “contrato contingenciável” é uma variável aleatória  $X$ , representando o valor do pagamento de um contrato no instante  $t = 1$ . Pode-se imaginar um contrato realizado no instante  $t = 0$  em que o vendedor se compromete a pagar  $X$  para o comprador no instante  $t = 1$ . Quanto deve valer esse contrato no instante  $t = 0$ ? Poderia-se supor que o valor do contrato dependeria das funções utilidade e da aversão ao risco do comprador e vendedor, mas, em muitos casos, isso não é verdade. Utilizando argumentos da teoria de apreçamento por arbitragens, pode-se estabelecer um único preço correto do contrato no instante  $t = 0$ . Esse valor não depende da aversão ao risco de ambas as partes. Para isso, necessita-se do seguinte conceito:

**Definição 6.2** Um “contrato contingenciável” é dito ser realizável se existe uma estratégia  $H$ , chamada de carteira replicante, tal que  $V(1)(\varpi) = X(\varpi)$ . Diz-se nesse caso que  $H$  gera  $X$ .

Têm-se os seguintes resultados:

**Proposição 6.1** Se  $\pi$  é uma medida de probabilidade neutra ao risco, então, para toda estratégia  $H$  tem-se que

$$V(0) = E_\pi(V^*(1)). \quad (6.5)$$

**Prova:** Tem-se que  $V^*(1) = V(0) + \sum_{i=1}^n H_i \Delta S_i^*(1)$  e, como  $E_\pi(\Delta S_i^*(1)) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , segue que

$$\begin{aligned} V(0) &= E_\pi(V^*(1) - \sum_{i=1}^n H_i \Delta S_i^*(1)) \\ &= E_\pi(V^*(1)) - \sum_{i=1}^n H_i E_\pi(\Delta S_i^*(1)) \\ &= E_\pi(V^*(1)), \end{aligned}$$

mostrando (6.5). ■

Para os próximos resultados, defina

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} B(1)(\varpi_1) & S_1(1)(\varpi_1) & \cdots & S_n(1)(\varpi_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B(1)(\varpi_\kappa) & S_1(1)(\varpi_\kappa) & \cdots & S_n(1)(\varpi_\kappa) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

e

$$X = \begin{pmatrix} X(\varpi_1) \\ \vdots \\ X(\varpi_\kappa) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

O próximo resultado apresenta uma condição necessária e suficiente para que um “contrato contingenciável” seja realizável.

**Teorema 6.3** *Um “contrato contingenciável”  $X$  é realizável se e somente se*

$$E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right)$$

*possui o mesmo valor para toda medida de probabilidade  $\pi$  neutra ao risco.*

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que para uma estratégia  $H$  tem-se  $V(1) = X$ . Pela Proposição 6.1,

$$V(0) = E_\pi(V^*(1)) = E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right)$$

qualquer que seja a medida de probabilidade  $\pi$  neutra ao risco.

( $\Leftarrow$ ) Será mostrado que se  $X$  não é realizável, então  $E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right)$  não possui o mesmo valor para toda medida de probabilidade neutra ao risco  $\pi$ . Como  $X$

não é realizável, não existe  $H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} \in R^{n+1}$  tal que  $\mathbb{A}H = X$ , ou seja, o

sistema  $\mathbb{A}H = X$  não tem solução em  $H$ . Portanto, o sistema

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{A}' \\ -\mathbb{A}' \end{pmatrix} = X', \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \text{ não tem solução}$$

e, pelo Teorema de Farkas (Teorema 6.1), o sistema

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}' \\ -\mathbb{A}' \end{pmatrix} w \leq 0, X'w > 0$$

tem solução em  $w$ , ou seja, existe  $w$ , tal que

$$\mathbb{A}'w \leq 0, \mathbb{A}'w \geq 0, X'w > 0,$$

que é equivalente a

$$\mathbb{A}'w = 0, X'w > 0. \quad (6.8)$$

Considere uma medida de probabilidade  $\hat{\pi}$  neutra ao risco. Desse modo,

$$\hat{\pi}(\varpi_i) > 0, i = 1, \dots, \kappa, \sum_{i=1}^{\kappa} \hat{\pi}(\varpi_i) = 1, \text{ e } E_{\hat{\pi}}\left(\frac{S_j(1)}{B(1)}\right) = S_j(0), j = 1, \dots, \kappa.$$

Seja  $\lambda > 0$  pequeno suficiente tal que

$$\pi(\varpi_i) = \hat{\pi}(\varpi_i) + \lambda w_i B(1)(\varpi_i) > 0, i = 1, \dots, \kappa.$$

Tem-se a partir de (6.8) que

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) = 1 + \lambda \sum_{i=1}^{\kappa} w_i B(1)(\varpi_i) = 1$$

e

$$\begin{aligned} E_{\pi}(S_j^*(1)) &= \sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) \frac{S_j(1)(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} = \sum_{i=1}^{\kappa} (\hat{\pi}(\varpi_i) + \lambda w_i B(1)(\varpi_i)) \frac{S_j(1)(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} \hat{\pi}(\varpi_i) \frac{S_j(1)(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} + \lambda \sum_{i=1}^{\kappa} w_i B(1)(\varpi_i) \frac{S_j(1)(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \\ &= E_{\hat{\pi}}\left(\frac{S_j(1)}{B(1)}\right) + \lambda \sum_{i=1}^{\kappa} w_i S_j(1)(\varpi_i) = E_{\hat{\pi}}\left(\frac{S_j(1)}{B(1)}\right) = S_j(0), \end{aligned}$$

ou seja,  $\pi$  também é uma medida de probabilidade neutra ao risco. Por último, tem-se novamente a partir de (6.8) que

$$\begin{aligned} E_{\pi}\left(\frac{X}{B(1)}\right) &= \sum_{i=1}^{\kappa} (\pi(\varpi_i)) \frac{X(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} \left( (\hat{\pi}(\varpi_i) + \lambda w_i B(1)(\varpi_i)) \frac{X(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \right) \\ &= E_{\hat{\pi}}\left(\frac{X}{B(1)}\right) + \lambda \sum_{i=1}^{\kappa} w_i X(\varpi_i) \\ &= E_{\hat{\pi}}\left(\frac{X}{B(1)}\right) + \lambda w'X \\ &> E_{\hat{\pi}}\left(\frac{X}{B(1)}\right), \end{aligned}$$

mostrando que  $E_{\pi}\left(\frac{X}{B(1)}\right)$  não possui o mesmo valor para toda medida de probabilidade neutra ao risco  $\pi$ . ■

Segue então o princípio do apreçamento neutro ao risco:

**Teorema 6.4** *Princípio do Apreçamento Neutro ao Risco: Se o modelo com um período não permite arbitragens, então o valor de um “contrato contingenciável” realizável  $X$  no instante  $t = 0$  deve ser*

$$E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right),$$

em que  $\pi$  é qualquer medida de probabilidade neutra ao risco.

**Prova:** Seja  $\pi$  uma medida de probabilidade neutra ao risco (existe pelo menos uma, pois o mercado é livre de arbitragens) e  $H$  tal que gere  $X$ . Segue que

$$\begin{aligned} E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right) &= E_\pi \left( \frac{V(1)}{B(1)} \right) = V(0) + E_\pi \left( \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1) \right) \\ &= V(0) + \sum_{j=1}^n H_j E_\pi (\Delta S_j^*(1)) = V(0), \end{aligned}$$

e esse valor é o mesmo para qualquer medida neutra ao risco  $\pi$  e  $H$  que gere  $X$ . Seja  $X(0)$  valor do “contrato contingenciável”  $X$  no instante  $t = 0$ . Se fosse  $X(0) > V(0)$  poderia-se vender o “contrato contingenciável” por  $X(0)$  no instante 0 e comprar a carteira  $H$ , obtendo um lucro inicial de  $X(0) - V(0)$ . No instante  $t = 1$ , a carteira  $H$  vale  $V(1)(\varpi) = X(\varpi)$  para qualquer  $\varpi \in \Omega$ , honrando assim o contrato. Logo, há uma arbitragem. Da mesma forma, se  $X(0) < V(0)$  poderia-se montar uma operação de arbitragem realizando a operação inversa. Decorre que

$$X(0) = E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right).$$

■

**Exemplo 6.4** [Pliska, 1997] Considere  $r_f = \frac{1}{9}$ ,  $n = 1$ ,  $\kappa = 2$  e

$$\begin{aligned} S_1(0) &= 5, \quad S_1(\varpi_1) = \frac{20}{3}, \quad S_1(\varpi_2) = \frac{40}{9}, \\ X(\varpi_1) &= 7, \quad X(\varpi_2) = 2. \end{aligned}$$

Tem-se que  $\pi(\varpi_1) = \pi(\varpi_2) = \frac{1}{2}$  é a única medida de probabilidade neutra ao risco. Logo, o valor de  $X$  no instante inicial é

$$E_\pi \left( \frac{X}{B(1)} \right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} \left( \frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 2 \right) = 4,05.$$

Para determinar a estratégia replicante, deve-se notar que

$$\frac{X}{B(1)} = V_1^* = H_0 + H_1 S_1^*(1) = H_0 + H_1 \frac{S_1(1)}{B(1)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{7}{\frac{10}{9}} &= H_0 + H_1 \frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{9}} \\ \frac{2}{\frac{10}{9}} &= H_0 + H_1 \frac{\frac{40}{3}}{\frac{10}{9}}, \end{aligned}$$

ou seja,  $H_0 = -7,2$ ,  $H_1 = 2,25$ . Deve-se tomar emprestado 7,2 do ativo livre de risco à taxa  $r_f = \frac{1}{9}$  e comprar 2,25 do ativo 1. Logo, como esperado, o valor da carteira no instante  $t = 0$  é

$$H_0 + H_1 S_1(0) = -7,2 + 2,25 \times 5 = 4,05.$$

O Teorema 6.4 mostra que todo “contrato contingenciável” realizável possui um preço unicamente definido por uma probabilidade neutra ao risco. A próxima definição aplica-se quando todos os “contratos contingenciáveis” são realizáveis.

**Definição 6.3** O mercado é completo se todo “contrato contingenciável”  $X$  é realizável.

A matriz  $\mathbb{A}$  definida em (6.6) fornece um teste para se verificar se o modelo financeiro é ou não completo, conforme mostrado no próximo teorema.

**Teorema 6.5** Suponha que o mercado não permita arbitragens. Então o mercado é completo se e somente se o número de colunas L.I. de  $\mathbb{A}$  for igual a  $\kappa$ .

**Prova:** A partir da definição tem-se que o mercado é completo se e somente se  $\text{Im}\{\mathbb{A}\} = R^\kappa$  e, portanto, o número de colunas linearmente independentes (L.I.) de  $\mathbb{A}$  deve ser igual a  $\kappa$ . ■

Conforme será apresentado a seguir, mercados completos possuem uma única medida de probabilidade neutra ao risco.

**Teorema 6.6** O mercado é completo se e somente se existe uma única medida de probabilidade  $\pi$  neutra ao risco.

**Prova:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha que há duas medidas de probabilidade neutras ao risco  $\pi$  e  $\hat{\pi}$ , tais que para algum  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$ ,  $\pi(\varpi_i) \neq \hat{\pi}(\varpi_i)$ . Considere o seguinte “contrato contingenciável”  $X$ :

$$X(\varpi) = \begin{cases} B(1)(\varpi_i) & \varpi = \varpi_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Portanto,

$$E_{\pi} \left( \frac{X}{B(1)} \right) = \pi(\varpi_i) \neq \hat{\pi}(\varpi_i) = E_{\hat{\pi}} \left( \frac{X}{B(1)} \right)$$

e do Teorema 6.3  $X$  não é realizável.

( $\Leftarrow$ ) Se existe apenas uma medida de probabilidade neutra ao risco, segue que claramente o Teorema 6.3 é satisfeito para todo “contrato contingenciável”  $X$  e, logo, o mercado é completo. ■

## 6.3 Otimização de Carteiras

Nas próximas subseções será analisado como o problema de otimização de carteiras está relacionado com medidas de probabilidade neutra ao risco e como a solução pode ser obtida a partir dessas probabilidades.

### 6.3.1 Otimização de Carteiras e Factibilidade

Seja  $u(.,.) : R \times \Omega \rightarrow R$  uma função utilidade, isto é,  $u(.,\varpi)$  é uma função côncava, diferenciável, e estritamente crescente para cada  $\varpi \in \Omega$ . Tem-se que

$$E(u(V(1))) = \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) u(V(1)(\varpi_i), \varpi_i).$$

Considere novamente o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max_{H \in R^{n+1}} E(u(V(1))) \\ \text{sujeito a } V(0) = v_0. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Relembrando que

$$V^*(1) = V(0) + G^*(1), \quad V(1) = B(1)V(0), \quad G^*(1) = \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1),$$

segue que

$$E(V(1)) = E \left( u \left( B(1)(v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1)) \right) \right).$$

Há os seguintes resultados relacionados à existência de uma solução para o problema apresentado e de uma medida de probabilidade neutra ao risco para o mercado, complementando a Proposição 5.3. Note na proposição seguinte que como  $u(.,\varpi)$  é estritamente crescente,  $u'(.,\varpi) > 0$ .



**Proposição 6.2** *Se  $H$  é uma solução para o Problema (6.9), então*

$$\pi(\varpi) = \frac{p(\varpi)B(1)(\varpi)u'(V(1)(\varpi), \varpi)}{E(B(1)u'(V(1)))} > 0 \quad (6.10)$$

*é uma probabilidade neutra ao risco.*

**Prova:** Se  $H$  é uma solução ótima para o problema, então das condições necessárias de otimalidade de 1ª ordem,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E(u(V(1)))}{\partial H_k} = \frac{\partial E\left(u\left(B(1)(v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1))\right)\right)}{\partial H_k} \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) \frac{\partial\left(u\left(B(1)(\varpi_i)(v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1)(\varpi_i))\right)\right)}{\partial H_k} \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) B(1)(\varpi_i) u'(V(1)(\varpi_i), \varpi_i) \Delta S_k^*(1)(\varpi_i) \end{aligned}$$

e, portanto, com  $\pi$  dado como em (6.10),

$$E_{\pi}(\Delta S_k^*(1)) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

provando o resultado desejado. ■

É possível relacionar a existência de soluções para o problema de otimização de carteiras dado por (6.10) e a existência de probabilidades neutra ao risco, conforme descrito a seguir.

**Definição 6.4** *Um modelo de mercado é factível se existe uma função  $u(., .) : R \times \Omega \rightarrow R$  côncava e estritamente crescente para cada  $\varpi \in \Omega$ , e uma riqueza inicial  $v_0$ , tal que o problema de otimização de carteira apresentado tenha uma solução.*

**Teorema 6.7** *Um modelo de mercado é factível se e somente se existe uma medida de probabilidade neutra ao risco.*

**Prova:**

( $\Rightarrow$ ) Segue a partir da Proposição 6.2.

( $\Leftarrow$ ) Considere  $v_0$  arbitrário, e

$$u(v, \varpi) = v_0 \frac{\pi(\varpi)}{p(\varpi)B(1)(\varpi)}.$$

Para qualquer  $H \in R^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} E(u(V(1))) &= \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)B(1)(\varpi_i)} \left( B(1)(\varpi_i)(v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1)(\varpi_i)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) \left( v_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta S_j^*(1)(\varpi_i) \right) \\ &= v_0 + \sum_{j=1}^n H_j E_{\pi}(\Delta S_j^*(1)) = v_0, \end{aligned}$$

portanto, todo  $H \in R^{n+1}$  terá como solução o valor de  $v_0$ . ■

### 6.3.2 A Formulação por Martingale

Nesta subsecção, será apresentado como a probabilidade neutra ao risco  $\pi$  pode ser usada para a resolução de problemas de otimização de carteiras. Suponha que o mercado seja completo, com a única medida de probabilidade neutra ao risco  $\pi$ , e seja

$$\mathbb{W}_{v_0} = \left\{ w \in R^{\kappa+1}; E_{\pi} \left( \frac{W}{B(1)} \right) = v_0, W(\varpi_i) = w_i \right\}.$$

Portanto, pode-se escrever o problema de otimização como:

$$\begin{aligned} \max E(u(W)) \\ \text{sujeito a } W \in \mathbb{W}_{v_0}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Conforme será apresentado mais adiante, a solução do Problema (6.11) será obtida em função do preço de estado, definido a seguir.

**Definição 6.5** Para uma medida de probabilidade neutra ao risco  $\pi$ , define-se o preço de estado  $\phi(\varpi_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, \kappa\}$  como

$$\phi(\varpi_i) = \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)}.$$

Resolvendo (6.11) pelos multiplicadores de Lagrange, tem-se que o lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L}(W, \lambda) = E(u(W)) + \lambda \left( v_0 - E_{\pi} \left( \frac{W}{B(1)} \right) \right)$$

e, lembrando que  $\phi(\varpi) = \frac{\pi(\varpi)}{p(\varpi)}$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(W, \lambda) &= E(u(W)) - \lambda E\left(\frac{W}{B(1)}\phi\right) + \lambda v_0 \\ &= E\left(u(W) - \lambda \frac{W}{B(1)}\phi\right) + \lambda v_0 \\ &= \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) \left(u(w_i, \varpi_i) - \lambda \frac{w_i}{B(1)(\varpi_i)}\phi(\varpi_i)\right) + \lambda v_0.\end{aligned}$$

Pelas condições necessárias de 1ª ordem,

$$u'(w_i, \varpi_i) = \lambda \frac{\phi(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)}, \quad i = 1, \dots, \kappa,$$

portanto,

$$w_i = (u')^{-1} \left( \lambda \frac{\phi(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \right).$$

Com a equação

$$E_{\pi}((u')^{-1} \left( \lambda \frac{\phi(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \right) / B(1)) = v_0$$

obtém-se  $\lambda$ , a partir do qual tira-se  $w_i$ . Por fim, obtém-se uma estratégia  $H$  que gere  $W$  e que possui valor  $v_0$  no instante inicial.

Essa análise é exemplificada por meio da função utilidade  $u(v) = -e^{-v}$ . Tem-se nesse caso que  $u'(v) = e^{-v}$ , portanto,

$$(u')^{-1}(z) = -\ln(z).$$

Logo,

$$(u')^{-1} \left( \lambda \frac{\phi}{B(1)} \right) = -\ln \left( \lambda \frac{\phi}{B(1)} \right) = - \left( \ln(\lambda) + \ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right) \right)$$

e

$$\begin{aligned}E_{\pi} \left( \frac{- \left( \ln(\lambda) + \ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right) \right)}{B(1)} \right) &= -\ln(\lambda) E_{\pi} \left( \frac{1}{B(1)} \right) - E_{\pi} \left( \frac{\ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)}{B(1)} \right) \\ &= v_0,\end{aligned}$$

a partir do qual conclui-se que

$$\ln(\lambda) = \frac{- \left( v_0 + E_{\pi} \left( \frac{\ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)}{B(1)} \right) \right)}{E_{\pi} \left( \frac{1}{B(1)} \right)},$$

ou seja,

$$\lambda = \exp \left( \frac{- \left( v_0 + E_\pi \left( \frac{\ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)}{B(1)} \right) \right)}{E_\pi \left( \frac{1}{B(1)} \right)} \right)$$

e para  $i = 1, \dots, \kappa$ ,

$$W(\varpi_i) = w_i = \frac{v_0 + E_\pi \left( \frac{\ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)}{B(1)} \right)}{E_\pi \left( \frac{1}{B(1)} \right)} - \ln \left( \frac{\phi(\varpi_i)}{B(1)(\varpi_i)} \right).$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} u(W) &= -e^{-W} = -e^{- \left( v_0 + E_\pi \left( \frac{\ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)}{B(1)} \right) / E_\pi \left( \frac{1}{B(1)} \right) - \ln \left( \frac{\phi}{B(1)} \right) } \right)} \\ &= - \frac{\phi}{B(1)} e^{-\ln(\lambda)} = -\lambda \frac{\phi}{B(1)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$E(u(W)) = -\lambda E \left( \frac{\phi}{B(1)} \right) = -\lambda E_\pi \left( \frac{1}{B(1)} \right). \quad (6.12)$$

Para o caso em que  $B(1) = (1 + r_f)$ , a Fórmula (6.12) reduz-se a

$$W(\varpi_i) = w_i = v_0(1 + r_f) + E_\pi \left( \ln \left( \frac{\phi}{1 + r_f} \right) \right) - \ln \left( \frac{\phi(\varpi_i)}{1 + r_f} \right).$$

**Exemplo 6.5** Considere  $n = 2, \kappa = 3, r_f = \frac{1}{9}, e$

	$t = 0$		$t = 1$		$p(\varpi)$
$\varpi$	$S_1^*(0)$	$S_2^*(0)$	$S_1^*(1)$	$S_2^*(1)$	
$\varpi_1$	6	10	6	13	1/2
$\varpi_2$	6	10	8	9	1/4
$\varpi_3$	6	10	4	8	1/4

O mercado é completo, pois a matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & 6 & 13 \\ \frac{10}{9} & 8 & 9 \\ \frac{10}{9} & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

possui posto completo. Inicialmente, determina-se a probabilidade neutra ao risco  $\pi$ . Deve-se ter

$$E_\pi(\Delta S_n^*(1)) = 0, n = 1, 2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 \times \pi(\varpi_1) + 2 \times \pi(\varpi_2) - 2 \times \pi(\varpi_3) &= 0 \\ 3 \times \pi(\varpi_1) - 1 \times \pi(\varpi_2) - 2 \times \pi(\varpi_3) &= 0 \\ \pi(\varpi_1) + \pi(\varpi_2) + \pi(\varpi_3) &= 1, \end{aligned}$$

o que leva a

$$\pi(\varpi_1) = \pi(\varpi_2) = \pi(\varpi_3) = \frac{1}{3}.$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \phi(\varpi_1) &= \frac{\pi(\varpi_1)}{p(\varpi_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \\ \phi(\varpi_2) &= \frac{\pi(\varpi_2)}{p(\varpi_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}, \\ \phi(\varpi_3) &= \frac{\pi(\varpi_3)}{p(\varpi_3)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Obtém-se então que

$$\begin{aligned} E_\pi \left( \ln \left( \frac{\phi}{1 + \frac{1}{9}} \right) \right) &= \frac{1}{3} \left( \ln \left( \frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{9}} \right) + 2 \ln \left( \frac{\frac{4}{3}}{\frac{10}{9}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \ln \left( \frac{3}{5} \right) + 2 \ln \left( \frac{6}{5} \right) \right) = -0,04873. \end{aligned}$$

e

$$W(\varpi_i) = \begin{cases} v_0 \frac{10}{9} - 0,04873 - \ln \left( \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} \right) = v_0 \frac{10}{9} + 0,4621, & i = 1 \\ v_0 \frac{10}{9} - 0,04873 - \ln \left( \frac{4}{3} \times \frac{9}{10} \right) = v_0 \frac{10}{9} - 0,23105, & i = 2, 3 \end{cases}.$$

Como esperado, tem-se que

$$E_\pi \left( \frac{W}{1 + r_f} \right) = v_0 + \frac{1}{3} \left( \frac{0,4621}{\frac{10}{9}} - 2 \times \frac{0,23105}{\frac{10}{9}} \right) = v_0.$$

Segue também que

$$\lambda = e^{(-v_0 \frac{10}{9} + 0,04873)}$$

e

$$E(u(W)) = -\frac{\lambda}{1 + r_f} = -\frac{9}{10} e^{(-v_0 \frac{10}{9} + 0,04873)}.$$

Determina-se a seguir a estratégia ótima. Sabendo que

$$V^*(1) = V^*(0) + H_1 \Delta S_1^*(1) + H_2 \Delta S_2^*(1)$$

e que  $V(1) = W$ , segue que

$$\begin{aligned} v_0 - \frac{9}{10} \times 0,4621 &= v_0 + H_1 \times 0 + H_2 \times 3 \\ v_0 - \frac{9}{10} \times 0,23105 &= v_0 + H_1 \times 2 + H_2 \times (-1) \\ v_0 - \frac{9}{10} \times 0,23105 &= v_0 + H_1 \times (-2) + H_2 \times (-2), \end{aligned}$$

o que leva à seguinte solução:

$$H_1 = -0,03465, H_2 = 0,13863.$$

Como

$$v_0 = H_0 + H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0),$$

segue que

$$\begin{aligned} H_0 &= v_0 - H_1 S_1(0) - H_2 S_2(0) \\ &= v_0 + 0,03465 \times 6 - 0,13863 \times 10 \\ &= v_0 - 1,1784. \end{aligned}$$

Por exemplo, se  $v_0 = 10$ , deve-se aplicar

$$\frac{10 - 1,1784}{10} \times 100\% = 88,22\%$$

no ativo livre de risco,

$$\frac{-0,03465 \times 6}{10} \times 100\% = -2,08\%$$

no ativo de risco 1, e

$$\frac{0,13863 \times 10}{10} \times 100\% = 13,86\%$$

no ativo de risco 2. Por outro lado, se  $v_0 = 5$ , o percentual de investimento seria

$$\frac{5 - 1,1784}{5} \times 100\% = 76,43\%$$

no ativo livre de risco,

$$\frac{-0,03465 \times 6}{5} \times 100\% = -4,16\%$$

no ativo de risco 1, e

$$\frac{0,13863 \times 10}{5} \times 100\% = 27,73\%$$

no ativo de risco 2.

## 6.4 Análise de Carteira por Média-Variância

Nesta seção, apresenta-se como a análise de carteira por média-variância e a fórmula do modelo CAPM, assuntos estudados nos Capítulos 2 e 3, relacionam-se com a probabilidade neutra ao risco. Inicialmente, verifica-se na Subseção 6.4.1 como o problema de otimização por média-variância pode ser analisado por meio da formulação por Martingale, apresentada na Subseção 6.3.2. Na Subseção 6.4.2, será deduzida uma relação entre a fórmula do CAPM, apresentada no Capítulo 3 e a probabilidade neutra ao risco  $\pi$ . Por fim, verifica-se na Subseção 6.4.3 que a fórmula de apreçamento obtida pelo CAPM coincide com a fórmula de apreçamento fornecida pela probabilidade neutra ao risco.

### 6.4.1 O Problema de Otimização por Média-Variância Revisto

Nesta subseção, será obtida a solução do problema de média-variância utilizando a probabilidade neutra ao risco  $\pi$  e a formulação por Martingale apresentada na Subseção 6.3.2. Conforme visto no Capítulo 2, o problema de mínima variância é

$$\begin{aligned} \min Var(P) \\ \text{sujeito a } E(P) = \mu. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Var(V(1)) &= E\left((V(1) - E(V(1)))^2\right) \\ &= E\left(((1+P)v_0 - (1+\mu)v_0)^2\right) \\ &= E\left((P - \mu)^2\right) v_0^2 \\ &= Var(P)^2 v_0^2, \end{aligned}$$

tem-se que o problema é equivalente a

$$\begin{aligned} \min Var(V(1)) \\ \text{sujeito a} \\ E(V(1)) = (1+\mu)v_0 \\ V(1) = H_0(1+r_f) + \sum_{i=1}^n H_i S_i(1), \end{aligned}$$

que, por sua vez, segundo a formulação apresentada na Subseção 6.3.2, é equivalente (para mercados completos) a

$$\begin{aligned} & \min \text{Var}(X) \\ & \text{sujeito a} \\ & E_{\pi} \left( \frac{X}{1+r_f} \right) = v_0 \\ & E(X) = (1+\mu)v_0, \end{aligned}$$

em que  $\pi$  corresponde à probabilidade neutra ao risco. Denotando  $X(\varpi_i) = x_i$ , segue que o problema pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 p(\varpi_i) \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \pi(\varpi_i) = v_0(1+r_f) \\ & \sum_{i=1}^{\kappa} x_i p(\varpi_i) = v_0(1+\mu). \end{aligned}$$

Escrevendo o lagrangiano do problema apresentado, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 p(\varpi_i) + \lambda_1 \left( v_0(1+r_f) - \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \pi(\varpi_i) \right) \\ & + \lambda_2 \left( v_0(1+\mu) - \sum_{i=1}^{\kappa} x_i p(\varpi_i) \right) \end{aligned}$$

e pelas condições de otimalidade tem-se que

$$\begin{aligned} x_i p(\varpi_i) - \lambda_1 \pi(\varpi_i) - \lambda_2 p(\varpi_i) &= 0 \Rightarrow \\ x_i &= \lambda_1 \phi(\varpi_i) + \lambda_2 \Rightarrow \\ X &= \lambda_1 \phi + \lambda_2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Substituindo (6.13) nas restrições do problema e lembrando que  $E(\phi) = 1$ , segue que

$$E_{\pi}(X) = \lambda_1 E_{\pi}(\phi) + \lambda_2 = (1+r_f)v_0 \tag{6.14}$$

e

$$E(X) = \lambda_1 E(\phi) + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = (1+\mu)v_0. \tag{6.15}$$



Tem-se a seguinte proposição:

**Proposição 6.3** *Se a hipótese H2 do Capítulo 2 é satisfeita, então  $E_\pi(\phi) \neq 1$ .*

**Prova:** Tem-se que

$$\begin{aligned} (\pi(\varpi_i) - p(\varpi_i))^2 &= \pi(\varpi_i)^2 - 2\pi(\varpi_i)p(\varpi_i) + p(\varpi_i)^2 \\ &= (\pi(\varpi_i)^2 - \pi(\varpi_i)p(\varpi_i)) + (p(\varpi_i)^2 - \pi(\varpi_i)p(\varpi_i)) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{(\pi(\varpi_i) - p(\varpi_i))^2}{p(\varpi_i)} = \frac{\pi(\varpi_i)^2 - \pi(\varpi_i)p(\varpi_i)}{p(\varpi_i)} + p(\varpi_i) - \pi(\varpi_i). \quad (6.16)$$

Fazendo o somatório de (6.16), segue que

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{(\pi(\varpi_i) - p(\varpi_i))^2}{p(\varpi_i)} = \sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) \left( \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)} - 1 \right) = E_\pi(\phi) - 1, \quad (6.17)$$

já que  $\sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} p(\varpi_i) = 1$ . Se, por contradição,  $E_\pi(\phi) = 1$ , então a partir de (6.17),  $\pi(\varpi_i) = p(\varpi_i)$  para todo  $i = 1, \dots, \kappa$ , o que levaria a  $E_\pi(R) = r_f e = E(R) = r$ , contrariando a hipótese H2 do Capítulo 2. ■

A partir de (6.13), (6.14) e (6.15) tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 6.8** *A solução ótima do problema de média-variância é dada por*

$$P = \frac{\mu E_\pi(\phi) - r_f}{E_\pi(\phi) - 1} - \frac{\mu - r_f}{E_\pi(\phi) - 1} \phi. \quad (6.18)$$

**Prova:** A partir de (6.14) e (6.15) e lembrando que da Proposição 6.3  $E_\pi(\phi) \neq 1$ , obtêm-se os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , dados por

$$\lambda_1 = \frac{r_f - \mu}{E_\pi(\phi) - 1} v_0, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= (1 + \mu)v_0 - \lambda_1 = \left[ (1 + \mu) + \frac{\mu - r_f}{E_\pi(\phi) - 1} \right] v_0 \\ &= \left[ 1 + \frac{E_\pi(\phi)\mu - r_f}{E_\pi(\phi) - 1} \right] v_0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Substituindo em (6.13), segue que

$$X = (1 + P)v_0 = \left[ \left[ \frac{r_f - \mu}{E_\pi(\phi) - 1} \right] \phi + \left[ 1 + \frac{E_\pi(\phi)\mu - r_f}{E_\pi(\phi) - 1} \right] \right] v_0 \quad (6.21)$$

e, a partir de (6.21), obtêm-se (6.18). ■

### 6.4.2 A Fórmula do CAPM Revista

Na Subseção 6.4.1, verifica-se por meio da Equação (6.18) que a solução ótima do problema de média-variância pode ser escrita na forma  $a + b\phi$ . Nesta subseção, será apresentado que carteiras que podem ser escritas nesta forma levam à fórmula do CAPM, conforme descritas pelas Equações (3.3) e (3.4).

De fato, tem-se que

$$\text{cov}\{R_j, \phi\} = E(R_j\phi) - r_j E(\phi)$$

e

$$\begin{aligned} E(R_j\phi) &= \sum_{i=1}^{\kappa} R_j(\varpi_i) \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)} p(\varpi_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} R_j(\varpi_i) \pi(\varpi_i) = E_{\pi}(R_j) \\ E(\phi) &= \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)} p(\varpi_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} \pi(\varpi_i) = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{cov}\{R_j, \phi\} = E_{\pi}(R_j) - r_j = r_f - r_j.$$

Desse modo, o prêmio pelo risco  $r_j - r_f$  é:

$$r_j - r_f = -\text{cov}\{R_j, \phi\}.$$

Para uma estratégia arbitrária  $H$  com retorno  $P$ , tem-se que

$$\text{cov}\{P, \phi\} = E(P\phi) - E(P)E(\phi)$$

e

$$\begin{aligned} E(P\phi) &= \sum_{i=1}^{\kappa} P(\varpi_i) \frac{\pi(\varpi_i)}{p(\varpi_i)} p(\varpi_i) = \sum_{i=1}^{\kappa} P(\varpi_i) \pi(\varpi_i) = E_{\pi}(P) \\ &= r_f(1 - \omega'e) + \sum_{j=1}^n \varpi_j E_{\pi}(R_j) = r_f(1 - \omega'e) + \sum_{j=1}^n \omega_j r_f \\ &= r_f(1 - \omega'e) + r_f \omega'e = r_f, \end{aligned}$$

de modo que

$$\text{cov}\{P, \phi\} = r_f - \mu,$$

ou seja,

$$\mu - r_f = -\text{cov}\{P, \phi\}. \quad (6.22)$$

Tem-se o seguinte resultado, análogo à fórmula do CAPM (3.3), (3.4):

**Teorema 6.9** *Suponha que para escalares  $a$  e  $b \neq 0$  o “contrato contingenciável”  $a + b\phi$  seja realizável e gerado por uma estratégia replicante  $\hat{H}$  com*

retorno  $\hat{P}$ , retorno esperado  $\hat{\mu}$  e variância  $\hat{\sigma}^2$ . Seja  $P$  o retorno de qualquer outra carteira com retorno esperado  $\mu$ . Então

$$\mu - r_f = \frac{\text{cov}\{P, \hat{P}\}}{\hat{\sigma}^2} (\hat{\mu} - r_f).$$

**Prova:** Tem-se que

$$\text{cov}\{P, \hat{P}\} = E(P\hat{P}) - E(P)E(\hat{P})$$

e

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= E\left(\frac{a+b\phi}{\hat{V}(0)} - 1\right) = \frac{a+bE(\phi)}{\hat{V}(0)} - 1 = \frac{a+b}{\hat{V}(0)} - 1, \\ E(P\hat{P}) &= E\left(\left(\frac{a+b\phi}{\hat{V}(0)} - 1\right)P\right) = E\left(\left(\frac{a+b\phi}{\hat{V}(0)}\right)P - P\right) \\ &= \frac{a}{\hat{V}(0)}E(P) + \frac{b}{\hat{V}(0)}E(P\phi) - E(P) \\ &= \frac{a}{\hat{V}(0)}\mu + \frac{b}{\hat{V}(0)}E(\hat{P}\phi) - \mu, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \text{cov}\{P, \hat{P}\} &= \frac{a}{\hat{V}(0)}\mu + \frac{b}{\hat{V}(0)}E(P\phi) - \mu - \mu\left(\frac{a+b}{\hat{V}(0)} - 1\right) \\ &= \frac{b}{\hat{V}(0)}(E(P\phi) - \mu E(\phi)) \\ &= \frac{b}{\hat{V}(0)}\text{cov}\{\hat{P}, \phi\} \end{aligned}$$

e, a partir de (6.22),

$$\mu - r_f = -\text{cov}\{\phi, P\} = -\frac{\hat{V}(0)}{b} \text{cov}\{\hat{P}, P\}. \quad (6.23)$$

Quando  $P = \hat{P}$ , segue com base em (6.23) que

$$-\frac{\hat{V}(0)}{b} = \frac{\hat{\mu} - r_f}{\hat{\sigma}^2}. \quad (6.24)$$

Portanto, a partir de (6.23) e (6.24),

$$\mu - r_f = \frac{\text{cov}\{P, \hat{P}\}}{\hat{\sigma}^2} (\hat{\mu} - r_f),$$

mostrando o resultado desejado. ■

### 6.4.3 Apreçamento Neutro ao Risco e por CAPM

A partir do Teorema 6.9 tem-se a fórmula do CAPM,

$$\mu - r_f = \frac{\text{cov}\{P, \hat{P}\}}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\mu} - r_f),$$

em que  $\hat{P}$  representa o retorno de uma carteira da forma  $a + b\phi$  (em particular, a carteira de mínima variância (6.18)),  $\hat{\mu} = E(\hat{P})$ ,  $P$  é o retorno de qualquer outra carteira com retorno esperado  $\mu = E(P)$ . Conforme visto no Capítulo 3, a Fórmula (3.23) de apreçamento do CAPM é

$$V(0) = \frac{1}{1 + r_f} \left( E(V(1)) - \frac{\text{cov}\{\hat{P}, V(1)\}}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\mu} - r_f) \right) \quad (6.25)$$

e, com base em (6.18), a solução do problema de média-variância satisfaz

$$\hat{P} - \hat{\mu} = \frac{(\hat{\mu} - r_f)(1 - \phi)}{E_\pi(\phi) - 1}. \quad (6.26)$$

Segue a partir de (6.26) que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= E\left(\left(\hat{P} - \hat{\mu}\right)^2\right) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)^2 E\left((1 - \phi)^2\right)}{(E_\pi(\phi) - 1)^2} \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)^2}{(E_\pi(\phi) - 1)^2} (1 - 2E(\phi) + E((\phi)^2)) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)^2}{(E_\pi(\phi) - 1)^2} (1 - 2 + E_\pi(\phi)) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)^2}{(E_\pi(\phi) - 1)^2} (E_\pi(\phi) - 1) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)^2}{E_\pi(\phi) - 1}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Além disso, a partir de (6.26), novamente,

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\hat{P}, V(1)\} &= E\left(\left(\hat{P} - \hat{\mu}\right)(V(1) - E(V(1)))\right) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)}{E_\pi(\phi) - 1} E((1 - \phi)(V(1) - E(V(1)))) \\ &= \frac{(\hat{\mu} - r_f)}{E_\pi(\phi) - 1} (E(V(1)) - E_\pi(V(1))), \end{aligned} \quad (6.28)$$

de modo que, com base em (6.27) e (6.28),

$$\frac{\text{cov}\{\hat{P}, V(1)\}}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\mu} - r_f) = E(V(1)) - E_{\pi}(V(1)) \quad (6.29)$$

e, portanto, substituindo (6.29) em (6.25), segue que

$$V(0) = \frac{1}{1 + r_f} \left( E(V(1)) - \frac{\text{cov}\{\hat{P}, V(1)\}}{\hat{\sigma}^2}(\hat{\mu} - r_f) \right) = \frac{E_{\pi}(V(1))}{1 + r_f}.$$

Ou seja, a fórmula de apreçamento utilizando o CAPM coincide com o apreçamento neutro ao risco utilizando  $\pi$ .

## 6.5 Exercícios

1) Considere um modelo financeiro discreto com  $n = 2$ ,  $\kappa = 3$  e taxa de juros constante  $r_f$ , conforme esta tabela:

	$t = 0$		$t = 1$		$p(\varpi)$
$\varpi$	$S_1(0)$	$S_2(0)$	$S_1(1)$	$S_2(1)$	
$\varpi_1$	6	10	20/3	130/9	1/2
$\varpi_2$	6	10	80/9	10	1/4
$\varpi_3$	6	10	40/9	80/9	1/4

- Para que condições em  $r_f$  tem-se o mercado completo? Determine a medida de probabilidade neutra ao risco  $\pi$  em função de  $r_f$  nessas condições.
- Determine uma operação de arbitragem para o caso em que  $r_f = 0,28$ .
- Considere a função utilidade  $u(v) = \ln(v)$  e as condições do item a). Por meio das condições necessárias de 1ª ordem, obtenha a solução do problema de otimização de carteira para esse modelo, com  $r_f = \frac{1}{9}$ .
- Considere uma opção de venda no ativo 1 da seguinte forma:

$$O(1) = (7 - S_1(1))^+.$$

Determine o valor atual dessa opção utilizando a fórmula de apreçamento obtida por meio da carteira ótima  $\hat{V}(1)$ . Compare o resultado utilizando a fórmula de apreçamento dada pela probabilidade neutra ao risco  $\pi$ .

- Repita o caso c) empregando a abordagem por Martingale.

2) Um jogador entra em um jogo em que pode, a cada instante  $k$ , jogar uma quantia  $U(k) \geq 0$  que não exceda sua fortuna atual  $X(k)$  (capital inicial mais os ganhos ou menos as perdas até o instante  $k$ ). Ele ganha o que apostou com

probabilidade  $p$ , em que  $\frac{1}{2} < p < 1$ , e perde o que apostou com probabilidade  $1 - p$ . Determine a estratégia de jogo que maximize  $E(\ln(X(T)))$ , na qual  $X(T)$  representa a fortuna no instante  $T$ .

3) Considere o Exemplo 5.7 do Capítulo 5.

- a) Obtenha a probabilidade neutra ao risco para esse mercado.
- b) Resolva o problema de maximizar  $\ln(V(1))$  utilizando a abordagem por Martingale. Compare o resultado obtido com a solução encontrada no Exemplo 5.7.
- c) Considere o problema de apreamento da opção  $V(1) = (1,2 - S_1(1))^+$ . Determine o valor de  $V(0)$  utilizando a probabilidade neutra ao risco obtida no item a). Compare com o resultado obtido no Exemplo 5.9.
- d) Determine a faixa de valores de  $r_f$ , de modo que o mercado seja neutro ao risco.
- e) Determine um valor de  $r_f$  que permita operações de arbitragem. Com esse valor, determine uma operação de arbitragem.

4) Considere o mercado descrito no Exemplo 6.5.

- a) Obtenha a solução do problema de maximizar  $\ln(V(1))$  utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.
- b) Repita esse problema agora utilizando a abordagem por Martingale.
- c) Compare a solução obtida com a do Exemplo 6.5, em que a função utilidade era  $u(v) = -e^{-v}$ .

5) Considere novamente o Exemplo 5.7 do Capítulo 5.

- a) Resolva o problema de média-variância utilizando a teoria vista no Capítulo 2.
- b) Repita o problema, agora, utilizando a abordagem do Teorema 6.8. Compare os resultados obtidos.
- c) Considere o problema de apreamento da opção  $V(1) = (1,2 - S_1(1))^+$ . Determine o valor de  $V(0)$  utilizando a fórmula de apreamento do CAPM e compare com o resultado obtido no Exemplo 5.9.

6) Considere a função utilidade

$$u(v) = \frac{1}{\gamma} v^\gamma, \quad -\infty < \gamma < 1, \quad \gamma \neq 0.$$

- a) Mostre que a função inversa da derivada é dada por

$$(u')^{-1}(v) = v^{-\frac{1}{1-\gamma}}.$$

- b) Mostre que o multiplicador de Lagrange é dado por

$$\lambda = v_0^{-(1-\gamma)} \left( E \left[ \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} \right] \right)^{1-\gamma}.$$

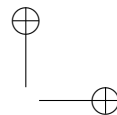
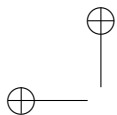
- c) Mostre que a riqueza ótima é dada por

$$W = v_0 \frac{\left( \frac{\phi}{B(1)} \right)^{\frac{-1}{1-\gamma}}}{E \left[ \left( \frac{\phi}{B(1)} \right)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} \right]}.$$

- d) Mostre que o valor ótimo da função objetivo é dado por

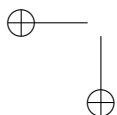
$$E(u(W)) = \lambda \frac{v_0}{\gamma}.$$

- e) Obtenha para essa função utilidade a estratégia ótima de investimento para o mercado do Exemplo 6.5.

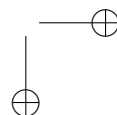


—

—



|





## Capítulo 7

# Um Modelo de Markowitz Intertemporal

Neste capítulo, será analisado o caso em que se deseja maximizar a taxa de retorno de uma carteira a longo prazo. Conforme visto no Capítulo 5, o valor esperado da função utilidade  $\ln$  aplicada ao retorno de um investimento fornece esse valor, ou seja, a taxa de crescimento desse investimento a longo prazo. Considerando um modelo a tempo contínuo, serão estudados neste capítulo estratégias de investimento que maximizam essa taxa de retorno. Modelos deste tipo foram analisados em [Luenberger, 1998]. Inicialmente, será apresentado na Seção 7.1 o modelo a tempo contínuo tratado neste capítulo. Por envolver conceitos de cálculo estocástico não abordados neste livro, destacam-se apenas os resultados importantes para dar seqüência ao capítulo. Uma dedução mais formal do modelo pode ser encontrada, por exemplo, em [Oksendal, 1998]. Traçando um paralelo com o modelo de Markowitz, analisado no Capítulo 2, serão estudados inicialmente na Seção 7.2 modelos em que todos os ativos são de risco, e será obtida para esses casos uma fronteira eficiente para o problema de otimização em consideração. Em seguida, na Seção 7.3, tratar-se-á da inclusão de um ativo livre de risco, e da respectiva fronteira eficiente. A Seção 7.4 caracteriza a carteira tangente para esse último caso. O capítulo será concluído na Seção 7.5, na qual são apresentadas algumas equações de equilíbrio, semelhantes à equação do CAPM vista no Capítulo 3.

### 7.1 Carteiras a Tempo Contínuo

Conforme mencionado anteriormente, serão considerados neste capítulo modelos financeiros a tempo contínuo, representados matematicamente por um conjunto de equações diferenciais estocásticas. Como não se tem por objetivo analisar essas equações em detalhes, será apresentado apenas o que for necessário

para a exposição dos resultados que se seguem. O leitor interessado poderá complementar a leitura desses modelos em, por exemplo, [Oksendal, 1998].

Considere um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, P)$ . De maneira informal, pode-se encarar  $\mathcal{F}_t$  como as informações disponíveis até o instante  $t$  a todos os investidores. As incertezas aleatórias do modelo financeiro serão caracterizadas por meio de um movimento Browniano  $n$ -dimensional, representado por:

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Apresenta-se a seguir a definição adotada de mercado e carteira:

**Definição 7.1** *Um mercado é um processo estocástico  $\mathcal{F}_t$ -adaptado de dimensão  $(n+1)$  representado por  $\{B_0(t), S(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  em que*

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

que é dado pela solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1 \quad (7.1)$$

$$dS_i(t) = S_i(t) \left( r_i dt + dW_i(t) \right), \quad S_i(0) = s_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.2)$$

e será escrito

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \frac{1}{t} \text{cov}(W(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Nessa expressão, tem-se que:

1.  $\{r(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  representa a taxa de retorno do investimento sem risco; realmente, considerando uma discretização da Equação (7.1), obtém-se

$$\frac{B(t_{k+1}) - B(t_k)}{B(t_k)} = r(t_k) \Delta(t_{k+1}), \quad (7.3)$$

portanto  $r(t_k) \Delta(t_{k+1})$  pode ser visto como o retorno do ativo livre de risco em um intervalo  $\Delta(t_{k+1})$  de tempo.

2.  $r$  representa as taxas de retorno dos investimentos com risco; da mesma forma que em (7.3), considerando uma discretização da Equação (7.2), obtém-se

$$\frac{S_i(t_{k+1}) - S_i(t_k)}{S_i(t_k)} = r_i \Delta(t_{k+1}) + \Delta W(t_{k+1}), \quad (7.4)$$

portanto  $r_i \Delta(t_k)$  pode ser visto como o retorno esperado do  $i^{\text{ésimo}}$  ativo de risco em um intervalo  $\Delta(t_{k+1})$  de tempo.

3.  $\Sigma$  é a matriz de volatilidade de dimensão  $n$  por  $n$ ; conforme a discretização (7.4), essa matriz fornece a volatilidade  $\sigma_i^2$  dos ativos de risco, bem como as correlações  $\sigma_{ij}$  entre os ativos  $i$  e  $j$ .

Pelo cálculo de Ito, a solução das Equações (7.1), (7.2) é dada respectivamente por [Oksendal, 1998]:

$$\begin{aligned} B(t) &= \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}, \quad 0 \leq t \leq T \\ S_i(t) &= S_i(0)\exp\left\{W_i(t) + \left\{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right\}t\right\}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

**Observação 7.1** No modelo apresentado,  $B(t)$  representaria o valor no instante  $t$  de um ativo financeiro sem risco, enquanto  $S_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  representaria o valor no instante  $t$  do  $i^{\text{ésimo}}$  ativo financeiro com risco.

Tem-se a partir de (7.5) que

$$\begin{aligned} E\left(\ln\left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)}\right)\right) &= E\left(W_i(t) + \left\{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right\}t\right) \\ &= E(W_i(t)) + \left\{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right\}t \\ &= \left\{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right\}t = \nu_i t, \end{aligned} \quad (7.6)$$

em que

$$\nu_i = r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2.$$

Também segue a partir de (7.5) que

$$\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_i(t)}{S_i(0)}\right)\right) = \text{Var}(W_i(t)) = \sigma_i^2 t.$$

Apresenta-se a seguir a definição de uma carteira para o Modelo (7.1), (7.2).

**Definição 7.2** Uma carteira  $\{H(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  para o mercado  $\{B(t), S(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  é um processo estocástico  $\mathcal{F}_t$ -progressivamente mensurável em  $R^{n+1}$ , em que  $H(t)$  é dado por

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_0(t) \\ \vdots \\ H_n(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Note que na Definição 7.2 a condição de que o processo estocástico deve ser  $\mathcal{F}_t$ -progressivamente mensurável pode ser traduzida, de maneira informal, como a de que no instante  $t$  todos os investidores somente dispõem das informações de mercado até o instante atual  $t$  para a tomada de decisão (não sendo, portanto, permitidas informações privilegiadas). Associada à carteira  $\{H(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ , define-se o processo valor da carteira  $\{V(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  dado por

$$V(t) = H_0(t)B(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)S_i(t). \quad (7.7)$$

**Observação 7.2** Tem-se que  $H_i(t)$  representa a quantidade que o investidor tem do ativo financeiro  $i$  no instante  $t$ . Valores negativos representariam uma situação de empréstimo, sendo, portanto, devedor daquela quantidade. Segue que  $V(t)$  representa o valor do investimento da carteira  $H(t)$  no instante  $t$ . É conveniente definir

$$\theta_0(t) = H_0(t)B(t), \theta_i(t) = H_i(t)S_i(t), i = 1, \dots, n, \quad (7.8)$$

que representaria o capital investido no ativo financeiro  $i$ . Portanto, (7.7) pode ser reescrita como

$$V(t) = \theta_0(t) + \sum_{i=1}^n \theta_i(t).$$

**Definição 7.3** A carteira  $\{H(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  é dita ser autofinanciável se

$$dV(t) = H_0(t)dB(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)dS_i(t), \quad (7.9)$$

isto é,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t H_0(t)dB(t) + \sum_{i=1}^n \int_0^t H_i(t)dS_i(t), 0 \leq t \leq T.$$

**Observação 7.3** Para uma carteira  $\{H(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ , considere a variação de investimento em instantes discretos de tempo  $t = t_k$  e  $t = t_{k+1}$ . Se a carteira é autofinanciável, não é possível ter nenhuma fonte externa injetando ou extraíndo capital dela, portanto a variação do investimento no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  se deve unicamente à variação de preços dos ativos nesse intervalo, isto é,

$$\Delta V(t_k) = V(t_{k+1}) - V(t_k) = H_0(t_k)\Delta B(t_k) + \sum_{i=1}^n H_i(t_k)\Delta S_i(t_k), \quad (7.10)$$

em que

$$\Delta B(t_k) = B(t_{k+1}) - B(t_k), \Delta S_i(t_k) = S_i(t_{k+1}) - S_i(t_k).$$

Fazendo o limite de  $t_{k+1} - t_k$  ir para zero em (7.10) deve-se ter a Equação (7.9) satisfeita.

Define-se

$$\omega_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{V(t)}, i = 1, \dots, n, 0 \leq t \leq T, \omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \vdots \\ \omega_n(t) \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

que representa a proporção investida no ativo de risco  $i$  no instante  $t$ . É fácil verificar que

$$\omega(t)'e = 1 - \frac{\theta_0(t)}{V(t)}. \quad (7.12)$$

Segue a partir de (7.9), (7.1), (7.2), (7.8), (7.11) e (7.12) que

$$\begin{aligned} dV(t) &= H_0(t)dB(t) + \sum_{i=1}^n H_i(t)dS_i(t) \\ &= H_0(t)r(t)B(t)dt + \sum_{i=1}^n H_i(t)S_i(t)(r_i dt + dW_i(t)) \\ &= \theta_0(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^n \theta_i(t)(r_i dt + dW_i(t)) \\ &= V(t)((1 - \omega(t)'e)r(t) + \omega(t)'r)dt + \omega(t)'dW(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = ((1 - \omega(t)'e)r(t) + \omega(t)'r)dt + \omega(t)'dW(t).$$

Considerando  $\omega(t) = \omega$ , (estratégia que mantém constante a proporção investida em cada ativo),  $r(t) = r_f$ , segue que

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = ((1 - \omega'e)r_f + \omega'r)dt + \omega'dW(t) = \mu dt + \omega'dW(t), \quad (7.13)$$

em que

$$\mu = (1 - \omega'e)r_f + \omega'r. \quad (7.14)$$

A solução de (7.13) é dada por

$$V(t) = V(0)\exp(\omega'W(t) + \nu t), \quad (7.15)$$

na qual

$$\nu = ((1 - \omega'e)r_f + \omega'r) - \frac{1}{2}\omega'\Sigma\omega = \mu - \frac{1}{2}\omega'\Sigma\omega. \quad (7.16)$$

Portanto, a partir de (7.15),

$$\begin{aligned} E\left(\ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right)\right) &= E(\omega'W(t) + \nu t) \\ &= E(W_i(t)) + \nu t \\ &= \nu t \end{aligned} \quad (7.17)$$

e

$$Var \left( \ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right) \right) = Var(\omega' W(t)) = \omega' \Sigma \omega t.$$

Tem-se também que

$$cov \left( \ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right), \ln \left( \frac{S_i(t)}{S_0(0)} \right) \right) = E(\omega' W(t) W_i(t)) = \sum_{j=1}^n \omega_j \sigma_{ij} t. \quad (7.18)$$

Esses são os resultados que serão utilizados nas próximas seções para o desenvolvimento de um modelo de Markowitz intertemporal.

## 7.2 Máximo Crescimento com apenas Ativos de Risco

Conforme visto em (7.17), é possível controlar a taxa de crescimento esperada  $\nu$  pela escolha da carteira  $\omega$ , pois

$$\nu = ((1 - \omega' e)r_f + \omega' r) - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega = \frac{1}{t} E \left( \ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right) \right). \quad (7.19)$$

A Equação (7.19) pode explicar como a volatilidade pode impulsionar a taxa de crescimento. Por exemplo, suponha que os  $n$  ativos sejam descorrelacionados e todos tenham a mesma média  $r_1$  e variância  $\sigma_1^2$ . Logo, cada ativo terá uma taxa de crescimento esperada

$$\nu_i = r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2.$$

Suponha que os  $n$  ativos sejam incluídos na carteira, cada um com peso  $\frac{1}{n}$ . Logo, a partir de (7.19), a taxa de crescimento da carteira será

$$\nu = r_1 - \frac{1}{2n} \sigma_1^2.$$

Portanto, haverá um aumento da taxa de crescimento dado por

$$\nu - \nu_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{n-1}{n} \right) \sigma_1^2.$$

Quanto maior for  $\sigma_1^2$ , maior será o efeito de impulsão da volatilidade. Dessa forma, percebe-se também que a volatilidade pode ser vista como uma forma de obter oportunidades de investimento, e não apenas como risco.

**Exemplo 7.1** Considere um ativo que tenha taxa de crescimento esperada de 15% ao ano, e a volatilidade (do log) sobre  $t$  dada por 20%. Logo,

$$15\% = \nu_1 = r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 = r_1 - \frac{1}{2} (0,2)^2 \Rightarrow r_1 = 0,17.$$

Se existissem 10 ativos dessa forma, todos descorrelacionados entre si e combinados em proporções iguais, a taxa de crescimento da carteira seria

$$\nu = r_1 - \frac{1}{2n}\sigma_1^2 = 0,17 - \frac{1}{20}(0,2)^2 = 0,168,$$

ou seja, um aumento de apenas 1,8%. Se as volatilidades fossem de 40%, então  $r_1 = 0,23$  e a taxa de crescimento seria  $\nu = 0,222$ , ou seja, um aumento de 7,2%.

É possível então estudar o problema de carteiras com máxima taxa de crescimento. Primeiramente consideram-se apenas ativos de risco. Nesse caso, o problema seria

$$\begin{aligned} & \max \omega' r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \\ & \text{sujeito a} \\ & \omega' e = 1. \end{aligned}$$

São definidas as seguintes variáveis:

$$\alpha = e' \Sigma^{-1} e \quad (7.20)$$

$$\gamma = r' \Sigma^{-1} r \quad (7.21)$$

$$\psi = e' \Sigma^{-1} r \quad (7.22)$$

$$\delta = \alpha \gamma - \psi^2 = (e' \Sigma^{-1} e)(r' \Sigma^{-1} r) - (e' \Sigma^{-1} r)^2. \quad (7.23)$$

O lagrangiano desse problema é:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = \omega' r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega - \lambda (\omega' e - 1).$$

As condições de otimalidade são:

$$\mathcal{L}_\omega(\omega, \lambda) = 0 = r - \Sigma \omega - \lambda e \Rightarrow \omega = \Sigma^{-1} (r - \lambda e)$$

e

$$e' \omega = e' \Sigma^{-1} (r - \lambda e) = 1 \Rightarrow \psi - \alpha \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\psi - 1}{\alpha}.$$

Portanto, a carteira de máxima taxa de crescimento, denotada por  $\omega_{\max}$ , é dada por:

$$\omega_{\max} = \Sigma^{-1} \left( r + \left( \frac{1 - \psi}{\alpha} \right) e \right). \quad (7.24)$$

A volatilidade (do log) sobre  $t$  dessa carteira, denotada por  $\sigma_{\max}^2$ , é

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^2 &= \omega_{\max}' \Sigma \omega_{\max} \\ &= \left( r + \left( \frac{1 - \psi}{\alpha} \right) e \right)' \Sigma^{-1} \left( r + \left( \frac{1 - \psi}{\alpha} \right) e \right) \\ &= \gamma + \frac{1 - \psi^2}{\alpha} = \frac{1 + \delta}{\alpha}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

O valor correspondente para  $\nu$ , denotado por  $\nu_{\max}$ , é dado por

$$\begin{aligned}\nu_{\max} &= r'\omega_{\max} - \frac{1}{2}\sigma_{\max}^2 = r'\Sigma^{-1} \left( r + \left( \frac{1-\psi}{\alpha} \right) e \right) - \frac{1+\delta}{2\alpha} \\ &= \gamma + \left( \frac{1-\psi}{\alpha} \right) \psi - \frac{1+\delta}{2\alpha} = \frac{\psi + \gamma\alpha - \psi^2}{\alpha} - \frac{1+\delta}{2\alpha} \\ &= \frac{\psi + \delta}{\alpha} - \frac{1+\delta}{2\alpha} = \frac{2\psi + 2\delta - 1 - \delta}{2\alpha} = \frac{2\psi + \delta - 1}{2\alpha}.\end{aligned}\quad (7.26)$$

Pode-se estabelecer um paralelo com a fronteira eficiente do modelo de Markowitz, traçando as carteiras no plano  $\nu$  por  $\sigma$ . Têm-se entretanto diferenças importantes. No caso atual, há um valor máximo para  $\nu$ , dado pela carteira  $\omega_{\max}$  em (7.24). É possível então considerar o seguinte problema, para cada valor de  $\sigma^2$  fixo,

$$\begin{aligned}\max & \omega' r \\ \text{sujeito a} & \\ e' \omega &= 1 \\ \omega' \Sigma \omega &= \sigma^2.\end{aligned}\quad (7.27)$$

O lagrangiano desse problema é:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = \omega' r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega - \lambda_1 (\omega' e - 1) - \frac{1}{2} \lambda_2 (\omega' \Sigma \omega - \sigma^2).$$

As condições de otimalidade são:

$$\mathcal{L}_{\omega}(\omega, \lambda_1, \lambda_2) = 0 = r - \lambda_2 \Sigma \omega - \lambda_1 e \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda_2} \Sigma^{-1} (r - \lambda_1 e)$$

e

$$e' \omega = e' \frac{1}{\lambda_2} \Sigma^{-1} (r - \lambda_1 e) = 1 \Rightarrow \psi - \alpha \lambda_1 = \lambda_2, \quad (7.28)$$

$$\omega' \Sigma \omega = \frac{1}{\lambda_2^2} (r - \lambda_1 e)' \Sigma^{-1} (r - \lambda_1 e) = \sigma^2. \quad (7.29)$$

Portanto, a partir de (7.28) e (7.29) obtém-se que

$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \left( \frac{\psi}{\alpha} \right) - \left( \frac{\gamma - \sigma^2 \psi^2}{\alpha (\sigma^2 \alpha - 1)} \right) = 0.$$

Resolvendo para  $\lambda_1$ ,

$$\lambda_1 = \frac{\psi}{\alpha} \pm \sqrt{\left( \frac{\psi}{\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\gamma - \sigma^2 \psi^2}{\alpha (\sigma^2 \alpha - 1)} \right)} = \frac{1}{\alpha} \left( \psi \pm \sqrt{\frac{\delta}{\sigma^2 \alpha - 1}} \right),$$



portanto,

$$\lambda_2 = \mp \sqrt{\frac{\delta}{\sigma^2 \alpha - 1}}.$$

É necessário determinar qual sinal deve ser escolhido (+ ou -). Note que

$$\omega' r = \frac{\gamma - \lambda_1 \psi}{\lambda_2} = \frac{1}{\alpha} \left( \psi \mp \sqrt{\delta (\sigma^2 \alpha - 1)} \right)$$

e, como deseja-se maximizar  $\omega' r$ , deve-se escolher o sinal negativo para  $\lambda_1$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\alpha} \left( \psi - \sqrt{\frac{\delta}{\sigma^2 \alpha - 1}} \right) \\ \lambda_2 &= \sqrt{\frac{\delta}{\sigma^2 \alpha - 1}} \\ \omega' r &= \frac{1}{\alpha} \left( \psi + \sqrt{\delta (\sigma^2 \alpha - 1)} \right). \end{aligned}$$

Com isso obtém-se que

$$\nu = \omega' r - \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{1}{\alpha} \left( \psi + \sqrt{\delta (\sigma^2 \alpha - 1)} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2. \quad (7.30)$$

Note que com  $\sigma^2 = \sigma_{\max}^2 = \frac{1+\delta}{\alpha}$ , obtém-se que  $\nu = \nu_{\max}$ , como em (7.26), conforme esperado. O valor mínimo corresponde a

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \omega_{\min} = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e \Rightarrow \nu_{\min} = \frac{2\psi - 1}{2\alpha} \quad (7.31)$$

e a fronteira eficiente é dada pela Equação (7.30) com  $\sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ . Define-se

$$a(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \alpha - 1}{\delta}}. \quad (7.32)$$

Observe que

$$a(\sigma_{\min}) = 0, a(\sigma_{\max}) = 1.$$

Segue que

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha} (\psi - \lambda_2) = \frac{\psi}{\alpha} - \frac{1}{\alpha a(\sigma)}.$$

Portanto, a carteira ótima será dada por

$$\omega = \frac{1}{\lambda_2} \Sigma^{-1} (r - \lambda_1 e) = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + a(\sigma) \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right). \quad (7.33)$$

Na verdade, pode-se enunciar o seguinte resultado:

**Proposição 7.1** *Seja uma carteira dada por*

$$\omega = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + \zeta \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right)$$

em que  $\zeta \in [0, 1]$ . Então,  $\zeta = a(\sigma)$ .

**Prova:** Tem-se a partir das definições (7.20)-(7.23) que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \omega' \Sigma \omega = \left( \frac{1}{\alpha} e + \zeta \left( r - \frac{\psi}{\alpha} e \right) \right)' \Sigma^{-1} \left( \frac{1}{\alpha} e + \zeta \left( r - \frac{\psi}{\alpha} e \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \zeta^2 \left( \gamma + \frac{\psi^2}{\alpha^2} \alpha - 2 \frac{\psi}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \zeta^2 \left( \frac{\alpha \gamma - \psi^2}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + \zeta^2 \frac{\delta}{\alpha} \end{aligned}$$

e com base na definição em (7.32) obtém-se o resultado desejado. ■

Da mesma maneira que no modelo de Markowitz, tem-se que carteiras de carteiras eficientes são eficientes, conforme apresentado no seguinte teorema.

**Teorema 7.1** *Considere duas carteiras eficientes  $\omega_a$  e  $\omega_b$  com variâncias  $\sigma_a^2$ ,  $\sigma_b^2$  e taxas de crescimento  $\nu_a, \nu_b$  tais que  $\sigma_{\min}^2 \leq \sigma_a^2 < \sigma_b^2 \leq \sigma_{\max}^2$ . Suponha uma carteira  $\omega_c$  de modo que*

$$\omega_c = \zeta \omega_a + (1 - \zeta) \omega_b$$

em que  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Então,  $\omega_c$  também é uma carteira eficiente com  $\sigma_c^2$ ,  $\sigma_{\min}^2 \leq \sigma_c^2 \leq \sigma_{\max}^2$  dado por

$$\sigma_c^2 = \frac{1 + \zeta_c^2 \delta}{\alpha}$$

na qual

$$\zeta_c = \zeta a(\sigma_a) + (1 - \zeta) a(\sigma_b).$$

**Prova:** Note inicialmente que, como

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{1}{\alpha} \leq \sigma_a^2 < \sigma_b^2 \leq \frac{1 + \delta}{\alpha},$$

tem-se que para  $0 \leq \zeta_a < \zeta_b \leq 1$ ,

$$\sigma_a^2 = \frac{1 + \zeta_a^2 \delta}{\alpha}, \sigma_b^2 = \frac{1 + \zeta_b^2 \delta}{\alpha}$$

e, a partir de (7.32)

$$a(\sigma_a) = \zeta_a, a(\sigma_b) = \zeta_b.$$

Lembrando com base em (7.33) que

$$\begin{aligned}\omega_a &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + a(\sigma_a) \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + \zeta_a \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) \\ \omega_b &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + a(\sigma_b) \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) = \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + \zeta_b \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right)\end{aligned}$$

segue a partir da Proposição 7.1 que

$$\begin{aligned}\omega_c &= \zeta \omega_a + (1 - \zeta) \omega_b = \zeta \left( \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + \zeta_a \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) \right) \\ &\quad + (1 - \zeta) \left( \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + \zeta_b \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + (\zeta \zeta_a + (1 - \zeta) \zeta_b) \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Sigma^{-1} e + a(\sigma_c) \left( \Sigma^{-1} r - \frac{\psi}{\alpha} \Sigma^{-1} e \right),\end{aligned}$$

em que

$$a(\sigma_c) = \zeta \zeta_a + (1 - \zeta) \zeta_b = \zeta_c = \zeta a(\sigma_a) + (1 - \zeta) a(\sigma_b) \in [0, 1].$$

Essa carteira coincide com a composição da carteira ótima (7.33). Sua volatilidade é

$$\sigma_c^2 = \frac{1 + \zeta_c^2 \delta}{\alpha}.$$

■

**Exemplo 7.2** Considere o caso com  $n = 3$ , e

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{pmatrix} 0,1 & 0,01 & 0,02 \\ 0,01 & 0,07 & -0,01 \\ 0,02 & -0,01 & 0,03 \end{pmatrix} \\ \nu &= \begin{pmatrix} 11,0\% \\ 10,5\% \\ 10,5\% \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Obtém-se que

$$r = \begin{pmatrix} 16\% \\ 14\% \\ 12\% \end{pmatrix}.$$

A carteira de máximo crescimento é

$$\omega_{\max} = \begin{pmatrix} 0,4242 \\ 0,3939 \\ 0,1818 \end{pmatrix},$$

com taxa de crescimento máxima dada por

$$\nu_{\max} = 12,74\%$$

e desvio-padrão

$$\sigma_{\max} = 18,67\%.$$

O desvio-padrão mínimo é

$$\sigma_{\min} = 12,91\%.$$

A fronteira eficiente é dada pela Figura 7.1.

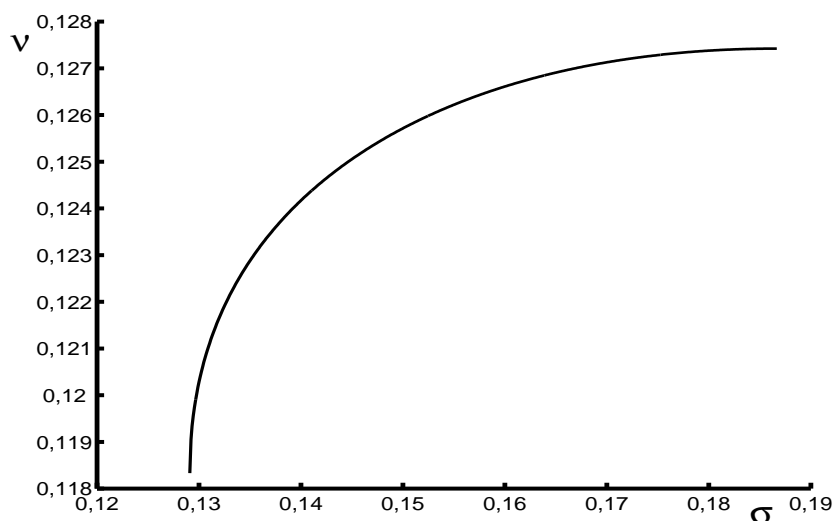


FIGURA 7.1: Gráfico risco-taxa de crescimento

### 7.3 Máximo Crescimento com 1 Ativo Livre de Risco

Considera-se agora o caso em que inclui-se o ativo livre de risco  $r_f$ . Define-se o seguinte problema:

$$\max (1 - \omega'e) r_f + \omega'r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega.$$

Resolvendo esse problema, obtém-se a seguinte condição de otimalidade:

$$(r - r_f e) - \Sigma \omega = 0 \Rightarrow \omega = \Sigma^{-1} (r - r_f e). \quad (7.34)$$

A volatilidade máxima correspondente é

$$\sigma_{\max}^2 = \gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha.$$

Considera-se agora o seguinte problema, para cada valor de  $\sigma^2$  fixo,

$$\begin{aligned} \max \quad & (1 - \omega'e)r_f + \omega'r - \frac{1}{2}\omega'\Sigma\omega \\ \text{sujeito a} \quad & \omega'\Sigma\omega = \sigma^2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

O lagrangiano desse problema é:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = r_f + (r - r_fe)' \omega - \frac{1}{2}\lambda (\omega'\Sigma\omega - \sigma^2).$$

As condições de otimalidade são:

$$\mathcal{L}_\omega(\omega, \lambda) = 0 = (r - r_fe) - \lambda\Sigma\omega \Rightarrow \omega = \frac{1}{\lambda}\Sigma^{-1}(r - r_fe)$$

e

$$\omega'\Sigma\omega = \frac{1}{\lambda^2}(r - r_fe)'\Sigma^{-1}(r - r_fe) = \sigma^2.$$

Portanto, obtém-se que

$$\lambda = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}.$$

A taxa de crescimento associada à carteira ótima é

$$\nu = r_f + \sigma_{\max}\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (7.36)$$

sendo a fronteira eficiente geral dada por (7.36) para  $\sigma \in [0, \sigma_{\max}]$  e a carteira ótima dada por

$$\omega = \frac{\sigma}{\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}}\Sigma^{-1}(r - r_fe). \quad (7.37)$$

Pode-se enunciar o seguinte resultado:

**Proposição 7.2** *Seja uma carteira dada por*

$$\omega = \frac{\vartheta}{\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}}\Sigma^{-1}(r - r_fe),$$

em que  $\vartheta > 0$ . Então,  $\vartheta = \sigma$ .

**Prova:** Tem-se que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \omega' \Sigma \omega = \vartheta^2 \frac{(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e)}{\gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha} \\ &= \vartheta^2,\end{aligned}$$

pois, a partir das definições (7.20)-(7.22),

$$(r - r_f e)' \Sigma^{-1} (r - r_f e) = \gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha.$$

Novamente tem-se que carteiras de carteiras eficientes são eficientes. ■

**Teorema 7.2** Considere duas carteiras eficientes  $\omega_a$  e  $\omega_b$  com variâncias  $\sigma_a^2$  e  $\sigma_b^2$  e taxas de crescimento  $\nu_a$  e  $\nu_b$ , tais que  $0 \leq \sigma_a^2 < \sigma_b^2 \leq \sigma_{\max}^2$ . Suponha uma carteira  $\omega_c$ , tal que

$$\omega_c = \zeta \omega_a + (1 - \zeta) \omega_b,$$

em que  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Então,  $\omega_c$  também é uma carteira eficiente com  $\sigma_c$ ,  $0 \leq \sigma_c \leq \sigma_{\max}$  dado por

$$\sigma_c = \zeta \sigma_a + (1 - \zeta) \sigma_b.$$

**Prova:** Lembrando que

$$\begin{aligned}\omega_a &= \frac{\sigma_a}{\sqrt{\gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha}} \Sigma^{-1} (r - r_f e) \\ \omega_b &= \frac{\sigma_b}{\sqrt{\gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha}} \Sigma^{-1} (r - r_f e),\end{aligned}$$

segue a partir da Proposição 7.2 que

$$\begin{aligned}\omega_c &= \zeta \omega_a + (1 - \zeta) \omega_b \\ &= \frac{\zeta \sigma_a + (1 - \zeta) \sigma_b}{\sqrt{\gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha}} \Sigma^{-1} (r - r_f e) \\ &= \frac{\sigma_c}{\sqrt{\gamma - 2r_f \psi + r_f^2 \alpha}} \Sigma^{-1} (r - r_f e),\end{aligned}$$

o que coincide com a composição da carteira ótima (7.37). ■

**Exemplo 7.3** Considere o caso com  $n = 1$ . Segue que a carteira de máximo crescimento será dada por

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f),$$

com variância dada por

$$\sigma_{\max}^2 = \left( \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f) \right)^2 \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f)^2$$

e taxa de crescimento esperada

$$\nu_{\max} = r_f + \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f)^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (r - r_f)^2 = r_f + \frac{1}{2\sigma^2} (r - r_f)^2.$$

Suponha que  $\nu = 15\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $r_f = 10\%$ , portanto

$$\nu = 15\% = r - \frac{1}{2} (0,2)^2 \Rightarrow r = 17\%.$$

A carteira ótima fornecerá

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f) = \frac{0,17 - 0,1}{0,04} = 1,75,$$

ou seja, deve-se tomar emprestado 75% do capital à taxa  $r_f$  e alavancar no ativo com risco. A taxa de crescimento será dada por

$$\nu_{\max} = 0,1 + \frac{(0,17 - 0,1)^2}{2(0,2)^2} = 16,125\%.$$

A variância dessa carteira é

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{1}{\sigma^2} (r - r_f)^2 \Rightarrow \sigma_{\max} = 35\%.$$

Portanto, comparando-se com o ativo de risco, tem-se que

$$\begin{aligned} \nu &: 15\% \uparrow 16,125\% \\ \sigma &: 20\% \uparrow 35\%. \end{aligned}$$

Logo, o aumento na taxa de crescimento não compensa o aumento na volatilidade.

## 7.4 Carteira Tangente

O vetor  $\omega$  da Equação (7.37) dá a composição dos ativos de risco, enquanto  $1 - \omega'$  representa a proporção a ser investida no ativo sem risco. Determinam-se agora os valores de  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$ , que serão denotados por  $\mu_T$ ,  $\sigma_T$  e  $\omega_T$ , respectivamente, os quais correspondem a uma posição de 100% em ativos de risco.

Para isso, deve-se ter  $e'\omega_T = 1$ , ou seja, lembrando as definições (7.20)-(7.23), tem-se que

$$\begin{aligned} 1 = e'\omega_T &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}} e'\Sigma^{-1}(r - r_f e) \\ &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}} (\psi - r_f\alpha), \end{aligned}$$

a partir do que conclui-se

$$\sigma_T^2 = \omega_T' \Sigma \omega_T = \frac{(\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha)}{(\psi - r_f\alpha)^2}$$

e

$$\begin{aligned} \omega_T &= \frac{\sigma_T}{\sqrt{\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha}} \Sigma^{-1}(r - r_f e) \\ &= \frac{1}{(\psi - r_f\alpha)} \Sigma^{-1}(r - r_f e). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Inserindo esse valor na Equação (7.32), obtêm-se que  $a(\sigma_T)^2$  vale

$$\begin{aligned} a(\sigma_T)^2 &= \frac{\alpha(\gamma - 2r_f\psi + r_f^2\alpha) - (\psi - r_f\alpha)^2}{\delta(\psi - r_f\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{(\psi - r_f\alpha)^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a(\sigma_T) = \frac{1}{(\psi - r_f\alpha)}. \quad (7.39)$$

Será denotada por  $\nu_T$  a taxa de retorno esperado da carteira formada por  $\omega_T$ . O teorema a seguir mostra que se  $\psi - \alpha r_f > 1$ , então a carteira com a taxa de retorno esperado  $\nu_T$  é uma carteira eficiente para carteiras com 100% de ativos de risco, ou seja, está na fronteira eficiente da Equação (7.30).

**Teorema 7.3** *Suponha que  $\psi - \alpha r_f > 1$ . Então, a carteira  $\omega_T$  é uma carteira eficiente para carteiras com 100% de ativos de risco. Além disso, qualquer carteira eficiente  $\omega$  com taxa de retorno esperado  $\nu$  pode ser obtida como uma carteira da carteira tangente  $\omega_T$  e a carteira livre de risco com taxa de retorno  $r_f$ . O retorno  $\nu$  será dado por*

$$\nu = (1 - \zeta)r_f + \zeta\nu_T,$$

para  $\zeta \geq 0$ .



**Prova:** Como por hipótese  $\psi - \alpha r_f > 1$ , tem-se a partir de (7.39) que  $0 < a(\sigma_T) < 1$  e, como (veja (7.32))

$$\sigma_T^2 = \frac{1 + \delta a(\sigma_T)^2}{\alpha},$$

segue a partir de (7.31) e (7.25) que

$$\sigma_T^2 > \frac{1}{\alpha} = \sigma_{\min}^2$$

e

$$\sigma_T^2 < \frac{1 + \delta}{\alpha} = \sigma_{\max}^2.$$

Decorre que a carteira eficiente  $\omega$  que satisfaz (7.33) com  $\sigma = \sigma_T$  é dada por

$$\begin{aligned} \omega &= a(\sigma_T) \Sigma^{-1} r + \frac{1}{\alpha} (1 - \psi a(\sigma_T)) \Sigma^{-1} e \\ &= \frac{1}{(\psi - r_f \alpha)} \Sigma^{-1} r + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\psi}{(\psi - r_f \alpha)} \right) \Sigma^{-1} e \\ &= \frac{1}{(\psi - r_f \alpha)} \Sigma^{-1} r - \frac{r_f}{(\psi - r_f \alpha)} \Sigma^{-1} e \\ &= \frac{1}{(\psi - r_f \alpha)} \Sigma^{-1} (r - r_f e), \end{aligned}$$

a qual coincide com  $\omega_T$  dado por (7.38). Portanto, a carteira  $\omega_T$  é eficiente para carteiras com 100% de ativos de risco. Com base no Teorema 7.2 conclui-se a prova. ■

Traçando as duas fronteiras eficientes dadas pelas Equações (7.30) e (7.36) em um mesmo gráfico deve-se ter, pelo fato de o Problema de otimização (7.35) ser mais geral que o Problema de otimização (7.27), que a segunda curva domina (estará sempre acima) a primeira. Como no ponto  $\sigma = \sigma_T$  as duas curvas possuem o mesmo valor, deve-se ter que a curva dada por (7.30) tangencia superiormente a curva dada por (7.36). Esse resultado é análogo ao visto no Capítulo 3.

**Exemplo 7.4** Considere novamente o Exemplo 7.2, mas agora com um ativo livre de risco com taxa de crescimento  $r_f = 10,5\%$ . A carteira de máximo crescimento é

$$\omega_{\max} = \begin{pmatrix} 0,4242 \\ 0,4939 \\ 0,3818 \end{pmatrix}$$

(deve-se, portanto, tomar emprestado 30% à taxa livre de risco) com taxa de crescimento dada por

$$\nu_{\max} = 12,82\%$$

e desvio-padrão

$$\sigma_{\max} = 21,53\%.$$

A carteira tangente  $\omega_T$  é dada por

$$\omega_T = \begin{pmatrix} 0,3263 \\ 0,3800 \\ 0,2937 \end{pmatrix},$$

com  $\sigma_T = 16,56\%$  e  $\nu_T = 12,69\%$ . Traçando as duas curvas dadas pelas Equações (7.30) e (7.36), percebe-se na Figura 7.2 o ponto de tangência em  $\sigma = \sigma_T$ , conforme o esperado.

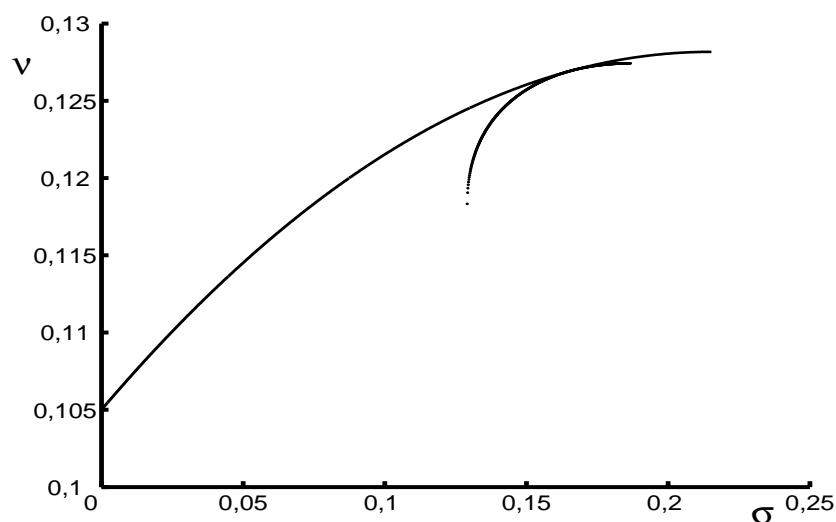


FIGURA 7.2: Gráfico risco-taxa de crescimento

## 7.5 Equações de Equilíbrio

Lembra-se inicialmente, a partir de (7.6), (7.15) e (7.16), que

$$\ln \left( \frac{S_i(t)}{S_i(0)} \right) = \left( r_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) t + W_i(t),$$

$$\ln \left( \frac{V(t)}{V(0)} \right) = \left( (1 - \omega' e) r_f + \omega' r - \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega \right) t + \omega' W(t).$$

Conforme visto em (7.34), a carteira ótima para o caso em que se tem um ativo livre de risco é dada por:

$$\omega_{\max} = \Sigma^{-1} (r - r_f e).$$

Representa-se o valor dessa carteira por  $V_{\max}(t)$  e a variância, taxa de crescimento e retorno por  $\sigma_{\max}^2$ ,  $\nu_{\max}$ ,  $\mu_{\max}$ , respectivamente. Define-se

$$\begin{aligned} \sigma_{i,\max} &= \frac{1}{t} \text{cov} \left( \ln \left( \frac{V_{\max}(t)}{V(0)} \right), \ln \left( \frac{S_i(t)}{S_i(0)} \right) \right) \\ \beta_{i,\max} &= \frac{\sigma_{i,\max}}{\sigma_{\max}^2}. \end{aligned}$$

O resultado a seguir apresenta relações entre as taxas de retorno e correlações da carteira ótima com os ativos básicos do mercado.

**Teorema 7.4** *Têm-se as seguintes igualdades:*

$$a) \ r_i - r_f = \sigma_{i,\max} \quad (7.40)$$

$$b) \ \nu_i - r_f = \sigma_{i,\max} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \quad (7.41)$$

$$c) \ r_i - r_f = \beta_{i,\max} (\mu_{\max} - r_f) \quad (7.42)$$

$$d) \ \nu_i - r_f = \sigma_{\max}^2 \beta_{i,\max} - \frac{1}{2} \sigma_i^2. \quad (7.43)$$

**Prova:** Para (7.40) tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma_{i,\max} &= \frac{1}{t} \text{cov} \left( \ln \left( \frac{V_{\max}(t)}{V(0)} \right), \ln \left( \frac{S_i(t)}{S_i(0)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{t} E (\omega'_{\max} W(t) W_i(t)) = \sum_{j=1}^n \omega_{\max,j} \sigma_{ij} = r_i - r_f. \end{aligned}$$

Como  $\nu_i = r_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2$ , (7.41) é imediato. Para (7.42), note que

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^2 &= \omega'_{\max} \Sigma \omega_{\max} \\ &= \omega'_{\max} (r - r_f e) \\ &= \omega'_{\max} r + (1 - \omega'_{\max} e) r_f - r_f \\ &= \mu_{\max} - r_f \Rightarrow \frac{\mu_{\max} - r_f}{\sigma_{\max}^2} = 1. \end{aligned} \quad (7.44)$$

A partir de (7.41) tem-se imediatamente (7.43). ■

Os resultados do Teorema 7.4 são facilmente estendidos para qualquer carteira com estratégia de investimento  $\omega_P$ . De fato, seja  $V_P(t)$  o valor da carteira no instante  $t$ . Define-se

$$\sigma_{P,\max} = \frac{1}{t} \text{cov} \left( \ln \left( \frac{V_{\max}(t)}{V(0)} \right), \ln \left( \frac{V_P(t)}{V_P(0)} \right) \right), \quad (7.45)$$

$$\beta_{P,\max} = \frac{\sigma_{P,\max}}{\sigma_{\max}^2}. \quad (7.46)$$

A partir das Equações (7.14), (7.15) e (7.16), tem-se que

$$\mu_P = (1 - \omega'_P e) r_f + \omega'_P r, \quad (7.47)$$

$$\begin{aligned} \nu_P &= ((1 - \omega'_P e) r_f + \omega'_P r) - \frac{1}{2} \omega'_P \Sigma \omega_P \\ &= \mu_P - \frac{1}{2} \omega'_P \Sigma \omega_P, \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$V_P(t) = V(0) \exp(\omega'_P W(t) + \nu_P t). \quad (7.49)$$

**Corolário 7.1** *Tem-se as seguintes igualdades:*

$$a) \mu_P - r_f = \sigma_{P,\max} \quad (7.50)$$

$$b) \nu_P - r_f = \sigma_{P,\max} - \frac{1}{2} \sigma_P^2 \quad (7.51)$$

$$c) \mu_P - r_f = \beta_{P,\max} (\mu_{\max} - r_f) \quad (7.52)$$

$$d) \nu_P - r_f = \sigma_{\max}^2 \beta_{P,\max} - \frac{1}{2} \sigma_P^2. \quad (7.53)$$

**Prova:** A partir das Equações (7.18), (7.49) e (7.45) é fácil verificar que  $\sigma_{P,\max} = \sum_{i=1}^n \omega_{Pi} \sigma_{i,\max}$ . Com base nas Equações (7.40) e (7.47) segue que

$$\begin{aligned} \mu_P &= (1 - \omega'_P e) r_f + \omega'_P r \\ &= (1 - \omega'_P e) r_f + \sum_{i=1}^n \omega_{Pi} r_i \\ &= (1 - \omega'_P e) r_f + \sum_{i=1}^n \omega_{Pi} (r_f + \sigma_{i,\max}) \\ &= (1 - \omega'_P e) r_f + (\omega'_P e) r_f + \sum_{i=1}^n \omega_{Pi} (\sigma_{i,\max}) \\ &= r_f + \sigma_{P,\max}, \end{aligned}$$

mostrando (7.50). A partir das Equações (7.48) e (7.50) segue a Equação (7.51). Com base em (7.44), (7.46) e (7.50), é imediato (7.52). Finalmente, (7.53) segue imediatamente a partir de (7.46) e (7.51). ■

**Exemplo 7.5** Considere novamente o Exemplo 7.4 e uma carteira com variância  $\sigma_P^2 = 5\%$  e  $\beta_{P,\max} = 0,25$ . Lembre-se que  $r_f = 10,5\%$  e  $\sigma_{\max} = 21,53\%$  (isto é,  $\sigma_{\max}^2 = 4,63\%$ ). De acordo com a Equação (7.53), a taxa de crescimento esperada  $\nu_P$  para essa carteira é

$$\nu_P = 0,105 + 0,25 \times 0,0463 - \frac{0,05}{2} = 9,1575\%.$$

## 7.6 Exercícios

Os Exercícios 1 e 2 seguintes são solucionados e utilizam a planilha Exercícios.xls, disponível no site [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). Um maior detalhamento é apresentado no Apêndice D. As respostas desses exercícios encontram-se no final do livro. O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados.

1) Seguindo o mesmo raciocínio proposto na pasta Markowitz, um administrador de fundo de ações deseja montar um fundo e, para isso, considera uma seleção prévia dos papéis cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Data. Pede-se para:

- a) Avaliar carteiras com máxima taxa de crescimento esperada, utilizando diferentes janelas de dias.
- b) Comparar os resultados obtidos no item a) com os equivalentes à hipérbole na pasta Markowitz.

2) Esse mesmo administrador deseja encontrar a composição da carteira de ativos de risco que maximize a taxa de crescimento esperada, considerando também a possibilidade de se investir em um ativo sem risco. Pede-se:

- a) Para uma janela de 200 dias e uma taxa de retorno esperada para o ativo livre de risco de 18% a.a., qual a composição da carteira representativa dos ativos de risco?
- b) Comparar a composição obtida no item a) com a equivalente da pasta Markowitz.

### Exercícios Propostos

3) Considere 3 ativos de risco governados pelas equações

$$dS_i(t) = S_i(t) \left( r_i dt + dW_i(t) \right), \quad S_i(0) = x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

com

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\% \\ 15\% \\ 13\% \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \frac{1}{t} \text{cov}(W(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,02 & 0,03 \\ 0,02 & 0,08 & -0,01 \\ 0,03 & -0,01 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

- Obtenha a composição da carteira que fornece a maior taxa de crescimento, sua volatilidade e a sua taxa de crescimento.
- Trace a fronteira eficiente para esse mercado.
- Considere agora um investimento livre de risco governado pela equação

$$dB(t) = r_f B(t) dt, \quad B(0) = 1$$

com  $r_f = 10\%$ . Determine a carteira que fornece a maior taxa de crescimento, a volatilidade dessa carteira e sua taxa de crescimento.

- Trace a fronteira eficiente geral para esse caso, junto com a fronteira eficiente para o caso de apenas ativos com risco.
  - Determine a composição da carteira tangente, sua volatilidade e sua taxa de crescimento. Identifique no gráfico a localização da carteira tangente.
- 4) Considere os ativos de risco representados pelas equações do Exercício 3. Considere uma carteira com variância dada por  $\sigma_P^2 = 8\%$  e  $\beta_{P,\max} = 0,45$ . Determine a taxa de crescimento esperada dessa carteira.

## Apêndice A

# Conceitos Básicos de Probabilidade

Neste apêndice, é apresentada uma breve recordação de alguns conceitos básicos de probabilidade utilizados neste livro. Uma exposição mais completa pode ser encontrada, por exemplo, em [Ross, 1997] ou [Meyer, 1983].

Uma variável aleatória  $X$  é uma função do espaço amostral  $\Omega$  para os reais  $R$ . É caracterizada pela sua função densidade de probabilidade  $f_X(x)$  para o caso contínuo, ou pela sua função massa  $p_X(x)$  para o caso discreto. Tem-se que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz \quad (\text{caso contínuo})$$

$$P(X = x_i) = p_X(x_i) \quad (\text{caso discreto}).$$

A função  $F_X(x)$  é chamada de função distribuição de probabilidade de  $X$ .

**Exemplo A.1**  $X \rightarrow$  soma de 2 dados. Segue que  $X$  toma valores no conjunto  $\{2, 3, \dots, 12\}$ . Além disso,

$$p_X(2) = \frac{1}{36}, \dots, p_X(5) = \frac{4}{36}, \dots, p_X(12) = \frac{1}{36}.$$

Logicamente, tem-se

$$\sum_{i=2}^{12} p_X(i) = 1.$$

**Exemplo A.2**  $N \rightarrow$  variável aleatória com distribuição geométrica e parâmetro  $p$ . Nesse caso,  $N$  representa o número de jogadas independentes até aparecer a 1ª cara, em que a probabilidade de uma cara ocorrer é  $p$ . Tem-se então que

$$p_N(1) = p, p_N(2) = (1-p)p, \dots, p_N(n) = (1-p)^{n-1}p$$

e que

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_X(i) = p \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

**Exemplo A.3**  $X \rightarrow$  variável aleatória com distribuição binomial e parâmetros  $n$  e  $p$ . Nesse caso,  $X$  representa o número de sucessos em  $n$  experimentos independentes, em que cada sucesso tem probabilidade  $p$  de ocorrer. Segue que

$$p_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Como esperado,

$$\sum_{i=0}^n p_X(i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n = 1.$$

O modelo binomial para o valor de um ativo financeiro  $S(t)$  assume que a cada período de tempo  $t$  há 2 possibilidades para  $S(t)$ : ou sobe com um fator  $u > 1$  ou desce com um fator  $0 < d < 1$ . A probabilidade de subida é  $p$  (portanto a de descida é  $1-p$ ). Para um período de  $t_f$  unidades,  $\#\Omega = 2^{t_f}$ . Seja  $N(t)(\omega) =$  número de subidas até o instante  $t$ , isto é,

$$N(t) = X(1) + \dots + X(t),$$

em que

$$X(k) = \begin{cases} 1 & \text{se subiu no instante } k \\ 0 & \text{se desceu no instante } k \end{cases}.$$

Logo,

$$S(t) = S(0) u^{N(t)} d^{t-N(t)}$$

e  $N(t)$  é uma variável binomial com parâmetros  $t$  e  $p$ . Segue que

$$P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \dots, t$$

e a probabilidade do valor do ativo é dada por

$$P(S(t) = S(0) u^n d^{t-n}) = P(N(t) = n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n}, n = 0, \dots, t.$$

**Exemplo A.4**  $X \rightarrow$  distribuição uniforme  $(\alpha, \beta)$ . Nesse caso,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}.$$



**Exemplo A.5**  $X \rightarrow$  distribuição gaussiana com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ . Nesse caso,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Pode-se mostrar que se  $X$  é gaussiana com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  e

$$Y = \alpha X + \beta,$$

então  $Y$  é gaussiana com parâmetros  $\alpha\mu + \beta$  e  $|\alpha|\sigma$ .

O valor esperado  $E(X)$  de uma variável aleatória  $X$  é definido como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ (caso contínuo),}$$

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \text{ (caso discreto).}$$

**Exemplo A.6**  $X \rightarrow$  binomial com parâmetros  $n$  e  $p$

$$E(X) = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = np.$$

$X \rightarrow$  geométrica com parâmetro  $p$

$$E(X) = p \sum_{i=1}^{\infty} i (1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

$X \rightarrow$  distribuição uniforme  $(\alpha, \beta)$

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

$X \rightarrow$  distribuição gaussiana com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \mu.$$

Tem-se o seguinte resultado, conhecido como a “lei do estatístico inconsciente”:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \text{ (caso contínuo),}$$

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_X(x_i) \text{ (caso discreto).}$$

**Exemplo A.7**  $X \rightarrow$  distribuição uniforme  $(0, 1)$

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

Note que, calculando a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $Y = X^3$ , seria obtido que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} & y \in (0, 1) \\ 0 & y \notin (0, 1) \end{cases},$$

portanto, conforme esperado,

$$E(Y) = \int_0^1 y \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} dy = \int_0^1 \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{1}{4}.$$

A variância de uma variável aleatória  $X$ , representada por  $Var(X)$  ou simplesmente  $\sigma_X^2$ , é definida como:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Pela “lei do estatístico inconsciente” tem-se, para o caso contínuo (o caso discreto é análogo), que

$$\begin{aligned} E((X - E(X))^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) + E(X)^2) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &\quad + E(X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0.$$

**Exemplo A.8**  $X \rightarrow$  distribuição gaussiana com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2.$$

Um vetor aleatório  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$  é uma função do espaço amostral  $\Omega$  para o  $R^n$ . É caracterizado pela sua função densidade de probabilidade conjunta  $f_X(x_1, \dots, x_n)$ , para o caso contínuo, ou pela sua função massa conjunta  $p_X(x_1, \dots, x_n)$ , para o caso discreto. Tem-se para o caso contínuo que

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \end{aligned}$$

em que  $F_X(x_1, \dots, x_n)$  é a função distribuição de probabilidade conjunta de  $X$ . Para o caso discreto,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_X(x_1, \dots, x_n).$$

As funções densidade de probabilidade marginais  $f_{X_i}(x_i)$  são obtidas a partir da função densidade de probabilidade conjunta simplesmente integrando de  $-\infty$  a  $\infty$  os termos nas outras variáveis. Por exemplo, para obter a função densidade de probabilidade marginal  $f_{X_1}(x_1)$ , basta calcular

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, z_2, \dots, z_n) dz_2 \dots dz_n.$$

Resultado análogo vale para o caso discreto.

O vetor valor esperado  $E(X)$  é o vetor formado pelos valores esperados  $E(X_1), \dots, E(X_n)$ , isto é,

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}.$$

Seja  $g(\cdot)$  uma função de  $R^n$  em  $R$ . Uma variação da “lei do estatístico inconsciente” é a seguinte:

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(z_1, \dots, z_n) f_X(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

As variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  são ditas independentes se para todo  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)$$

(o caso discreto é análogo) e nesse caso é fácil verificar que

$$E(g_1(X_1) \dots g_n(X_n)) = E(g_1(X_1)) \dots E(g_n(X_n)).$$

A covariância de 2 variáveis aleatórias  $X_1, X_2$ , denotada por  $cov(X_1, X_2)$ , ou simplesmente  $\sigma_{X_1, X_2}$ , é definida por

$$cov(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))),$$

e é óbvio que  $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_1)$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} E\left((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\right) &= E\left(X_1 X_2 - E(X_1) X_2 \right. \\ &\quad \left. - E(X_2) X_1 + E(X_1) E(X_2)\right) \\ &= E(X_1 X_2) - 2E(X_1)E(X_2) + E(X_1)E(X_2) \\ &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2). \quad (\text{A.1})$$

As variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$  ditas são descorrelacionadas se

$$cov(X_1, X_2) = 0.$$

Note que, se  $X_1$  e  $X_2$  são independentes, então  $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$ , portanto segue de (A.1) que  $cov(X_1, X_2) = 0$ . Logo, independência implica variáveis descorrelacionadas, mas o reverso não é válido.

A seguinte desigualdade é sempre válida:

$$|\sigma_{X_1, X_2}| = |cov(X_1, X_2)| \leq \sqrt{Var(X_1)Var(X_2)} = \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}. \quad (\text{A.2})$$

Define-se o coeficiente de correlação  $\rho_{X_1, X_2}$  da seguinte forma:

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{\sigma_{X_1, X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}$$

e a partir da desigualdade (A.2) segue que  $|\rho_{X_1, X_2}| \leq 1$ .

O caso  $\rho_{X_1, X_2} = 1$  representa a situação em que as variáveis são perfeitamente positivamente correlacionadas, e  $\rho_{X_1, X_2} = -1$  o caso em que as variáveis são perfeitamente negativamente correlacionadas. Pode-se mostrar que quando  $|\rho_{X_1, X_2}| = 1$  tem-se, com probabilidade 1, que

$$X_1 = \pm \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}}(X_2 - E(X_2)) + E(X_1). \quad (\text{A.3})$$

Note que se (A.3) vale com probabilidade 1, então

$$\begin{aligned}\sigma_{X_1, X_2} &= E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\ &= \pm \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} E((X_2 - E(X_2))^2) = \pm \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \sigma_{X_2}^2 = \pm \sigma_{X_1} \sigma_{X_2};\end{aligned}$$

portanto, como esperado, tem-se que

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\sigma_{X_1, X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} = \pm \frac{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} = \pm 1.$$

**Exemplo A.9** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade gaussiana conjunta*

$$\begin{aligned}f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right),\end{aligned}$$

em que  $\rho$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  são constantes satisfazendo a  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$  e  $-1 < \rho < 1$ . Pode-se mostrar, então, que  $\rho$  representa o fator de correlação entre as variáveis aleatórias  $X_1$  e  $X_2$ .

Considere o vetor aleatório  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  e o vetor  $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in R^2$ . Defina a variável aleatória

$$P = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 = \omega' X,$$

em que  $\omega'$  representa o transposto de  $\omega$ . Tem-se que

$$E(P) = \omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2) = \omega' E(X)$$

e

$$\begin{aligned}Var(P) &= E((P - E(P))^2) = E((\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 - (\omega_1 E(X_1) + \omega_2 E(X_2))))^2) \\ &= E((\omega_1 (X_1 - E(X_1)) + \omega_2 (X_2 - E(X_2))))^2) \\ &= \omega_1^2 E((X_1 - E(X_1))^2) + \omega_2^2 E((X_2 - E(X_2))^2) \\ &\quad + 2\omega_1 \omega_2 E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\ &= \omega_1^2 \sigma_{X_1}^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{X_1, X_2} + \omega_2^2 \sigma_{X_2}^2. \\ &= \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1, X_2} \\ \sigma_{X_1, X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Define-se

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1, X_2} \\ \sigma_{X_1, X_2} & \sigma_{X_2}^2 \end{pmatrix} = E((X - E(X))(X - E(X))').$$

Note que  $\Sigma_X \geq 0$ , pois

$$\text{tr}(\Sigma_X) = \lambda_1(\Sigma_X) + \lambda_2(\Sigma_X) = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 \geq 0$$

e

$$\det(\Sigma_X) = \lambda_1(\Sigma_X)\lambda_2(\Sigma_X) = \sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2 - \sigma_{X_1, X_2}^2 \geq 0.$$

Se  $\sigma_{X_1} > 0$ ,  $\sigma_{X_2} > 0$  e  $|\rho_{X_1, X_2}| < 1$ ,  $\Sigma_X > 0$ . Concluindo, tem-se que para

$$P = \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 = \omega' X$$

segue que

$$E(P) = \omega' E(X), \text{Var}(P) = \omega' \Sigma_X \omega.$$

Pode-se generalizar o caso anterior para um vetor aleatório  $X$  de dimensão  $n$ . Define-se a matriz covariância  $\text{cov}(X)$  de dimensão  $n$  por  $n$ , denotada por  $\Sigma_X$ , como

$$\Sigma_X = \text{cov}(X) = E((X - E(X))(X - E(X))'). \quad (\text{A.4})$$

Tem-se que  $\Sigma_X \geq 0$ , pois para qualquer  $\omega \in R^n$ , segue a partir de (A.4) que

$$\begin{aligned} \omega' \Sigma_X \omega &= E(\omega'(X - E(X))(X - E(X))' \omega) \\ &= E((\omega'(X - E(X)))^2) \geq 0. \end{aligned}$$

A condição  $\omega' \Sigma_X \omega = 0$  só ocorreria se uma ou mais variáveis aleatórias do vetor  $X$  pudessem ser escritas como uma combinação linear das outras quase sempre. Se

$$P = \omega' X,$$

então

$$E(P) = \omega' E(X)$$

e

$$\text{Var}(P) = \omega' \Sigma_X \omega.$$

**Exemplo A.10**  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \rightarrow$  vetor gaussiano com parâmetros  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$  e matriz  $n$  por  $n$   $\Sigma$ . Nesse caso, a função densidade de probabilidade  $f_X(x)$  é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(\Sigma)} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\}.$$

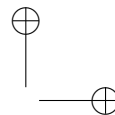
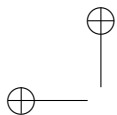
Verifica-se que  $E(X) = \mu$  e  $\text{cov}(X) = \Sigma$ . No caso em que as variáveis  $X_1, \dots, X_n$  são descorrelacionadas, tem-se que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

e segue que

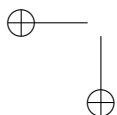
$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_i^2} (x_i - \mu_i)^2 \right\} = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n),$$

ou seja,  $X_1, \dots, X_n$  são independentes. Portanto, para variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, tem-se que a propriedade das variáveis serem decorrelacionadas é equivalente à propriedade de serem independentes. Outra propriedade importante é que se  $X$  é um vetor gaussiano com parâmetros  $\mu$  e  $\Sigma$ , e  $Y = AX + b$ , então  $Y$  também é um vetor gaussiano com parâmetros  $A\mu + b$  e  $A\Sigma A'$ .

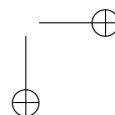


—

—



|





## Apêndice B

# Conceitos Básicos de Otimização

Neste apêndice, recordam-se alguns conceitos básicos de otimização que são utilizados ao longo do livro. Para uma exposição mais completa sobre o assunto, recomenda-se, por exemplo, [Luenberger, 1973] ou [Bertsekas, 1995].

Deseja-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{sujeito a} \\ &h(x) = 0 \\ &g(x) \leq 0 \\ &x \in R^n, \end{aligned}$$

em que

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

e

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{pmatrix}.$$

Primeiramente o problema é considerado só com restrições de igualdade. Nesse caso, toma a forma:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{sujeito a} \\ &h(x) = 0 \\ &x \in R^n. \end{aligned}$$

Um ponto  $x^*$  satisfazendo  $h(x^*) = 0$  é dito ser um ponto regular se os vetores gradientes  $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_n(x^*)$  forem linearmente independentes. As condições necessárias de otimalidade para esse problema são:

**Teorema B.1** *Condições Necessárias de 1ª Ordem: Seja  $x^*$  um mínimo local de  $f$  sujeito às restrições  $h(x) = 0$ . Assuma também que  $x^*$  é um ponto regular. Então existe um vetor  $\lambda \in R^m$  tal que*

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0,$$

em que

$$\nabla h(x) = (\nabla h_1(x) \quad \dots \quad \nabla h_m(x)).$$

Definindo o lagrangiano

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + h(x)'\lambda,$$

em que  $\lambda$  é chamado de multiplicadores de Lagrange, tem-se que as condições de 1ª ordem podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) &= \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) &= h(x) = 0. \end{aligned}$$

**Exemplo B.1** *Considere o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} \min \quad & -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x \in R^3. \end{aligned}$$

As condições necessárias são:

$$\nabla f(x) = - \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \nabla h(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 + \lambda = 0 \\ -x_1 - x_3 + \lambda = 0 \\ -x_1 - x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

A solução desse conjunto de equações é:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \lambda = 2.$$

A condição suficiente de 2ª ordem para o mínimo local exige que a matriz

$$L(x^*) = F(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i H_i(x^*)$$

seja positiva definida em

$$M(x^*) = \{y \in R^n; \nabla h(x^*)'y = 0\},$$

isto é,  $y'L(x^*)y > 0$  para todo  $y \neq 0$  em  $M(x^*)$ . Nesse caso, define-se como

$$F(x) = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

a matriz hessiana de  $f(x)$ , e

$$H_k(x) = \left[ \frac{\partial^2 h_k(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

como a matriz hessiana de  $h_k(x)$ .

**Exemplo B.2** *Continuação: no caso anterior,*

$$L(x) = L = F(x) = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(x) = 0$$

e

$$M = \{y \in R^3; y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

Note que em geral  $L$  não é positiva definida, pois  $\det(L) = -2 < 0$ . Mas em  $M$  tem-se que para  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y'Ly &= - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 + y_3 \\ y_1 + y_3 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $L$  é positiva definida em  $M$  e o ponto  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  é um mínimo local.

Para o caso com restrições de desigualdade, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema B.2** *Condições de Kuhn-Tucker de 1ª Ordem: Seja  $x^*$  um mínimo local de  $f$  sujeito às restrições  $h(x) = 0$  e  $g(x) \leq 0$ . Assuma também que  $x^*$  é um ponto regular. Então, existe um vetor  $\lambda \in R^m$  e um vetor  $\nu \geq 0$  em  $R^p$ , tal que*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda + \nabla g(x^*)\nu &= 0 \\ g(x^*)'\nu &= 0, \end{aligned}$$

em que

$$\nabla g(x) = (\nabla g_1(x) \quad \dots \quad \nabla g_p(x)).$$

Condições suficientes de 2ª ordem análogas ao caso anterior também podem ser obtidas para esse caso.

**Exemplo B.3** Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ & \text{sujeito a} \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Têm-se, então, as seguintes condições:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_1 + 3\nu_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_2 + \nu_2 = 0 \\ \nu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0, \quad \nu_1 \geq 0 \\ \nu_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0, \quad \nu_2 \geq 0 \end{cases}$$

que levam a 4 possibilidades:

a)  $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$ . Nesse caso, há 4 incógnitas  $(x_1, x_2, \nu_1, \nu_2)$  e 4 equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_1 + 3\nu_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_2 + \nu_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases}.$$

As soluções devem atender  $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$ .

b)  $\nu_1 = 0, \nu_2 > 0$ . Nesse caso, há 3 incógnitas  $(x_1, x_2, \nu_2)$  e 3 equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 3\nu_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + \nu_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases}.$$

As soluções devem atender  $\nu_2 > 0$  e  $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$ . Resolvendo, obtém-se que a) e b) levam a soluções inconsistentes.

c)  $\nu_2 = 0, \nu_1 > 0$ . Nesse caso, há 3 incógnitas  $(x_1, x_2, \nu_1)$  e 3 equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\nu_1x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0 \end{cases}.$$

As soluções devem atender  $\nu_1 > 0$  e  $3x_1 + x_2 \leq 6$ . Obtém-se a solução:

$$\nu_1 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2,$$

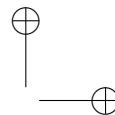
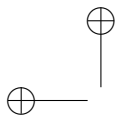
que satisfaz  $\nu_1 > 0$  e  $3x_1 + x_2 \leq 6$

d)  $\nu_1 = 0, \nu_2 = 0$ . Nesse caso, há 2 incógnitas  $(x_1, x_2)$  e 2 equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}.$$

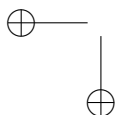
As soluções devem atender  $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$  e  $3x_1 + x_2 \leq 6$ . Obtém-se que as soluções são inconsistentes.

Logo, o único candidato a mínimo local é  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . Pode-se mostrar pelas condições de 2ª ordem que esse ponto é realmente um mínimo local.

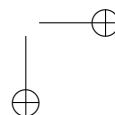


—

—



|



## Apêndice C

# Glossário

Segue um pequeno glossário de termos utilizados ao longo do livro e que são de uso corrente no mercado brasileiro.

**Ação** – menor parcela do capital social de uma sociedade por ações. O mercado de ações pode ser dividido em primário, quando há a subscrição das ações no aumento de capital, e secundário, no qual as ações são comercializadas em bolsa de valores.

**Alavancagem** – indica quanto uma carteira pode aumentar seu risco utilizando-se de ativos ou recursos que não refletem o seu padrão de investimento.

**Análise Fundamentalista** – tipo de análise que se vale dos resultados institucionais e específicos de cada ativo dentro do contexto macroeconômico, desconsiderando análises gráficas ou comportamentos estatísticos dos preços do ativo.

**Análise Técnica** – tipo de análise que se vale dos resultados estatísticos das séries históricas dos retornos dos ativos, desconsiderando análises fundamentalistas dos resultados institucionais dos ativos.

**Ativo Livre de Risco** – ativo de renda fixa que garante um retorno prefixado ao acionista sem flutuações de preço.

**Benchmark** – ativo, conjunto de ativos, ou índice que serve como referência de rentabilidade e risco para outros investimentos de mesma natureza.

**Bolsa de Valores** – associação privada sem fins lucrativos constituída pelas corretoras de valores para fornecer infra-estrutura ao mercado de ações.

**Carteira de Investimento** – conjunto de ativos financeiros que juntos proporcionam uma rentabilidade esperada e um risco para o investidor.

**Carteira de Mercado** – carteira de investimento teórica constituída por todos os ativos de um determinado mercado.

**Carteira de Mínima Variância** – conjunto de ativos cuja composição gera uma carteira com o mínimo risco, dadas todas as composições possíveis, para um determinado retorno.

**Carteira Representativa dos Ativos de Risco** – carteira de mínima variância composta somente por ativos de risco e que, em composição com o ativo livre de risco, gera as carteiras de mínima variância.

**Certificado de Depósito Interbancário (CDI)** – são títulos de emissão das instituições financeiras que lastreiam as operações do mercado interbancário. É utilizado como benchmark para as operações de renda fixa.

**Custo de Oportunidade** – rentabilidade que o investidor obteria em ativos livres de risco em contraposição às rentabilidades do seu investimento atual.

**Dar Recursos** – emprestar recursos por meio de instrumentos de ativos livres de risco de mercado.

**Estatuto do Fundo** – regras de um fundo de investimento que estipulam limites para os tipos de investimento, como ativos de renda fixa e variável.

**Fundo Ativo** – fundo de investimento que corre um risco não-sistêmico no intuito de obter rentabilidades superiores às de um determinado benchmark.

**Fundo de Investimento** – forma de aplicação caracterizada pela aquisição de cotas representativas do patrimônio do fundo, as quais têm valorização diária. O fundo é uma associação formada pelos cotistas do lado passivo e por aplicações financeiras do lado ativo. Em termos gerais, os fundos podem ser classificados em renda fixa ou renda variável de acordo com a natureza dos ativos.

**Fundo Passivo** – fundo de investimento que evita correr risco não-sistêmico no intuito de obter rentabilidade mais próxima possível de um determinado benchmark.

**Índice Bovespa (IBovespa)** – índice que representa uma média ponderada dos preços de uma carteira de ações selecionadas pela sua representatividade na Bolsa de Valores de São Paulo — Bovespa. É utilizado como benchmark para as operações de renda variável.



**Janela** – intervalo de dados em uma amostra utilizado para cálculos estatísticos em projeções de rentabilidades e riscos.

**Liquidez** – medida que indica a facilidade com que um ativo pode ser transacionado no mercado. Ativos de alta liquidez podem ser comprados e vendidos a preços proporcionalmente próximos.

**Papel** – terminologia utilizada para designar ativos de liquidez imediata que servem de objeto para derivativos e contratos a termo.

**Posição a Descoberto (ou Vendida)** – posição em um ativo, ou derivativo, na qual os lucros provêm de variações negativas desse ativo.

**Posição Comprada** – posição em um ativo, ou derivativo, na qual os lucros provêm de variações positivas desse ativo.

**Renda Fixa** – tipos de ativos que constituem dívida e, portanto, garantem uma rentabilidade prefixada (ou pós-fixada) sem riscos de mercado.

**Renda Variável** – tipos de ativos que constituem investimentos de capital e, portanto, oferecem uma rentabilidade sujeita a riscos de mercado.

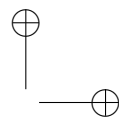
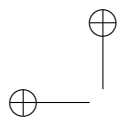
**Risco de Mercado** – riscos de flutuação de preços de ativos mostrados como uma medida de variância dessas flutuações.

**Risco Não-sistêmico** – risco implícito de cada ativo, independentemente do risco da carteira de mercado, e diversificável.

**Risco Sistemico** – risco do ativo que está vinculado ao risco da carteira de mercado e não diversificável.

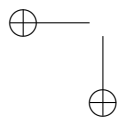
**Termo** – mercado no qual o investidor se compromete a comprar ou vender uma certa quantidade de um ativo por um preço fixado e dentro de um prazo determinado.

**Tomar Recursos** – tomar recursos emprestados por meio de instrumentos de ativos livres de risco de mercado.

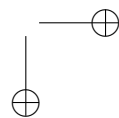


—

—



|



## Apêndice D

# Planilha Exercícios.xls

A planilha Exercícios.xls tem o objetivo de exemplificar por meio de aplicações práticas em planilha Excel os conceitos apresentados no livro, e está disponível no *site* [www.manole.com.br/analisederisco](http://www.manole.com.br/analisederisco). O universo de ativos é definido pelas ações cujas séries históricas de preços e retornos encontram-se na pasta Dados. Os nomes e os códigos dos ativos são apresentados na Tabela D.1. Além das séries históricas de preço, a planilha também trabalha com outras entradas, sempre indicadas em azul. Uma entrada importante e que aparece em todas as pastas, com exceção da pasta Dados, é a “Janela” (sempre na célula C2), a qual indica a quantidade de dias considerados.

A planilha possui sete pastas que são descritas a seguir:

### 1. Dados

Nesta pasta, estão as séries históricas de preços dos ativos considerados, bem como do IBovespa. Os dados vão de 1/8/2000 até 28/3/2002 e estão em ordem cronológica decrescente.

Os preços, entradas da planilha, vão da coluna C à L. Os retornos calculados, da coluna O à Y.

### 2. Risco e Retorno

Nesta pasta, os principais resultados são o risco e o retorno de uma carteira composta apenas por ativos de risco e também para o caso de se ter um ativo livre de risco.

Inicialmente, são calculados “Dados Básicos”, como risco e retorno dos ativos e a matriz de covariância. Na linha 9 está o vetor de retornos esperados dos ativos, calculados a partir da média dos retornos na série histórica definida pela janela. Na linha 10 estão os riscos individuais dos ativos, calculados a partir da raiz quadrada da variância. A matriz de covariância, linhas 15 a 24, indica a covariância de todos os possíveis pares de ativos.

TABELA D.1: Nomes e códigos dos ativos

Código	Ação
PETR4	Petrobras PN
TNLP4	Telemar PN
BBDC4	Bradesco PN
ELET6	Eletrobrás PNB
TSPP4	Telesp Celular PN
EBTP4	Embratel PN
VALE5	Vale PNA
ITAU4	Itaú PN
CMIG4	Cemig PN
PLIM4	Globo Cabo PN

A partir dos “Dados Básicos”, pode-se calcular o “Risco e o Retorno da Carteira”. Na linha 30, como entrada da planilha, está o vetor das composições que definem a carteira. Deve-se tomar o cuidado de fazer com que o somatório de todos os percentuais seja 100%. A partir das composições, calcula-se o retorno e o risco da carteira nas células D34 e D35, respectivamente.

Para o “Risco e o Retorno da Carteira com um Ativo de Risco”, o processo é semelhante. Entra-se com as composições na linha 41, com a ressalva de que, nesse caso, o excedente ou o restante para 100% será atribuído ao ativo sem risco. As células D46 e D47 mostram o retorno e o risco, respectivamente, para a subcarteira dos ativos de risco. A entrada da taxa de retorno do ativo livre de risco se dá, por facilidade, em base anual na célula G47. As células J46 e J47 mostram o retorno e o risco totais da carteira.

### 3. Markowitz

Nesta pasta, os principais resultados são as carteiras de mínima variância, a hipérbole para os ativos de risco, contendo uma fronteira eficiente, e a reta para o caso de se ter um ativo sem risco.

Inicialmente, são calculados os “Dados Básicos”, como o vetor do retorno dos ativos e a matriz de covariância da mesma maneira que na pasta “Risco e Retorno”. A partir dos “Dados Básicos”, pode-se calcular os “Dados Intermediários”, como as variáveis (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) e os vetores  $h$  e  $g$ , definidos em (2.7) e (2.8), respectivamente.

Como “Resultado Final”, tem-se a equação da variância em função do retorno mostrada da linha 44 à 46. Variando-se o retorno da carteira na célula D50, obtém-se o risco da carteira de mínima variância na célula

D51 e o vetor das composições da carteira de mínima variância na linha 52. O retorno, o risco e a composição da carteira de mínima variância global são apresentados no quadro, da linha 56 à 58.

O “Gráfico da Hipérbole para Ativos de Risco” é traçado a partir dos dados das colunas C (risco) e D (retorno), definidos entre as linhas 67 e 87. A planilha permite que se conheçam os valores de retorno inicial e final a partir das entradas nas células D64 e D65, respectivamente.

Da mesma forma que na pasta “Risco e Retorno”, também nesse caso é possível calcular o “Risco e o Retorno da Carteira com um Ativo de Risco”. Entretanto, a composição dos ativos de risco é dada pela carteira representativa dos ativos de risco calculada a partir dos “Dados Básicos” e “Dados Intermediários” e apresentada na coluna F, da linha 94 à 103. Como entrada da planilha, deve-se apenas informar qual o percentual de participação do ativo livre de risco por meio da célula J96. As células M92 e M93 mostram o retorno e o risco totais, respectivamente, da carteira.

O “Gráfico da Reta para Ativos de Risco e um Ativo sem Risco” é traçado a partir da equação do retorno em função do risco, mostrada nas linhas 112 e 113. O gráfico é apresentado para os pontos de risco 0,  $\sigma_T$  e  $2 \times \sigma_T$ .

#### 4. CAPM

Nesta pasta, os principais resultados são o gráfico da SML — *Security Market Line*, o cálculo da decomposição do risco em parte sistêmica e não-sistêmica e a aplicação da equação do CAPM para estimar o retorno esperado de um ativo.

Inicialmente, são calculados os “Dados Básicos”, como o retorno, o índice beta e o índice alfa da cada um dos ativos. Este último é usado para calcular o erro quadrático da avaliação do ativo, colunas R a Z, resultado utilizado no cálculo da decomposição do risco. Além disso, a taxa de retorno do ativo livre de risco aparece como entrada e são calculados o retorno e o risco da carteira de mercado. O Ibovespa foi adotado como a carteira de mercado.

O gráfico da SML — *Security Market Line* é traçado a partir dos valores de retorno e betas das colunas C e D, respectivamente, das linhas 21 a 31. O gráfico considera os pontos da tabela para os valores de beta de 0 a 2.

Quanto à “Decomposição do Risco”, o risco não-sistêmico dos ativos é calculado a partir das colunas Q a Z e mostrado na linha 41. É possível ainda enxergar a decomposição da variância de uma carteira com o número de ativos variando de 1 a 10, conforme apresentado nas linhas 44 à 47. Essa decomposição se dá na parte sistêmica (linha 46) e não-sistêmica (linha 47).

O apreçamento de um ativo é feito pela aplicação da equação do CAPM para estimar o retorno esperado de um ativo de acordo com o seu  $\beta$ , conforme mostrado nas linhas 53 e 54. Os valores do retorno do ativo livre de risco e do prêmio pelo risco são calculados e apresentados nas células E54 e G54, respectivamente. O  $\beta$  deve ser inserido na célula I54. O retorno esperado do ativo é mostrado na célula K53.

## 5. Rastreamento

Nesta pasta, os principais resultados são o erro quadrático (célula D15) e o risco não-sistêmico (célula D33). Ambos representam os valores a serem minimizados respectivamente pelos modelos computacionais de rastreamento Modelo 1 e Modelo 2. Para o Modelo 2, também é calculado o beta da carteira, o qual deve ser o mais próximo possível de 1.

Os resultados do Modelo 1 e do Modelo 2 são calculados a partir dos “Dados Básicos”. Na linha 9, como entrada da planilha, está o vetor das composições que definem a carteira. Deve-se tomar o cuidado de fazer com que o somatório de todos os percentuais seja 100%. Deve-se, portanto, simular diferentes composições de carteiras de modo que se obtenham os valores mínimos para o erro quadrático ou risco não-sistêmico, dependendo de qual modelo está sendo utilizado como critério de seleção.

## 6. Utilidade

Nesta pasta, tem-se os resultados das funções utilidade de dois investimentos: um sem risco (célula J13) e outro com risco (célula M13). Essa função utilidade é definida como  $u(x) = x^p$ , em que  $p$  é o parâmetro a ser calibrado de acordo com o perfil de risco do investidor baseado nas respostas do questionário.

Começando-se com R\$ 1,00, assume-se que o investimento de risco com retorno  $R$  possui retorno esperado  $r$ , risco (desvio-padrão)  $\sigma$  e uma distribuição uniforme. Verifica-se que  $R$  é uma variável uniforme entre os valores  $a = r - \sqrt{3}\sigma$  e  $b = r + \sqrt{3}\sigma$ . Já para o investimento sem risco, assume-se que tenha retorno  $r_f$  com probabilidade 1. Portanto, pode-se escrever o seguinte:

$$E(u(1 + R)) = \frac{(1 + b)^{p+1} - (1 + a)^{p+1}}{(p + 1)(b - 1)}$$

e

$$E(u(1 + r_f)) = (1 + r_f)^p.$$

Um investidor que aplique  $\omega$  no ativo de risco  $R$  e  $1 - \omega$  no ativo livre de risco  $r_f$  terá o seguinte valor  $V(1)$  para a carteira:

$$V(1) = (1 - \omega)(1 + r_f) + \omega(1 + R) = 1 + r_f + (R - r_f)\omega.$$

O valor da função utilidade nesse caso é:

$$E(u(V(1))) = \frac{(1 + r_f + \omega(b - r_f))^{p+1} - (1 + r_f + \omega(a - r_f))^{p+1}}{(p + 1)(b - a)\omega}.$$

Para fazer o mapeamento das respostas do questionário para o valor de  $p$ , considerou-se cada letra a) respondida valendo 1 ponto, b) valendo 2 pontos, c), 3 pontos e d), 4 pontos. Tem-se portanto um total possível de 16 pontos. Assumindo-se uma variação linear para os valores de  $p$ , em que  $p$  vale 0 para 4 pontos e 1 para 16 pontos, pode-se calcular o parâmetro  $p$  de uma pessoa que tenha respondido o questionário e acumulado um total de  $T$  pontos da seguinte forma:  $p = (T - 4)/12$ . Para evitar os casos extremos  $p = 0$  e  $p = 1$ , limitou-se o valor de  $p$  entre 0,05 e 0,95.

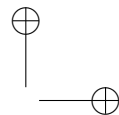
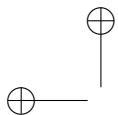
## 7. Log-ótimo

Nesta pasta, os principais resultados são a fronteira eficiente para a taxa de crescimento esperada e a composição da carteira ótima para o caso de se ter um ativo sem risco.

Inicialmente, são calculados os “Dados Básicos”, como o vetor dos retornos dos ativos e a matriz de covariância, da mesma maneira que na pasta “Risco e Retorno”. A partir dos “Dados Básicos”, pode-se calcular os “Dados Intermediários”, como os valores de  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  e  $\delta$  definidos em (7.20), (7.21), (7.22) e (7.23) respectivamente.

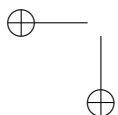
O gráfico da fronteira eficiente para a taxa de crescimento é traçado a partir dos dados das colunas C (risco) e D (crescimento), definidos entre as linhas 41 e 61. A planilha permite que se entre com os valores de risco inicial e final a partir das entradas nas células D38 e D39, respectivamente.

A composição dos ativos de risco é dada pela carteira representativa dos ativos de risco, calculada a partir dos “Dados Básico e Intermediários” e mostrada na coluna F da linha 68 à 77. Como entrada da planilha deve-se informar qual o percentual de participação do ativo livre de risco por meio da célula J70.

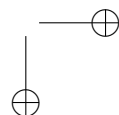


—

—



|





# Respostas dos Exercícios com a Planilha Exercícios.xls

Apresentam-se a seguir as respostas dos exercícios propostos utilizando a planilha Exercícios.xls.

## Respostas dos exercícios do Capítulo 1

### Solução do Exercício 1:

- a) Na pasta Risco e Retorno, variando-se a janela (célula C2) em 200 e 400, obtêm-se os valores para os retornos e riscos do universo de ações mostrados na Tabela D.2.

TABELA D.2: Retorno e risco para as diferentes janelas

	Retorno	Retorno	Risco	Risco
Janela	200	400	200	400
petr4	0,02%	0,10%	2,11%	2,16%
tnlp4	-0,07%	-0,06%	2,85%	2,73%
bbdc4	0,13%	0,07%	2,40%	2,59%
elet6	0,25%	0,05%	3,42%	3,25%
tspp4	-0,45%	-0,29%	3,84%	3,79%
ebtp4	-0,41%	-0,33%	4,09%	3,87%
vale5	0,10%	0,11%	1,84%	1,98%
itau4	0,02%	0,06%	2,28%	2,42%
cmig4	0,24%	0,06%	2,93%	2,79%
plim4	-0,16%	-0,34%	4,67%	4,19%

- b) Pode-se verificar, sob o ponto de vista única e exclusivamente do retorno, que o papel Eletrobrás PNB é o mais rentável na janela de 200 e o papel

Vale PNA é o mais rentável na janela de 400. Em relação à classificação de risco, percebe-se também que Vale PNA é o papel menos arriscado em ambas as janelas. Portanto, Vale PNA está entre os papéis mais indicados para o investimento. Por outro lado, Telesp Celular PN possui o pior retorno na janela de 200 e Globo Cabo PN é o pior na janela de 400. Ao mesmo tempo, Globo Cabo PN é o mais arriscado em ambas as janelas. Logo, Globo Cabo PN estaria entre os menos indicados para o investimento. Existem papéis intermediários como Itaú PN, por exemplo. Essa ação possui uma rentabilidade média e seu risco não é muito alto.

- c) A análise individual das ações ajuda a entender como o risco e o retorno de cada ativo se comporta. Entretanto, na montagem de uma carteira, a covariância entre os ativos é que determinará seu nível de risco. Dependendo da composição, Telesp Celular PN e Globo Cabo PN, apesar de arriscadas individualmente, podem funcionar na diversificação do risco.

### Solução do Exercício 2:

- a) Por tentativa e erro é possível na pasta Risco e Retorno variar os percentuais equivalentes aos valores mencionados (células D30:M30), observando o risco da carteira (célula D35). Respeitando as restrições colocadas e montando-se a carteira mostrada na Tabela D.3, chega-se à conclusão de que o papel que falta é Petrobras PN. Percebe-se que o

TABELA D.3: Composição final da carteira

Ação	(%)	R\$
petr4	30%	30.000,00
elet6	30%	30.000,00
vale5	40%	40.000,00
	100%	100.000,00

risco da carteira (1,8%) é inferior ao menor dos riscos individuais de cada um dos ativos. Essa é uma verificação prática de como o risco pode ser reduzido pela diversificação.

- b) A partir da célula D34, tem-se que o retorno esperado dessa carteira para 1 dia é 0,09%. O retorno esperado para a carteira em 1 ano é dado pela seguinte equação:

$$R_{\text{anual}} = (1 + 0,09\%)^{252} - 1 = 25\%.$$

Para uma taxa de juros anual de 18,5%, percebe-se que, sob o ponto de vista do retorno, esse investimento é indicado. Resta saber se o risco

associado compensa essa diferença de retorno, o que será verificado em exercícios futuros.

### Solução do Exercício 3:

- a) Na pasta Risco e Retorno, para um retorno de 18,5% ao ano, o retorno projetado ao dia para o ativo sem risco (janela G48) é de 0,07%. Portanto, deve-se analisar os ativos com retorno esperado acima de 0,07%. Das células D9:M9, percebe-se que os ativos são:

Bradesco PN  
Eletrobrás PNB  
Vale PNA  
Cemig PN

Qualquer um desses ativos fará com que o retorno esperado da carteira aumente.

- b) Para manter 30% em renda fixa, o investidor deve aplicar 70% em renda variável. Ao distribuir igualmente os recursos nos ativos do item anterior, ele deve alocar 17,5% (70% dividido por 4) para cada um. Ao incluir esses percentuais nas células D41:M41, obtém-se o seguinte resultado das células J46 e J47:

Retorno: 0,11%  
Risco: 0,99%.

Percebe-se que por meio da nova alocação, esse investidor aumentou o retorno esperado da sua carteira, mas incluiu o fator risco, antes não existente.

- c) O investidor quer aplicar parte dos seus recursos em ações da Vale PNA, mas, ao mesmo tempo, quer limitar o risco total da sua carteira. Para calcular o percentual a ser mantido em renda fixa, deve-se utilizar a ferramenta “Atingir metas” do Excel, fazendo com que o risco da carteira (célula J47) seja 0,50% e variando a participação de Vale PNA (célula J41) para todas as outras participações iguais a zero. O resultado é que o percentual dos investimentos a serem mantidos em renda fixa (célula G50) é 47%.

## Respostas dos exercícios do Capítulo 2

### Solução do Exercício 1:

- a) Escolhendo-se uma janela de 200 dias na pasta Markowitz, tira-se a variância da carteira de "Mínima Variância Global" (célula M43), ou seja, mínimo risco possível para o conjunto de ativos dado. No caso,  $\sigma^2 = 0,00021$  e o risco vale  $\sigma = 1,44\%$ , ou seja, bem abaixo do risco do IBovespa de 3%.

- b) Para calcular o máximo retorno possível para um risco de  $\sigma = 3\%$ , deve-se fazer uma conta inversa, ou seja, utilizar a função “Atingir metas”, estipulando a variância (célula D51) igual a  $0,00090$  ( $3\%^2$ ), variando-se o retorno (célula D56). O resultado é o retorno  $\mu = 0,73\%$ .

A composição da carteira de mínima variância (células D52:M52) para o retorno mencionado é dada pelo vetor  $\omega$ , mostrado na Tabela D.4. Algumas conclusões podem ser tiradas a partir desse resultado. Primeiro, que a soma dos valores de  $\omega$  vale 100%, como era esperado. Segundo, que a simulação permitiu tomar posições a descoberto em alguns papéis, indicados pela participação negativa. Isso na prática é possível por meio do mercado a termo, mas não é aconselhável pela baixa liquidez desse mercado. Uma solução seria reotimizar a carteira, restringindo a participação de cada ativo a um percentual maior ou igual a zero.

TABELA D.4: Carteira de mínima variância

14%	-4%	88%	28%	-29%	-59%	60%	-31%	42%	-10%
-----	-----	-----	-----	------	------	-----	------	-----	------

### Solução do Exercício 2:

- a) Ao optar por alavancar o fundo em renda variável o máximo possível, o administrador do fundo deve manter 51% em renda fixa e aplicar o restante em ações. Pressupondo que ele procure deixar o fundo o mais arriscado possível sem ferir o seu estatuto, deve concentrar suas aplicações em renda variável na compra da ação com o maior nível de risco. Para uma janela de 400 na pasta Risco e Retorno, esse ativo seria Globo Cabo PNA com risco  $\sigma = 4,19\%$  (célula M10). O risco do fundo é dado pela seguinte relação:

$$\sigma_{fundo} = 4,19\% \times 49\% = 2,05\%.$$

- b) Para montar uma carteira eficiente, ou seja, de máximo retorno dado um certo risco, ele deve usar uma carteira otimizada de Markowitz para

o caso de se ter um ativo sem risco. Com uma janela de 400 dias na pasta Markowitz, uma taxa livre de risco (célula J93) em 18,5% e uma participação no ativo sem risco (célula J96) em 51%, obtém-se o retorno da carteira (célula M92) como  $\mu = 0,81\%$ .

- c) Ao adicionar a possibilidade de investir em um ativo sem risco, espera-se que seja possível montar uma carteira com nível de mínima variância global, mas com um retorno esperado maior. Para verificar essa alternativa, toma-se o risco da carteira de mínima variância global para as condições indicadas, que vale  $\sigma = 1,56\%$  (célula D57). Para calcular o percentual a ser mantido em renda fixa, deve-se utilizar a ferramenta “Atingir metas” do Excel, fazendo com que o risco da carteira (célula M93) seja 1,56%, variando-se a participação no ativo livre de risco (célula J96). O resultado é uma participação de 82%, o que não fere o estatuto do fundo.

### Solução do Exercício 3:

- a) Ao tomar recursos a uma taxa livre de risco esse investidor está assumindo uma posição vendida ou negativa nesse ativo. Uma outra visão seria de que ele está tomando dinheiro emprestado a 18,5% para aplicar em outros ativos, com a expectativa de que esses novos ativos possam render mais que 18,5%. Nesse caso, captar R\$ 500.000,00 sobre um patrimônio de R\$ 1.000.000,00 seria o mesmo que assumir -50% da posição no ativo sem risco, de maneira que ficam 150% em renda variável. Portanto, na pasta Markowitz, coloca-se -50% para a participação do ativo sem risco (célula J96) e obtém-se os seguintes retorno (célula M92) e risco (célula M93):

$$\mu = 2,35\%$$

$$\sigma = 13,21\%.$$

- b) Como a taxa em que ele toma os recursos não tem risco, o risco final da carteira depende apenas do risco dos ativos de risco. Para dobrar o risco da carteira, basta captar 100% do patrimônio no ativo sem risco, ficando 200% para ser investido na carteira representativa dos ativos de risco.

## Respostas dos exercícios do Capítulo 3

### Solução do Exercício 1:

- a) De acordo com a pasta CAPM, é possível obter a SML — *Security Market Line* para o retorno do IBovespa (célula G13) como benchmark, ou carteira de mercado, e o retorno do ativo livre de risco (célula D15). No mesmo gráfico, pode-se colocar os pontos dos retornos (células D8:M8) pelo beta (células D9:M9) dos ativos considerados. O gráfico resultante encontra-se na Figura D.1

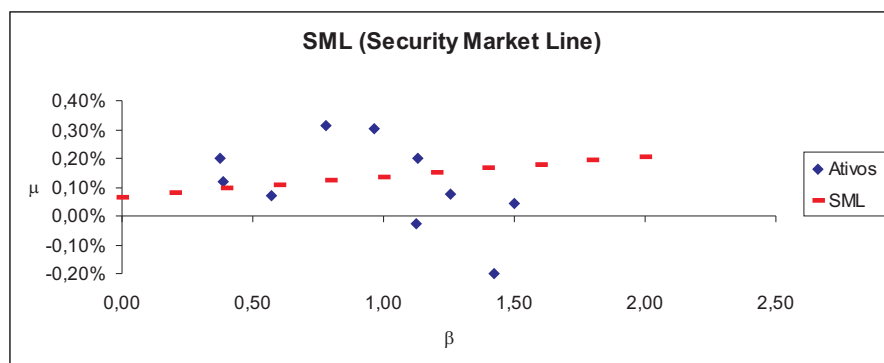


FIGURA D.1: SML — *Security Market Line*

b) Dos pontos indicados, percebe-se que há basicamente três tipos:

- b.1) Ativos bem acima da SML: ativos com retorno esperado maior do que o seu risco sistemático prevê;
- b.2) Ativos em linha com a SML: ativos com um retorno esperado condizente com o seu risco sistemático;
- b.3) Ativos bem abaixo da SML: ativos com retorno menor do que o seu risco sistemático prevê.

Naturalmente, os melhores ativos para se escolher são aqueles pertencentes ao primeiro grupo ou, no caso: Vale PNA, Bradesco PN e Cemig PN.

### Solução do Exercício 2:

- a) O risco não-sistêmico do fundo corresponde à parte do risco inerente a cada ativo e diversificável. Portanto, espera-se que, com a inclusão de novos ativos e mantendo-se entre eles uma divisão equitativa dos recursos, o risco não-sistêmico diminua tendendo a zero no limite. De fato, a pasta CAPM mostra essa situação no cálculo da variância da carteira (célula D45:M45) à medida que se incluem novos ativos de um até um total de dez. Pode-se observar, apesar do pequeno número de ativos, que a parte não-sistêmica do risco, indicada pela sua variância (célula D47:M47) diminui consistentemente de 0,000343 para o caso de um ativo chegando a 0,000045 para a carteira com 10 ativos. Quanto ao risco, pode-se perceber também, apesar do pequeno universo de ativos, que a variância (célula D46:M46) oscila em torno da variância da carteira de mercado à medida que se aumenta o número de ativos.

Essa variância vale, no limite, o produto do beta da carteira (igual a 1) pela variância da carteira de mercado.

- b) O menor dos riscos não-sistêmicos individuais dos ativos (célula D41:M41) é o de Telemar PN, cuja variância vale 0,000191. Ao se observar a evolução do risco não-sistêmico da carteira (célula D47:M47), percebe-se que já no segundo ativo a variância cai para abaixo de 0,000191, passando para 0,000133. Portanto, são necessários ao menos dois ativos, de acordo com a seqüência dada, para deixar o fundo com o risco não-sistêmico inferior ao menor dos riscos não-sistêmicos individuais dos ativos.

### Solução do Exercício 3:

- a) Na pasta CAPM, observa-se que o beta de Bradesco PN (célula F9) vale 0,78. Aplicando-se esse valor na equação do CAPM (célula I54), o investidor verifica que o retorno estimado para esse ativo (célula K53) de baixa liquidez vale 0,12%.
- b) O retorno estimado no item anterior de 0,12% é para o horizonte de um dia. Para um período de um ano, deve-se usar a seguinte relação:

$$R_{\text{anual}} = (1 + 0,12\%)^{252} - 1 = 36,03\%.$$

Como a ação vale R\$ 100,00 em um ano com um retorno projetado de 36,03% ao ano, para calcular seu preço hoje, deve-se descontar o valor futuro pelo retorno projetado. Sendo  $S$  o preço da ação, então:

$$S = \frac{100}{(1 + 36,06\%)} = 73,51.$$

Portanto, por meio do CAPM e de uma estimativa de preço futuro, o investidor pode apreçar um ativo de baixa liquidez que, no caso, vale R\$ 73,51.

## Respostas dos exercícios do Capítulo 4

### Solução do Exercício 1:

- a) De acordo com a pasta Rastreamento, é possível obter o erro quadrático (célula D15) variando-se a composição da carteira (células D8:M9). Um resultado possível seria o mostrado na Tabela D.5, com erro médio quadrático igual a 0,38%.

TABELA D.5: Composição da carteira

petr4	10%
tnlp4	10%
bbdc4	20%
elet6	10%
tspp4	10%
ebtp4	10%
vale5	10%
itau4	10%
cmig4	0%
plim4	10%

TABELA D.6: Composição da carteira

petr4	20%
tnlp4	10%
bbdc4	10%
elet6	10%
tspp4	10%
ebtp4	10%
vale5	0%
itau4	10%
cmig4	10%
plim4	10%

- b) Ainda de acordo com a pasta Rastreamento, é possível obter o risco não-sistêmico (célula D33) variando-se a composição da carteira (células D8:M9). Nesse caso, o  $\beta$  da carteira deve ficar o mais próximo possível de 1. Um resultado possível seria o mostrado na Tabela D.6, com risco não-sistêmico igual a 2,22% e  $\beta$  da carteira igual a 0,96.

### Solução do Exercício 2:

De acordo com a pasta Rastreamento, é possível obter o erro quadrático (célula D15) variando-se a composição da carteira (células D8:M9). Para determinar qual o ativo que gera o menor erro quadrático, deve-se simular, para cada ativo, seu percentual igual a 100% e o resto da carteira zerada. Ao fazer esse exercício, percebe-se que tnlp4 é o melhor ativo com um erro quadrático de 3,87%. Isso acontece graças à sua grande participação na composição do IBovespa.



## Resposta do exercício do Capítulo 5

### Solução do Exercício 1:

- a) Aplicando-se a fórmula do coeficiente de aversão ao risco, tem-se:

$$a(x) = -u''(x)/u'(x) = (1-p)/x.$$

Conclui-se, portanto, que quanto menor o parâmetro  $p$ , maior a aversão ao risco.

- b) Tem-se que o valor da carteira  $V(1)$  no instante 1 é:

$$V(1) = (1-\omega)(1+r_f) + \omega(1+R) = (1+r_f) + \omega(R-r_f).$$

Como  $R$  possui distribuição uniforme entre  $a$  e  $b$  (mais adiante será apresentado como determinar  $a$  e  $b$  a partir de  $r$  e  $\sigma$ ), tem-se que

$$\begin{aligned} E(u(V(1))) &= E(((1+r_f) + \omega(R-r_f))^p) \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (1+r_f + \omega(x-r_f))^p dx \\ &= \frac{(1+r_f + \omega(b-r_f))^{p+1} - (1+r_f + \omega(a-r_f))^{p+1}}{(p+1)(b-a)\omega}. \end{aligned}$$

Apresenta-se a seguir como relacionar  $a$  e  $b$  com  $r$  e  $\sigma$ . Segue que

$$\begin{aligned} r &= \frac{a+b}{2}, \\ \sigma &= \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a &= r - \sqrt{3}\sigma \\ b &= r + \sqrt{3}\sigma. \end{aligned}$$

- c) Para definir o valor de  $p$  de cada investidor, deve-se adotar uma metodologia de avaliação da sua disposição ao risco. Uma maneira de fazê-lo é por meio do questionário da pasta Utilidade. Segue um exemplo de respostas:

1. d) 2. a) 3. a) 4. d)

Verifica-se que o valor de  $p$  (célula J6) é 0,50 e sua função utilidade, conforme definido anteriormente, vale  $u(x) = x^{0,5}$ . Percebe-se ainda que para  $p = 1$ , tem-se que a função utilidade vale  $u(x) = x$  e o investidor só procura maximizar o valor esperado do retorno, sendo indiferente ao risco. Já para  $p$  entre 0 e 1, a função utilidade começa a ser mais seletiva na indicação dos investimentos de risco.

- d) Aplicando-se essa função utilidade para os investimentos de renda fixa (célula J13) e fundo carteira livre (célula M13) definidos anteriormente, percebe-se a partir do gráfico que o investimento de 100% no fundo carteira livre é o mais apropriado para o investidor em questão (curva crescente de 1,0863 a 1,1028).
- e) Como o risco aumentou, o melhor investimento nesse caso passou a ser aplicar cerca de 80% no ativo de risco. Variando-se  $p$  para 0,67%, a aversão ao risco diminui, e o melhor investimento volta a ser 100% no ativo de risco. Variando-se  $p$  para 0,33, aumenta-se a aversão ao risco, e o melhor investimento nesse caso é aplicar cerca de 60% no ativo de risco.

## Respostas dos exercícios do Capítulo 7

### Solução do Exercício 1:

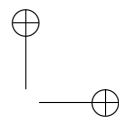
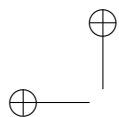
- a) Variando-se a janela (célula C2) para 100, 150 e 200 dias, percebe-se o seguinte:
- janela de 100 dias: máximo crescimento de 2,2% para uma variância de 0,04;
  - janela de 150 dias: máximo crescimento de 2,9% para uma variância de 0,05;
  - janela de 200 dias: máximo crescimento de 3,1% para uma variância de 0,06;
- b) Ao comparar esses resultados com os equivalentes na hipérbole da pasta Markowitz, percebe-se que a taxa de crescimento esperada tende a ser menor que o nível de retorno esperado para uma mesma variância.

### Solução do Exercício 2:

- a) Inserindo-se na janela (célula C2) o valor 200 e a taxa de crescimento do ativo livre de risco (célula J67) em 18%, tem-se o vetor da composição para a carteira representativa dos ativos de risco dado pela Tabela D.7.
- b) Ao comparar o resultado com a composição equivalente da pasta Markowitz, percebe-se que não há diferença, pois essa composição depende apenas dos “Dados Básicos” e dos “Dados Intermediários”, que são os mesmos nos dois casos.

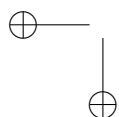
TABELA D.7: Composição da carteira tangente

$\omega_T$
-91%
-6%
656%
287%
-300%
-470%
166%
-375%
315%
-83%

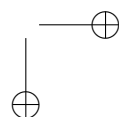


—

—



|

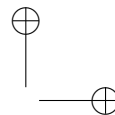
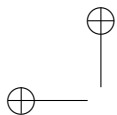


## Referências Bibliográficas

- [Assunção, 2000] Assunção, H. G. V. *Modelos Probabilísticos para Rastreamento em Carteiras de Investimento*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2000.
- [Assunção & Costa, 2000] Assunção, H. G. V. & Costa, O. L. V. Modelos de rastreamento em carteiras de investimento. *Resenha BMF*, 142, 68–77, 2000.
- [Bertsekas, 1995] Bertsekas, D. P. *Nonlinear Programming*. Massachusetts, Athena Scientific, 1995.
- [Campbell et al., 1997] Campbell, J. Y., Lo, A. W. & MacKinlay, A. C. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, Princeton University Press, 1997.
- [Costa & Nabholz, 2002] Costa, O. L. V. & Nabholz, R. B. A linear matrix inequalities approach to robust mean-semivariance portfolio optimization. In: Kontoghiorghes, E. J., Rustem, B. & Siokos, S. (eds.). *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*. Boston, Kluwer, 2002. p. 87–105.
- [Costa & Paiva, 2002] Costa, O. L. V. & Paiva, A. C. Robust portfolio selection using linear matrix inequalities. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 889–909, 2002.
- [Duarte Jr., 1999] Duarte Jr., A. M. Fast computation of efficient portfolios. *The Journal of Risk*, 4, 71–94, 1999.
- [Elton & Gruber, 1995] Elton, E. J. & Gruber, M. J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Nova York, Wiley, 1995.
- [Fama, 1976] Fama, E. F. *Foundations of Finance*. Nova York, Basic Books, 1976.
- [Farrell Jr., 1997] Farrell Jr., J. L. *Portfolio Management*. Nova York, McGraw-Hill, 1997.

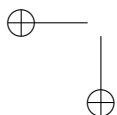
- [Hanza & Janssen, 1998] Hanza, F. & Janssen, J. The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transactions costs. *Applied Stochastics Models and Data Analysis*, 14, 275–83, 1998.
- [Howe & Rustem, 1997] Howe, M. A. & Rustem, B. A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1065–92, 1997.
- [Howe et al., 1996] Howe, M. A., Rustem, B. & Selby, M. J. P. Multi-period minimax hedging strategies. *European Journal of Operational Research*, 93, 185–204, 1996.
- [Ingersoll Jr., 1987] Ingersoll Jr., J. E. *Theory of Financial Decision Making*. Maryland, Rowman and Littlefield, 1987.
- [Jorion, 1992] Jorion, P. Portfolio optimization in practice. *Financial Analysts Journal (January-February)*, 1, 68–74, 1992.
- [Lintner, 1965] Lintner, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, 20, 587–616, 1965.
- [Luenberger, 1973] Luenberger, D. G. *Linear and Nonlinear Programming*. Massachusetts, Addison-Wesley, 1973.
- [Luenberger, 1998] Luenberger, D. G. *Investment Science*. Oxford, Oxford University Press, 1998.
- [Markowitz, 1952] Markowitz, H. M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7, 77–91, 1952.
- [Markowitz, 1959] Markowitz, H. M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Nova York, John Wiley, 1959.
- [Markowitz, 1987] Markowitz, H. M. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Nova York, Basil Blackwell, 1987.
- [Meyer, 1983] Meyer, P. L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1983.
- [Oksendal, 1998] Oksendal, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlim, Springer-Verlag, 1998.
- [Pliska, 1997] Pliska, S. R. *Introduction to Mathematical Finance*. Massachusetts, Blackwell Publishers, 1997.
- [Ris, 1996] *RiskMetrics Technical Document, 4th edition*, 1996. Disponível em: URL: <http://www.riskmetrics.com>.
- [Roll, 1992] Roll, R. A mean/variance analysis of tracking error. *The Journal of Portfolio Management*, 18, 13–22, 1992.

- [Ross, 1997] Ross, S. M. *An Introduction to Probability Models*. Boston, Academic Press, 1997.
- [Ross, 1999] Ross, S. M. *An Introduction to Mathematical Finance*. Cambridge, Cambridge University Press, 1999.
- [Rudolf et al., 1999] Rudolf, M., Wolter, H. J. & Zimmermann, H. A linear model for tracking error minimization. *The Journal of Banking and Finance*, 23, 85–103, 1999.
- [Rustem et al., 1995] Rustem, B., Becker, R. G. & Marty, W. Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24, 1591–1621, 1995.
- [Schrijver, 1996] Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. Londres, Wiley, 1996.
- [Securato, 1996] Securato, J. R. *Decisões Financeiras em Condições de Risco*. São Paulo, Atlas, 1996.
- [Sharpe, 1964] Sharpe, W. The capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19, 425–442, 1964.
- [Shiryaev, 1999] Shiryaev, A. N. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. Nova Jersey, World Scientific Pub. Co., 1999.
- [Zenios, 1993] Zenios, S. A. *Financial Optimization*. Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

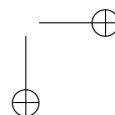


—

—



|





## Índice Remissivo

- Apreçamento, 39, 40, 48, 63, 64, 72, 107, 123, 129, 130, 145, 151, 154, 163, 168–170  
neutro ao risco, 145, 154, 168–169  
por CAPM, 39, 63–64, 145, 163, 168–169
- APT, 39, 40, 72–80  
*Arbitrage Pricing Theory*  
veja APT, 39
- Arbitragem, 39, 72, 74, 127–130, 147–151, 154, 169, 170
- Arrow-Pratt, 111–113
- Beta  $\beta$ , 42, 44–46, 49, 51, 52, 56–58, 62–64, 71, 79–82, 90, 94, 96, 97, 99, 101, 105, 141, 191–194, 225, 227, 228
- Black  
veja CAPM, 47
- Capital Asset Pricing Model*  
veja CAPM, 39
- Capital Market Line*  
veja CML, 41
- CAPM, 40–58  
a fórmula do CAPM revista, 166–167  
apreçamento neutro ao risco e por CAPM, 168–169  
duas taxas livres de risco, 53–58  
maior taxa para tomar emprestado que para emprestar, 53–58  
modelo de Black, 47–49  
modelo de Sharpe-Lintner, 42–47  
posição vendida na taxa livre de risco proibida, 49–53  
relação entre o CAPM e o APT, 79–80
- Carteiras, 4  
carteira de mercado, 39–42, 44, 48–51, 54, 56, 58, 61, 71, 79, 81, 82, 90, 94, 225–227  
carteira de mínima variância global, 28, 29, 37, 82, 87, 217, 225  
carteira tangente, 35, 39–42, 49, 53, 173, 188, 190, 194  
carteira zero-beta, 30, 31, 49, 51, 56, 82  
carteiras com 1 ativo de risco e 1 sem risco, 14  
carteiras com 2 ativos de risco, 7–13  
carteiras de mínima variância, 26, 28, 30, 33, 34, 37, 48, 88, 126, 168, 224  
carteiras eficientes, 29, 30, 33, 34, 36–38, 42, 45, 48–53, 56–58, 81, 82, 89, 106, 182, 186, 188, 189, 224  
estratégia de investimento  $H_i$ , 4, 40, 75, 119, 120, 123, 125, 127–129, 147, 150–152, 154, 155, 157–159, 166, 175, 176

- proporção  $\omega_i$  no ativo  $i$ , 4  
 valor final da carteira  $V(1)$ , 5  
 valor inicial da carteira  $V(0)$ , 4  
 vetor com proporção nos ativos de risco  $\omega$ , 5  
 CML, 41, 42, 61, 62  
 Coeficiente de correlação  $\rho$ , 200  
     perfeitamente negativamente correlacionadas, 200  
     perfeitamente positivamente correlacionadas, 200  
     variáveis descorrelacionadas, 200  
 Contrato contingenciável, 151, 152, 154–156, 166  
 Covariância, 200  
     matriz covariância, 202  
 Densidade de probabilidade, 195, 198, 199, 201, 202  
 Distribuição de probabilidade, 195, 199  
 Equilíbrio, 39–83, 190–193  
 Fronteira eficiente, 17, 26–31, 33, 37, 41, 43, 45, 47, 49, 53, 58, 89, 106, 173, 180, 181, 184, 188, 194  
 Fronteira eficiente geral, 32–36, 185, 194  
 Independência, 195, 196, 199, 200, 203  
 Lagrangiano, 20, 23, 32, 87, 124, 158, 164, 179, 180, 185, 206  
     multiplicadores de Lagrange, 17, 105, 122, 158, 170, 206  
 Linearmente independentes, 206  
 Log-ótimo, 129, 131–140, 173–187  
 Markowitz, 17–38, 85  
     carteiras com apenas ativos de risco, 18–25  
     carteiras com ativos de risco e 1 ativo livre de risco, 31–32  
     modelo intertemporal, 173–194  
 Martingale, 146–149, 158–163, 169, 170  
 Média-Variância, 1–17, 20, 32, 39–41, 47, 145, 163, 166, 168  
 Mercado completo, 145, 155, 156, 158, 160, 163, 169  
 Otimalidade, 206  
     condições necessárias de 1ª ordem, 20, 32, 87, 106, 123–125, 157, 164, 179, 180, 184, 185, 206  
     condições necessárias de 2ª ordem, 21, 209  
 Otimização, 205–209  
 Planilha Exercícios.xls  
     respostas, 221–230  
 Posições a descoberto, 4, 22, 36, 38, 47, 50, 53, 54, 56, 75, 119, 224, 225  
 Posições vendidas, 213  
     veja Posições a descoberto, 4  
 Preço de estado, 158  
 Probabilidade, 195–203  
     neutra ao risco, 107, 108, 145, 146, 149, 151–158, 160, 163, 164, 169, 170  
 Rastreamento, 85–106  
     mínima variância, 86–90  
     programação linear, 90–93  
     simulações, 93–104  
 Realizável, 151, 152, 154–156, 166  
 Replicante, 151, 155, 166  
 Retorno, 1  
     retorno da carteira  $P$ , 5  
     retorno esperado  $r_i$ , 2

retorno esperado da carteira  $\mu$ ,  
5  
retorno  $R_i$  do ativo  $i$ , 2  
vetor de retornos  $R$ , 5  
vetor de retornos esperados  $r$ ,  
5

Risco, 1  
correlação negativa perfeita, 9–  
10  
correlação positiva perfeita, 7–  
8  
correlação qualquer, 11–13  
EWMA, 4  
matriz de covariância dos re-  
tornos  $\Sigma$ , 5  
risco  $\sigma_i$  do ativo  $i$ , 2  
risco não-sistêmico, 39, 58, 59,  
72, 80, 81, 85, 99, 226–228  
risco sistêmico, 39, 58, 67, 80,  
81, 85, 98, 226  
variância da carteira  $\sigma^2$ , 5

#### *Security Market Line*

veja SML, 45

#### Sharpe-Lintner

veja CAPM, 42

SML, 45, 47, 62, 80, 225, 226

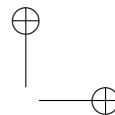
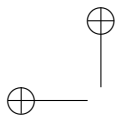
#### Utilidade, 107–144

a função  $ln$ , 131–140  
aversão ao risco, 108–110  
coeficiente de aversão ao risco,  
111–115  
montagem de uma função uti-  
lidade, 115–119  
otimização de uma função uti-  
lidade, 119–126

Variável aleatória, 195–203

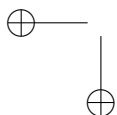
Variância, 198

Vetor formado por 1's e denotado  
por  $e$ , 5



—

—



|

