CAPITOLO 5

Calcolo Differenziale di Funzioni di una Variabile

Problemi. Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a, b)$,

(i) Trovare la *retta tangente* t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ (problema geometrico), e

(ii) trovare un'*approssimazione lineare* $g(x)$ (cioè della forma $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) per $f(x)$ per x vicino a x_0 (problema analitico).

Iniziamo a studiare il problema (i). Come vedremo nel seguito la sua soluzione risolve anche il problema (ii). Per risolvere (i) consideriamo prima la *retta secante* s_h attraverso i punti

$$P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big) \qquad \text{e} \qquad P_h := \big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big) \qquad \text{per } h \neq 0.$$

L'equazione della retta s_h è data da

$$s_h(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{= \text{ pendenza di } s_h \\ =: \textit{ rapporto incrementale}}} \cdot (x - x_0).$$

Quindi solo il rapporto incrementale dipende da h che, nel passo successivo, mandiamo a 0.

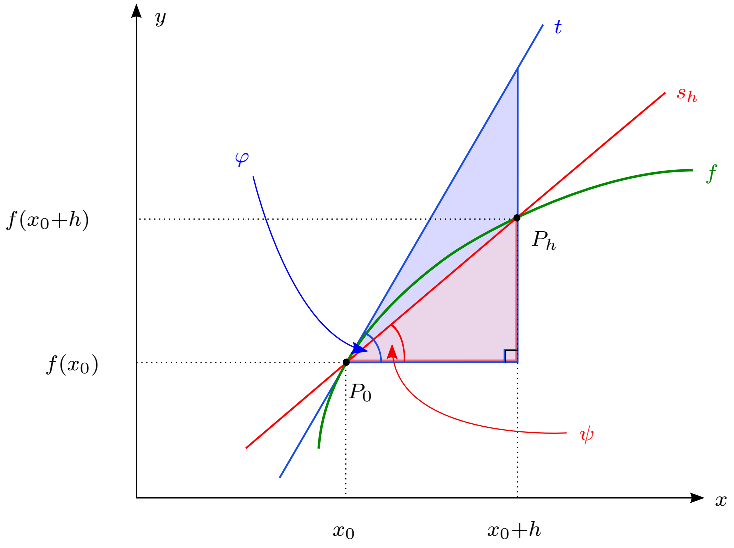


FIGURA 31. Retta secante e tangente.

Derivata: Definizione e prime Proprietà

Considerando il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$ arriviamo alla seguente

Definizione 5.1. Se per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ converge

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \underbrace{=}_{x=x_0+h} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile* in x_0 con *derivata* $f'(x_0)$. Se f è derivabile in ogni $x_0 \in (a, b)$ allora si dice *derivabile* e la funzione $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ è la *derivata* di f. Altre notazioni: $f' = \frac{df}{dx} = Df$.

Se f è derivabile in x_0 allora otteniamo l'equazione $t(x)$ della retta tangente t sostituendo il rapporto incrementale nell'equazione della retta secante s_h con la derivata $f'(x_0)$, cioè

$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Quindi (cfr. Figura 31)

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \tan(\varphi) = \text{ pendenza della retta tangente } t, \\ \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \tan(\psi) = \text{ pendenza della retta secante } s_h \end{aligned}$$

In particolare $f'(x_0) = 0$ significa che la retta tangente ha pendenza 0, cioè è orizzontale.

Consideriamo alcuni

ESEMPI.

- Se f è costante cioè se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in (a,b)$ allora il rapporto incrementale è sempre uguale a 0. Quindi una funzione costante è sempre derivabile con derivata nulla.

- Sia $f(x) = x^n$ per $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora, dalla formula del binomio di Newton segue usando che $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, ${x_0}^0 = h^0 = 1$ e $\binom{n}{n-1} = n$ che

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{0}{x_0}^0 h^n + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^2 + \overbrace{\binom{n}{n-1}{x_0}^{n-1}h^1}^{=n\cdot {x_0}^{n-1}\cdot h} + \overbrace{\binom{n}{n}{x_0}^n h^0}^{=x_0^n}\right) - x_0^n}{h} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{0}{x_0}^0 h^{n-1} + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^1 + n{x_0}^{n-1}\right)\cdot h}{h} \\
&= \binom{n}{0}{x_0}^0 h^{n-1} + \binom{n}{1}{x_0}^1 h^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}{x_0}^{n-2}h^1 + n{x_0}^{n-1} \\
&\to n \cdot {x_0}^{n-1} = f'(x_0) \qquad \text{per } h \to 0.
\end{aligned}
$$

Quindi $f(x) = x^n$ è derivabile per ogni $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ con

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Per esempio, $(x^5)' = 5 \cdot x^4$.

- Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \to e^{x_0} \qquad \text{per } h \to 0.$$

Quindi $f(x) = e^x$ è derivabile con

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

cioè $f = f'$ che è una proprietà molto particolare e che (a meno di una costante moltiplicativa) caratterizza la funzione esponenziale.

- Sia $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora usando la formula di prostaferesi, il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ e la continuità della funzione cos risulta

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{2 \cdot \sin\big(\frac{h}{2}\big) \cdot \cos\big(x_0 + \frac{h}{2}\big)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{\sin\big(\frac{h}{2}\big)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos\Big(x_0 + \frac{h}{2}\Big)}_{\to \cos(x_0)} \to \cos(x_0) = f'(x_0) \qquad \text{per } h \to 0.\end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \sin(x)$ è derivabile con $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$

Similmente segue che $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$

<u>Osservazione</u>. Ricordiamo che sin è una funzione dispari (come anche $-\sin$) mentre cos è pari. Nell'esempio precedente abbiamo visto che $\sin' = \cos$ e $\cos' = -\sin$ e quindi la derivata ha trasformata una funzione dispari in una pari e viceversa. Ciò infatti vale sempre, cioe se f è derivabile e

- f dispari $\Rightarrow f'$ pari,
- f pari $\Rightarrow f'$ dispari.

- Sia $f(x) := |x|$. Allora f *non* è derivabile in $x_0 = 0$ visto che il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale in $x_0 = 0$ dato da

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{se } h > 0, \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

non esiste. Comunque esistono limite destro e limite sinistro del rapporto incrementale. Questa osservazione dà luogo alla seguente

Definizione 5.2. Se per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ converge

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0) = \textit{derivata destra}$$

oppure

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0) = \textit{derivata sinistra}$$

allora diremo che f è *derivabile da destra* oppure *derivabile da sinistra* in x_0.

Esempio. $f(x) := |x|$ è derivabile da destra e anche da sinistra in $x_0 = 0$ con $f'_+(0) = +1$, $f'_-(0) = -1$.

Osservazione. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b) \iff f$ è derivabile da destra e da sinistra in x_0 con $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Studiamo ora il legame tra derivabilità e continuità.

<u>Proposizione</u> 5.3. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ allora è anche continua in x_0.*

Dimostrazione.

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Cioè $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi f è continua in x_0. $\square$

<u>Osservazione</u>. Non vale il contrario cioè f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile, per esempio $f(x) = |x|$ è continua ma non derivabile in $x_0 = 0$.

<u>Esercizio</u>. (Metodo di Erone, cfr. pagina 38) Sia $f(x) := x^k - a$ per $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

- Calcolare l'equazione della retta tangente t al grafico di f nel punto $x_0 > 0$.
- Verificare che l'intersezione tra t e l'asse x è data da

$$x_1 := \frac{1}{k} \cdot \left((k - 1)x_0 + \frac{a}{{x_0}^{k-1}} \right).$$

Regole per la Derivazione

Cerchiamo ora modi per semplificare il calcolo delle derivate.

Derivazione di Somme, Prodotti e Rapporti di Funzioni. Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0, allora

(i) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot g'(x_0)}$$

(ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

(iii) se $g(x_0) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

In particolare

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Dimostrazione. Dimostriamo soltanto (ii). Perciò studiamo il rapporto incrementale del prodotto utilizzando che g è continua in x_0

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\big(f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x)\big) + \big(f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \\
&\to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \qquad \text{per } x \to x_0.
\end{aligned}$$

□

<u>OSSERVAZIONE</u>. La regola (i) stabilisce che la derivazione è un'*operazione lineare*, cioè la derivata di una combinazione lineare e la combinazione lineare delle derivate. Inoltre implica che l'insieme

$$\mathrm{C}^1(a,b) := \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} f \text{ è derivabile e} \\ f' \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

è uno spazio vettoriale. Se $f \in \mathrm{C}^1(a,b)$ si dice anche che f è *derivabile con continuità* (qui la continuità si riferisce a f' non a f che essendo derivabile è anche continua).

Con queste regole diventa semplice verificare la derivabilità di varie funzioni elementari.

<u>ESEMPI</u>. • Visto che ogni monomio x^k per $k = 1, 2, 3, \ldots$ è derivabile, per le prime due regole ogni *polinomio* è derivabile con

$$p'(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Per esempio, $(3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 11)' = 12x^3 - 21x^2 + 4x$.

• Per l'esempio precedente e la terza regola, ogni *funzione razionale* è derivabile. Per esempio per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ vale

$$\left(x^{-n}\right)' = \left(\tfrac{1}{x^n}\right)' = -\tfrac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\tfrac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Infatti questa regola abbiamo visto precedentemente per $n = 1, 2, 3, \ldots$ (cfr. pagina 111), per $n = 0$ vale poiché la derivata di una funzione costante $= 0$, mentre per $n = -1, -2, -3, \ldots$ è stata appena dimostrata.

- Visto che sin e cos sono derivabili anche la funzione $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è derivabile con

$$\boxed{\tan'(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\sin'(x) - \cos'(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
$$\boxed{= \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1+\tan^2(x) \end{cases}}$$

Derivazione delle Funzioni Composte. Sia $f:(a,b)\to(c,d)$ derivabile in $x_0\in(a,b)$ e sia $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ derivabile in $y_0 := f(x_0)$. Allora la funzione composta $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in x_0 con

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)}$$

Questa formula si chiama *Regola della Catena*.

<u>ESEMPI</u>.

- Se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è derivabile, allora anche $h(x) := g(-x)$ è derivabile poiché $h(x) = (g\circ f)(x)$ per $f(x) = -x$. Inoltre $h'(x) = \big(g(-x)\big)' = g'(-x)\cdot(-x)' = -g'(-x)$.
- Dal esempio precedente segue che le funzioni iperboliche $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ sono derivabili con $\sinh'(x) = \frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$. Similmente segue che $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Infine, utilizzando la regola di derivazione per un rapporto segue che anche $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ è derivabile con

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1-\tanh^2(x) \end{cases}$$

Quindi abbiamo dimostrato che le funzioni iperboliche sono derivabili con

$$\boxed{\sinh'(x) = \cosh(x)} \qquad \boxed{\cosh'(x) = \sinh(x)} \qquad \boxed{\tanh'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cosh^2(x)} \\ 1-\tanh^2(x) \end{cases}}$$

- Sia $a > 0$, allora $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$, $x \in \mathbb{R}$, è derivabile (visto che è la composizione $(g \circ f)(x)$ per $f(x) = x \cdot \ln(a)$ e $g(y) = e^y$) con $(a^x)' = (e^{x\cdot\ln(a)})' = \ln(a) \cdot e^{x\cdot\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ cioè ogni funzione esponenziale è derivabile con

$$\boxed{\left(a^x\right)' = \ln(a) \cdot \left(a^x\right)}$$

- Per funzioni più complesse (cioè composizioni di più di due funzioni) si può iterare la regole della catena iniziando all'esterno. Per esempio, $e^{\cos(3x^2-2x+1)}$ è derivabile con

$$\begin{aligned}\left(e^{\cos(3x^2-2x+1)}\right)' &= e^{\cos(3x^2-2x+1)} \cdot \left(\cos(3x^2-2x+1)\right)' \\ &= -e^{\cos(3x^2-2x+1)} \cdot \sin(3x^2-2x+1) \cdot (6x-2).\end{aligned}$$

L'ultima regola per la derivazione tratta la

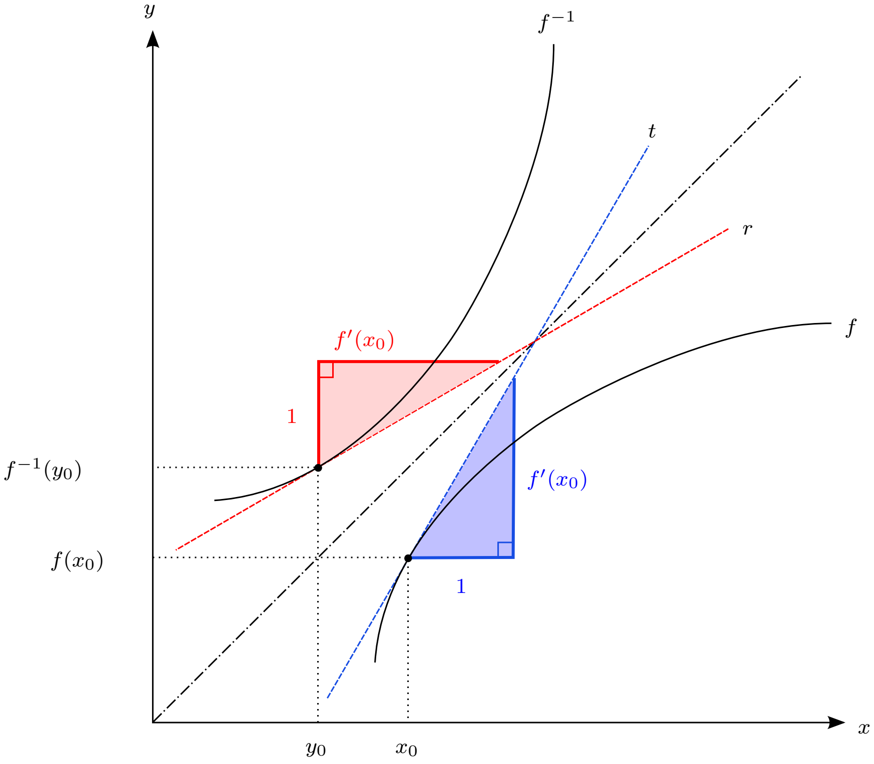
Derivazione delle Funzioni Inverse. [1]
Sia $f : (a, b) \to (c, d)$ continua, biettiva e derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se $f'(x_0) \neq 0$ allora $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ è derivabile in $y_0 := f(x_0)$ con

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

<u>Osservazioni</u>.
- È importante osservare che mentre f viene derivata in x_0 la derivata di f^{-1} si riferisce al punto $y_0 = f(x_0)$!

  Questo fatto e anche la formula per $(f^{-1})'(y_0)$ si spiega dal seguente grafico.

[1] Quando si considerano sia f e f^{-1} conviene, per non confondersi, usare sempre x come variabile per f e y come variabile per f^{-1}.



t = retta tangente al grafico di f in x_0

r = retta tangente al grafico di f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$

pendenza di $t = \frac{f'(x_0)}{1} = f'(x_0)$

pendenza di $r = \frac{1}{f'(x_0)} = (f^{-1})'(y_0)$

FIGURA 32. Derivata della funzione inversa.

- Si nota che una retta tangente *orizzontale* al grafico di f in x_0 (cioè se $f'(x_0) = 0$) corrisponde a una retta tangente *verticale* al grafico di f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ che significa che f^{-1} *non* è derivabile in y_0.

- Non come dimostrazione, ma come modo per ricordare la formula per $\left(f^{-1}\right)'$, si può utilizzare la regola della catena:

  Per definizione, $x = f^{-1}(f(x))$ per ogni $x \in (a, b)$. Derivando entrambi i lati di questa equazione otteniamo con $y = f(x)$

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= \left[f^{-1}\big(f(x)\big)\right]' \\ &= \left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \\ &= \left(f^{-1}\right)'(y) \cdot f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

<u>Esempi</u>. • Sia $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ per $0 < a \neq 1$ che è derivabile con $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre abbiamo visto (cfr. pagina 101) che f è invertibile con $f^{-1}(y) = \log_a(y)$, $y > 0$. Quindi $\log_a$ è derivabile e per $y := f(x) = a^x$ vale

$$\log_a{}'(y) = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \underbrace{a^x}_{=y}} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$$

Quindi ogni logaritmo è derivabile e sostituendo y con x otteniamo per ogni $x > 0$

$$\boxed{\log_a{}'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}} \qquad \text{in particolare per } a = e \qquad \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

- Per ogni $r \in \mathbb{R}$ la potenza $x^r = e^{r \cdot \ln(x)}$ con $x > 0$ è derivabile con (usare la regola della catena)

$$(x^r)' = \left(e^{r\cdot\ln(x)}\right)' = \underbrace{e^{r\cdot\ln(x)}}_{=x^r} \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1}.$$

Quindi la regola per la derivazione di x^n per $n \in \mathbb{Z}$ (cfr. pagina 116) vale anche per esponenti reali $r \in \mathbb{R}$, cioè per ogni $x > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ si ha

$$\boxed{(x^r)' = r \cdot x^{r-1}}$$

- Se f e g sono due funzioni con lo stesso dominio e $f(x) > 0$ per ogni x allora possiamo definire

$$h(x) := f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln\left(f(x)\right)}\right)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)}.$$

Quindi, se f e g sono derivabili anche h è derivabile con

$$\begin{aligned} h'(x) = \left(f(x)^{g(x)}\right)' &= e^{g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln\big(f(x)\big) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln\big(f(x)\big) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \end{aligned}$$

- Abbiamo visto (cfr. pagina 104) che $f := \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è invertibile. Inoltre $f = \sin$ è derivabile con $f'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$. Però, $\cos(x)$ si annulla nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ negli estremi $x = \pm\frac{\pi}{2}$ e quindi per ottenere una funzione inversa *derivabile* dobbiamo togliere questi punti dal dominio di $f = \sin$. Allora consideriamo

$$f = \sin : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$$

che è invertibile e derivabile con $f'(x) = \cos(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è derivabile in $y = f(x) = \sin(x)$ con

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Per ottenere una rappresentazione di $\arcsin'(y)$ nella variabile y dobbiamo esprimere ora $\cos(x)$ in funzione di $y = \sin(x)$. Perciò utilizziamo la relazione $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$, cioè $\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Per decidere il segno "+" oppure "−" basta osservare che $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e quindi $\cos(x) > 0$. Quindi dobbiamo scegliere il segno "+" e sostituendo y con x otteniamo finalmente

$$\boxed{\arcsin'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$

- Raggiornando come nel esempio precedente si possono derivare anche le seguenti funzioni inverse:

$$\boxed{\operatorname{arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall\, x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\operatorname{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \forall\, x > 1}$$

$$\boxed{\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \forall\, x \in (-1,1)}$$

Estremi Locali e il Teorema di Fermat

Torniamo al problema che abbiamo posto a pagina 106 sull'esistenza e il calcolo del minimo e del massimo di una funzione. Per il Teorema di Weierstraß sappiamo almeno che ogni $f \in C[a, b]$ ammette massimo e minimo, ma rimane il seguente

<u>Problema</u>. Come si può determinare il minimo e massimo di una funzione?

Consideriamo un problema concreto di questo tipo:

<u>Esempio</u>. Dato un cartoncino di dimensione $a \times b$ (con $0 < a \le b$) costruire un contenitore (senza coperchio) di volume massimo, cfr. Figura 33.

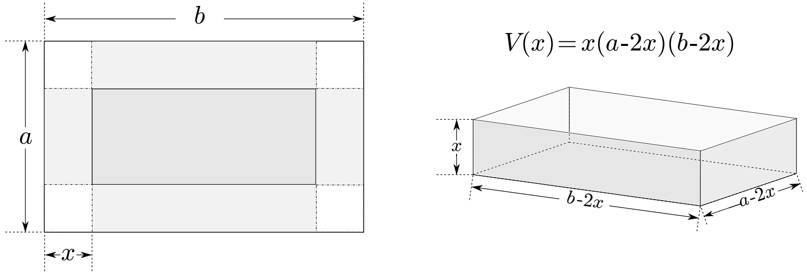


Figura 33. Contenitore.

Quindi cerchiamo $x_0 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ tale che $V_{\max} := V(x_0) \ge V(x)$ per ogni $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Torneremo a questo problema a pagina 130.

Prima di affrontare problemi di questo tipo generalizziamo il concetto di minimo e massimo per una funzione.

<u>Definizione</u> 5.4. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale, allora

- $x_0 \in X$ si dice *punto di minimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \le f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di minimo locale, $f(x_0)$ si dice *minimo locale*;
- $x_0 \in X$ si dice *punto di massimo locale*, se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \ge f(x)$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$; se x_0 è un punto di massimo locale, $f(x_0)$ si dice *massimo locale*;
- se x_0 è un punto di minimo o di massimo locale, allora si dice *punto di estremo locale* mentre $f(x_0)$ si chiama *estremo locale*.

<u>Esempio</u>. Consideriamo il grafico in Figura 34.

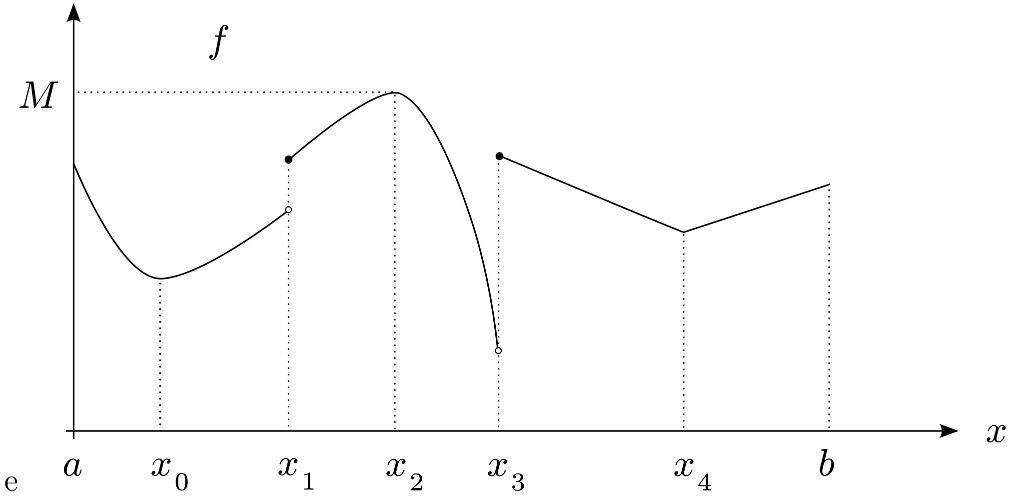


Figura 34. Esempi di estremi locali.

In questo caso abbiamo:

- a, x_2 e x_3 e b sono punti di massimo locale di f,
- x_0 e x_4 sono punti di minimo locale di f,
- x_1 *non* è un punto di estremo locale di f,
- x_2 è un punto di massimo assoluto di f,
- $M = f(x_2)$ è il massimo assoluto di f, il minimo assoluto *non* esiste (soltanto l'estremo inferiore).

Per trovare i punti di estremo locale si usa il

<u>TEOREMA</u> 5.5 (*Teorema di Fermat*). *Sia* $x_0 \in (a,b)$ *un punto di estremo locale di* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Se* f *è derivabile in* x_0 *allora* $f'(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale. Allora

$$f'(x_0) = \begin{cases} f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0 \\[2em] f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \leq 0 \end{cases}$$

Quindi $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ che implica $f'(x_0) = 0$. $\square$

<u>Esempio</u>. Consideriamo di nuovo il grafico in Figura 35.

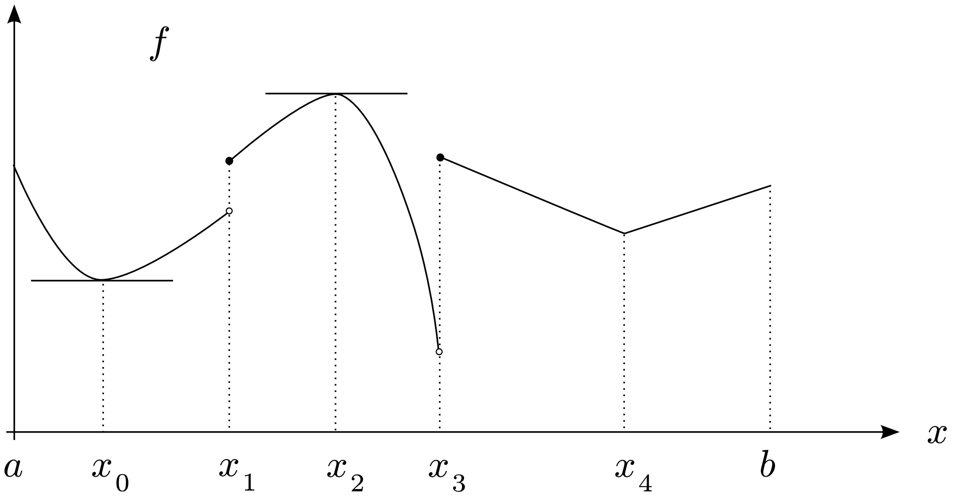


Figura 35. Estremi locali e tangenti orizzontali.

Allora la derivata $f'(x)$ si annulla negli estremi locali $x = x_0$ e $x = x_2$ che graficamente corrisponde a una retta tangente orizzontale.

<u>Osservazioni</u>.

- Come si vede nel grafico sopra il teorema di Fermat *non* vale negli estremi dell'intervallo $[a, b]$. Cioè se $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$ è un punto di estremo locale ciò *non* implica (come si vede nel grafico) che $f'(x_0) = 0$.

- Se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 si dice *punto critico* oppure *punto stazionario* di f.

- Il Teorema di Fermat fornisce soltanto una condizione necessaria ma *non* sufficiente per estremi locali, cioè *non* ogni punto critico è un punto di estremo locale. Basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = 3x^2$ e quindi $x_0 = 0$ è un punto critico ma non è un punto di estremo locale.

Tornando al problema di trovare gli estremi locali di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possiamo affermare che i *candidati* per punti di estremo locale sono

- i punti in cui f non è derivabile,
- i punti sul "bordo" del dominio X di f,
- i punti critici al "interno" del dominio.

I punti delle prime due classi sono quelli per i quali *non* si può applicare Fermat, la terza classe invece sono quelli che vengono da Fermat.

Consideriamo un altro

ESEMPIO. Definiamo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ x^x & \text{se } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Per studiare f si rappresenta usando logaritmo ed esponenziale, cioè si scrive

$$x^x = \left(e^{\ln(x)}\right)^x = e^{x \cdot \ln(x)} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Per procedere calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln(x)}.$$

Usando la sostituzione

$$-\ln(x) = t \to +\infty \qquad \text{per } x \to 0^+$$

e visto che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \ldots \geq \frac{t^2}{2}$ per ogni $t > 0$ segue

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} |x \cdot \ln(x)| = \lim_{t \to +\infty} \left|\frac{-t}{e^t}\right| \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^2/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0.$$

Quindi dalla continuità dell'esponenziale risulta[2]

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)} = e^0 = 1 = f(0)$$

implicando che f è continua in $x = 0$. Siccome f, come composizione di funzioni continue, è anche continua in ogni $x \in (0,1]$ risulta che $f \in \mathrm{C}[0,1]$ e quindi ammette minimo e massimo per il teorema di Weierstraß. Per calcolarli useremo il teorema di Fermat. Allora per $x \in (0,1)$ la funzione f e derivabile con

$$f'(x) = \big(e^{x\cdot\ln(x)}\big)' = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \big(x \cdot \tfrac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x)\big) = \big(1 + \ln(x)\big) \cdot x^x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tfrac{1}{e},$$

cioè $x_0 := \frac{1}{e} \in [0,1]$ è l'unico punto critico di f. Quindi sappiamo:

- i candidati per i punti di estremo locale sono gli estremi dell'intervallo $a = 0$, $b = 1$ e il punto critico $x_0 = \frac{1}{e}$,
- f ammette $m := \min f$ e $M := \max f$ nell'intervallo $[0,1]$,
- $f(0) = f(1) = 1$, $f(x_0) = (\frac{1}{e})^{(\frac{1}{e})} = e^{-\frac{1}{e}} < 1$.

Ciò implica $M = \max f = f(0) = f(1) = 1$ e $m = \min f = f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}}$.

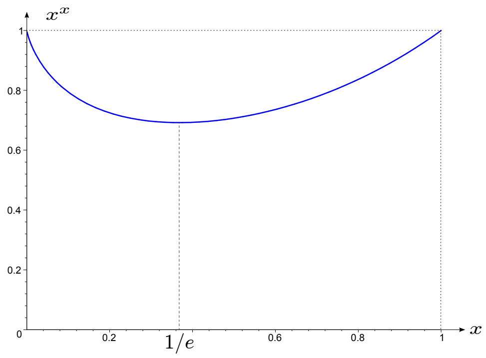


Figura 36. Grafico di $f(x) = x^x$.

[2]Vedremo in seguito metodi più semplici per calcolare questo limite

<u>Esempio</u>. Continuiamo lo studio del problema posto a pagina 124:
Trovare il valore massimo $V_{\max}$ di $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ per $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$. Visto che la funzione V è continua e l'intervallo $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ è chiuso e limitato questo problema ammette almeno una soluzione per il teorema di Weierstraß. Inoltre, V è derivabile e quindi possiamo utilizzare il teorema di Fermat per trovare il punto di massimo $x_0 \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$ cioè tale che $V_{\max} = V(x_0)$. Calcolando $V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$ otteniamo i punti critici $x_{1,2} = \frac{1}{6}\big(a+b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\big)$. Visto che $0 < a \leq b$ segue $a^2 - ab \leq 0$ e quindi $a^2 - ab \geq 4a^2 - 4ab$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\right) \geq \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{4a^2-4ab+b^2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(a+b+\sqrt{(2a-b)^2}\right) = \frac{1}{6}\big(a+b+|2a-b|\big) \\ &\geq \frac{1}{6}\big(a+b+(2a-b)\big) = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Usando il fatto $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ risulta che $x_0 = x_2 = \frac{1}{6}\big(a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}\big)$. Per esempio se scegliamo un cartoncino di formato A 4, cioè di dimensione $21\,\mathrm{cm} \times 29,7\,\mathrm{cm}$, allora otteniamo $x_0 \approx 4,04\,\mathrm{cm}$ e $V_{\max} = V(x_0) = 1128,5\,\mathrm{cm}^3$, cfr. Figura 37. In particolare si può costruire un contenitore il cui volume è più di un litro.

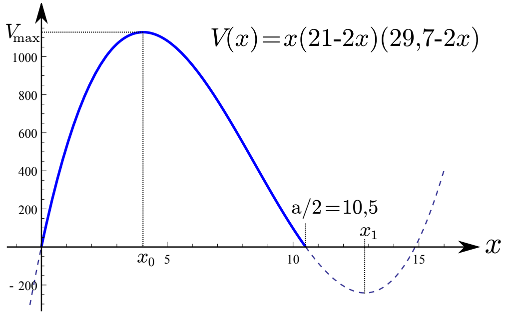


Figura 37. Volume contenitore da cartoncino formato A4.

I Teoremi di Rolle e Lagrange

Il seguente risultato stabilisce l'esistenza di punti critici sotto certi ipotesi.

<u>TEOREMA</u> 5.6 (*Teorema di Rolle*). *Sia* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *derivabile in* (a,b). *Se* $f(a) = f(b)$ *allora esiste* $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = 0$ *(cfr. Figura 38).*

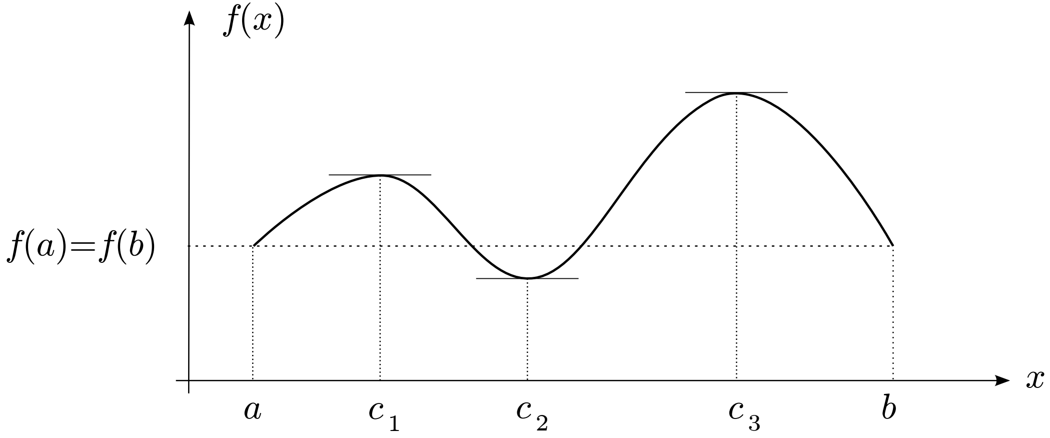


FIGURA 38. Teorema di Rolle: Tre punti con $f'(c_1) = 0 = f'(c_2) = f'(c_3) \iff$ retta tangente orizzontale

DIMOSTRAZIONE. Per Weierstraß f ammette minimo $m := \min f = f(x_0)$ e massimo $M := \max f = f(x_1)$ in $x_0, x_1 \in [a,b]$. Ora ci sono 2 possibilità:

1° Caso: $m = M$, allora f è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

2° Caso: $m < M$. Poiché $f(a) = f(b)$ almeno uno dei punti x_0, x_1 è diverso da a e da b e in questo punto f' si annulla per il teorema di Fermat. □

Il Teorema di Rolle si può generalizzare togliendo la condizione $f(a) = f(b)$. Così segue il prossimo risultato che è uno dei più importanti di questo corso.

Teorema 5.7 (*Teorema di Lagrange* (o del valor medio)). *Sia $f \in C[a,b]$ derivabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ (detto punto di Lagrange) tale che*

$$\underbrace{f'(c)}_{\substack{=\text{pendenza della retta}\\ \text{tangente } t \text{ in } (c,f(c))}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\substack{=\text{pendenza della retta}\\ \text{secante } s \text{ attraverso}\\ (a,f(a)) \text{ e } (b,f(b))}}$$

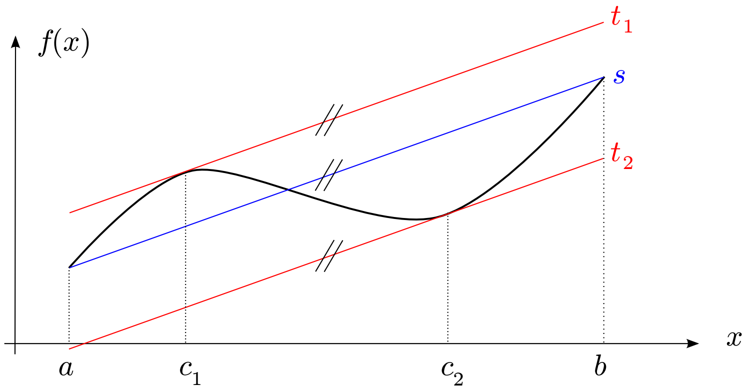


Figura 39. Teorema di Lagrange: Due punti di Lagrange c_1 e c_2.

Quindi il teorema stabilisce che esiste un punto c tale che la retta tangente t al grafico di f in $(c, f(c))$ e la retta secante attraverso $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono parallele.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema di Rolle alla funzione $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a). \qquad \square$$

Conseguenze del Teorema di Lagrange

Il Teorema di Lagrange ha molte applicazioni per le quali, però, viene usato nel seguente modo: Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ è derivabile in (a,b) allora per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ esiste c tra x_1 e x_2 tale che

$$\boxed{f(x_2) = f(x_1) + f'(c) \cdot (x_2 - x_1)}$$

Per ottenere questa versione del teorema basta sostituire a, b con x_1, x_2 e poi risolvere l'equazione per $f(x_2)$.

Test di Monotonia. *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ è derivabile in (a,b) allora*

- *f è crescente $\iff$ $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;*
- *f è decrescente $\iff$ $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$;*
- *$f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente;*
- *$f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente.*

Prima di dimostrare il test osserviamo che nel punto 3 e 4 *non* vale l'equivalenza, basta considerare $f(x) = x^3$ per $x \in \mathbb{R}$ che è strettamente crescente nonostante che $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Dimostrazione. Dimostreremo soltanto il primo punto. "$\Rightarrow$": Se f è crescente, allora

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x+h)}^{\geq f(x)} - f(x)}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$": Sia $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora per $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f(x_2) = f(x_1) + \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq f(x_1),$$

cioè f è crescente. $\square$

<u>Esempio</u>. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 3x^2 + 6x - 3$. Allora

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 1) + 3 = 3(x-1)^2 + 3 > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e quindi f è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e quindi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è anche suriettiva e di conseguenza invertibile. Visto che $f'(x) \neq 0$ dal risultato sulla derivabilità della funzione inversa (cfr. pagina 118) segue che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ dove $y_0 = f(x_0)$. Per esempio, per $y_0 = -3$ vale $y_0 = f(0)$, cioè $x_0 = 0$ e quindi

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}.$$

Dal test di monotonia segue anche facilmente la seguente

<u>Proposizione</u> 5.8. *Se $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$ sono derivabili in (a,b) e*

$$f(a) \geq g(a) \qquad e \qquad f'(x) \geq g'(x) \quad \textit{per ogni } x \in (a,b)$$

allora $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. Definiamo $h := f - g$. Allora $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ e quindi h è crescente con $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$. Ciò implica $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, quindi $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. □

Criterio per Estremi Locali. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto critico di f (cioè $f'(x_0) = 0$). Allora x_0 è un punto di*

- *massimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da "+" a "−";*
- *minimo locale, se $f'(x)$ cambia in x_0 segno da "−" a "+";*

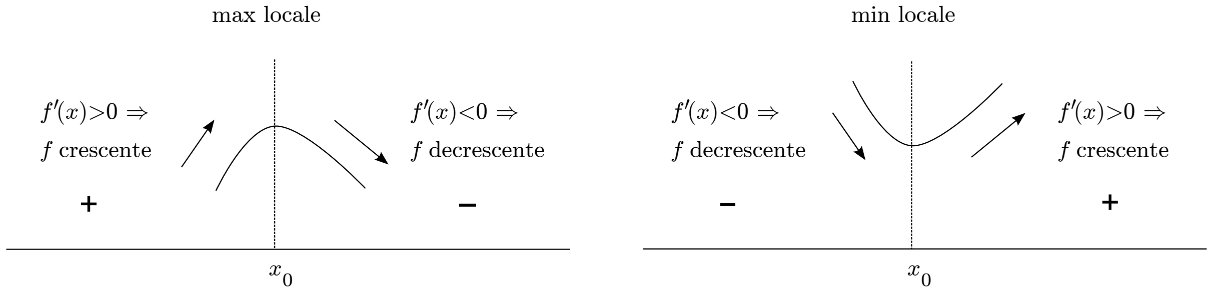


FIGURA 40. Criterio per estremi locali.

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione segue dal test di monotonia: se vale la prima condizione, allora f poco prima di x_0 è crescente mentre poco dopo è decrescente e quindi x_0 è un punto di massimo locale. Similmente segue la seconda affermazione, cfr. Figura 40. □

ESEMPIO. Sia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\ln(x)}{x}$. Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Quindi $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = e$, cioè $x_0 = e$ è l'unico punto critico di f. Inoltre,

- $\ln(x) < 1$ per $x \in (0,e) \Rightarrow f'(x)$ è positiva prima di $x_0 = e$,
- $\ln(x) > 1$ per $x \in (e,+\infty) \Rightarrow f'(x)$ è negativa dopo $x_0 = e$

cioè $f'(x)$ cambia in $x_0 = e$ segno da "+" a "−" $\Rightarrow x_0 = e$ è un punto di massimo locale.

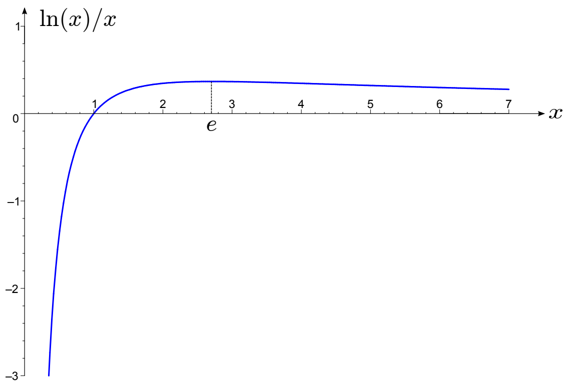


FIGURA 41. Grafico di $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Caratterizzazione di Funzioni Costanti. *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e derivabile, allora*

$$f \text{ è costante} \iff f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a,b)$$

DIMOSTRAZIONE. "⇒" Questa implicazione è banale visto che per f è costante il rapporto incrementale è 0 e quindi anche ammette limite 0. "⇐" Usando il test di monotonia dall'ipotesi

$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) & \Rightarrow \ f \text{ è crescente, inoltre} \\ f'(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b) & \Rightarrow \ f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Però le uniche funzioni su intervalli che sono crescenti e anche decrescenti sono le funzioni costanti. □

Questa caratterizzazione sembra banale ma tuttavia è utile per dimostrare risultati che non sono così ovvi.

<u>Esempio</u>. Definiamo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arctan(x) + \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \qquad \text{per ogni } x \neq 0.$$

A questo punto, però, *non* possiamo concludere che f è costante visto che il dominio $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *non* è un intervallo. Invece $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è l'unione di due intervalli e quindi f è costante sia sul intervallo $(-\infty, 0)$ che su $(0, +\infty)$. Quindi esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = c_1 \text{ per ogni } x > 0 \qquad \text{e} \qquad f(x) = c_2 \text{ per ogni } x < 0.$$

Per calcolare le costanti c_1, c_2 (che, come vedremo sono diversi) basta scegliere un valore opportuno $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ poiché in ogni caso $f(x_1) = c_1$ e $f(x_2) = c_2$. Per la funzione f possiamo per esempio scegliere $x = 1$ e $x_2 = -1$ e così risulta

$$\arctan(x) + \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = f(x) = \begin{cases} f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x > 0, \\ f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = 2 \cdot \frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} & \text{per ogni } x < 0. \end{cases}$$

Criterio per Funzioni Lipschitziane.

Definizione 5.9. Se per $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste una costante $L \geq 0$ (detta *costante di Lipschitz*) tale che

$$\bigl|f(x_2) - f(x_1)\bigr| \leq L \cdot |x_2 - x_1| \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

allora f si dice *funzione lipschitziana* con costante L.

Osservazione. È semplice verificare che ogni funzione lipschitziana è continua mentre il contrario non vale. Ciò si vede riscrivendo la relazione nella definizione come

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq L \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2,$$

che in pratica significa che la pendenza di qualsiasi retta secante attraverso i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha (in modulo) al massimo pendenza L. Se ora consideriamo il grafico di $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ e scegliamo $x_1 = 0$ e $x_2 \in (0,1]$ si vede che la pendenza della retta secante tende per $x_2 \to 0^+$ a $+\infty$ e quindi f *non* è lipschitziana.

Dal Teorema di Lagrange segue il seguente Criterio.

Proposizione 5.10. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è lipschitziana con costante L. In particolare ogni $f \in \mathrm{C}^1[a,b]$ è lipschitziana.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$. Allora per Lagrange esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$\left|\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \bigl|f'(c)\bigr| \leq L \qquad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

Se $f \in \mathrm{C}^1[a,b]$, allora $f' \in \mathrm{C}[a,b]$ è limitata per il teorema di Weierstraß. $\square$

Le Regole di de l'Hospital

Partiamo con il seguente importante

<u>Problema</u>. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

che al limite rappresenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{0}{0}\qquad \text{oppure}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Nonostante i due limiti precedenti si possano calcolare anche direttamente, le seguenti regole ne semplificano molto lo svolgimento. Non presentiamo la dimostrazione che comunque si basa sempre sul Teorema di Lagrange.

<u>Teorema</u> 5.11 (*Regole di de l'Hospital*). *Siano $-\infty\le a<b\le+\infty$ e $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ tale che*

- $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$ *oppure* $=\pm\infty$,
- f,g *sono derivabili con* $g'(x)\neq 0$ *per ogni* x *vicino ad* a,
- $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:l\in\overline{\mathbb{R}}$ *esiste.*

Allora anche

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

La stessa conclusione vale anche per limiti del tipo $\lim_{x\to b^-}$ *e* $\lim_{x\to x_0}$ *per* $x_0\in(a,b)$.

Prima di svolgere alcuni esempi facciamo le seguenti

<u>OSSERVAZIONE</u>.

- Se $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste *non* si può dedurre che anche $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste. Cioè l'Hospital offre soltanto una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di un limite. Per verificare ciò consideriamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{x} \left(= \tfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\overbrace{\sin(x)}^{\text{limitato}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}} = 1$$

che quindi converge mentre il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(x+\sin(x)\big)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{1}$$

non esiste.

- L'Hospital *non* si deve applicare a forme determinate. Per esempio

$$\lim_{x\to0} \frac{1+x}{2+x} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x\to0} \frac{(1+x)'}{(2+x)'} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1} = 1.$$

Consideriamo ora alcuni esempi in cui il simbolo "$\stackrel{\text{H}}{=}$" significa che abbiamo applicato l'Hospital, cioè derivato numeratore e denominatore.

<u>ESEMPI</u>.

- Sia $\alpha > 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \left(= \tfrac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha\cdot x^\alpha} = 0.$$

- Usando piccoli trucchi si possono anche studiare limiti che all'inizio non sono della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Per esempio, per $\alpha > 0$ vale

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha\cdot\ln(x) = \big(0\cdot(-\infty)\big) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} \left(= \tfrac{-\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

- Puó succedere anche che dopo un'applicazione di l'Hospital si ottiene nuovamente una forma indeterminata ammessa. In questi casi si può provare ad applicare l'Hospital più volte. Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{6x}\left(=\tfrac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{1}{6}.$$

  Qui la seconda e terza applicazione di l'Hospital si potrebbe evitare ricordando i limiti notevoli (1) e (2) a pagina 88. Però confrontando i procedimenti si vede che le regole di l'Hospital hanno semplificato notevolmente il calcolo di questi limiti.

- Per calcolare limiti del tipo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ si procede come segue:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)}$$

  dove l'ultima uguaglianza segue dalla continuità della funzione esponenziale.

  Per dare un esempio concreto consideriamo

$$\lim_{x\to 0}\big(x+e^x\big)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{\sin(x)}}.$$

  Per l'esponente otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\big(x+e^x\big)}{\sin(x)}\ \left(=\frac{\ln(0+e^0)}{\sin(0)}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+e^x}\cdot(1+e^x)}{\cos(x)}=2$$

  e quindi

$$\lim_{x\to 0}\big(x+e^x\big)^{\frac{1}{\sin(x)}}=e^2$$

Approssimazione Lineare di Funzioni

Torniamo ora al problema iniziale posto a pagina 108: Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in (a,b)$, trovare

(i) la retta tangente t al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, e

(ii) un'approssimazione lineare $g(x) = \alpha \cdot x + \beta$ (cioè g è un polinomio di grado ≤ 1) per $f(x)$ per x vicino a x_0.

Abbiamo risolto (i): Se f è derivabile in x_0, allora la retta tangente t è data dall'equazione

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Quindi la retta tangente è il grafico di un polinomio di grado ≤ 1 e di conseguenza si può avere l'idea di usare proprio $g(x) := t(x)$ come approssimazione lineare. Come vedremo in seguito, questa scelta è infatti in un certo senso la migliore possibile. Per verificare ciò scriviamo

$$f(x) = t(x) + r(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\textit{approssimazione lineare}} \quad + \quad \underbrace{r(x)}_{\textit{resto (o errore)}}$$

cioè $r(x) = f(x) - t(x)$, cfr. Figura 42.

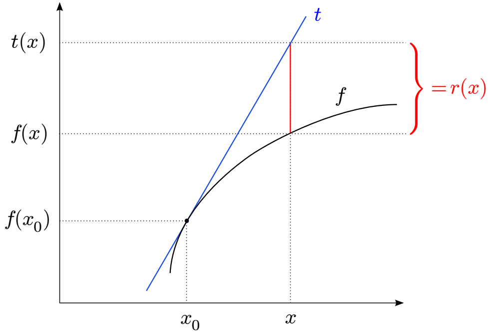


FIGURA 42. Il resto $r(x)$.

Studiamo le proprietà di $r(x)$:

- $r(x_0) = 0$ cioè nel punto x_0 l'approssimazione dà il valore esatto,
- vale

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Cioè per $x \to x_0$ il resto $r(x)$ tende a 0 più rapidamente di $x - x_0$.

Per confrontare meglio il comportamento di due funzioni facciamo la seguente

Definizione 5.12. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

allora si dice che *f è o-piccolo di g per $x \to x_0$* e in questo caso si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ o più brevemente $f = o(g)$ per $x \to x_0$.

OSSERVAZIONI.

- $o(\cdot)$ si chiama *simbolo di Landau*.
- $f = o(g)$ per $x \to x_0$ significa per
  - *infinitesimi* che $f(x) \to 0$ più rapidamente che $g(x) \to 0$ per $x \to x_0$;
  - *infiniti* che $f(x) \to \pm\infty$ più lentamente che $g(x) \to \pm\infty$ per $x \to x_0$.

<u>ESEMPI</u>. • $\ln(x) = o(x)$ per $x \to +\infty$ poiché $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

• $1 - \cos(x) = o(x)$ per $x \to 0$ poiché

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \to \tfrac{1}{2}\cdot 0 = 0 \qquad \text{per } x \to 0.$$

• $x = o(x^2)$ per $x \to \pm\infty$ mentre $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$.

• $f(x) \to 0$ per $x \to x_0 \iff f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$.

• Tornando al problema di approssimazione lineare possiamo ora dire che $r(x) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.

Con gli o-piccoli si possono caratterizzare le funzioni derivabili.

<u>PROPOSIZIONE</u> 5.13. *Per una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.*
(a) f è derivabile in x_0.
(b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$.
In questo caso $A = f'(x_0)$.

Quindi questa proposizione stabilisce che l'approssimazione lineare $t(x)$ data dalla retta tangente t è l'unica che lascia un resto $r(x)$ che per $x \to x_0$ tende a 0 più rapidamente che la distanza $x - x_0$ tra x e x_0. Cioè per ogni altra scelta di approssimazione con un polinomio di grado ≤ 1 il resto tende a zero più lentamente. In questo senso $t(x)$ è la migliore approssimazione lineare possibile di $f(x)$ per x vicino a x_0.
Consideriamo alcuni

<u>ESEMPI</u>. • Se $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $e^x = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = e^0 + e^0 \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

• Se $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\sin(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{\sin(x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

- Se $f(x) = \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$, allora la derivabilità di f implica $\ln(1+x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(x) = \ln(1) + \frac{1}{1+0} \cdot x + o(x)$, cioè

$$\boxed{\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \to 0}$$

La Formula di Taylor

Abbiamo quindi risolto anche il problema dell'approssimazione lineare, cioè di approssimare il valore $f(x)$ di una funzione (possibilmente molto complicata) vicino al punto x_0 con un polinomio $t(x)$ (cioè con una funzione molto semplice) di grado ≤ 1.
A questo punto si può avere l'idea di limitare il grado dell'approssimazione non a 1 ma a un numero $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Cioè si può generalizzare il problema dell'approssimazione lineare nel seguente modo:

<u>Problema</u>. Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e $n \in \mathbb{N}$, approssimare $f(x)$ per x vicino a x_0 con un polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$

Per $n = 1$ abbiamo visto che $T_1(x) = t(x)$ è la migliore scelta possibile. Per risolvere il problema per $n \in \mathbb{N}$ dobbiamo prima introdurre le

Derivate Successive.

<u>Definizione</u> 5.14. Se f è derivabile e tale che f' è nuovamente derivabile, allora possiamo definire

$$(f')' =: f'' = \text{ derivata seconda } =: D^2 f =: \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Se si può continuare in questa maniera n volte otteniamo

$$f^{(n)} = \text{ derivata } n\text{-esima } =: D^n f =: \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Inoltre, se I è un'intervallo e $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\mathrm{C}^0(I) := \mathrm{C}(I)$ (e $f^{(0)} := f$) e per $n \geq 1$

$$\mathrm{C}^n(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ è derivabile } n\text{-volte} \\ \text{e } f^{(n)} \text{ è continua} \end{array} \right\}$$

Se $f \in \mathrm{C}^n(I)$ si dice anche che f è *derivabile n-volte con continuità* (qui la continuità si riferisce alla derivata n-esima $f^{(n)}$ e *non* a f).

<u>Esempio</u>. Se $f(x) = \sin(x)$, allora f è derivabile con $f'(x) = \cos(x)$ che è anche derivabile. Quindi otteniamo $f''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$ che è nuovamente derivabile. Così otteniamo $f'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$ che è sempre derivabile. Quindi esiste anche la derivata quarta che indichiamo con il simbolo $f^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x) = f(x)$. Quindi dopo 4 derivazioni si ritorna alla funzione originale.

Dopo questo intermezzo sulle derivate successive possiamo tornare al problema dell'approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 attraverso un polinomio di grado $\leq n$. Per ottenere un'idea come si può risolvere questo problema consideriamo i casi $n = 0$ e $n = 1$.

- Per $n = 0$ la migliore approssimazione con un polinomio di grado ≤ 0 (cioè con una costante) è ovviamente $T_0(x) := f(x_0) = T_0(x_0)$, cioè T_0 e f hanno in x_0 il valore in comune:
$$T_0(x_0) = f(x_0).$$
- Per $n = 1$ il problema diventa quello dell'approssimazione lineare che abbiamo risolto precedentemente: Se f è derivabile in x_0 allora la migliore approssimazione ci dà $t(x) =: T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Quindi $T_1(x_0) = f(x_0)$ e $T_1'(x) = f'(x_0)$ cioè T_1 e f hanno in x_0 il valore e derivata prima in comune:
$$\begin{aligned} T_1(x_0) &= f(x_0), \\ T_1'(x_0) &= f'(x_0). \end{aligned}$$

Quindi per $n \geq 2$ supponiamo che f sia n-volte derivabile e poi cerchiamo un polinomio T_n che con f ha in x_0 valore e tutte le derivate fino alla n-esima in comune:
$$\left. \begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0), \\ T_n'(x_0) &= f'(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \right\} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \text{ e } T_n \text{ hanno } \textit{contatto di ordine } n \textit{ in } x_0$$

Visto che questo sistema consiste da $n+1$ equazione e il polinomio T_n da determinare ha $n+1$ coefficienti $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ come incognite, il seguente risultato è plausibile.

PROPOSIZIONE 5.15. *Se $f \in C^n(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$ allora esiste un unico polinomio T_n di grado $\leq n$ che ha un contatto di ordine n in x_0 con f. Questo polinomio si chiama* polinomio di Taylor *di ordine n con centro x_0 generato da f ed è dato da*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Infine, se $x_0 = 0$, allora T_n viene anche chiamato polinomio di Maclaurin.

DIMOSTRAZIONE. Verifichiamo soltanto che per $n = 3$ il polinomio T_3 definito sopra ha contatto di ordine 3 con $f \in C^3(a,b)$ in $x_0 \in (a,b)$. Infatti

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \tfrac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 && \Rightarrow T_3(x_0) = f(x_0), \\ T_3'(x) &= f'(x_0) + f''(x_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{f'''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 && \Rightarrow T_3'(x_0) = f'(x_0), \\ T_3''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0) \cdot (x - x_0) && \Rightarrow T_3''(x_0) = f''(x_0), \\ T_3'''(x) &= f'''(x_0) && \Rightarrow T_3'''(x_0) = f'''(x_0). \end{aligned}$$

□

ESEMPIO. (Cfr. Figura 43) Sia $f(x) = e^x$. Allora $f \in C^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$ per ogni $0 \leq k \leq n$. Quindi risulta per $x_0 = 0$ che $f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1$ per ogni $0 \leq k \leq n$ e di conseguenza

$$T_n(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!}.$$

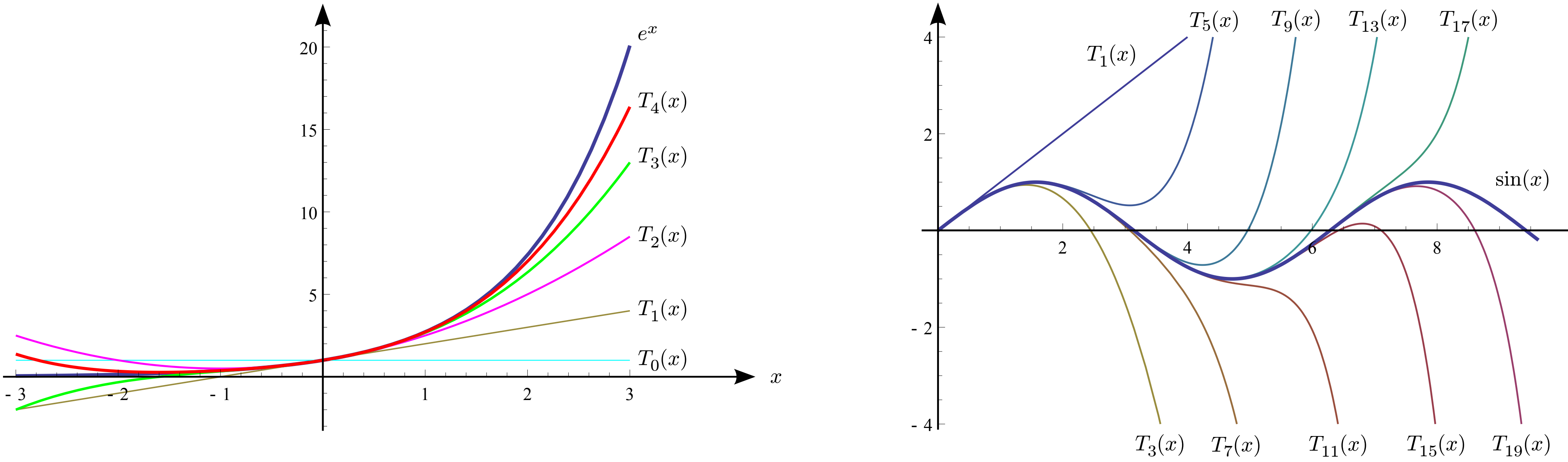


FIGURA 43. I primi polinomi di Maclaurin di $f(x) = e^x$ e $f(x) = \sin(x)$ (cfr. p. 150).

Prima di considerare altri esempi ci poniamo il seguente

<u>PROBLEMA</u>. Quanto vale il *resto* (o *errore*) dovuto all'approssimazione con il polinomio di Taylor, cioè quanto vale

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad = ?$$

Consideriamo prima i casi che abbiamo già studiati.

$n = 0$: Per il Teorema di Lagrange esiste c tra x e x_0 tale che

$$R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$
$$= o(1) = o\big((x - x_0)^0\big) \text{ per } x \to x_0.$$

$n = 1$: Visto che $T_1(x) = t(x) =$ approssimazione lineare (cfr. pagina 142) segue

$$R_1(x) = r(x) = o\big((x - x_0)^1\big) \text{ per } x \to x_0.$$

Nel caso generale $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente generalizzazione di queste rappresentazioni di $R_n(x)$.

<u>TEOREMA</u> 5.16 (*Formula di Taylor*). *Sia $f \in \mathrm{C}^{n+1}(a, b)$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora per $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$*

- *vale*

$$R_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \textit{per } x \to x_0 \qquad \text{(Resto di Peano)}$$

- *esiste c tra x e x_0 tale che*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \qquad \text{(Resto di Lagrange)}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- Per la formula di Taylor con il resto di Peano basta che $f \in \mathrm{C}^n(a, b)$.
- La Formula di Taylor con il
  - Resto di Peano è un affermazione *qualitativa*, cioè afferma soltanto con che velocità il resto $R_n(x)$ tende a 0 per $x \to x_0$;
  - Resto di Lagrange è un affermazione *quantitativa*, che permette anche valutare la grandezza del resto (si noti tuttavia che c non è noto).
- Se per un polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ vale

$$f(x) - p(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \text{per } x \to x_0,$$

  allora $p(x) = T_n(x)$. In altre parole $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che lascia un resto che per $x \to x_0$ tende più rapidamente a 0 che $(x - x_0)^n$. In questo senso la scelta di $T_n(x)$ come approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0 è ottima. Questa osservazione ci permetterà in seguito di calcolare $T_n(x)$ senza calcolare alcuna derivata.
- Una rappresentazione esplicita del tipo $f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n)$ si chiama *sviluppo di Taylor di f di ordine n e centro x_0*.

Calcoliamo appunto alcuni sviluppi di Taylor.

ESEMPI. • Dall'esempio precedente segue per $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$ che

$$\boxed{e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$.

• Abbiamo già visto nell'esempio su pagina 146 che per $f(x) = \sin(x)$ vale

$$f'(x) = \cos(x),\ f''(x) = -\sin(x),\ f'''(x) = -\cos(x) \text{ e } f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x).$$

Quindi $f \in \mathrm{C}^n(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$f^{(2k)}(0) = \pm\sin(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$

Ciò implica

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Siccome per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $f^{(2n+2)}(0) = 0$ segue $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$ e di conseguenza

$$f(x) = \underbrace{T_{2n+2}(x)}_{=T_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+2}) = T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+2}).$$

Così risulta lo sviluppo

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 1$ vale

$$T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\overbrace{f^{(4)}(0)}^{=0}}{4!} \cdot x^4 = T_3(x) \qquad \text{e quindi}$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^{\mathbf{4}}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Questo sviluppo è migliore dello sviluppo $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ in quanto per $x \to 0$ l'espressione x^4 tende a zero più rapidamente che x^3.

Questo guadagno di un grado nel $o(\cdot)$ si ottiene anche per altri sviluppi di Maclaurin (cioè per $x_0 = 0$) di funzioni pari oppure dispari in quanto

- tutte le derivate di ordine pari di una funzione dispari in $x_0 = 0$ si annullano (come sopra per il sin),
- tutte le derivate di ordine dispari di una funzione pari in $x_0 = 0$ si annullano (per esempio per il cos).

Di conseguenza in uno sviluppo di Maclaurin di una

- funzione pari compariranno soltanto termini x^k con k pari, mentre per
- funzione dispari compariranno soltanto termini x^k con k dispari.

Nella stessa maniera seguono i seguenti sviluppi.

- Come già sopra indicato vale per $f(x) = \cos(x)$ (= funzione pari) e $x_0 = 0$ che $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$. Quindi

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+\mathbf{1}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^{\mathbf{5}})$ per $x \to 0$.

- Per le funzioni iperboliche sinh (= dispari) e cosh (= pari) valgono i seguenti sviluppi che sono molto simili a quelli delle funzioni sin e cos:

$$\boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0,}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+\mathbf{1}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^{\mathbf{4}})$ e $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^{\mathbf{5}})$ per $x \to 0$.

- Per $f(x) = \arctan(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$. Quindi

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^{\mathbf{6}})$ per $x \to 0$.

- Per $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ (= funzione dispari) e $x_0 = 0$ vale $T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$. Quindi

$$\boxed{\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+\mathbf{2}}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Per esempio per $n = 2$ otteniamo $\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^{\mathbf{6}})$ per $x \to 0$.

- Per $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+x)$ e $x_0 = 0$ si ottiene

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.}$$

  Per esempio per $n = 3$ otteniamo $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$.

- Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ definiamo il *coefficiente binomiale generalizzato*

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, \\ \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

  Per esempio $\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$. Allora per $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x_0 = 0$ si ottiene

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0}$$

  che è una generalizzazione della formula del binomio di Newton (cfr. pagina 15) per esponenti $\alpha \in \mathbb{R}$. Per esempio, per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} &= \binom{\frac{1}{2}}{0} \cdot x^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \cdot x^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2} \cdot x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

La Formula di Taylor è molto importante come si vede anche dalle seguenti

Applicazioni della Formula di Taylor

Criterio per Estremi Locali. *Sia $f \in \mathrm{C}^n(a,b)$ per $n \geq 2$ e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \qquad e \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Se n è pari, allora f ammette in x_0 un

- *minimo locale, se $f^{(n)}(x_0) > 0$,*
- *massimo locale, se $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Se n è dispari, allora x_0 non *è un punto di estremo locale di f.*

Il caso più importante è $n = 2$: Se $f'(x_0) = 0$ e

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale,
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale.

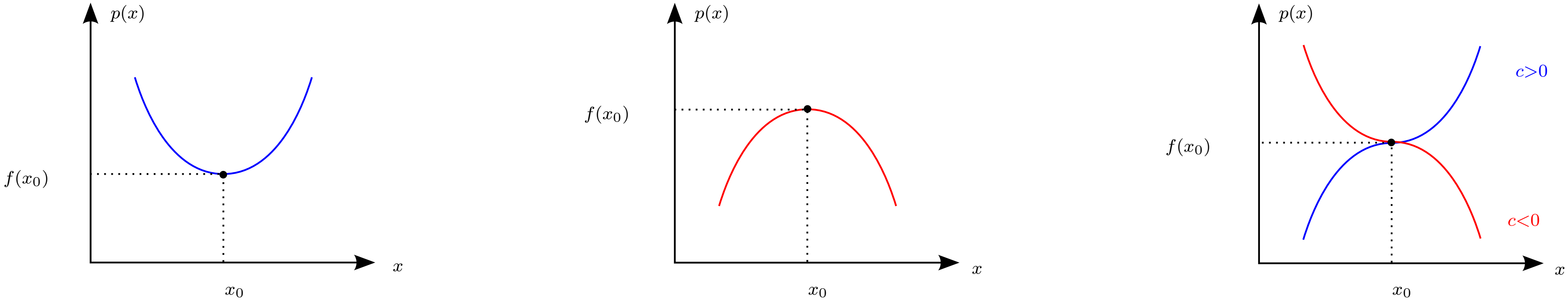
Cenno della Dimostrazione. Per La Formula di Taylor con Resto di Peano vale

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \ldots + \tfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}}^{=0} + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \\ &\quad + \underbrace{o\big((x-x_0)^n\big)}_{=\text{“piccolo errore” trascurabile}} \\ &\approx f(x_0) + c\cdot(x-x_0)^n \qquad \text{per } x \text{ vicino a } x_0 \end{aligned}$$

con $c = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Quindi anziché studiare se x_0 è un punto di estremo locale di $f(x)$ basta considerare la stessa questione per il polinomio

$$p(x) := f(x_0) + c\cdot(x-x_0)^n.$$

A questo punto ci sono tre casi, cfr. Figura 44.



(1) n pari $c > 0 \Rightarrow$ min (2) n pari $c < 0 \Rightarrow$ max (3) n dispari

FIGURA 44. Criterio per estremi locali.

$\square$

(1) n pari e $c > 0$ ($\iff f^n(x_0) > 0$): Allora x_0 è un punto di minimo locale;
(2) n pari e $c < 0$ ($\iff f^n(x_0) < 0$): Allora x_0 è un punto di massimo locale;
(3) n dispari: Allora x_0 *non* è un punto di estremo locale.

ESEMPI.
- Consideriamo $f(x) = x^2$. Allora $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2 \Rightarrow f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$ (cioè $n = 2 =$ pari) $\Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo di f.
- Consideriamo $f(x) = x^3$. Allora $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ e $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'(0) = 0 = f''(0)$ e $f'''(0) \neq 0$ (cioè $n = 3 =$ dispari) $\Rightarrow x_0 = 0$ non è un punto di estremo di f.
- Sia $f(x) = x \cdot \sin(x) - \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Allora $f'(x) = x \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x) + \sin(2x) \cdot 2$ e quindi $f'(0) = 0$, cioè $x_0 = 0$ è un punto critico di f. Per decidere la sua natura calcoliamo anche le derivate successive in $x_0 = 0$:
  $f''(x) = x \cdot (-\sin(x)) + 1 \cdot \cos(x) + \cos(x) + 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \Rightarrow f''(0) = 0 + 1 + 1 + 2 \cdot 2 = 6 > 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è un punto di minimo locale di f.

Calcolo dei Limiti. Generalizziamo prima il concetto di asintoticità dalle successioni alle funzioni.

Definizione 5.17. Se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, allora si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono *asintotiche* e si scrive $f(x) \sim g(x)$ (o anche solo $f \sim g$) per $x \to x_0$.

Osservazione. Se $f \sim g$ per $x \to x_0$, allora $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso comportamento asintotico, cioè $f(x) \to l$ per $x \to x_0 \iff g(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Come per le successioni anche per le funzioni vale il

Teorema 5.18 (*Principio di Sostituzione*). *Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$, allora*

$$f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2 \quad \text{per } x \to x_0, \qquad \text{in particolare} \quad \lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot g_1(x) = l \iff \lim_{x\to x_0} f_2(x)\cdot g_2(x) = l$$

$$\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2} \quad \text{per } x \to x_0, \qquad \text{in particolare} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = l$$

Quindi in *prodotti* e *rapporti* si possono sostituire fattori o numeratore o denominatore con altre espressioni asintotiche senza cambiare il comportamento asintotico, in particolare senza cambiare il limite se esiste.

Esempi.

- $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$ poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Quindi per il principio di sostituzione vale

$$\frac{\sin(x)\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2.$$

Come già per le successioni, il principio di sostituzione $\boxed{\textbf{\textit{!!! NON !!!}}}$ vale per somme, differenze o potenze, cioè se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_0$ allora

- $\not\Rightarrow$ $f_1(x) \pm g_1(x) \sim f_2(x) \pm g_2(x)$ per $x \to x_0$,
- $\not\Rightarrow$ $\big(f_1(x)\big)^{g_1(x)} \sim \big(f_2(x)\big)^{g_2(x)}$ per $x \to x_0$.

Quindi come già detto, in prodotti e in rapporti si possono sostituire espressioni (complicate) con altre espressioni asintotiche (più semplici) senza cambiare l'esistenza e il valore del limite. Come vedremo ciò permette di facilitare il calcolo dei limiti. A questo punto, però, si pone il seguente

<u>Problema</u>. Come si può trovare per una funzione f_1 (possibilmente complicata) una funzione f_2 (semplice) tale che $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$?

Per risolvere questo problema usiamo la seguente

<u>Proposizione</u> 5.19. $f_1(x) \sim f_2(x)$ *per* $x \to x_0 \iff f_1(x) = f_2(x) + o\big(f_2(x)\big)$ *per* $x \to x_0$.

<u>Esempi</u>.

- $\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0 \iff \ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$.
- $f(x) = a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$ (con $a_n \neq 0$) $\iff f(x) \sim a_n(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$.

L'idea è ora di rappresentare una funzione con la Formula di Taylor con resto di Peano e usare l'equivalenza del secondo esempio.

Più precisamente, dal principio di sostituzione e dalla proposizione precedente segue per $x \to x_0$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a_n \cdot (x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ g_1(x) &= b_m \cdot (x-x_0)^m + o\big((x-x_0)^m\big) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x) \cdot g_1(x) \sim a_n b_m \cdot (x-x_0)^{n+m} \\ \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \dfrac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \end{cases}$$

se $a_n, b_m \neq 0$. Quindi nel caso del rapporto segue

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{a_n}{b_m} \cdot (x-x_0)^{n-m} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } n > m, \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m, \\ \pm\infty & \text{se } n < m. \end{cases} \end{aligned}$$

Riassumendo, per studiare il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con Taylor si procede così:

(1) Si cerca lo sviluppo del *denominatore* del tipo $g(x) = b_m \cdot (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$ con $b_m \neq 0$, cioè $b_m \cdot (x-x_0)^m$ è il primo polinomio di Taylor di g che non è identicamente $= 0$.

(2) Si sviluppa il *numeratore* f fino allo stesso ordine m. Non è necessario superare oltre all'ordine m per ottenere un polinomio di Taylor del numeratore $\neq 0$ poiché se $f(x) = 0 + o((x-x_0)^m)$ il limite del rapporto è in ogni caso $= 0$.

Consideriamo alcuni

<u>Esempi</u>. • Studiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)}.$$

Come dalla regola generale iniziamo sempre con lo studio del denominatore. Qui non è necessario svilupparlo con Taylor, è invece più semplice semplificarlo usando il principio di sostituzione: $\sin(x) \sim x$ per $x \to 0$ e quindi

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} \sim \frac{\sin(x) - x}{x^3} \quad \text{per } x \to 0.$$

Ora visto che il denominatore è di 3° ordine dobbiamo quindi sviluppare anche il numeratore fino al 3° ordine:

$$\sin(x) = x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad \sin(x) - x = -\tfrac{x^3}{6} + o(x^3) \sim -\tfrac{x^3}{6} \quad \text{per } x \to 0.$$

Così risulta per il principio di sostituzione

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \cdot \sin(x)} = -\frac{1}{6}.$$

- Studiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1}.$$

Iniziamo sempre con il denominatore: Sappiamo che per $t \to 0$

$$\cos(t) = 1 - \tfrac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \overset{(t=\frac{x}{2})}{\Longrightarrow} \quad \cos\big(\tfrac{x}{2}\big) - 1 = -\frac{\big(\frac{x}{2}\big)^2}{2} + o\Big(\big(\tfrac{x}{2}\big)^2\Big) = -\tfrac{x^2}{8} + o(x^2) \sim -\tfrac{x^2}{8} \quad (x = 2t \to 0)$$

Visto che il denominatore è di 2° ordine dobbiamo ora sviluppare anche il numeratore al 2° ordine.

Perciò notiamo prima che $\ln((1+x)^2) = 2 \cdot \ln(1+x)$, quindi

$$\left.\begin{array}{l} \sin(t) = t + o(t^2) \quad (t \to 0) \quad \overset{(t=2x)}{\Longrightarrow} \quad \sin(2x) = 2x + o\big((2x)^2\big) = 2x + o(x^2) \\ 2 \cdot \ln(1+x) = 2 \cdot \big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) = 2x - x^2 + o(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big) = 2x + o(x^2) - \Big(2x - x^2 + o(x^2)\Big) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 \quad (x \to 0)$$

Così risulta

$$\frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1} \sim \frac{x^2}{-\frac{x^2}{8}} = -8 \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \ln\big((1+x)^2\big)}{\cos\big(\frac{x}{2}\big) - 1} = -8.$$

Abbiamo già visto in questi esempi semplici che per procedere servono delle regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ come per esempio $o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$ oppure $o(4x^2) = o(x^2)$.

Per calcolare limiti più complicati servono ulteriori

Regole per il Calcolo con gli $o(\cdot)$. Per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ vale

- $\alpha \cdot o(f) = o(f)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $2\,o(x^n) = o(x^n)$;
- $o(\alpha \cdot f) = o(f)$ per ogni $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, per esempio $o(4\,x^n) = o(x^n)$;
- $o(f) \pm o(f) = o(f)$, per esempio $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
- $f \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$, per esempio $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$;
- $o(o(f)) = o(f)$, per esempio $o(o(x^n)) = o(x^n)$;
- $o((x-x_0)^m) = o((x-x_0)^n)$ se $m \geq n$, per esempio $o(x^4) = o(x^2)$ per $x \to 0$.
- $(x-x_0)^m = o((x-x_0)^n)$ se $m > n$, per esempio $x^5 = o(x^4)$ per $x \to 0$.
- se $f \sim g$ allora $o(f) = o(g)$, p.e. $\sin(x) \sim x$ e quindi $o(\sin(x)) = o(x)$ per $x \to 0$;
- se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$ e $\varphi(t) \to x_0$ per $t \to t_0$ allora $f(\varphi(t)) \sim g(\varphi(t))$ per $t \to t_0$, p.e. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$ e $\sin(t) \to 0$ $(t \to 0)$ allora $\ln(1+\sin(t)) \sim \sin(t) \sim t$ $(t \to 0)$.

Qui, come sempre, con $o(f)$ si deve immaginare la *qualità* di un resto di tendere più velocemente a 0 di f e *non* una quantità.
In particolare in generale si ha

- $o(f) = o(g) \not\Rightarrow o(g) = o(f)$,
- $f + o(h) = g + o(h) \not\Rightarrow f = g$,
- $o(f) - o(f) \neq 0$.

Esempi. • Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)}.$$

Soluzione. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \to 0$. Iniziamo con il denominatore. Visto che si tratta di un'unica espressione è più semplice usare l'ultima regola e il principio di sostituzione anziché svilupparlo con Taylor (che comunque faremo nel prossimo esercizio).

Prima serve un piccolo trucco

$$\ln\big(\cos(x)\big) = \ln\Big(1 + \overbrace{\big(\cos(x) - 1\big)}^{=:t\to 0}\Big) \sim t = \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Abbiamo verificato l'ultima equazione (con segno opposto) già a pagina 156. Si potrebbe, però, anche ragionare usando lo sviluppo

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad \cos(x) - 1 = -\tfrac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\tfrac{x^2}{2}.$$

Poiché il denominatore è di 2° ordine, dobbiamo sviluppare anche il numeratore fino al 2° ordine: Ponendo $t = \frac{x}{2}$ otteniamo

$$e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + o\left(\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\right) = 1 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) = e^{\frac{x}{2}}.$$

Inoltre ponendo ora $t := \sin(x)$ segue (per lo sviluppo della radice $\sqrt{1+t}$ cfr. pagina 153)

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1 + \tfrac{t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + o(t^2)\\ &= 1 + \tfrac{\sin(x)}{2} - \tfrac{\sin^2(x)}{8} + o(\overbrace{\sin^2(x)}^{\sim x^2}) = \sqrt{1+\sin(x)}.\end{aligned}$$

Per la penultima regola $o(\sin^2(x)) = o(x^2)$ e usando lo sviluppo $\sin(x) = x + o(x^2)$ segue

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \tfrac{x+o(x^2)}{2} - \frac{\left(x+o(x^2)\right)^2}{8} + o(x^2)$$
$$= 1 + \tfrac{x+o(x^2)}{2} - \frac{x^2 + \overbrace{2x\cdot o(x^2)}^{=o(x^3)=o(x^2)} + \overbrace{o(x^2)^2}^{=o(x^4)=o(x^2)}}{8} + o(x^2) = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Quindi

$$e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) - \left(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2)\right)$$
$$= 2\cdot\tfrac{x^2}{8} + o(x^2) = \tfrac{x^2}{4} + o(x^2) \sim \tfrac{x^2}{4}.$$

Qui è importante osservare che soltanto dopo aver sviluppato *tutto* il numeratore si usa l'asintoticità, farlo prima significherebbe usare il principio di sostituzione per una differenza (che è gravemente sbagliato!!).
Quindi per il principio di sostituzione per rapporti risulta

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)} \sim \frac{\frac{x^2}{4}}{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \sqrt{1+\sin(x)}}{\ln\big(\cos(x)\big)} = -\frac{1}{2}. \qquad \square$$

- Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)+\ln\bigl(\cos(x)\bigr)}{x^4+x^5}.$$

Soluzione. Tutti gli sviluppi si intendono per $x \to 0$. Iniziamo come sempre con il denominatore: Visto che $x^5 = o(x^4)$ risulta

$$x^4 + x^5 = x^4 + o(x^4) \sim x^4.$$

Quindi il numeratore è da sviluppare fino al 4° ordine.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Mentre nell'esempio precedente era sufficiente osservare che $\ln(\cos(x)) \sim -\frac{x^2}{2}$ qui *non* possiamo ragionare così altrimenti si applicherebbe il principio di sostituzione a una differenza. Dobbiamo invece sviluppare $\ln(\cos(x))$ fino al 4° ordine: Allora

$$\ln\bigl(\cos(x)\bigr) = \ln\Bigl(1 + \overbrace{\bigl(\cos(x)-1\bigr)}^{=:t\to 0}\Bigr)$$

con

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e

$$t = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Non è necessario sviluppare $\ln(1+t)$ fino a t^4 poiché $t = \cos(x) - 1$ è di ordine 2 e di conseguenza t^2 espresso in x diventa di 4° ordine.

Inoltre, nello sviluppo di $\ln(1+t)$ dobbiamo sostituire t con $\cos(x)-1$ sviluppato fino al 4° ordine mentre nell'espressione $\frac{t^2}{2}$ basta come vedremo lo sviluppo fino al 2° ordine. Non è sbagliato usare anche lì lo sviluppo fino al 4° ordine, soltanto i conti si complicheranno leggermente. La cosa importante è che alla fine *non* ci saranno resti $o(x^k)$ con $k<4$. Quindi

$$\begin{aligned}
\ln\big(\cos(x)\big) &= \big(\cos(x)-1\big) - \frac{\big(\cos(x)-1\big)^2}{2} + \underbrace{o\Big(\overbrace{\big(\cos(x)-1\big)^2}^{\sim\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{x^4}{4}}\Big)}_{=o(x^4)} \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \overbrace{-x^2\cdot o(x^2)+o(x^2)^2}^{=o(x^4)}}{2} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4).
\end{aligned}$$

Così per il numeratore segue

$$\begin{aligned}
1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big) &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right) + \left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right) \\
&= -\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) \\
&= -\frac{1}{8}x^4+o(x^4) \sim -\frac{1}{8}\cdot x^4.
\end{aligned}$$

Per il rapporto segue con il principio di sostituzione

$$\frac{1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big)}{x^4+x^5} \sim \frac{-\frac{1}{8}\cdot x^4}{x^4} = -\frac{1}{8}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+\ln\big(\cos(x)\big)}{x^4+x^5} = -\frac{1}{8}.$$

□

- Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-\frac{\sin(x)}{x}-x}{\tan^2(3x)}.$$

Soluzione. Per $x\to 0$ anche $t := 3x \to 0$ e quindi vale

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \sim \frac{t}{1} = t \quad \overset{(t=3x)}{\Longrightarrow} \quad \tan^2(3x) \sim (3x)^2 = 9x^2.$$

Allora dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine: Da

$$\begin{aligned} e^t &= 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2),\\ \sin(x) &= x+o(x^2) \end{aligned}$$

segue con $t := \sin(x) \to 0$ per $x \to 0$

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + \sin(x) + \frac{\sin^2(x)}{2} + o\big(\sin^2(x)\big) \\ &= 1 + x + o(x^2) + \frac{\big(x + o(x^2)\big)^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2 + 2x \cdot o(x^2) + o(x^2)^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^3}{6x} + \overbrace{\frac{1}{x} \cdot o(x^3)}^{=o\left(\frac{1}{x}\cdot x^3\right)=o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2). \end{aligned}$$

Notiamo che qui era necessario sviluppare $\sin(x)$ fino al 3° ordine poiché la divisione per x abbassa l'ordine per 1. Così risulta

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) - x + o(x^2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^2 + o(x^2) \sim \frac{2}{3} \cdot x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} \sim \frac{\frac{2}{3} \cdot x^2}{9 \cdot x^2} = \frac{2}{27}$$

che implica

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \frac{\sin(x)}{x} - x}{\tan^2(3x)} = \frac{2}{27}. \qquad \square$$

Concludiamo questi esempi con una

<u>Osservazione</u>. In questo esempi abbiamo calcolato sviluppi di diverse funzioni usando sviluppi noti e le regole per il calcolo con gli $o(\cdot)$ *senza* fare alcuna derivata. Usando la terza osservazione su pagina 149 in questa maniera abbiamo anche calcolato i polinomi di Taylor.

Per esempio

$$f(x) := \sqrt{1 + \sin(x)} = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad T_2(x) = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8},$$

$$f(x) := \ln\big(\cos(x)\big) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad T_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12},$$

$$f(x) := e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

dove il polinomio di Taylor si riferisce alla corrispondente funzione f e il centro $x_0 = 0$.

Mentre le prime due applicazioni della Formula di Taylor usavano il resto di Peano, la terza fa uso del resto di Lagrange.

Calcolo Numerico.

<u>Problema</u>. Data una funzione (possibilmente complicata) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x\in(a,b)$, trovare un valore approssimato per $f(x)$.

Per esempio calcolare $\cos(\frac{1}{2})$ con un errore $< 10^{-3}$.

L'idea per risolvere questo problema è di usare la Formula di Taylor con resto di Lagrange: Esiste c tra x e x_0 tale che

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)}$$

dove il centro $x_0\in(a,b)$ e l'ordine n sono ancora da determinare. Se sappiamo che $|f^{(n+1)}(s)|\le M$ per ogni $s\in(a,b)$ allora possiamo stimare l'errore $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

$$\big|R_n(x)\big| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|\cdot|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\cdot|x-x_0|^{n+1}$$

e così si può valutare la precisione dell'approssimazione.

Rimane la scelta del centro $x_0\in(a,b)$ che deve rispettare i seguenti principi:

(i) in x_0 si devono conoscere valore e tutte le derivate di f fino al n-esimo ordine, cioè $f^{(k)}(x_0)$ per $k=0,1,\dots,n$, altrimenti non si può calcolare T_n esplicitamente;

(ii) tra tutti i punti in (i) si sceglie quello che sta più vicino a x in maniera che il fattore $|x-x_0|^{n+1}=(\text{distanza tra } x \text{ e } x_0)^{n+1}$ sia più piccolo possibile.

Se, fortunatamente, $|x-x_0|<1$, allora le potenze $|x-x_0|^{n+1}\to 0$ per $n\to+\infty$ e quindi contribuiscono, insieme al fattoriale $(n+1)!$ nel denominatore, a diminuire l'errore $|R_n(x)|$ fatto.

Consideriamo alcuni esempi concreti:

<u>Esempi</u>. • Calcolare $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ con un errore $< 10^{-3}$.

Soluzione. Qui $f = \cos$ e $x = \frac{1}{2}$. Visto che qualsiasi derivata di f è data da $\pm\sin(x)$ oppure $\pm\cos(x)$ vale

$$\left|f^{(k)}(s)\right| \leq 1 =: M \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \text{ ed ogni } s \in \mathbb{R}.$$

Passiamo alla scelta del centro x_0. Il punto più vicino a $x = \frac{1}{2}$ nel quale si conoscono tutte le derivate di $f = \cos$ è $x_0 = 0$.
Così otteniamo la stima[3]

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left|\tfrac{1}{2} - 0\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \overset{!}{<} 10^{-3}$$

Questo è una disuguaglianza in n che è equivalente a

$$(n+1)! \cdot 2^{n+1} > 1000.$$

Per trovare il valore $n \in \mathbb{N}$ più piccolo che verifica questa relazione si deve procedere per tentativi:

n	$(n+1)! \cdot 2^{n+1}$
1	$2 \cdot 4 = 8$
2	$6 \cdot 8 = 48$
3	$24 \cdot 16 = 384$
4	$120 \cdot 32 = 3840 > 1000$ ✓

Quindi possiamo scegliere $n = 4$ e così risulta

$$\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - T_4\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3}.$$

Infine T_4 è dato da

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \Rightarrow \qquad T_4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{337}{384}.$$

[3] qui il simbolo $\overset{!}{<}$ significa che "deve essere $<$".

Riassumendo abbiamo verificato che

$$\left|\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{337}{384}\right| \leq \frac{1}{3840} < 10^{-3},$$

cioè la soluzione è $\frac{337}{384}$. □

- Usare uno sviluppo di secondo ordine per calcolare un valore approssimativo di $\sqrt[2]{30}$ valutando anche l'errore fatto.

Soluzione. $\sqrt[2]{30} = f(30)$ per $f(x) := \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Visto che le derivate di $f(x)$ contengono ancora l'espressione $x^{\frac{1}{2}}$ scegliamo come centro x_0 il numero quadrato più vicino a $x = 30$ cioè $x_0 := 25 = 5^2$. Per la Formula di Taylor con il resto di Lagrange esiste quindi un $c \in [x_0, x] = [25, 30]$ tale che

$$f(x) = \sqrt{x} = \underbrace{f(25) + f'(25)\cdot(x-25) + \frac{f''(25)}{2!}\cdot(x-25)^2}_{T_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!}\cdot(x-25)^3}_{R_2(x)},$$

dove

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f(25) &= 5,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} & &\Rightarrow & f'(25) &= \frac{1}{2\cdot 5} = \frac{1}{10},\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}} & &\Rightarrow & \frac{f''(25)}{2!} &= -\frac{1}{4\cdot 5^3\cdot 2} = -\frac{1}{1000},\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}} & &\Rightarrow & \frac{f'''(c)}{3!} &= \frac{3}{8\cdot 6}\cdot c^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{16}\cdot c^{-\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Quindi sostituendo $x = 30$ risulta

$$\begin{aligned}\sqrt{30} &= 5 + \frac{1}{10}\cdot 5 - \frac{1}{1000}\cdot 5^2 + \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16}\cdot 5^3 \\ &= \underbrace{\frac{219}{40}}_{=\text{valore approssimativo}} + \underbrace{\frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16}\cdot 5^3}_{=\text{errore } R_2(30) \text{ compiuto}}\end{aligned}$$

per un $c \in [25, 30]$. Per stimare l'errore osserviamo che la funzione $c^{-\frac{5}{2}}$ è decrescente in c e quindi segue

$$R_2(30) = \frac{c^{-\frac{5}{2}}}{16}\cdot 5^3 \leq \frac{25^{-\frac{5}{2}}}{16}\cdot 5^3 = \frac{1}{400}.$$

Riassumendo, lo sviluppo di secondo ordine dà come approssimazione di $\sqrt{30}$ il valore $\frac{219}{40}$ che lascia un errore $\leq \frac{1}{400} = 0,0025$. □

<u>Esercizio</u>. Calcolare $\sqrt{e}$ con un errore $< \frac{1}{1000}$. (Suggerimento: $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.)

<u>Osservazione</u>. In entrambi gli esempi la funzione f ammetteva derivate di qualsiasi ordine. Ci si può chiedere che cosa succede con l'approssimazione $T_n(x)$ di $f(x)$ se $n \to +\infty$. Per studiare questo problema definiamo dapprima per un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathrm{C}^\infty(I) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}^n(I).$$

Quindi $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ significa che $f : I \to \mathbb{R}$ "è derivabile infinite volte", cioè ammette derivate $f^{(n)}$ di qualsiasi ordine $n \in \mathbb{N}$.

Serie di Taylor

Se per $f \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ esiste $M \geq 0$ tale che

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M^k \quad \text{per ogni } x \in (a,b) \text{ ed ogni } k \in \mathbb{N}$$

allora possiamo stimare il resto $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ come

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot |x-x_0|^{n+1} \leq \underbrace{\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |x-x_0|^{n+1}}_{=:r_n} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per verificare che $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ si usa un trucco: Calcoliamo

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{M^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{|x-x_0|^{n+2}}{|x-x_0|^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{M^{n+1}} = \frac{M \cdot |x-x_0|}{n+2} \to 0 =: q < 1.$$

Ciò implica che per il criterio del rapporto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ converge e quindi per il criterio necessario per la convergenza di una serie otteniamo $r_n = R_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Di conseguenza

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(T_n(x) + \overbrace{R_n(x)}^{\to 0}\big) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) \qquad \text{per ogni } x \in (a,b).$$

Quindi abbiamo dimostrato il seguente risultato.

<u>Proposizione</u> 5.20. *Sia $f \in \mathrm{C}^\infty(a,b)$ e $x_0 \in (a,b)$. Se esiste $M \geq 0$ tale che $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M^k$ per ogni $x \in (a,b)$ e ogni $k \in \mathbb{N}$, allora*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{=T_n(x) \text{ Polinomio di Taylor}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k}_{=: \text{ Serie di Taylor}}$$

Quindi, se f è C^∞ e le derivate $f^{(k)}$ non crescono troppo rapidamente con l'ordine k, $f(x)$ si può rappresentare come *Serie di Taylor*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \text{per ogni } x \in (a, b)}$$

<u>ESEMPI</u>.

- $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $|\sin^{(k)}(x)| \leq 1 =: M = M^k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi dallo sviluppo a pagina 151 segue (con $x_0 = 0$)

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$$

Similmente seguono i seguenti sviluppi di altre funzioni elementari

- $\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{\sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{\cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}}$
- $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1)}$

- $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (-1,1)}$
- $\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-1,1)}$
- $\boxed{\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-1,1)}$

Concludiamo questo capitolo sul calcolo differenziale con lo

Studio di Funzione

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tracciare un grafico approssimativo di f.

Per risolvere questo problema conviene procedere cercando di seguire lo schema seguente più possibile. Si tenga presente che spesso non è possibile eseguire tutti i punti sottoelencati. In questi casi le informazioni mancanti (p.e. esistenza di zeri, estremi locali ecc.) si possono eventualmente dedurre alla fine dello studio come conseguenza delle altre informazioni.

(i) *Determinazione del dominio X:* Sono da individuare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ per i quali l'espressione $f(x)$ sia ben definita. Per esempio

- argomenti sotto radici di ordine pari devono essere ≥ 0,
- argomenti di logaritmi devono essere > 0,
- la base di un'esponenziale deve essere > 0,
- denominatori devono essere $\neq 0$, ecc.

In generale, per calcolare il dominio X di una funzione si deve risolvere un sistema di disequazioni.

ESEMPIO. Sia $f(x) := \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2-\ln(x^2-2)}}$. Allora il numeratore è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre per il denominatore si deve verificare

$$\begin{aligned} x^2 - 2 > 0 \quad \text{e} \quad 2 - \ln(x^2-2) > 0 \quad &\iff \quad x^2 > 2 \quad \text{e} \quad 2 > \ln(x^2-2) \\ &\iff \quad |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad e^2 > x^2 - 2 \\ &\iff \quad |x| > \sqrt{2} \quad \text{e} \quad |x| < \sqrt{e^2+2} \\ &\iff \quad x \in \big(-\sqrt{e^2+2}, -\sqrt{2}\big) \cup \big(\sqrt{2}, \sqrt{e^2+2}\big). \end{aligned}$$

(ii) *Simmetrie (pari, dispari) e periodicità:* cfr. pagine 71 e 72.

(iii) *Intersezioni con gli assi:* Con l'asse-x: risolvere l'equazione $f(x) = 0$. Con l'asse y: se $0 \in X$ calcolare $f(0)$.

(iv) *Segno della funzione:* Risolvere l'equazione $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

(v) *Calcolo dei limiti (da destra/sinistra) alla frontiera di X:* Si calcolano i limiti (da destra/sinistra) di $f(x)$ negli estremi finiti, se esistono, del dominio X e si deducono gli eventuali *asintoti verticali*, cfr. pagina 86. Se X è illimitato, si calcolano inoltre i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) =: l$, determinando se vi sono *asintoti orizzontali* $y = l$ (se $l \in \mathbb{R}$), cfr. pagina 86. Se invece $l = \pm\infty$ si procede con la

(vi) *Individuazione degli asintoti obliqui:* Se esistono $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - [m \cdot x + q]\big) = 0 \qquad \text{e/o} \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - [m \cdot x + q]\big) = 0$$

allora si dice che la retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* per f a $+\infty$ e/o $-\infty$. Graficamente ciò significa che la distanza tra il grafico di f e la retta $y = mx + q$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Per verificare l'esistenza di un asintoto obliquo si procede come segue:

Si verifica prima se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =: m \neq 0 \qquad = \text{pendenza dell'asintoto.}$$

Nel caso affermativo si verifica se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) =: q \qquad = \text{ordinata all'origine dell'asintoto.}$$

Se entrambi i limiti convergono (in $\mathbb{R}$) con $m \neq 0$, allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f per $x \to \pm\infty$.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x) := \ln\big(e^{3x+2} + 5\big)$. Allora

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(5), \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Quindi $y = \ln(5)$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$. Inoltre, può esistere un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Perciò studiamo

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{3x+2}+5\right)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3\cdot e^{3x+2}}{e^{3x+2}+5}}{1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{9\cdot e^{3x+2}}{3\cdot e^{3x+2}} = 3$$

e inoltre (usando la continuità del logaritmo)

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\ln\left(e^{3x+2}+5\right) - 3x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\ln\left(e^{3x+2}+5\right) - \ln\left(e^{3x}\right)\Big) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{3x+2}+5}{e^{3x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^2 + \frac{5}{e^{3x}}\right) = \ln\left(e^2\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione

$$y = 3x + 2$$

è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ della funzione data, cfr. Figura 45.

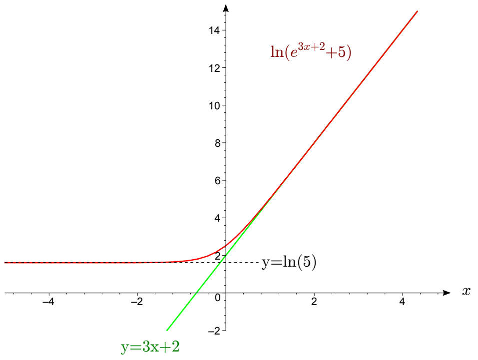


FIGURA 45. Asintoto obliquo.

(vii) *Studio della derivata prima (crescenza/decrescenza, punti critici ed estremi locali):* Si calcola la derivata prima $f'(x)$ e il corrispondente dominio. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 0$ si calcolano i punti critici x_0 di f. Eventualmente, studiando il cambiamento del segno di $f'(x)$ in $x = x_0$ (o studiando le derivate successive in x_0, cfr. punto successivo) si può classificare la natura del punto critico (minimo o massimo locale, cfr. pagine 135 o 154). Infine si studia il segno di $f'(x)$ per ottenere informazioni sulla monotonia di f.

(viii) *Studio della derivata seconda (estremi locali, concavità/convessità, punti di flesso):* Si calcola (se non si ottiene un espressione troppo complessa) la derivata seconda. Se i punti critici non sono già stati classificati nel punto (vii) si calcolano i valori di f'' nei punti critici per poi applicare il criterio per estremi locali, cfr. pagina 154.

Definizione. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b) \subset X$. Se $f'(x)$ in (a, b) è

- crescente, allora si dice che f è *convessa* (oppure *concava verso l'alto*) in (a, b),
- decrescente, allora si dice che f è *concava* (oppure *concava verso il basso*) in (a, b).

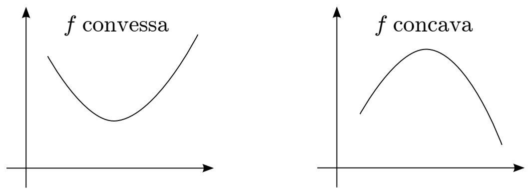


Figura 46. Funzioni convesse e concave.

Dal test di monotonia (cfr. pagina 133) segue che se $f \in \mathrm{C}^2(a, b)$, allora

$$\begin{aligned} f \text{ è convessa in } (a,b) &\iff f' \text{ è crescente in } (a,b) \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b), \\ f \text{ è concava in } (a,b) &\iff f' \text{ è decrescente in } (a,b) \iff f''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a,b). \end{aligned}$$

Diremo che $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ammette retta tangente in $x_0\in(a,b)$ se il rapporto incrementale di f in x_0 ammette limite (finito o infinito), cioè se esiste

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}.$$

<u>Definizione</u>. Un punto $x_0\in(a,b)$ si chiama *(punto di) flesso* di $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in , se f è continua in (a,b), derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e se

- f ammette retta tangente in x_0, e
- la concavità di f è opposta dalle due parti di x_0.

Si nota che per $f\in C^2(a,b)$ in un punto di flesso $x_0\in(a,b)$ vale necessariamente $f''(x_0)=0$ per il teorema degli zeri.

<u>Esempi</u>. (Cfr. Figura 47)

- Sia $f(x)=x^3$. Allora $f'(x)=3x^2$ e $f''(x)=6x$. Visto che $f''(x)<0$ per $x<0$ e $f''(x)>0$ per $x>0$, l'origine è un punto di flesso di f.
- Sia $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Allora f ammette una retta tangente verticale in $x_0=0$. Inoltre $f'(x)=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}$ e $f''(x)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}-1}}{3}=-\frac{2\cdot x^{-\frac{5}{3}}}{9}$ per $x\neq 0$. Quindi $f''(x)>0$ per $x<0$ e $f''(x)<0$ per $x>0$ e allora l'origine è un punto di flesso di f.
- Sia $f(x)=|x|+x^3$. Allora il rapporto incrementale di f in $x_0=0$ è dato da

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{|h|+h^3}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\left(\frac{|h|}{h}+h^2\right)=\pm 1.$$

Quindi f non ammette tangente in $x_0=0$ e quindi $(0,0)$ *non* è un punto di flesso di f, nonostante che f cambia concavità in quel punto.

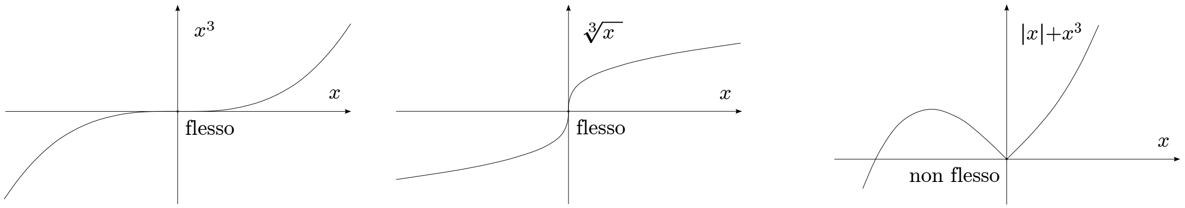


Figura 47. Punti di flesso e no.

Seguendo questo schema è utile tracciare il grafico gradualmente, inserendo le informazioni via via raccolte anziché raccogliere tutto e poi fare il grafico: i processi graduali aiutano a controllare la coerenza del procedimento e a capire quali informazioni è ancora utile raccogliere.

Consideriamo ora un esempio completo.

<u>Esempio</u>. Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione: (i) *Dominio:* $f(x)$ è definito per ogni $x \neq 3$ e quindi $X = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(ii) *Simmetrie:* il grafico di f non rappresenta simmetrie.

(iii) *Intersezione con gli assi:* Visto che la funzione esponenziale è sempre > 0, $f(x) = 0 \iff |x+3| = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3$. Inoltre vale $0 \in X$ e $f(0) = e^{\frac{1}{-3}} \cdot |3| = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}$.

(iv) *Segno di $f(x)$:* Visto che il modulo è sempre ≥ 0, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in X$.

(v) *Limiti alla frontiera del dominio:* I punti di frontiera di X sono: $-\infty$, 3, $+\infty$. Studiamo perciò i limiti (da destra/sinistra dove indicato) in quei punti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to 0}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to+\infty} = e^0 \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to \frac{1}{0^-} = -\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to 6} = e^{-\infty} \cdot 6 = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x-3}}^{\to \frac{1}{0^+} = +\infty}} \cdot \overbrace{|x+3|}^{\to 6} = e^{+\infty} \cdot 6 = +\infty.$$

Quindi la retta $x = 3$ rappresenta un asintoto verticale per $x \to 3^+$. Visto che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, possono esistere

(vi) *Asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$:* Allora calcoliamo

$$m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{x-3}}}^{\to 1} \cdot |x+3|}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x+3|}{x} = \pm 1,$$

e

$$\begin{aligned} q_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - m_\pm x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| \mp x\big) \\ &= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3) - x\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big(\big(e^{\frac{1}{x-3}} - 1\big) \cdot x + \overbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}^{\to e^0 \cdot 3 = 3}\Big) & \text{nel caso “+”}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \big(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3) + x\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\big(1 - e^{\frac{1}{x-3}}\big) \cdot x - \underbrace{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 3}_{\to e^0 \cdot 3 = 3}\Big) & \text{nel caso “−”}. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi studiamo prima

$$\lim_{x\to\pm\infty} \Big(\big(e^{\frac{1}{x-3}} - 1\big) \cdot x\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} - 1}{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x}{x-3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-3} = 1 \cdot 1 = 1,$$

ove abbiamo usato che $t := \frac{1}{x-3} \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Così risulta

$$q_\pm = \pm 1 \pm 3 = \pm 4$$

e quindi $y = x + 4$ e $y = -x - 4$ sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, rispettivamente.

(vii) *Studio di $f'(x)$:* Visto che $|x+3|$ è derivabile per ogni $x \neq -3$, la funzione è derivabile per ogni $x \in X$ con $x \neq -3$. Inoltre per il rapporto incrementale nel punto $x_0 = -3$ vale

$$\begin{aligned} f'_{\pm}(-3) &= \lim_{x\to -3^{\pm}} \frac{f(x) - f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3^{\pm}} \frac{e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3| - 0}{x+3} \lim_{x\to -3^{\pm}} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{|x+3|}{x+3} \\ &= e^{-\frac{1}{6}} \cdot (\pm 1) = \pm e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Quindi $f'_{-}(-3) \neq f'_{+}(-3)$ e di conseguenza f non è derivabile in $x_0 = -3$.
Calcoliamo ora $f'(x)$ per $x \neq \pm 3$: per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|\right)' = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (x+3)\right)' = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} \cdot (x+3) + e^{\frac{1}{x-3}} \cdot 1 \\ &= e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x+3)}{(x-3)^2} = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Similmente segue per $x < -3$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|\right)' = \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot (-x-3)\right)' = -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2}$$

e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2} & \text{se } x > -3,\ x \neq 3, \\ -e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2} & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Calcoliamo ora i punti critici di f: Visto che la funzione esponenziale non ammette zeri, segue che

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \iff \quad x = x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \\ &\iff \quad x = x_1 = 6 \text{ opp. } x = x_2 = 1. \end{aligned}$$

Studiamo ora la monotonia di f attraverso il segno di $f'(x)$: Visto che

$$\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2} > 0 \quad \forall\, x \neq 3 \qquad \text{e}$$
$$x^2 - 7x + 6 = (x-6)\cdot(x-1)$$

segue che

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) < 0 & \text{per } x < -3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) > 0 & \text{per } -3 < x < 1, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) < 0 & \text{per } 1 < x < 6,\ x \neq 3, \\ \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^2}\cdot(x-6)\cdot(x-1) > 0 & \text{per } 6 < x. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$f \text{ è strettamente crescente in } (-3,1)\cup(6,+\infty),$$
$$f \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty,-3)\cup(1,6)\setminus\{3\}.$$

(viii) *Studio di $f''(x)$:* f' è derivabile per $x \neq \pm 3$. Inoltre per $x > -3$, $x \neq 3$ vale

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2}\right)' \\
&= e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{-1}{(x-3)^2} \cdot \frac{(x^2-7x+6)}{(x-3)^2} + e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{(x-3)^2 \cdot (2x-7) - 2(x-3) \cdot (x^2-7x+6)}{\big((x-3)^2\big)^2} \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot \Big((x-3)^2 \cdot (2x-7) - 2(x-3) \cdot (x^2-7x+6) - (x^2-7x+6)\Big) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot \big(13x-33\big).
\end{aligned}$$

Similmente per $x < -3$ si ottiene

$$f''(x) = \left(-e^{\frac{1}{x-3}} \cdot \frac{x^2-7x+6}{(x-3)^2}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x-33).$$

Quindi risulta

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x-33) & \text{se } x > -3,\ x \neq 3, \\ -\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} \cdot (13x-33) & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Classifichiamo i due punti critici $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$ trovati nel punto precedente: Visto che $\frac{e^{\frac{1}{x-3}}}{(x-3)^4} > 0$ per ogni $x \in X$ segue che

$$\begin{aligned}
\text{segno}\big(f''(6)\big) &= \text{segno}\big(13 \cdot 6 - 33\big) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \text{ è un punto di minimo locale,} \\
\text{segno}\big(f''(1)\big) &= \text{segno}\big(13 \cdot 1 - 33\big) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \text{ è un punto di massimo locale}
\end{aligned}$$

con $f(6) = 9 \cdot e^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \sqrt[3]{e}$ e $f(1) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$. Per trovare eventuali flessi risolviamo l'equazione

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 13x - 33 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 := x = \frac{33}{13}.$$

Inoltre per $x \neq \pm 3$ vale

$$f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{33}{13}, \quad \text{cioè } f \text{ è convessa in } \left(\tfrac{33}{13}, 3\right) \text{ e } (3, +\infty)$$
$$f''(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{33}{13}, \quad \text{cioè } f \text{ è concava in } \left(-\infty, -3\right) \text{ e } \left(-3, \tfrac{33}{13}\right)$$

e quindi risulta che $x_0 = \frac{33}{13}$ è un punto di flesso.

Da tutte le informazioni ottenute risulta che f ha il seguente grafico.

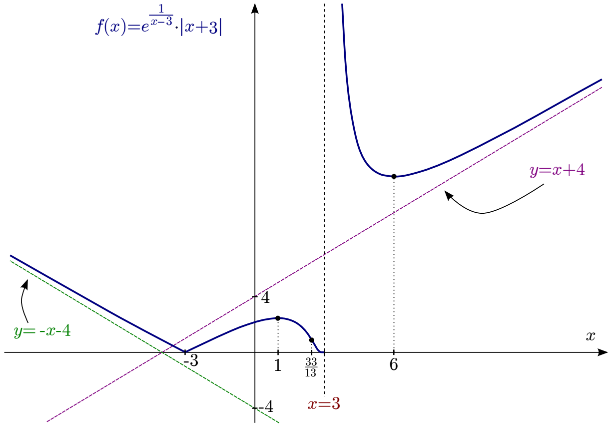


Figura 48. Studio di $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} \cdot |x+3|$.

$\square$