Esercizi: Foglio 2

Alessia Nota

April 9, 2023

Esercizio 0.1 Un'urna contiene sei palline numerate da 1 a 6. Ne vengono estratte 3 senza reinserimento.

a) Calcolare quante sono le possibili terne ordinate.

b) Calcolare quante sono le terne ordinate che contengono il 2 in seconda posizione.

c) Calcolare quante sono le possibili terne ordinate che contengono il 2.

d) Rispondere ai quesiti a), b), c) se l'estrazione avviene con reimmissione.

e) Rispondere ai quesiti a), c) se l'estrazione avviene senza reimmissione e non interessa l'ordine.

Soluzione:
a) Due terne ordinate si considerano diverse se differiscono per almeno una pallina o per l'ordine in cui le palline compaiono nel campione. Quindi, dato che le palline sono tra di loro distinguibili e le estrazioni avvengono senza reimmissione, il numero delle possibili terne ordinate di numeri è dato dal numero di disposizioni semplici di 6 oggetti distinti di classe 3:

$$D_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 120$$

In alternativa, si poteva risolvere l'esercizio utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio.
b) Il numero delle terne che contengono il 2 in seconda posizione è dato dal numero di disposizioni semplici di 5 oggetti distinti di classe 2:

$$D_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 54 = 20.$$

c) In ciascuna delle terne ordinate di numeri contenenti il 2, questo ultimo numero può assumere la prima, la seconda o la terza posizione. Si supponga che il 2 occupi la seconda posizione. Come si osserva dallo svolgimento del punto precedente, il numero di possibili terne in cui il 2 occupa la seconda posizione è 20. Allo stesso risultato si arriva ripercorrendo i passi fatti nello svolgimento del punto precedente anche nel caso in cui il 2 occupi la prima o la terza posizione. Si ha così che il numero di terne possibili che contengono il 2 è dato da:

$$20 + 20 + 20 = 6.$$

d) Nel caso di estrazioni con reimmissione, due terne ordinate sono diverse se differiscono:

- per almeno una pallina;

- per l'ordine in cui le palline compaiono;
- per il numero di volte in cui si ripete una pallina.

In tal caso:

caso a) il numero di possibili terne ordinate è dato dal numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 3 :

$$D^r_{6,3} = 6^3 = 216.$$

caso b) il numero delle possibili terne ordinate che contengono il 2 in seconda posizione è dato dal numero di disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 2:

$$D^r_{6,2} = 6^2 = 36.$$

caso c) Osserviamo che il numero delle possibili terne ordinate che contengono il due può essere calcolato come:

nr. di possibili terne ordinate − nr. di possibili terne che non contengono il due.

Il numero delle terne che non contengono il due coincide con il numero delle possibili terne che si possono ottenere estraendo con reimmissione da un'urna contenente 5 palline così numerate: $1, 3, 4, 5, 6$. Il numero delle terne che non contengono il due è di conseguenza dato dal numero di disposizioni con ripetizione di 5 oggetti distinti di classe 3: $D^r_{5,3} = 53 = 125$. Si ha dunque che il numero di possibili terne ordinate che contengono il 2 è dato da:

$$D^r_{6,3} - D^r_{5,3} = 216 - 125 = 91.$$

Esercizio 0.2 Una squadra di calcio schiera ad ogni partita 1 portiere, 5 difensori e 5 attaccanti. Una società sceglie in modo casuale ciascun gruppo di giocatori tra 2 portieri, 8 difensori e 12 attaccanti disponibili.

a) Quante sono le formazioni possibili?

b) Se chiamiamo A e B due attaccanti, quante sono le formazioni in cui giocano entrambi?

c) Se C è un difensore, quante sono le formazioni in cui gioca con l'attaccante A?

Soluzione:
a) Si osservi, innanzitutto, che due formazioni sono diverse se differiscono per almeno un giocatore, a prescindere dall'ordine in cui i giocatori sono estratti (senza reimmissione) dalla società. Fatta questa precisazione, si ha che:

- il portiere può essere scelto in

$$C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$$

modi differenti;

- il numero delle possibili formazioni schierate in attacco è dato dal numero delle combinazioni semplici di 12 oggetti distinti di classe 5

$$C_{12,5} = \binom{12}{5}$$

- il numero delle possibili formazioni schierate in difesa è dato dal numero di combinazioni semplici di 8 oggetti distinti di classe 5,

$$C_{8,5} = \binom{8}{5}$$

Il numero delle possibili formazioni, di conseguenza, risulta

$$2\binom{12}{5}\binom{8}{5} = 88704$$

b) Per completare la formazione in cui giocano gli attaccanti A e B, la società deve estrarre 9 giocatori di cui: un portiere; 5 difensori; 3 attaccanti. Ragionando come nel punto a) otteniamo che il numero delle formazioni in cui sono presenti gli attaccanti A e B è dato da:

$$2\binom{8}{5}\binom{10}{3} = 13440.$$

c) Per completare la formazione in cui giocano il difensore C e l'attaccante A, la società deve estrarre 9 giocatori di cui: un portiere; 4 difensori; 4 attaccanti. Il numero delle formazioni in cui sono presenti il difensore C e l'attaccante A è dato da:

$$2\binom{11}{4}\binom{7}{4} = \cdots = 23100$$

Esercizio 0.3 Si considerino 6 palline di cui 3 bianche e 3 nere vengono messe a caso in due urne A e B, tre per ciascuna urna. Indichiamo con E_i l'evento $E_i :=$"nell'urna A ci sono i palline bianche" con $i = 0, 1, 2, 3$.

a) Quanto vale la probabilità che in A ci siano due palline bianche e una nera.

b) Quanto valgono $\mathbb{P}(E_i)$ per $i = 0, 1, 2, 3$?

Dopo aver riempito le urne secondo il precedente schema si estrae a caso una pallina dall'urna A e una dall'urna B e scambiano di urna.

c) Quanto vale la probabilità che dopo lo scambio ci siano nell'urna A due palline bianche e una nera ?

Soluzione:
1) Dalle 6 palline ne estraiamo 3 senza reimmissione da mettere in A. I casi possibili di questo esperimento sono $\binom{6}{3}$, mentre i casi favorevoli all'evento $E_2 :=$"in A ci sono due palline bianche e una nera" sono $\binom{3}{2}\binom{3}{1}$. Segue che $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{\binom{6}{3}} = 0,45$.

2) Dato che dalle 6 palline ne estraiamo 3 senza reimmissione da mettere in A allora abbiamo

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{3-i}}{\binom{6}{3}} \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

3) Sia $E :=$"dopo lo scambio in A ci sono 2 palline bianche". Quindi,

$$\mathbb{P}(E \mid E_i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \frac{4}{9} & i = 1 \\ \frac{4}{9} & i = 2 \\ 1 & i = 3 \end{cases}$$

Visto che $\mathbb{P}(E \mid E_1) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ e $\mathbb{P}(E \mid E_2) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Per il teorema delle probabilità totali abbiamo

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(E \mid E_i)\mathbb{P}(E_i) = \cdots = 0,45$$

Esercizio 0.4 Si considerino due urne: la prima contenente 2 palline rosse e 8 verdi e la seconda contenente 4 palline rosse e 6 verdi.

a) Si consideri un esperimento che consiste nell'estrarre con reimmissione due palline dalla prima urna e si determini la probabilità che entrambe le palline siano rosse.

b) Si consideri l'esperimento che consiste nell'estrarre una pallina dalla prima urna, nell'inserirla nella seconda urna e nell'estrarre una pallina dalla seconda urna. Determinare la probabilità che la pallina estratta sia rossa.

c) Sapendo che la pallina estratta dalla seconda urna è rossa, calcolare la probabilità che la pallina estratta dalla prima urna sia verde.

Soluzione:
a) Indicati con R_1 e R_2 gli eventi:

- R_1= pallina rossa alla prima prova
- R_2= pallina rossa alla seconda prova

La probabilità di estrarre una pallina rossa dalla prima urna è pari a $\frac{2}{10}$ in entrambe le prove. Dato che l'estrazione è con reimmissione gli eventi sono indipendenti. Ottieniamo quindi

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

b) Indicati con R_1 e V_1 gli eventi:

- R_1= pallina rossa dalla prima urna
- V_1= pallina verde dalla prima urna

le probabilità corrispondenti sono $\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{5}$ e $\mathbb{P}(V_1) = \frac{4}{5}$. La seconda urna può risultare composta da:

- 5 palline rosse e 6 verdi, se dalla prima urna sia stata estratta una pallina rossa, per cui $\mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{5}{11}$
- 4 palline rosse e 7 verdi, se dalla prima urna sia stata estratta una pallina verde, per cui $\mathbb{P}(R_2 \mid V_1) = \frac{4}{11}$.

Indicato con R_2 l'evento "pallina rossa dalla seconda urna", si ha

$$R_2 = (R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap R_2)$$

e la probabilità di ottenere una pallina rossa dalla seconda urna risulta quindi

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(V_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_2 \mid R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2 \mid V_1)\mathbb{P}(V_1) = \frac{5}{11} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{5} = \frac{21}{55}$$

c) Si chiede di calcolare la probabilità $\mathbb{P}(V_1 \mid R_2)$. Dalla formula di Bayes risulta

$$\mathbb{P}(V_1 \mid R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2 \mid V_1)\mathbb{P}(V_1)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{4}{55} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{21}{55}} = \frac{16}{21}.$$

Esercizio 0.5 Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un falso positivo (esito positivo quando la malattia non é in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 0.5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test é positivo?

Soluzione:
Indichiamo rispettivamente con D ed E gli eventi

- D= un soggetto estratto casualmente ha la malattia
- E= il test è positivo

Il testo ci dice che il test è affidabile al 99%, ossia fornisce un esito positivo quando il soggetto è effettivamente malato. Ciò significa che

$$\mathbb{P}\left(E \mid D\right) = 0,99.$$

Tuttavia, l'esame fornisce un falso positivo nel 2% dei casi, ossia

$$\mathbb{P}(E \mid D^c) = 0,02.$$

Sapendo che $\mathbb{P}(D) = 0,005$, per determinare $\mathbb{P}(D \mid E)$ possiamo utilizzare il Teorema di Bayes e otteniamo:

$$\mathbb{P}(D \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(E \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E \mid D^c)\mathbb{P}(D^c)}$$

Risulta quindi che una persona scelta a caso che ottiene un risultato positivo al test ha una probabilità del 20% di avere effettivamente la malattia. I calcoli precedentemente svolti ci dicono anche che la probabilità che il test dia un risultato positivo è

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E \mid D^c)\mathbb{P}(D^c) = 0,02485$$

e quindi la probabilità che il test dia un risutato negativo è $\mathbb{P}(E^c) = 1 - 0,02485 = 0,97515$. La probabilità che una persona scelta a caso che ottiene un risultato negativo al test sia di fatto malata è

$$\mathbb{P}(D \mid E^c) = \frac{\mathbb{P}(E^c \mid D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(E^c \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(E^c \mid D^c)\mathbb{P}(D^c)} = \frac{1}{19503}$$

che è un numero confortante!

Esercizio 0.6 Si consideri un dado truccato in modo che le facce pari abbiano probabilità tripla delle altre di verificarsi. Sia A l'evento che si verifica se esce una faccia pari e B l'evento che si verifica se esce una faccia con numero di punti inferiore o uguale a 2.

a) Calcolare $\mathbb{P}(A)$.

b) Calcolare $\mathbb{P}(A|B)$ e dire se i due eventi sono indipendenti, giustificando la risposta.

c) Si lanci una moneta perfetta: se esce testa si lanci un dado perfetto mentre se esce croce si lanci il dado truccato. Calcolare la probabilità che esca la faccia con tre punti.

Soluzione:
Ai risultati $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ è associata una probabilità tripla rispetto alla probabilità associata $\omega_1, \omega_3, \omega_5$. Posta pari a p la probabilità associata a un risultato dispari, la probabilità associata a un risultato pari è $3p$. La somma delle probabilità associate alle 6 facce del dado è sempre pari a 1, per cui, facendo la somma delle probabilità associate a ciascun risultato si ottiene

$$\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p + 3p + p + 3p + p + 3p = 1$$

da cui si ha $p = \frac{1}{12}$.
a) Dato che $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ la sua probabilità è $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$
b) Siccome $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ e $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3}$, grazie alla legge delle probabilità condizionata si ha

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_2\})}{\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\})} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Dato che risulta $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ gli eventi A e B sono indipendenti.
c) Indichiamo rispettivamente con T, C ed E gli eventi

- T= uscita della faccia testa
- C= uscita della faccia croce
- E= uscita della faccia 3 sul dado

L'evento E corrisponde a $E = (E \cap T) \cup (E \cap C)$ e ha probabilità

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap T) + \mathbb{P}(E \cap C) = \mathbb{P}(E \mid T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(E \mid C)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\ .$$

Esercizio 0.7 Si lanci un dado truccato in modo che la faccia contrassegnata da un punto abbia probabilità doppia delle altre di verificarsi. Sia E_1 l'evento che si verifica se compare una faccia contrassegnata da un numero di punti maggiore di 4 e E_2 l'evento che si verifica se compare una faccia contrassegnata da un numero pari di punti.

a) Calcolare $\mathbb{P}(E_1^c)$.

b) Calcolare $\mathbb{P}(E_1|E_2)$ e dire se i due eventi sono indipendenti.

b) Calcolare $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$.

Soluzione:
Ragioniamo analogamente all'esercizio precedente. Posta pari a p la probabilità associata alle facce 2, 3, 4, 5 e 6 del dado, sarà $2p$ la probabilità associata alla faccia 1. Dalla normalizzazione ricaviamo che $p = \frac{1}{7}$.
a) Osservando che $E_1 = \{\omega_5, \omega_6\}$ si ha $\mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{7}$ e quindi $\mathbb{P}(E_1^c) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.
b) Abbiamo che $E_2 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ con $\mathbb{P}(E_2) = \frac{3}{7}$ e quindi

$$\mathbb{P}(E_1 \mid E_2) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega_6\})}{\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\})} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}.$$

Dato che $\mathbb{P}(E_1 \mid E_2) = \frac{1}{3} \neq \mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{7}$ i due eventi non sono indipendenti.
c) Utilizzando la formula per la probabilità dell'unione di eventi non disgiunti, otteniamo

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}.$$

Esercizio 0.8 La moneta a è equa; la moneta b invece dà testa con probabilità $\frac{1}{4}$. Viene lanciato un dado: se esce un numero minore di 3 si prosegue lanciando 10 volte la moneta a, altrimenti si lancia 10 volte la moneta b. Sia T_n =all'n-esimo lancio esce testa, per $n = 1, \ldots, 10$.

a) Calcolare la probabilità di T_1 e di $T_1 \cap T_2$.

b) Se nei primi due lanci è uscita testa, qual è la probabilità che

  b1) si stia lanciando la moneta a?

  b2) al terzo lancio esca croce?

c) Gli eventi $T_1, \ldots, T_{10}$ sono indipendenti?

Soluzione:
Siano A e B gli eventi seguenti:

- A = viene scelta la moneta a
- B = viene scelta la moneta b

allora $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ e $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c) = \frac{2}{3}$.
a) Si ha

$$\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(T_1 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 \mid B)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Usando poi il fatto che se è noto quale moneta si lancia allora i lanci sono indipendenti, si ha anche

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid B)\mathbb{P}(B) = \cdots = \frac{1}{8}.$$

b) Si chiede

b1) $\mathbb{P}(A \mid T1 \cap T2)$ che si ottiene come segue:

$$\mathbb{P}(A \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

b2) $\mathbb{P}(T_3^c \mid T_1 \cap T_2)$ che si ottiene come segue:

$$\mathbb{P}(T_3^c \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2}$$

il denominatore lo abbiamo già calcolato, per il numeratore invece utilizzando la formula delle probabilità totali otteniamo

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 \cap T_3^c \mid B)\mathbb{P}(B) = \cdots = \frac{7}{96}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(T_3^c \mid T_1 \cap T_2) = \frac{\frac{7}{96}}{\frac{1}{8}} = \frac{7}{12}$$

c)Osserviamo che $\mathbb{P}(T_1) = \mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{3}$ mentre

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(T_1)\mathbb{P}(T_2)$$

pertanto gli eventi $T_1, \ldots, T_{10}$ non sono indipendenti.