Esercitazione

Metodo grafico per la Programmazione Lineare

Esercizio

Dato il problema

$$
\begin{aligned}
&\max \quad 3x_1 + 2x_2 \\
&x_2 \le 4 \\
&x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&2x_1 + x_2 \le 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

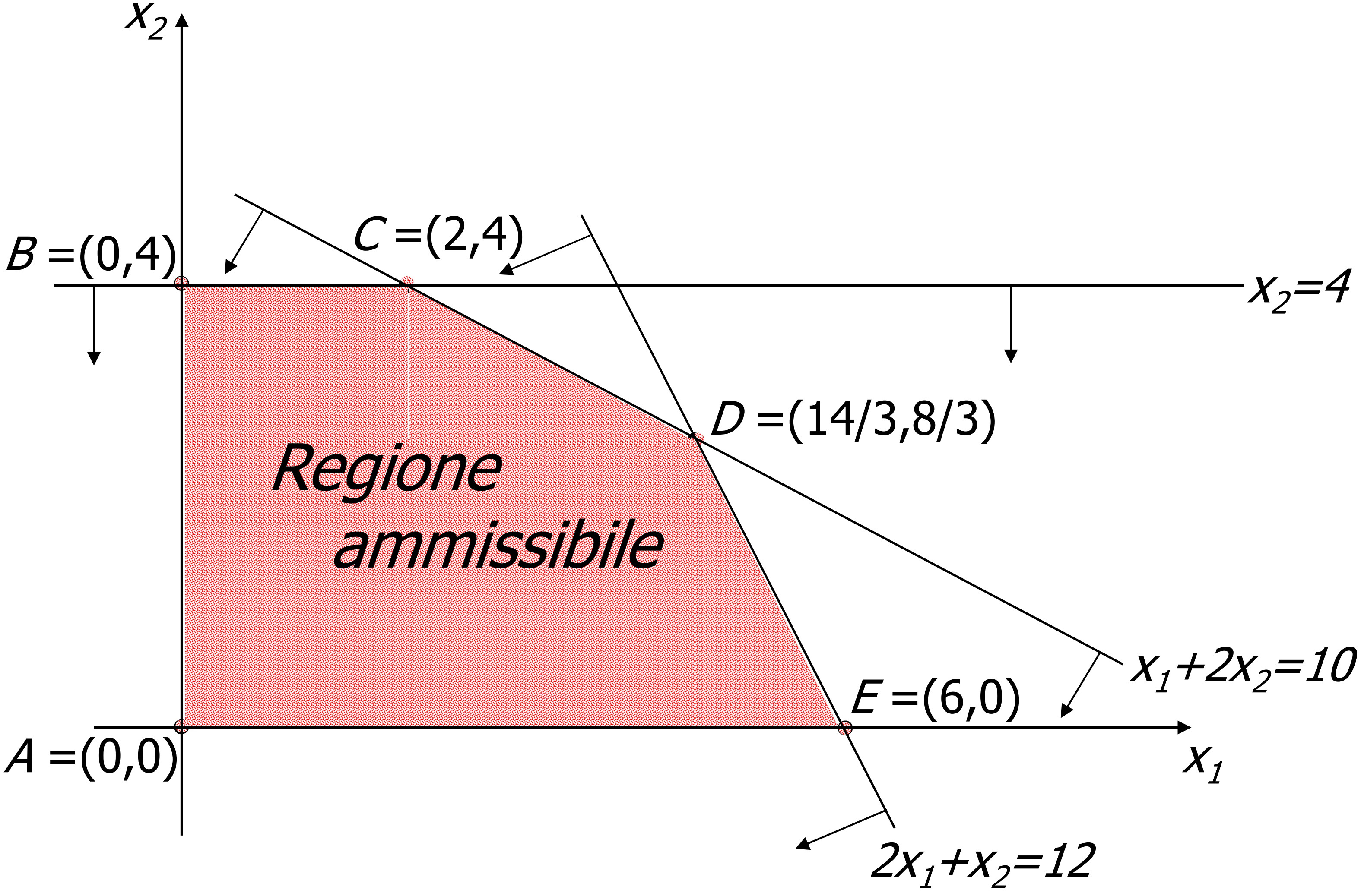
a) Risolverlo per via grafica.

b) Considerare la funzione obiettivo parametrica:

$3\ x_1 + kx_2$, con k reale positivo.

Per quali valori di k la soluzione trovata rimane ottima?

Regione ammissibile



Esercizio

Dato il problema

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

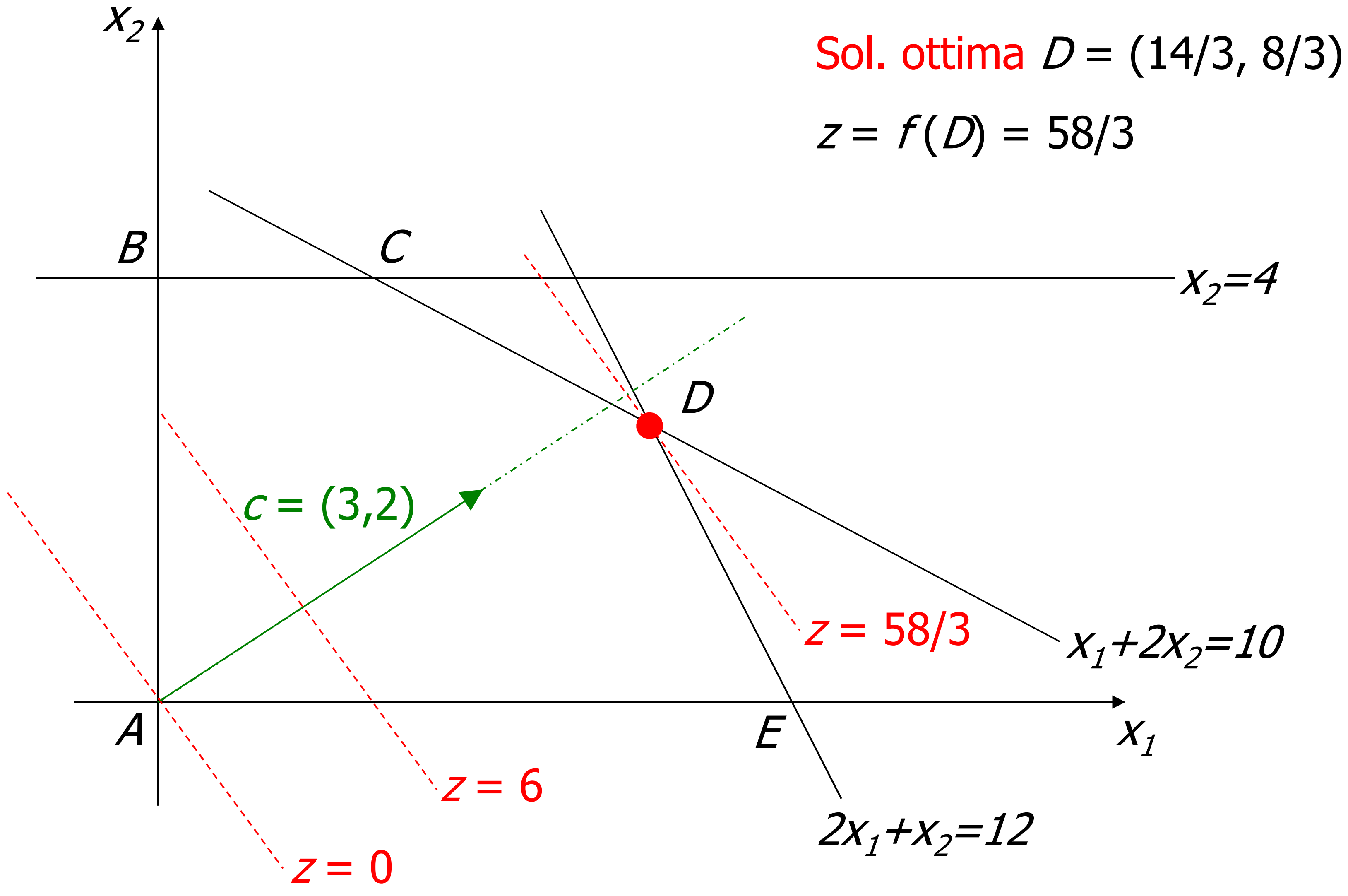
a) Risolverlo per via grafica.

b) Considerare la funzione obiettivo parametrica:

$3\ x_1 + kx_2$, con k reale positivo.

Per quali valori di k la soluzione trovata rimane ottima?

Soluzione grafica



Esercizio

Considerare la funzione obiettivo parametrica:

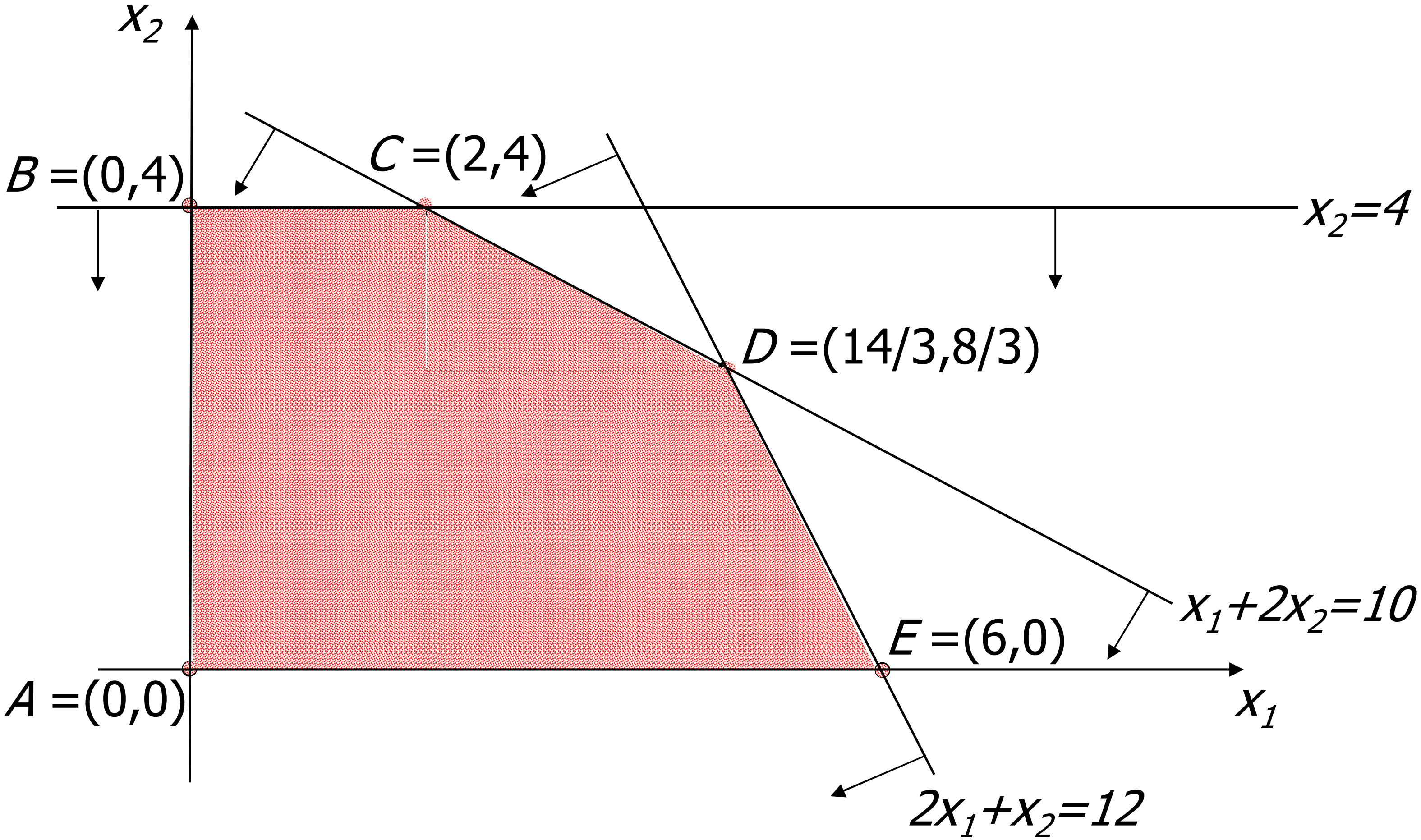
$3\ x_1 + kx_2$, con k reale positivo.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad 3x_1 + kx_2 \\
&x_2 \le 4 \\
&x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&2x_1 + x_2 \le 12 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Per quali valori di k la soluzione trovata rimane ottima?

Regione ammissibile

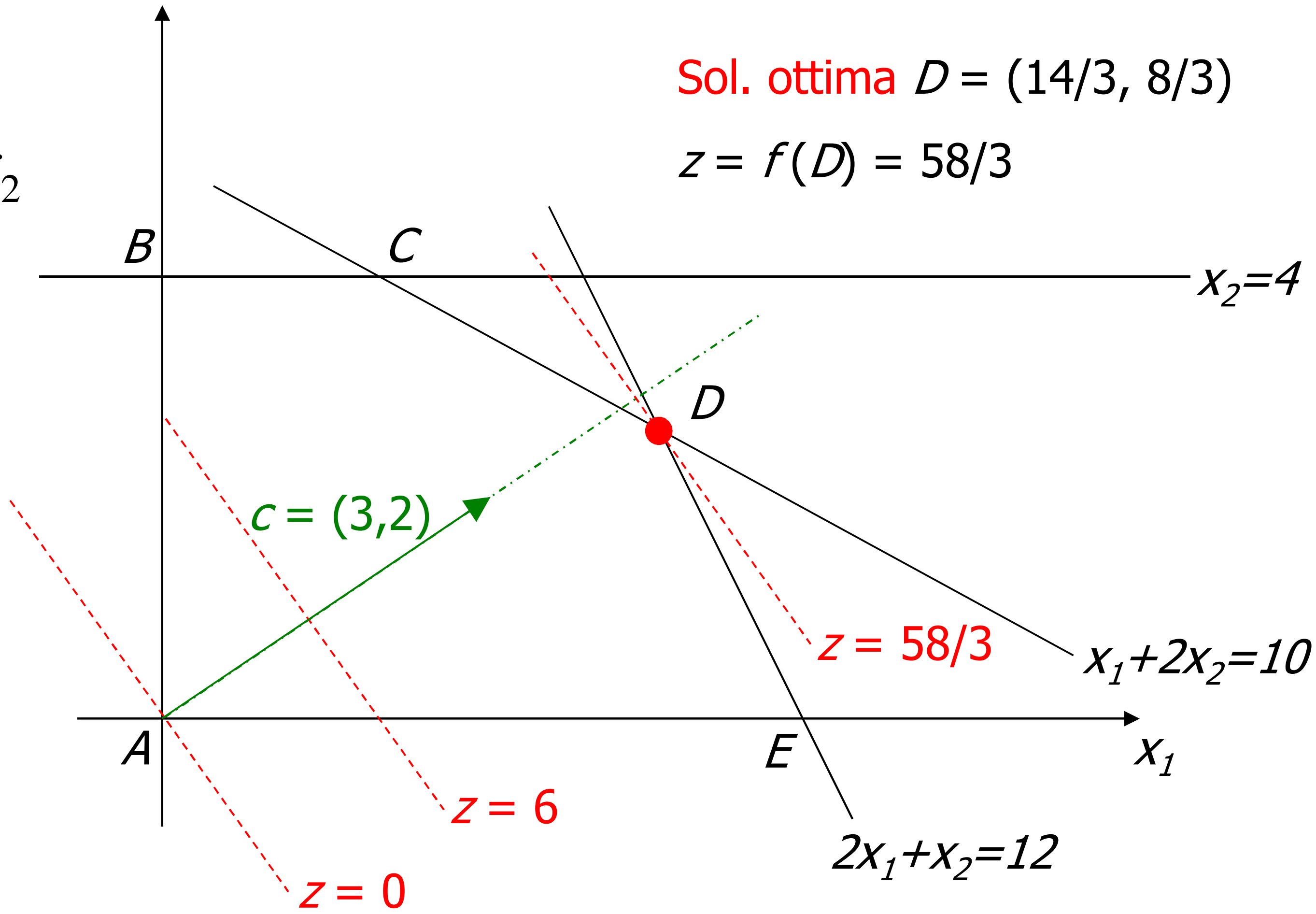
La regione ammissibile non cambia



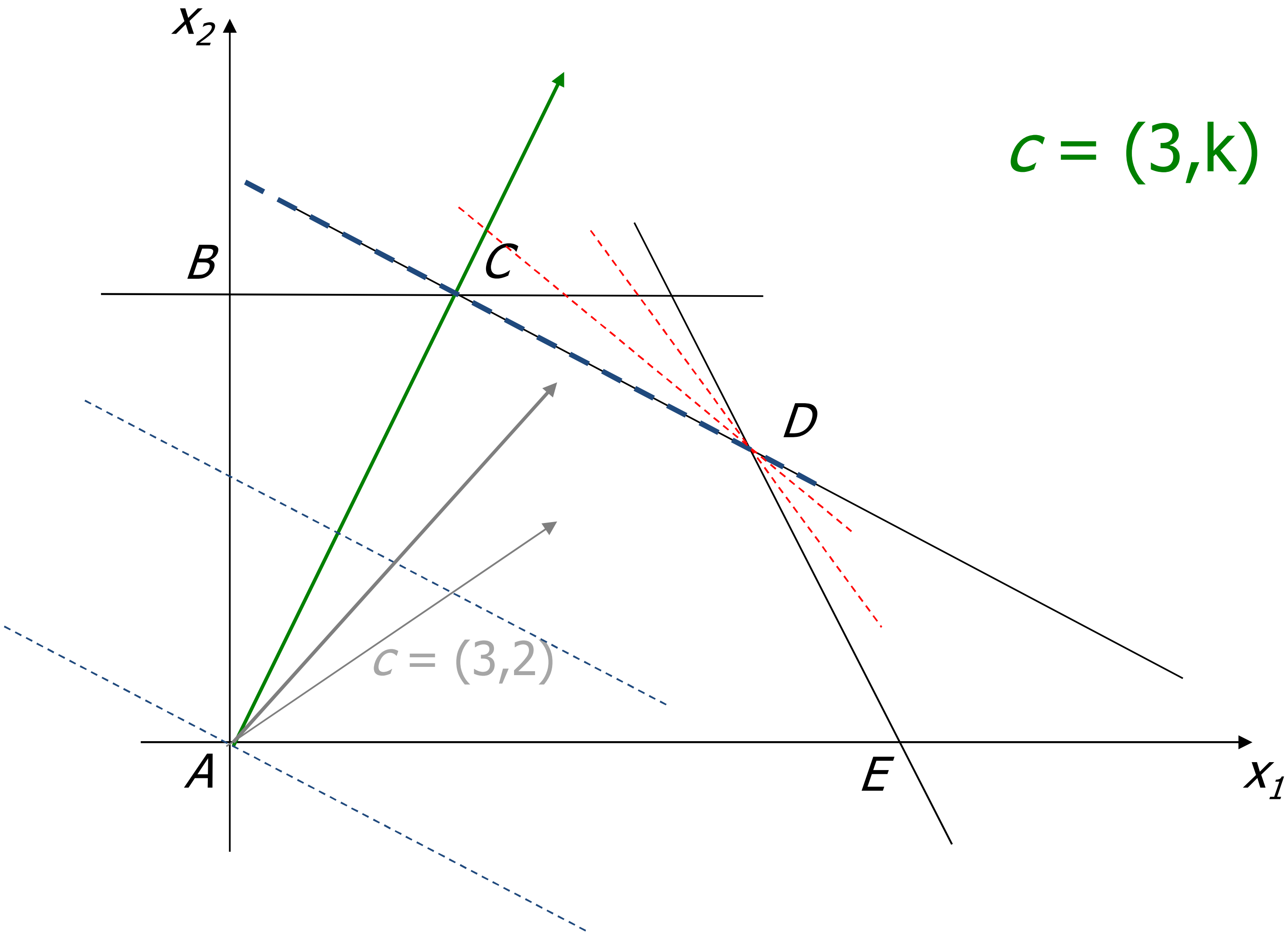
f. obiettivo parametrica

Vettore dei costi $c = (3, k)$. Il caso precedente corrisponde a $k = 2$.

$$\max \quad 3x_1 + kx_2$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

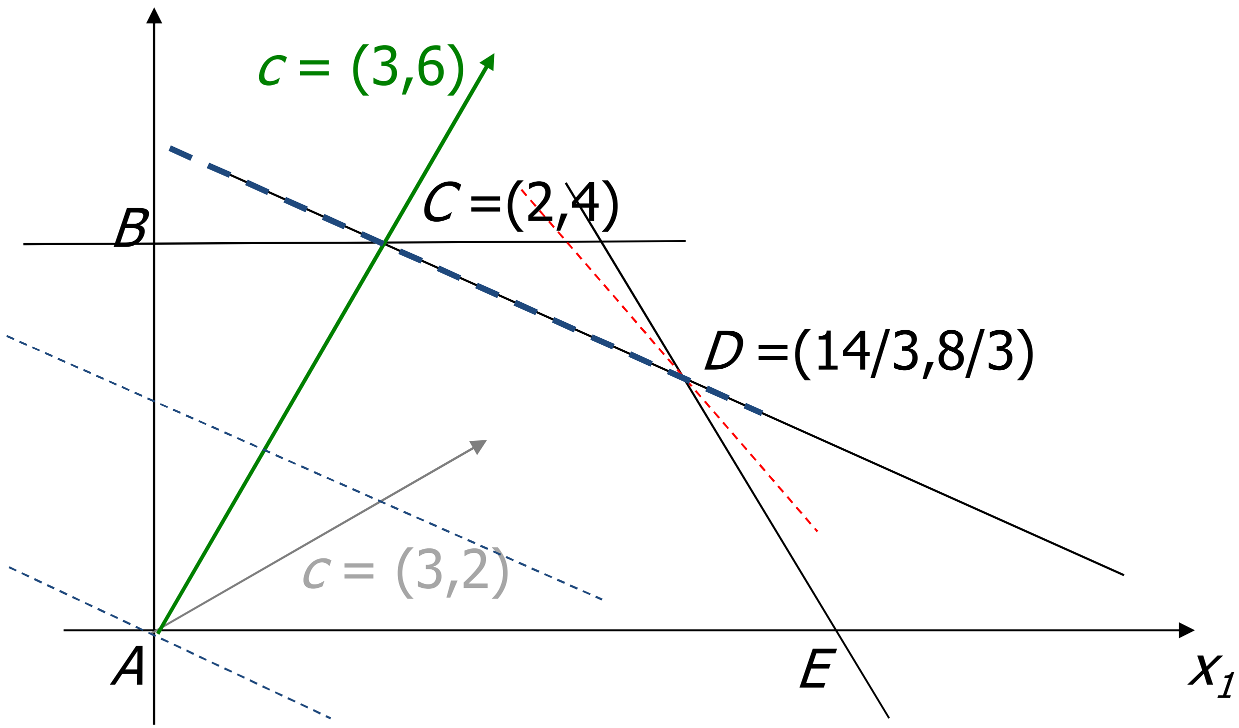


Caso k>2



Se k > 2 il punto D rimane soluzione ottima finché la retta di livello diviene parallela allo spigolo CD.

Algebricamente



La retta di livello diviene parallela a *CD* quando il vettore

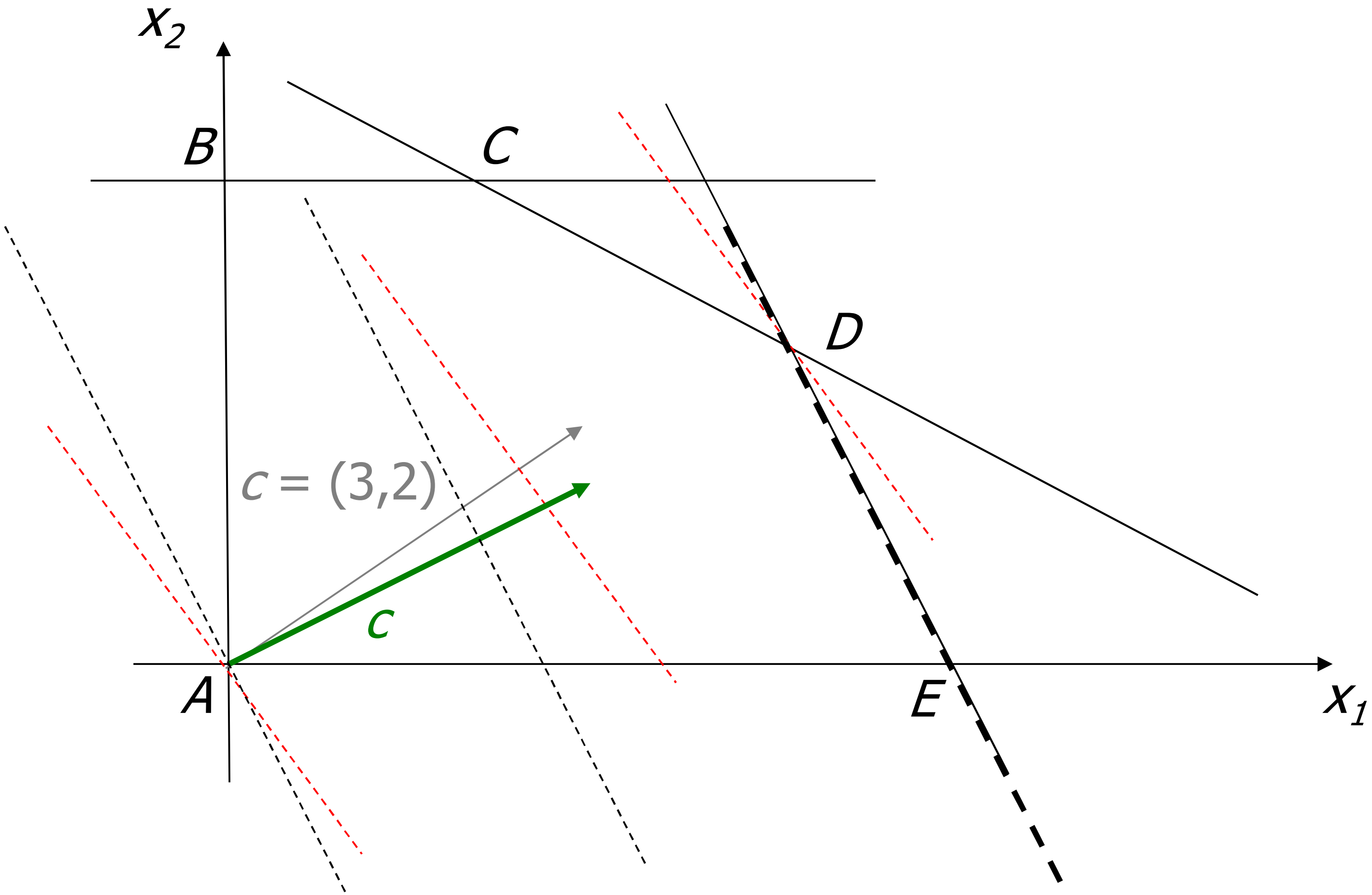
c = (3, *k*)

è ortogonale allo spigolo *CD*.

Essendo il vettore *C* – *D* = (– 8/3, 4/3), la condizione limite è

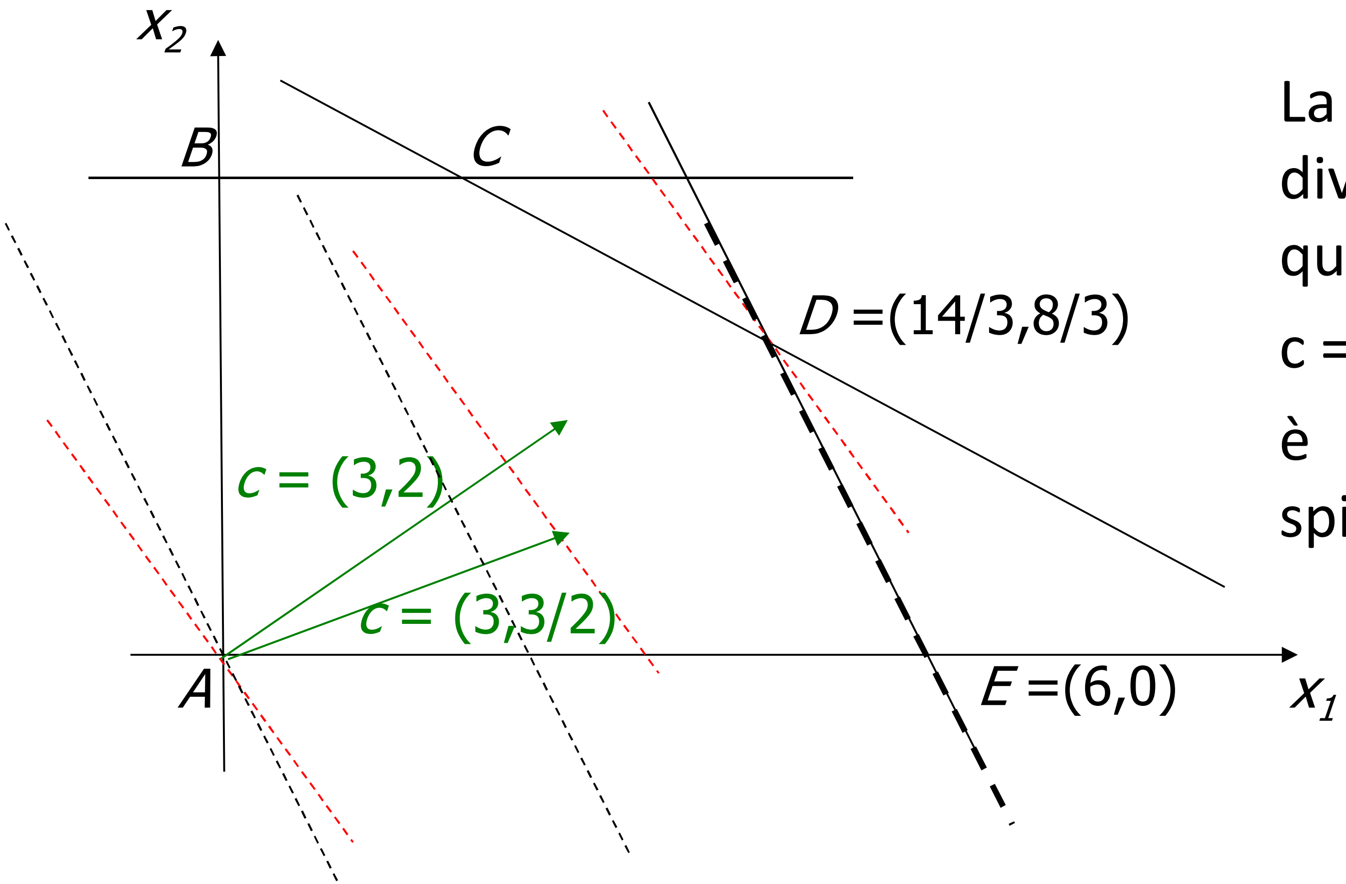
$$(3 \quad k)\begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = -8 + \frac{4}{3}k = 0 \Rightarrow k = 6$$

Caso k<2



Se k < 2 il punto D rimane soluzione ottima finché la retta di livello diviene parallela allo spigolo DE.

Algebricamente



La retta di livello diviene parallela a *CD* quando il vettore

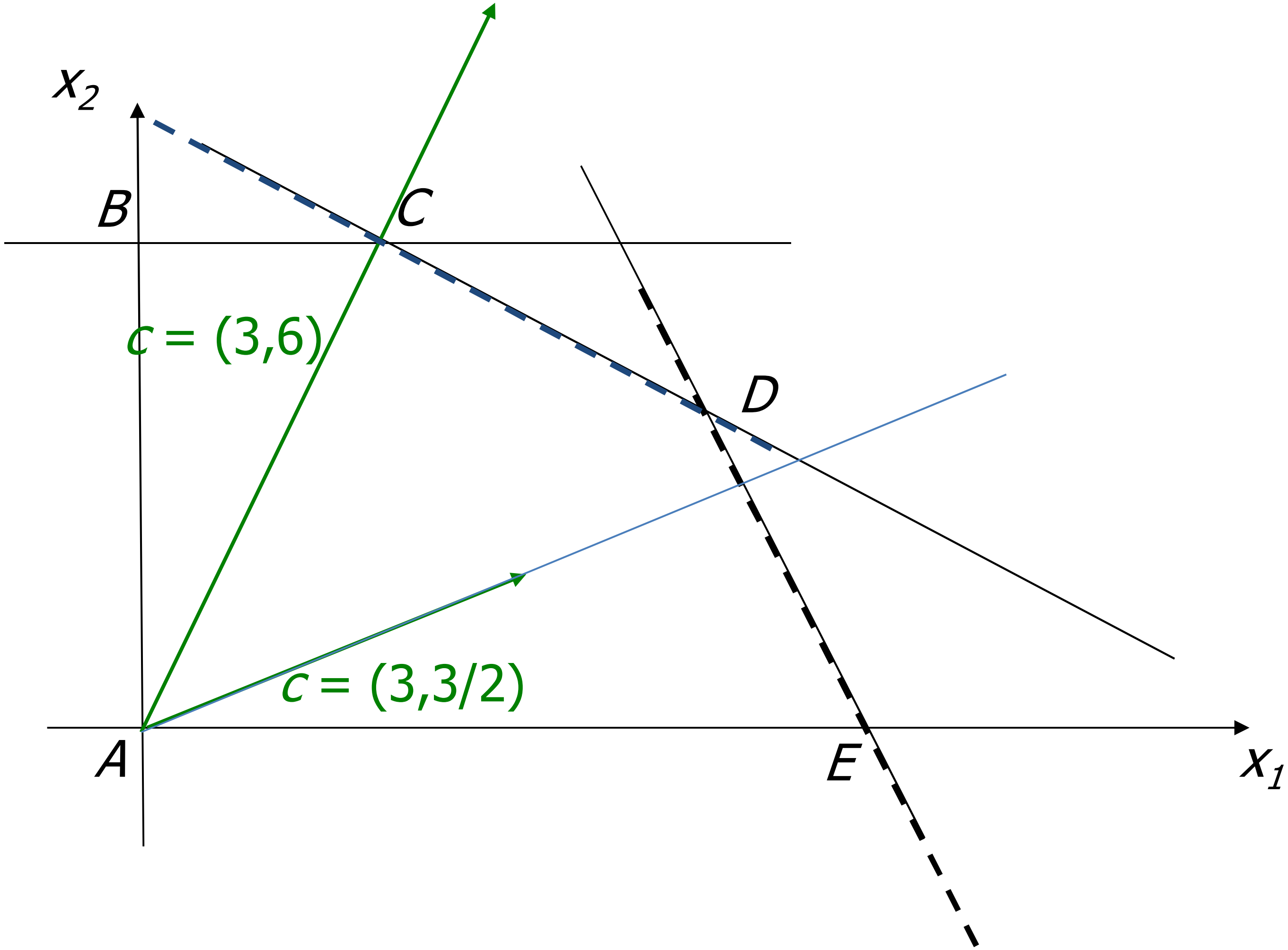
c = (3, *k*)

è ortogonale allo spigolo *DE*.

Essendo il vettore D – E = (– 4/3, 8/3), la condizione è

$$(3 \quad k)\begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = -4 + \frac{8}{3}k = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

Risposta



Quindi se $3/2 \leq k \leq 6$ il punto D è soluzione ottima