CAPITOLO 8

Calcolo Differenziale per Funzioni Reali di due Variabili

In questo capitolo estenderemo il concetto di derivazione alle funzioni reali di due variabili. Come vedremo in seguito ciò *non* è cosi semplice come generalizzare il concetto di limite oppure di continuità da una a due variabili.

Concetti di Derivabilità di Funzioni di due Variabili

Mentre per le funzioni reali di una variabile esiste soltanto un concetto di derivabilità scopriremo in seguito che per funzioni di due variabili la situazione è più complicata.

Derivate Parziali e Derivabilità. La prima generalizzazione del concetto di derivata si basa (come in una variabile) sul limite di un rapporto incrementale.

Definizione 8.1. Siano $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in X$ un "punto interno" di X. Se converge

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile parzialmente rispetto x* in (x_0, y_0) con *derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =: f_x(x_0, y_0) =: D_x f(x_0, y_0)$. Similmente, se converge

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile parzialmente rispetto y* in (x_0, y_0) con *derivata parziale* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =: f_y(x_0, y_0) =: D_y f(x_0, y_0)$.

<u>Osservazione</u>. La derivata parziale rispetto x corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto a una variabile) della funzione $g(x) := f(x, y_0)$ che è la restrizione di f alla retta $y = y_0$. Similmente, la derivata parziale rispetto y corrisponde a fare la derivata ordinaria della funzione $h(y) := f(x_0, y)$ che è la restrizione di f alla retta $x = x_0$, cfr. Figura 79.

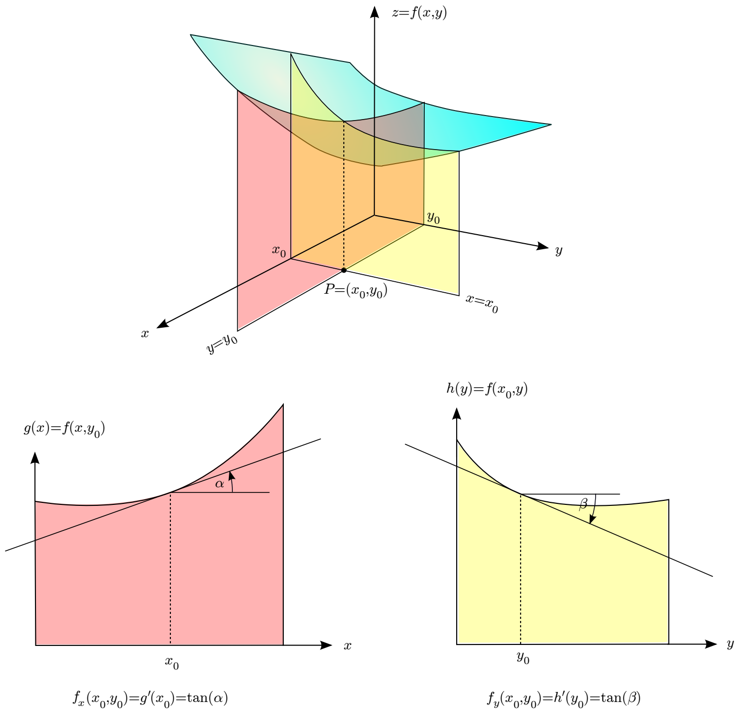

Figura 79. Derivate parziali.

Quindi $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ forniscono informazioni sulla crescenza/decrescenza di f lungo le rette $y = y_0$ e $x = x_0$, rispettivamente, nell'intorno del punto (x_0, y_0).

<u>Osservazione</u>. Per calcolare le derivate parziali di una funzione rispetto ad x (oppure y) è sufficiente, se le funzioni che la compongono sono derivabili, derivare in maniera ordinaria rispetto ad x (rispettivamente y), considerando y (rispettivamente x) come costante.

<u>Esempi</u>.

- Se $f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2y + 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 - 2y + 3x$.
- Se $f(x,y) = e^{xy} + y^2$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, e^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\, e^{xy} + 2y$.

Se però le funzioni che intervengono non sono derivabili, bisogna passare attraverso la definizione delle derivate parziale.

<u>Esempio</u>. Sia $f(x,y) = |x| \cdot y$, allora in un punto del tipo $(0,y)$ non possiamo derivare direttamente rispetto ad x, ma dobbiamo usare la definizione

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| \cdot y}{h} = \begin{cases} \nexists & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

<u>Problema</u>. Chè cos'è la derivata di una funzione reale di due variabili?

Questo problema si risolve raggruppando le derivate parziali in un vettore.

<u>Definizione</u> 8.2. Siano $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0,y_0) \in X$. Se f è derivabile parzialmente rispetto ad x e y in (x_0,y_0), allora f si dice *derivabile* (parzialmente) in (x_0,y_0). In tal caso si può definire il vettore delle derivate parziali

$$\boxed{Df(x_0,y_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \in \mathbb{R}^2}$$

Tale vettore si chiama *gradiente* di f in (x_0,y_0) e può essere considerato come derivata (prima) di una funzione reale di due variabili. Per il gradiente si usano anche le notazioni $Df(x,y) =: \text{grad}\, f(x,y) =: \nabla f(x,y)$ (si legge "nabla di f").

<u>Esempio</u>. Se $f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, allora $Df(x,y) = (6x^2y + 3y, 2x^3 - 2y + 3x) \in \mathbb{R}^2$. In particolare, $Df(1,1) = (6+3, 2-2+3) = (9,3)$.

OSSERVAZIONE. Avendo dato una definizione di derivabilità per funzioni di due variabili è naturale chiedersi se essa gode delle stesse proprietà del caso unidimensionale dove, per esempio, la derivabilità implica la continuità. Il seguente esempio mostra che *non* è così!!

ESEMPIO. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Abbiamo verificato (cfr. pagina 251) che $f(x,y)$ non ammette limite, e quindi non è continua, in $(0,0)$. Tuttavia in $(0,0)$ esiste la derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

e analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Quindi f è derivabile ma non continua in $(0,0)$.

Questa osservazione ci porta a concludere che la precedente definizione di derivabilità non è la corretta generalizzazione di quella unidimensionale.

D'altra parte la continuità non implica la derivabilità, poiché ad esempio la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$ è continua, ma non è derivabile in $(0,0)$. Quindi nel caso di due variabili non esiste nessuna relazione tra continuità e derivabilità!

Per trovare la giusta generalizzazione del concetto di derivabilità dal caso unidimensionale a quello di due variabili ricordiamo che per una funzione reale $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ di *una* variabile le seguenti affermazioni sono equivalenti, cfr. pagina 144.

(a) f è derivabile in x_0, cioè $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$ converge.

(b) Esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = f(x_0) + A\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$.

Inoltre, in questo caso $A = f'(x_0)$

Cioè f è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste una "buona" approssimazione lineare di $f(x)$ in x_0. Generalizzando questa equivalenza a due variabili otterremo il concetto di

Differenziabilità. Abbiamo visto che sulla base della convergenza dei rapporti incrementali non si ottiene una proprietà soddisfacente in $\mathbb{R}^2$. Nella prossima definizione seguiamo invece il secondo approccio basato sull'approssimazione lineare.

Definizione 8.3. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in X$. Se esiste un vettore $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + A \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big) \\ &= f(x_0,y_0) + a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + o\Big(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\Big) \quad \text{per } (x,y) \to (x_0,y_0) \end{aligned}$$

allora f si dice *differenziabile* in (x_0, y_0) (il simbolo "$\cdot$" denota in questo caso il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$).

Proposizione 8.4. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile nel punto $(x_0, y_0) \in X$. Allora*

- *f è continua in (x_0, y_0);*
- *f è derivabile in (x_0, y_0) e $A = Df(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$. Quindi risulta*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\big(\|(x - x_0, y - y_0)\|\big) \\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) + o\Big(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\Big) \quad \textit{per } (x,y) \to (x_0,y_0) \end{aligned}$$

Osservazioni.

- Ricordando la definizione di $o(\cdot)$ la condizione definendo la differenziabilità in (x_0, y_0) si può riscrivere come

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \big(f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)\big)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

- Il termine lineare nella definizione di differenziabilità fornisce l'equazione

$$\boxed{z = p(x,y) := f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

del *piano tangente* p al grafico di f nel punto (x_0,y_0), cioè del piano che localmente ha un unico punto di intersezione con il grafico di f, cfr. Figura 80.

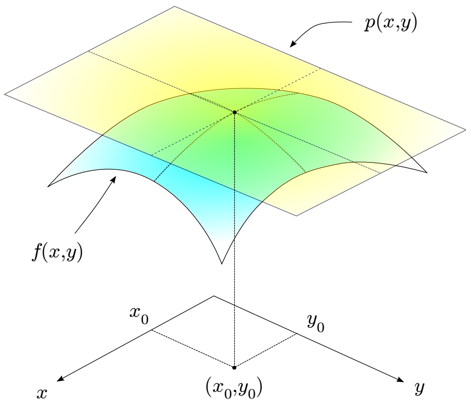

Figura 80. Piano tangente.

Esempio. Se $f(x,y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$ e $(x_0,y_0) = (1,1)$, allora da $f(1,1) = 4$ e $Df(1,1) = (9,3)$ segue

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(x-1) + f_y(1,1)\cdot(y-1) \\ &= 4 + 9\cdot(x-1) + 3\cdot(y-1). \end{aligned}$$

Problema. Come si può (facilmente) verificare la differenziabilità?

Questo problema si risolve con la seguente proposizione che fornisce una semplice condizione sufficiente per la differenziabilità.

<u>Proposizione</u> 8.5. *Se $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è derivabile con continuità (cioè le derivate parziali f_x e f_y di f esistono e sono continue, brevemente si dice che $f \in \mathrm{C}^1$) allora f è differenziabile.*

<u>Esempio</u>. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \sin(x^2 \cdot e^y)$. Allora, visto che

$$f_x(x, y) = \cos(x^2 \cdot e^y) \cdot 2x \cdot e^y, \quad f_y(x, y) = \cos(x^2 \cdot e^y) \cdot x^2 \cdot e^y$$

sono (come prodotti e composizioni di funzioni continue) continue, f è differenziabile.

Riassumendo abbiamo per una funzione f di *due* variabili

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{f \in \mathrm{C}^1} & \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} & \boxed{f \text{ differenziabile}} & \substack{\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow} & \boxed{f \text{ derivabile (parzialmente)}} \\
 & & \Downarrow \not\Uparrow & \not\nearrow \not\swarrow & \\
 & & \boxed{f \text{ continua}} & &
\end{array}$$

mentre per una funzione di *una* variabile la derivabilità e la differenziabilità sono equivalenti.

Derivate Direzionali. Concludiamo le varie definizioni di derivabilità con quella di derivata direzionale.

Definizione 8.6. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in X$ e $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ un versore, cioè $\|v\| = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = 1$. Se converge

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv_0, y_0 + hv_1) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$$

allora f si dice *derivabile rispetto la direzione v* in (x_0, y_0) con *derivata direzionale* $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$. Altre notazioni: $f_v(x_0, y_0) = D_v f(x_0, y_0)$.

Osservazioni.

- Usando le coordinate polari si vede che tutti i versori $v \in \mathbb{R}^2$ si possono rappresentare come $v = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ per $\vartheta \in [0, 2\pi)$.
- La derivata direzionale in (x_0, y_0) rispetto $v \in \mathbb{R}^2$ corrisponde a fare la derivata ordinaria (cioè rispetto a una variabile) della funzione $F(t) = f(x_0 + tv_0, y_0 + tv_1)$, $t \in \mathbb{R}$, che è la restrizione di f alla retta $v_0 \cdot (y - y_0) = v_1(x - x_0)$. Quindi essa fornisce informazioni sulla crescenza/decrescenza di f lungo tale retta nell'intorno del punto (x_0, y_0), cioè nella direzione di v partendo da (x_0, y_0), cfr. Figura 81.
- Se $v = (1, 0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ mentre per $v = (0, 1)$ vale $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

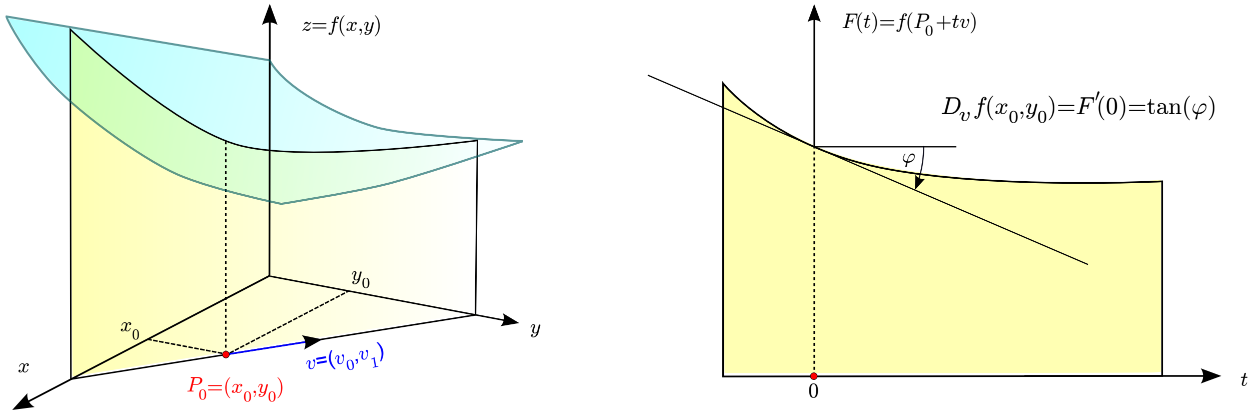

Figura 81. Derivata direzionale.

<u>PROBLEMA</u>. Come si può (facilmente) calcolare una derivata direzionale?

Per risolvere il problema si usa il seguente importante teorema che lega gradiente e derivate direzionali. Oltre a fornire una semplice regola per il calcolo della derivata direzionale, esso implica anche due importanti proprietà geometriche del gradiente.

<u>TEOREMA</u> 8.7 (*Teorema del Gradiente*). *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in X$ e $v = (v_0, v_1) \in \mathbb{R}^2$ un versore. Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v \cdot Df(x_0, y_0) = v_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

dove "$\cdot$" indica il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Dal teorema precedente segue che se f è differenziabile in (x_0, y_0), allora in (x_0, y_0) esistono le derivate direzionali secondo ogni direzione v.

<u>ESEMPIO</u>. Sia $f(x, y) = 2x^3y - y^2 + 3xy$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot Df(1, 1) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (9, 3) = \tfrac{3}{\sqrt{2}} + \tfrac{9}{\sqrt{2}} = \tfrac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

Due Interpretazioni geometriche del Gradiente.

• Per il prodotto scalare tra due vettori $u, v \in \mathbb{R}^2$ vale

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\varphi)$$

dove $\varphi \in [0, \pi]$ denota l'angolo tra u e v, cfr. Figura 82.

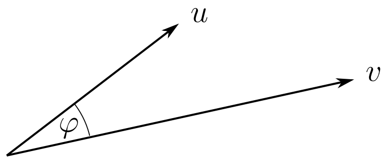

FIGURA 82. Prodotto scalare.

Quindi $u \cdot v$ diventa massima se $\varphi = 0$, cioè se u e v puntano nella stessa direzione. Inoltre, se $u = Df(x_0, y_0)$ il versore che punta nella stessa direzione è

$$v = \frac{Df(x_0, y_0)}{\|Df(x_0, y_0)\|}\,.$$

Dal teorema del gradiente segue

$$\max_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{Df(x_0, y_0)}{\|Df(x_0, y_0)\|} \cdot Df(x_0, y_0) = \|Df(x_0)\|.$$

Sapendo che la derivata direzionale misura il tasso di crescita di f nella direzione data, possiamo concludere che il gradiente

$$\boxed{\textit{$Df(x_0, y_0)$ punta nella direzione di massima crescita di f in (x_0, y_0)}}$$

Similmente si conclude che

$$\boxed{\textit{$-Df(x_0, y_0)$ punta nella direzione di massima decrescita di f in (x_0, y_0)}}$$

• Consideriamo ora la curva di livello $c := f(x_0, y_0)$ di f passando per il punto (x_0, y_0), cioè

$$\Gamma_c = \big\{(x, y) \in X : \ f(x, y) = f(x_0, y_0)\big\}.$$

Supponiamo che in (x_0, y_0) esiste il versore tangente τ a Γ_c, cfr. Figura 83.

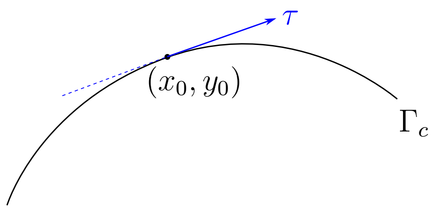

FIGURA 83. Versore tangente τ.

Poiché f è costante su Γ_c e, partendo in (x_0, y_0), muoversi lungo la direzione τ corrisponde, almeno in termini infinitesimali, a muovendosi lungo la curva Γ_c, si ha euristicamente

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, y_0) = 0.$$

Quindi dal Teorema del Gradiente segue

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(x_0, y_0) = \tau \cdot Df(x_0, y_0) = 0.$$

Ricordando che il prodotto scalare tra due vettori è nullo se e solo se i due vettori sono perpendicolari, concludiamo che il gradiente

$$\boxed{Df(x_0, y_0) \textit{ è ortogonale alla curva di livello di } f \textit{ passante per } (x_0, y_0)}$$

cfr. Figura 84.

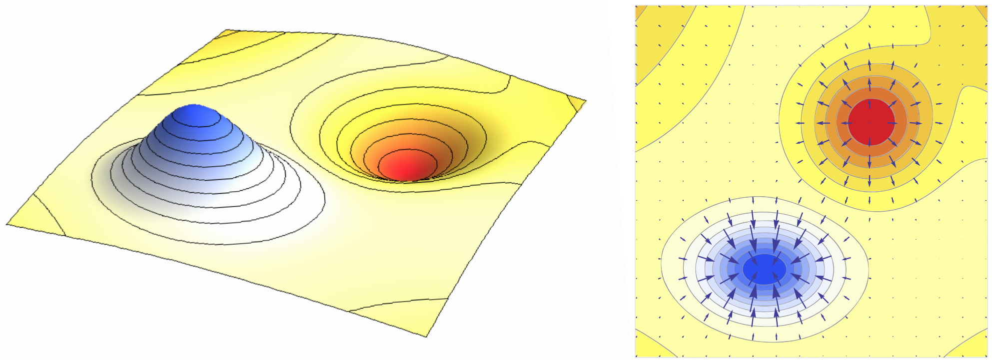

FIGURA 84. Grafico e linee di livello con gradiente.