CAPITOLO 1

Successioni Numeriche

Lo scopo di questo capitolo è di studiare il comportamento di un'espressione dipendente da un parametro naturale n per n sempre più grande, cioe "*per n tendente a $+\infty$*".

Iniziamo con la definizione rigorosa di una successione.

Definizione 1.1. Una *successione numerica* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una regola che fa corrispondere a ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico $a(n) \in \mathbb{R}$.

Generalmente si usa la notazione $a_n := a(n)$. Inoltre si rappresenta una successione elencando tutti i valori assunti in ordine crescente oppure attraverso una formula che definisce gli elementi a_n.

Esempio. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) := \frac{1}{n+1}$ definisce una successione che si può rappresentare come

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right) \qquad \text{oppure} \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Può accadere che una formula che definisce gli elementi a_n di una successione non ha senso per alcuni valori di n, cioè il dominio di a non è tutto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ma soltanto un sottoinsieme della forma $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \ldots\}$. Comunque anche in questo caso si parla di successioni.

Esempio. La formula $a_n := \frac{1}{n\cdot(n-3)}$ definisce una successione $a : \{4, 5, 6, 7, \ldots\} \to \mathbb{R}$ (il problema è che qui il denominatore si annulla per $n = 0$ e $n = 3$ e quindi non sono definiti gli elementi a_0 e a_3). In questo caso si scrive

$$(a_n)_{n\geq 4} = \left(\frac{1}{n\cdot(n-3)}\right)_{n\geq 4}$$

Altri esempi di successioni sono

- $(2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$ (successione dei numeri primi),
- $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$,
- $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^0, q^1, q^2, q^3, \ldots)$ per un $q \in \mathbb{R}$ fisso (*successione geometrica*).

Convergenza, Divergenza e Irregolarità per Successioni

Come già accennato sopra vogliamo studiare il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento degli elementi a_n di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per n sempre più grande.

Consideriamo alcuni

ESEMPI.
- Per la successione $(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ gli elementi tendono a $l = 0$ se n diventa sempre più grande.
- Per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ gli elementi superano qualsiasi valore fissato se n diventa sempre più grande.
- Per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$ gli elementi oscillano tra i valori -1 e 1.

Nelle seguenti definizioni formalizziamo questi tre tipi di comportamenti per le successioni.

Definizione 1.2 (*Successione convergente*). (i) Si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *convergente al limite* $l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l - a_n| < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0.$$

In questo caso si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{a_n \to l \text{ per } n \to +\infty}$$

(ii) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si chiama successione *infinitesima*.

<u>Osservazione</u>. Per una successione convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale che $a_n \to l$ per $n \to +\infty \iff l - a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

<u>Esempio</u>. Verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dimostrazione. È da verificare che per $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ segue che

$$\frac{1}{n} = \left|0 - \frac{1}{n}\right| < \varepsilon.$$

Però, $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, quindi scegliendo $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ risulta

$$\left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq n_0,$$

cioè $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. In altre parole $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ è infinitesima. □

<u>PROPOSIZIONE</u> 1.3 (*Unicità del limite*). *Il limite di una successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo[1] supponiamo che esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \qquad \text{e} \lim_{n\to+\infty} a_n = l_2$$

con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$. Allora $\varepsilon := \frac{|l_1-l_2|}{4} > 0$ e quindi esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l_1 - a_n| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_1 \qquad \text{e} \qquad |l_2 - a_n| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_2$$

Usando la disuguaglianza triangolare risulta per $N := \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_N) + (a_N - l_2)| \leq |l_1 - a_N| + |a_N - l_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \tfrac{|l_1-l_2|}{2}. \end{aligned}$$

Dividendo per $|l_1 - l_2| > 0$ segue $1 < \frac{1}{2}$ ↯. Quindi il limite è unico. $\square$

<u>ESERCIZIO</u>. Utilizzando la definizione di convergenza verificare che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

[1]Per i tre principali modi di dimostrazioni cfr. pagina 286.

Definizione 1.4 (*Successione divergente*). Si dice che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *diverge a* $+\infty$, se per ogni $M > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty;$$
- *diverge a* $-\infty$, se per ogni $M < 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < M$ per ogni $n \geq n_0$ e in questo caso si scrive
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to -\infty \text{ per } n \to +\infty.$$
- *diverge* se diverge a $+\infty$ oppure $-\infty$.

Per esempio $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite finito (cioè se converge) oppure infinito (cioè se diverge), allora si dice *regolare*. Rimane quindi la classe delle successioni che non ammettono limite.

Definizione 1.5 (*Successione irregolare*). Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è convergente né divergente allora si dice *irregolare* (oppure *oscillante*).

Per esempio la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare. Più in generale consideriamo il seguente

<u>Esempio</u> (*Successione geometrica*). Per $q \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := q^n$. Allora la *successione geometrica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) diverge a $+\infty$ se $q > 1$,

(ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $q = 1$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_0 = 1$,

(iii) è infinitesima se $|q| < 1$,

(iv) è irregolare se $q \leq -1$.

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto (i). Per ipotesi $q > 1$ e quindi $q - 1 > 0$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue

$$q^n = \big(1 + (q-1)\big)^n \geq 1 + n \cdot (q-1) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ora per $M > 0$ scegliamo $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 > \frac{M-1}{q-1}$. Allora risulta che

$$q^n \geq 1 + n \cdot (q-1) \geq 1 + n_0 \cdot (q-1) > 1 + \frac{M-1}{q-1} \cdot (q-1) = M \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$

Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ per ogni $q > 1$. $\square$

Consideriamo un'altra successione importante.

<u>Esempio</u> (*Successione armonica*). Per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso definiamo $a_n := n^\alpha$. Allora la *successione armonica* $(a_n)_{n\geq 1}$

(i) diverge a $+\infty$ se $\alpha > 0$,

(ii) è costante (cioè $a_n = a_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$) se $\alpha = 0$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a_1 = 1$,

(iii) è infinitesima se $\alpha < 0$,

Il prossimo risultato dà una condizione necessaria per la convergenza di una successione.

<u>Proposizione</u> 1.6. *Una successione convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che*

$$m \leq a_n \leq M \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Se $l := \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ allora per $\varepsilon = 1$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - a_n| < 1$, cioè $l - 1 < a_n < l + 1$, per ogni $n \geq n_0$. Quindi per

$$m := \min\{l-1, a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\} \quad \text{e} \quad M := \max\{l+1, a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$$

segue $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. □

Il contrario della proposizione precedente non vale, cioè una successione limitata non deve essere convergente, basta considerare la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è limitata ma non converge.

Cerchiamo ora modi per semplificare lo studio della convergenza di una successione senza dover verificare direttamente la definizione.

Regole per il Calcolo dei Limiti

PROBLEMA. Data una successione "*complicata*" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, studiare la sua convergenza.

Una soluzione parziale per questo problema fornisce il seguente risultato

PROPOSIZIONE 1.7 (*Regole per il calcolo dei limiti*). *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti con $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$ per $n \to +\infty$. Allora per $n \to +\infty$*

(i) $a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$;

(ii) $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$;

(iii) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l_1}{l_2}$ *se* $l_2 \neq 0$;

(iv) $(a_n)^{b_n} \to {l_1}^{l_2}$ *se* $l_1 > 0$;

(v) $|a_n| \to |l_1|$.

Dimostrazione. Verifichiamo solo (ii) cioè che $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$ per $n \to +\infty$:
Visto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, per la proposizione precedente esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre poiché $a_n \to l_1$ e $b_n \to l_2$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|l_1 - a_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \qquad \text{e} \qquad |l_2 - b_n| < \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Quindi con la disuguaglianza triangolare segue

$$\begin{aligned}
|l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot b_n| &= \big|(l_1 \cdot l_2 \overbrace{-a_n \cdot l_2) + (a_n \cdot l_2}^{=0} - a_n \cdot b_n)\big| \\
&\leq |\, l_1 \cdot l_2 - a_n \cdot l_2 \,| + |\, a_n \cdot l_2 - a_n \cdot b_n \,| \\
&= |l_1 - a_n| \cdot |l_2| + |a_n| \cdot |l_2 - b_n| \\
&\leq \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \cdot |l_2| + M \cdot \frac{\varepsilon/2}{M + |l_2|} \\
&= \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{|l_2|}{M + |l_2|}}_{\leq 1} + \varepsilon/2 \cdot \underbrace{\frac{M}{M + |l_2|}}_{\leq 1} \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0,
\end{aligned}$$

cioè $a_n \cdot b_n \to l_1 \cdot l_2$ per $n \to +\infty$. □

Esempi. • Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1}.$$

L'espressione rappresenta il rapporto di due successioni ma scritto così non si può ancora utilizzare la regola per $\frac{a_n}{b_n}$ poiché sia il numeratore sia il denominatore divergono. Comunque basta mettere in evidenza nel numeratore e nel denominatore la quantità che cresce più rapidamente, in questo caso n^2. Utilizzando le regole per somma, differenza, prodotto e rapporto otteniamo

$$\frac{7n^2-2n+3}{-3n^2+n-1} = \frac{n^2\cdot\overbrace{(7-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2})}^{\to 7-2\cdot 0+3\cdot 0^2=\mathbf{7}}}{n^2\cdot\underbrace{(-3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}_{\to -3+0-0^2=\mathbf{-3}}} \to -\frac{7}{3}$$

• Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+3}-\sqrt{n}.$$

Non si può applicare direttamente la regola per le differenze poiché i due termini *divergono* entrambi. Per procedere si sfrutta la formula $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+3}-\sqrt{n} &= \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \to \frac{3}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

Qui l'ultimo passaggio viene giustificato dalla seguente

<u>OSSERVAZIONE</u>. Le regole per il calcolo dei limiti si possono estendere alle successioni regolari se al limite si ottiene una delle seguenti *forme determinate*: Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\pm\infty + a := \pm\infty \qquad \pm\infty \cdot a := \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases} \qquad \frac{a}{\pm\infty} := 0$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) := \pm\infty \qquad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) := +\infty \qquad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) := -\infty$$

$$q^{+\infty} := \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} \qquad q^{-\infty} := \begin{cases} 0 & \text{se } q > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < q < 1 \end{cases} \qquad q^0 := 1 \text{ se } q > 0$$

Per esempio, se $a_n \to -3$ e $b_n \to +\infty$ allora $a_n \cdot b_n \to -3 \cdot (+\infty) = -\infty$ oppure $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{-3}{+\infty} = 0$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. La forma determinata $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ si può generalizzare: Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, cioè esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \le a_n \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ per ogni successione divergente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $a_n \cdot c_n \to 0$ per ogni successione infinitesima $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi possiamo definire altre 2 forme determinate

$$\frac{\text{“limitata”}}{\pm\infty} = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{“limitata”} \cdot 0 = 0.$$

Esempi concreti sono dati da

$$\frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad \text{e} \qquad \cos(n^2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0.$$

in quanto $-1 \le \sin(x), \cos(x) \le 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{n} \to +\infty$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ per $n \to +\infty$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Con le forme determinate abbiamo esteso le operazioni algebriche in alcuni casi per gli elementi dei *numeri reali estesi*

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Non si possono però definire tutte le operazioni tra elementi in $\overline{\mathbb{R}}$, per esempio le seguenti operazioni rappresentano *forme indeterminate*:

$$(\pm\infty) - (\pm\infty) \qquad 0 \cdot (\pm\infty) \qquad \frac{0}{0}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{a}{0} \text{ per ogni } a \in \mathbb{R} \qquad 1^{\pm\infty}$$

$$(\pm\infty)^0 \qquad 0^0$$

Quindi se per la composizione di due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al limite otteniamo una forma indeterminata, allora non si può dire nulla sul comportamento della composizione avendo soltanto informazioni sulla convergenza o divergenza di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Esempio</u>. Verifichiamo che $(+\infty)-(+\infty)$ è indeterminata, cioè sapendo soltanto che $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ non si può dire nulla sul comportamento di $a_n - b_n$ per $n \to +\infty$. Basta considerare $b_n := n$ e

- $a_n := n \Rightarrow a_n - b_n = 0 \to 0$, cioè la differenza converge;
- $a_n := n^2 \Rightarrow a_n - b_n = n^2 - n = n^2(1 - \frac{1}{n}) \to +\infty \cdot 1 = +\infty$, cioè la differenza diverge;
- $a_n := n + (-1)^n \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$, cioè la differenza è irregolare.

Le regole per il calcolo dei limiti manifestano che il concetto di limite è compatibile con le operazioni algebriche.

<u>Esercizio</u>. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \tfrac{2}{n}}\right).$$

(Risultato $l = \frac{\sqrt{5}}{5}$).

Continuiamo studiando il comportamento tra

Limiti e Ordinamento

<u>TEOREMA</u>. *Se* $a_n \to l_1$ *e* $b_n \to l_2$ *per* $n \to +\infty$ *con* $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $a_n \le b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora*

- $l_1 \le l_2$ (Teorema del Confronto);
- *se inoltre* $a_n \le c_n \le b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $l_1 = l_2$, *allora anche* $c_n \to l_1$ *per* $n \to +\infty$ (Teorema dei Carabinieri).

In particolare il Teorema dei Carabinieri è molto utile per studiare successioni complicate $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incastrandole tra 2 successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ più semplici (cioè tra i due carabinieri).

<u>ESEMPI</u>. • Vogliamo studiare la convergenza della successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$c_n := \left(\frac{1}{3+\cos(n^2)}\right)^n.$$

Allora,

$$-1 \le \cos(n^2) \le 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3-1 \le 3+\cos(n^2) \le 3+1 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^n \le \big(3+\cos(n^2)\big)^n \le 4^n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi segue per gli inversi

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{=:a_n\to 0} \le \left(\frac{1}{3+\cos(n^2)}\right)^n \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=:b_n\to 0} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e di conseguenza $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

- Verifichiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0.$$
Consideriamo prima il caso $a > 1$ e poniamo $d_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ cioè $\sqrt[n]{a} = 1 + d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza di Bernoulli segue
$$\underbrace{(1+d_n)^n}_{=a} \geq 1 + n \cdot d_n \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{a-1}{n}}_{\to 0} \geq d_n \geq \underbrace{0}_{\to 0} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$
Di conseguenza $d_n \to 0$ e quindi $\sqrt[n]{a} = 1 + d_n \to 1 + 0 = 1$ per $n \to +\infty$. Se $0 < a < 1$ poniamo $\tilde{a} := \frac{1}{a} > 1$. Da sopra segue quindi
$$\sqrt[n]{\tilde{a}} \to 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\tilde{a}}} \to \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

<u>Osservazione</u>. Il concetto di limite per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è collegato al comportamento degli elementi a_n per n sempre più grande. Quindi i primi elementi non influiscono sulla esistenza oppure sul valore del limite. Nel seguito diremo che una proprietà per una successione vale *definitivamente*, se esiste un n_0 tale che tale proprietà vale per $n > n_0$.

Per esempio la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n - 1000)_{n\in\mathbb{N}}$ è positiva definitivamente poiché $a_n > 0$ per ogni $n > 1000 =: n_0$. Invece $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *non* è positiva definitivamente.

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- Dal teorema del confronto segue che per una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente al limite l e con $a_n \in [\alpha, \beta]$ definitivamente vale $l \in [\alpha, \beta]$. In particolare segue il *Teorema della permanenza del segno:* Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è positiva definitivamente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ allora $l \geq 0$.

- Non vale l'osservazione precedente per intervalli aperti oppure disuguaglianze strette. Per esempio, se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ allora <u>NON</u> segue $l > 0$!! Come controesempio basta considerare

$$a_n := \frac{1}{\underbrace{n+1}_{>0\,\forall\, n\in\mathbb{N}}} \to \underbrace{0}_{\not>0} = l \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

- Abbiamo detto che $\frac{a}{0}$ anche per $a \neq 0$ è una forma indeterminata. Tuttavia si potrebbe pensare che sia invece determinata con il valore ∞. Il problema è che non si può decidere il segno dell'infinito. Si possono seguire 2 strade:

  - Si introduce un terzo infinito ∞ senza segno e si pone $\frac{a}{0} := \infty$ per ogni $a \neq 0$, oppure

  - si considerano soltanto gli infiniti $-\infty$ e $+\infty$ (come faremo nel seguito) e di conseguenza $\frac{a}{0}$ diventa una forma indeterminata come si vede dal seguente esempio: $a_n := \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ ma $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ è oscillante.

Il problema posto nell'ultima osservazione si può risolvere parzialmente introducendo *infinitesimi* con segno.

Definizione 1.8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima, cioè $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Se

- $a_n \geq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \to 0^+$ (oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0^+$),
- $a_n \leq 0$ definitivamente, allora scriviamo $a_n \to 0^-$ (oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0^-$).

Così otteniamo altre due forme determinate

$$\frac{a}{0^\pm} := \pm\infty \quad \text{se } a > 0, \qquad \frac{a}{0^\pm} := \mp\infty \quad \text{se } a < 0.$$

Inoltre abbiamo

$$\frac{a}{\pm\infty} := 0^\pm \quad \text{se } a > 0, \qquad \frac{a}{\pm\infty} := 0^\mp \quad \text{se } a < 0.$$

Con queste definizioni le regole per il calcolo dei limiti restano validi. Per esempio

- $a_n \to 2,\ b_n \to 0^- \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{2}{0^-} = -\infty$,
- $a_n \to -1,\ b_n \to +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{-1}{+\infty} = 0^-$.

<u>Problema</u>. Per studiare la convergenza di una successione abbiamo finora avuto bisogno di avere almeno un *candidato* per il suo limite.

Per esempio, come vedremo tra poco la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ma ciò non si può dimostrare usando la definizione oppure le regole per il calcolo dei limiti.

Per risolvere questo problema cerchiamo quindi criteri che implicano la convergenza senza fare riferimento al limite. Prima ci serve una

Definizione 1.9. Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice

- *crescente*, se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *decrescente*, se $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- *monotona*, se è crescente oppure decrescente.

Il seguente risultato è molto importante.

Teorema 1.10 (*Regolarità delle successione monotone*). *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona, allora è regolare, cioè ammette limite. Questo limite è finito, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, se e solo se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Inoltre vale*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \textit{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ è crescente,} \\ \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \textit{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ è decrescente.} \end{cases}$$

In particolare, ogni successione limitata e monotona è convergente.

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto che una successione crescente e limitata converge. Per la completezza di $\mathbb{R}$ esiste $l := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora usando la caratterizzazione dell'estremo superiore segue che

$$\begin{aligned} &a_n \leq l \iff 0 \leq l - a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \\ &\exists\, a_{n_0} \text{ tale che } l - \varepsilon < a_{n_0} \iff l - a_{n_0} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Usando inoltre la crescenza di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ otteniamo

$$0 \leq l - a_n \leq l - a_{n_0} < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_0$$

e quindi $|l - a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$. □

Per dimostrare l'importanza di questo risultato consideriamo due applicazioni. Inoltre sarà utilizzato per dimostrare il "Teorema degli Zeri", cfr. pagina 98.

Il Metodo di Erone. Per $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ definiamo la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come

$$x_0 := 1,$$
$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)x_n + \frac{a}{{x_n}^{k-1}}\right).$$

In questo caso non è data una formula per calcolare direttamente x_n per un valore $n \in \mathbb{N}$, ma una regola per calcolare il termine successivo x_{n+1} della successione conoscendo quello precedente x_n. Questo modo di definire una successione si dice *per ricorrenza* ed è legata al principio di induzione. Nel seguente grafico è riportato come viene costruito x_{n+1} da x_n:

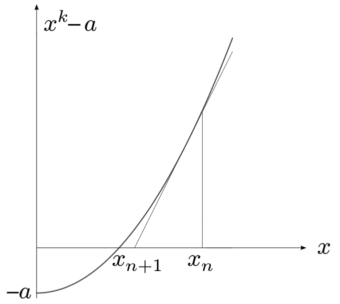

FIGURA 3. Il metodo di Erone.

si traccia in $x = x_n$ la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^k - a$ che poi interseca l'asse-x in x_{n+1} (come verificheremo a pagina 114). In particolare si vede che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- definitivamente decrescente (per $n \geq 1$), e
- limitata ($x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Quindi per il teorema precedente il limite

$$\lim_{n\to+\infty} x_n =: r \in [0, +\infty)$$

converge. Per calcolare r notiamo che anche $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = r$ e poi usiamo le regole per il calcolo dei limiti: Per $n \to +\infty$ vale

$$r \leftarrow x_{n+1} = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)\underbrace{x_n}_{\to r} + \frac{a}{\underbrace{{x_n}^{k-1}}_{\to r^{k-1}}}\right) \to \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}}\right),$$

quindi

$$r = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1)r + \frac{a}{r^{k-1}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad r^k = a,$$

cioè abbiamo “costruito”

$$\boxed{r =: \sqrt[k]{a} \quad = \text{radice } k\text{-esima di } a.}$$

Interesse Composto e il Numero "e" di Nepero. Se un capitale di 1 € viene investito a 100% di interesse annuale, allora dopo un anno il capitale è di €

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

se l'interesse viene pagato ogni n-esimo dell'anno. Quindi ci si può chiedere che cosa succede se gli interessi vengono pagati dopo periodi sempre più brevi: per esempio dopo

- ogni mese: $n = 12 \Rightarrow a_{12} = 2,61303529\ldots$,
- ogni giorno: $n = 365 \Rightarrow a_{365} = 2,71456748\ldots$,
- ogni ora: $n = 8760 \Rightarrow a_{8760} = 2,71812669\ldots$,
- ogni secondo: $n = 31536000 \Rightarrow a_{31536000} = 2,71828178\ldots$

etc.

Visto che per n crescente si accumulano sempre più interessi composti, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- crescente, e
- limitata in quanto $a_n \in [2,3]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (usare la formula del binomio di Newton).

Quindi per il teorema precedente sulla convergenza delle successioni monotone $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e si pone

$$\boxed{e := \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \textit{numero di Nepero.}}$$

Per il teorema del confronto vale $e \in [2,3]$. Si può verificare che $e \notin \mathbb{Q}$ e

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Confronto tra Successioni

Definizione 1.11. Se per due successioni si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono *asintotiche* e si scrive $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$.

OSSERVAZIONI.

- Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e in tal caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$;
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge e in tal caso $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$;
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare $\iff$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare.
- "$\sim$" è una *relazione di equivalenza* sull'insieme delle successioni, cioè
  - $a_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$ (riflessivita),
  - $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ per $n \to +\infty$ (simmetria),
  - $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$ per $n \to +\infty$ (transitività).

Il seguente principio è spesso utile per semplificare il calcolo dei limiti.

TEOREMA 1.12 (*Principio di Sostituzione*). *Se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n$ per $n \to +\infty$, allora*

$$\frac{a_n \cdot b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n} \qquad \textit{per } n \to +\infty.$$

In particolare $a_n \cdot b_n \sim a'_n \cdot b'_n$ e $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a'_n}{b'_n}$ per $n \to +\infty$.

Quindi in *prodotti* e *rapporti* si possono sostituire successioni con altre successioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

<u>ESEMPI</u>. • $2n^3 - 5n^2 - 3n + 11 \sim 2n^3$ per $n \to +\infty$ poiché

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{2n^3} = 1 - \frac{5}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{11}{2n^3} \to 1 - 0 - 0 + 0 = 1 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

- $n + 5 \sim n$ poiché $\frac{n+5}{n} = 1 + \frac{5}{n} \to 1$ per $n \to +\infty$. Quindi per il principio di sostituzione segue che $(n+5)^3 \sim n^3$ e

$$\frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3} \sim \frac{2n^3}{n^3} = 2 \to 2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^3 - 5n^2 - 3n + 11}{(n+5)^3}.$$

è doveroso fare la seguente

<u>OSSERVAZIONE</u>. Il principio di sostituzione $\boxed{\textit{!!! NON !!!}}$ vale per somme, differenze o potenze, cioè se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$ allora

- $\not\Rightarrow$ $a_n + b_n \sim a'_n + b'_n$ per $n \to +\infty$,
- $\not\Rightarrow$ $a_n - b_n \sim a'_n - b'_n$ per $n \to +\infty$,
- $\not\Rightarrow$ $(a_n)^{b_n} \sim (a'_n)^{b'_n}$ per $n \to +\infty$,

<u>CONTROESEMPI</u>. • (per la somma) $a_n := n + 1 \sim n =: a'_n$ e $b_n := -n \sim -n =: b'_n$ ma $a_n + b_n = (n+1) - n = 1$ e $a'_n + b'_n = n - n = 0$ non sono asintotiche in quanto ammettono limiti diversi.

- (per la potenza) $a_n := 1 + \frac{1}{n} \sim 1 =: a'_n$ e $b_n := n \sim n =: b'_n$ ma $(a_n)^{b_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $(a'_n)^{b'_n} = 1^n = 1$ non sono asintotiche sempre poiché ammettono limiti diversi.

Concludiamo questo capitolo con un criterio che è utile per studiare limiti che coinvolgono radici n-esime.

<u>PROPOSIZIONE</u> 1.13. *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione tale che* $a_n > 0$ *definitivamente e* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ *esiste, allora segue che anche*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

<u>ESEMPIO</u>. Sia $a_n = n$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

<u>ESERCIZIO</u>. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (Suggerimento: $n = \sqrt[n]{n^n}$)