CAPITOLO 7

Funzioni Reali di due Variabili: Limiti e Continuità

In questo capitolo consideriamo funzioni reali di due variabili reali, cioè funzioni definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ a valori reali. Perciò introduciamo per prima

Lo Spazio $\mathbb{R}^2$

Definiamo l'insieme $\mathbb{R}^2 := \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Gli elementi $x := (x,y)$ si chiamano *vettori* (o punti) in $\mathbb{R}^2$. Con le operazioni

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (*somma tra vettori*),
- $\alpha \cdot (x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ (*moltiplicazione di un vettore per uno* "scalare" *reale*)

$\mathbb{R}^2$ diventa uno *"spazio vettoriale"* (cfr. il corso di Geometria o Matematica Discreta).

Per misurare la lunghezza di un vettore in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (oppure la distanza del punto (x,y) dall'origine $(0,0)$ nel piano xy), definiamo (usando il Teorema di Pitagora) la sua *norma*

$$\|(x,y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norma soddisfa le seguenti regole.

<u>Proposizione</u> 7.1.

- *$\|(x,y)\| \geq 0$ e $\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$,*
- *$\|\alpha \cdot (x,y)\| = |\alpha| \cdot \|(x,y)\|$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,*
- *$\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$ (*disuguaglianza triangolare*, cfr. Figura 74).*

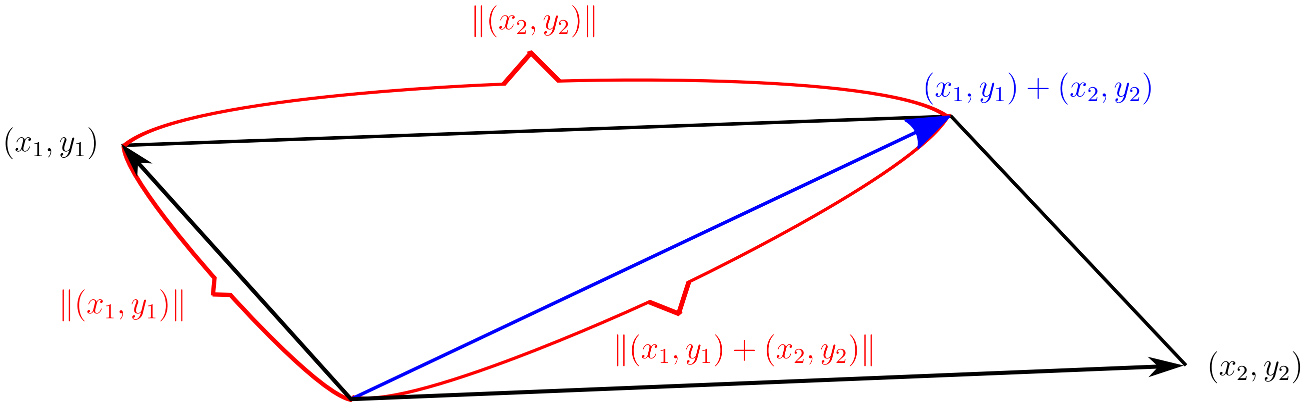


FIGURA 74. Disuguaglianza triangolare.

<u>OSSERVAZIONI</u>. • La norma permette (come il modulo in $\mathbb{R}$, cfr. pagina 11) di misurare distanze tra punti in $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \text{distanza tra } (x_1, y_1) \text{ e } (x_2, y_2)}$$

Infine introduciamo il *prodotto scalare* tra vettori (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con risultato un numero reale come

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \in \mathbb{R},$$

Si noti che $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)$ e $(x, y) \cdot (x, y) = \|(x, y)\|^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Funzioni Reali di due Variabili Reali: Prime Proprietà

Definizione 7.2. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di due variabili reali*.

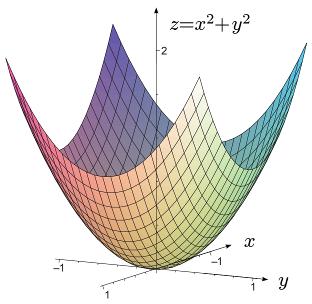
ESEMPI.
- $V : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(R, I) := R \cdot I$ (legge di Ohm).
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + xy + xy^3$ (polinomio nelle variabili x y di grado 4).
- $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. In questo caso il dominio di f è l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, cioè il cerchio di centro l'origine e raggio 1.

PROBLEMA. Come si può visualizzare una funzione reale $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cioè di due variabili?

In pratica ci sono *2 modi*:

1. Attraverso il *grafico* di f definito come
$$G(f) := \Big\{\big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in X\Big\} \in \mathbb{R}^3.$$
Quindi il grafico di una funzione di due variabili è un sottoinsieme dello spazio tridimensionale.

   ESEMPI. Grafici di funzioni di due variabili in $\mathbb{R}^3$, cfr. Figura 75.



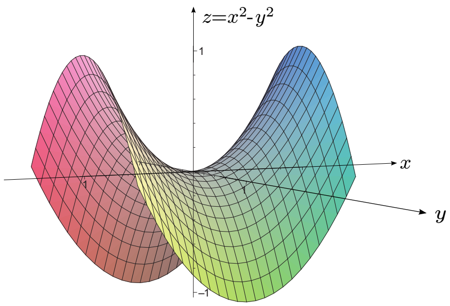


FIGURA 75. Grafici di $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

2. Attraverso le curve (o linee) di livello: Data $c \in \mathbb{R}$, si definisce *curva di livello c* di f l'insieme

$$\Gamma_c := \Big\{(x, y) \in X : \ f(x, y) = c\Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Esempi concreti sono le isobare in una mappa meteorologica oppure le curve di livello in una mappa topografica. Si nota che per determinati valori di c le curve di livello corrispondenti possono essere l'insieme vuoto.

ESEMPI. Curve di livello in $\mathbb{R}^2$, cfr. Figura 76.

FIGURA 76. Linee di livello Γ_c delle funzioni $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ per c =0, 1/16, 1/4, 1/2, 1 e $f_2(x, y) = x^2 - y^2$ per c =-1, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 1 con $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Limiti di Funzioni Reali di due Variabili Reali

Con l'aiuto della norma il concetto di limite si generalizza molto facilmente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$.

Definizione 7.3 (*Limiti per vettori*). Diremo che la successione di vettori $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ converge a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se $\|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)\| \to 0$ per $n \to +\infty$. In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \text{ per } n \to +\infty}.$$

OSSERVAZIONE. Vale che

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \text{ in } \mathbb{R}^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 & \text{e} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

Cioè una successione di vettori converge se e solo se converge in ogni componente.

Con la definizione precedente possiamo estendere facilmente la definizione di limite per le funzioni da una a due variabili.

Definizione 7.4 (*Limiti per Funzioni*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione reale di due variabili reali. Allora diremo che

$f(x, y)$ tende a $l \in \mathbb{R}$ per (x, y) tendente a (x_0, y_0)

se per ogni successione $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{(x_0, y_0)\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$. In questo caso scriveremo

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{f(x, y) \to l \text{ per } (x, y) \to (x_0, y_0)}.$$

<u>Osservazioni</u>.

- La definizione di limite per funzioni di due variabili può essere data solo per $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, cioè al finito, poiché, a differenza di $\mathbb{R}$, non essendoci un ordinamento naturale in $\mathbb{R}^2$ non si può definire una direzione privilegiata secondo cui raggiungere ∞ in $\mathbb{R}^2$

- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Come nel caso di una variabile esiste anche un'altra possibilità di introdurre limiti per le funzioni di due variabili che non fa riferimento alle successioni:

  Se $l \in \mathbb{R}$, allora
  $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } |f(x,y) - l| < \varepsilon\ \forall\, (x,y) \in X \text{ con } 0 < \big\|(x,y) - (x_0,y_0)\big\| < \delta$$

- La definizione di limite in $\mathbb{R}^2$ conserva molte delle proprietà di quelle in $\mathbb{R}$. In particolare
  (i) il limite, se esiste, è unico;
  (ii) valgono le regole per il calcolo dei limiti di somme, differenze, prodotti e quozienti.

Calcolo dei Limiti di Funzioni di due Variabili

Mentre, come abbiamo visto, la definizione di limite si generalizza facilmente da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$, il calcolo dei limiti in due variabili presenta delle difficoltà aggiuntive. Ciò è dovuto al fatto che, rispetto al caso di $\mathbb{R}$, possiamo avvicinarci al punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in cui vogliamo calcolare il limite da varie direzioni e modi molto diversi. Per semplicità ci restringeremo nel seguente al caso del punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, cioè l'origine.

Una Condizione per la *non* Esistenza del Limite. Il fatto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$$

vuol dire che *ogni* tipo di avvicinamento di (x, y) al punto $(0, 0)$ (p.e. su rette, parabole oppure spirali passando per l'origine, cfr. figura Figura 77) risulta nella convergenza di $f(x, y)$ allo *stesso* valore l.

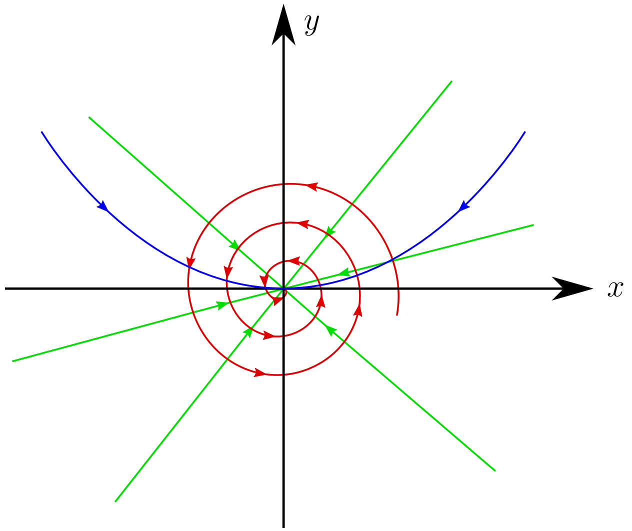


FIGURA 77. Diversi avvicinamenti lungo curve passando per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

In altre parole,

se esistono due avvicinamenti a $(0, 0)$ con corrispondenti valori limite diversi, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \textit{non} \text{ esiste.}$$

In particolare, considerando avvicinamenti su rette che passano per l'origine, cioè del tipo $y = mx$ al variare della pendenza $m \in \mathbb{R}$, otteniamo il seguente risultato per la *non* esistenza del limite.

<u>Proposizione</u> 7.5. *Se* $\lim_{x \to 0} f(x, mx)$ *esiste ma dipende da* $m \in \mathbb{R}$ *allora il limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{non } \textit{esiste.}$$

<u>Esempio</u>. Consideriamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Ponendo $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$ otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} \quad \text{dipende da } m.$$

Risulta quindi che il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *non* esiste.

<u>Osservazione</u>. Non vale il contrario della proposizione precedente, cioe se $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$ esiste ed è indipendente da $m \in \mathbb{R}$ ciò *non* implica che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ esiste. Comunque se

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = l$$

indipendemente da $m \in \mathbb{R}$, allora l è l'unico candidato per il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ESEMPIO. Consideriamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0 \qquad \text{per ogni } m\in\mathbb{R}.$$

Quindi tutti i limiti al variare di $m \in \mathbb{R}$ esistono e sono uguali. Pertanto se il limite l di f esiste, deve essere uguale a $l = 0$.

Consideriamo ora la parabola $y = x^2$. Tale curva passa per il punto $(0,0)$, quindi fornisce un altro modo per avvicinarsi ad esso. Ponendo $y = x^2$ e calcolando il limite per $x \to 0$, cioè muovendosi verso il punto $(0,0)$ sulla parabola, allora risulta

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 0} f(x,x) \;!!$$

Quindi abbiamo trovato due curve passanti per il punto $(0,0)$, muovendoci lungo le quali troviamo diversi valori del limite. Possiamo pertanto concludere che il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

non esiste.

OSSERVAZIONE. Le scelta della curva $y = x^2$ è stata fatta per ristabilire il rapporto omogeneo fra le variabili x e y. Infatti sia al numeratore che al denominatore il rapporto fra il grado della x e della y è 2 a 1

Una Tecnica per dimostrare l'Esistenza del Limite. Fin qui abbiamo visto come si può dimostrare la *non* esistenza di un limite. Adesso vediamo come si può dimostrare l'esistenza di un limite in $\mathbb{R}^2$. Perciò servono dapprima le

Coordinate polari: Ricordiamo (cfr. corso di Geometria) che un punto P del piano, oltre che con le sue coordinate cartesiane (x, y), può essere rappresentato con le *coordinate polari* $(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$, cfr. Figura 78.

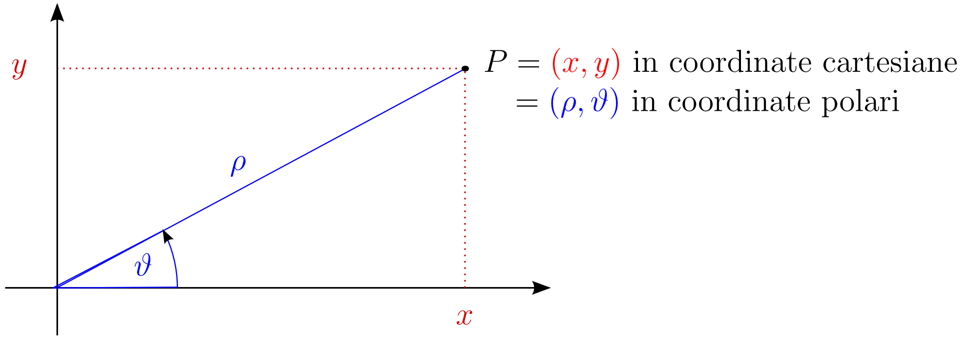


FIGURA 78. Coordinate polari.

Le formule di passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari sono date da

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\vartheta) \\ y = \rho\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Si noti che la relazione $\tan\vartheta = \frac{y}{x}$ non può essere risolto per ϑ in quanto la funzione tan non è invertibile in $[0, 2\pi) \ni \vartheta$. Si noti che

$$\boxed{(x, y) \to (0, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho \to 0^+}.$$

Quindi passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari il limite da *due* variabili si trasforma in un limite di *una* variabile! Sfruttando questa idea si ottiene la seguente

<u>Proposizione</u> 7.6. *Se esiste $l \in \mathbb{R}$ e una funzione $g(\rho)$ (indipendente da ϑ!) tale che*

$$\left| f\big(\overbrace{\rho\cos(\vartheta)}^{=x}, \overbrace{\rho\sin(\vartheta)}^{=y}\big) - l \right| \leq g(\rho)$$

con $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0^+$, allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l.$$

Consideriamo alcuni esempi.

<u>Esempio</u>. Calcola, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} =: l.$$

Allora $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite esiste deve essere $l = 0$. Per studiare la convergenza passiamo alle coordinate polari, cioè scriviamo

$$f(x,y) = f\big(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)\big) = \frac{2\rho^2\cos^2(\vartheta)\cdot\rho\sin(\vartheta)}{\rho^2} = 2\rho\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

Visto che $|\sin(\vartheta)|, |\cos(\vartheta)| \leq 1$, segue

$$\begin{aligned} \left|f\big(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| &= \left|2\rho\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta) - 0\right| = 2\rho\cdot\left|\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)\right| \\ &\leq 2\rho =: g(\rho) \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+. \end{aligned}$$

Quindi, per il risultato precedente, segue che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

<u>Esempio</u>. Studiare la convergenza di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)+x^2+y^2}{x^2+y^2} =: l.$$

È facile verificare che $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 1$ per ogni $m \in \mathbb{R}$, quindi se il limite l esiste deve essere $l = 1$.

Si ha $f(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta)) = \frac{\sin(\rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta))+\rho^2}{\rho^2}$ e quindi

$$\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| = \left|\frac{\sin(\rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta))}{\rho^2}\right|$$

Se procediamo utilizzando come prima la relazione $|\sin(t)| \le 1$ per $t \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| = \left|\frac{\overbrace{\sin(\rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta))}^{\le 1}}{\rho^2}\right| \le \frac{1}{\rho^2} =: g(\rho) \not\to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+.$$

Quindi non possiamo concludere l'esistenza del limite. Tuttavia possiamo ricordare che $|\sin(t)| \le |t|$ per $t \in \mathbb{R}$, quindi per $t = \rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)$,

$$\begin{aligned}\left|f\big(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)\big) - l\right| &\le \frac{|\rho^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)|}{\rho^2} \le \frac{\rho^3\cdot\overbrace{|\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)|}^{\le 1}}{\rho^2} \\ &\le \rho =: g(\rho) \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0^+\end{aligned}$$

che dimostra che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)+x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$.

Continuità di Funzioni di due Variabili

Anche la definizione di continuità si generalizza facilmente da una a due variabili.

Definizione 7.7 (Continuità). Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice

- *continua in* $(x_0, y_0) \in X$ se per ogni successione $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ segue $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$ per $n \to +\infty$;
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.
- Denotiamo con
$$\mathrm{C}(X) := \big\{f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è continua}\big\}$$
l'insieme delle funzioni continue su $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

Valgono molte delle osservazioni fatte nel caso di una variabile.

Osservazioni.

- Come in una variabile, la continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni:
f è continua in (x_0, y_0) $\iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ per ogni $(x, y) \in X$ con $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$.
- f è continua in (x_0, y_0) $\iff$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
- Somme, differenze, prodotti, rapporti e composizione di funzioni continue sono continue.

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sin(xe^y + x^2y)$ risulta continua in quanto composizione di funzioni continue.