

## HW1 - Allocazione ottima di risorse

**Esercizio 1** Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione  $A$  e  $B$  e fabbrica due tipi di prodotti  $P_1$  e  $P_2$ . Il processo produttivo consiste in un'unica lavorazione da svolgersi su una macchina. In ciascun impianto, ci sono due diverse macchine,  $M_1$  e  $M_2$ , in grado di svolgere la lavorazione. La seguente tabella riporta il numero massimo di ore-macchina settimanali disponibili per tipo di macchina in ciascun impianto.

impianto	$M_1$	$M_2$
$A$	18	12
$B$	12	15

inoltre, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere una unità di prodotto finito dipende dall'impianto, secondo la seguente tabella:

	impianto $A$		impianto $B$	
	$P_1$	$P_2$	$P_1$	$P_2$
$M_1$	4	2	5	3
$M_2$	2	5	5	6

Infine, ciascuna unità di prodotto utilizza 40 Kg di materiale grezzo, di cui sono disponibili complessivamente 15000 Kg.

Il profitto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto  $P_1$  e  $P_2$  è rispettivamente di 200 e 150 Euro.

Costruire un modello di Programmazione Lineare che permetta di elaborare un piano di produzione che massimizzi il profitto settimanale;

**Esercizio 2** L'azienda ComputOPT deve programmare la produzione di notebook (N) e computer desktop (D) per il prossimo quadrimestre. Ogni computer contiene una CPU, la medesima per N e D, e una memoria pari a 16 e 32 MB rispettivamente per N e D. A causa delle difficoltà della catena logistica, la fornitura quadrimestrale di CPU non può superare le 10.000 unità. Inoltre, ComputOPT dispone di 15.000 banchi di memoria da 16MB giacenti in magazzino. L'assemblaggio di un computer N richiede 4 minuti, mentre uno di tipo D ne richiede 3 e la linea di produzione può lavorare per 25.000 minuti nell'intero quadrimestre. Considerando le condizioni attuali del mercato, il costo dei materiali e del processo produttivo, il profitto ottenuto da ComputOPT dalla vendita di un computer pari a 750 Euro per un computer N e 1.000 Euro per uno D.

Costruire un modello di Programmazione Lineare che permetta di massimizzare il profitto di ComputOPT.

**Esercizio 3** Il contact center EASYCOM ha una commessa per gestire la comunicazione di un'azienda con i suoi clienti per i prossimi 3 mesi (90 giorni). A tale scopo, deve formare agenti a svolgere attività di front-office, cioè rispondere alle chiamate, oppure di back-office, cioè processare pratiche tecnico/amministrative. Nel primo caso la formazione di un agente richiede 2 ore al costo di 150 Euro/ora mentre nel secondo ne richiede 4, al costo di 200 Euro/ora. Tuttavia, EASYCOM non può dedicare alle attività di formazione un budget superiore a 10000 Euro complessivamente. L'azienda, che riceve in media 500 chiamate e 40 richieste di pratiche tecnico/amministrative al giorno, pone delle condizioni sulla qualità del servizio offerto all'utenza: si deve garantire che almeno l'80% delle chiamate sia servito ed ogni pratica inevasa comporta una penale per EASYCOM di 5 Euro. L'organizzazione di EASYCOM è tale per cui il numero giornaliero di chiamate servite è pari a 30 volte il numero di operatori impegnati al front-office; inoltre, ogni operatore dedicato al back-office è in grado di processare 4 pratiche al giorno.

Costruire un modello di Programmazione Lineare che permetta di minimizzare i costi complessivi sopportati da EASYCOM.

## SOLUZIONI

### Esercizio 1

Il problema si formula come modello di allocazione ottima a risorse alternative.

**Variabili decisionali:**  $x_{ijk}$ ,  $i \in \{P_1, P_2\}$ ,  $j \in \{M_1, M_2\}$ ,  $k \in \{A, B\}$  quantità di prodotto  $i$  lavorato sulla macchina  $j$  nell'impianto  $k$ .

$\max 200 \text{ (totale } P_1) + 150 \text{ (totale } P_2)$	$\max 200(x_{11A} + x_{12A} + x_{11B} + x_{12B}) + 150(x_{21A} + x_{22A} + x_{21B} + x_{22B})$
$\text{ore/sett } (M_1, A) \leq 18$	$4x_{11A} + 2x_{21A} \leq 18$
$\text{ore/sett } (M_1, B) \leq 12$	$5x_{11B} + 3x_{21B} \leq 12$
$\text{ore/sett } (M_2, A) \leq 12$	$2x_{12A} + 5x_{22A} \leq 12$
$\text{ore/sett } (M_2, B) \leq 15$	$5x_{12B} + 6x_{22B} \leq 15$
$\text{totale materiale} \leq 15.000$	$40(x_{11A} + x_{12A} + x_{21A} + x_{22A} + x_{11B} + x_{12B} + x_{21B} + x_{22B}) \leq 15.000$

da cui il modello:

$$\begin{aligned}
 &\max 200(x_{11A} + x_{12A} + x_{11B} + x_{12B}) + 150(x_{21A} + x_{22A} + x_{21B} + x_{22B}) \\
 &\quad \text{s.t.} \\
 &\quad 4x_{11A} + 2x_{21A} \leq 18 \\
 &\quad 5x_{11B} + 3x_{21B} \leq 12 \\
 &\quad 2x_{12A} + 5x_{22A} \leq 12 \\
 &\quad 5x_{12B} + 6x_{22B} \leq 15 \\
 &\quad 40(x_{11A} + x_{12A} + x_{21A} + x_{22A} + x_{11B} + x_{12B} + x_{21B} + x_{22B}) \leq 15.000 \\
 &\quad x_{11A}, x_{12A}, x_{21A}, x_{22A}, x_{11B}, x_{12B}, x_{21B}, x_{22B} \geq 0
 \end{aligned}$$

## Esercizio 2

**Variabili decisionali**  $x_N, x_D$  rappresentano il numero (espresso in migliaia per rendere i numeri più semplici) di computer N, risp. D da produrre nel quadrimestre;

Si osservi che il profitto non è una variabile decisionale, bensì la conseguenza di una decisione  $x_1, x_2$ .

**Funzione obiettivo** Esprimendo il profitto in migliaia di Euro:

$$\max 750x_N + 1000x_D$$

**Vincoli** Sono di quattro tipi:

- fornitura di CPU

$$x_N + x_D \leq 10$$

- disponibilità di banchi di memoria

$$x_N + 2x_D \leq 15$$

- capacità produttiva

$$4x_N + 3x_D \leq 25$$

- non-negatività

$$x_N \geq 0, x_D \geq 0$$

Modello

$$\max 750x_N + 1000x_D$$

s.t.

$$x_N + x_D \leq 10$$

$$x_N + 2x_D \leq 15$$

$$4x_N + 3x_D \leq 25$$

$$x_N \geq 0, x_D \geq 0$$

## Esercizio 3

**Variabili decisionali:**  $x_f, x_b$  numero di operatori formati per attività di front-office o back-office

**Vincolo sulla qualità del servizio:**

$$30x_f \geq 400$$

Vincolo di budget per la formazione:

$$300x_f + 800x_b \leq 10000$$

Funzione obiettivo:

I costi a carico di EASYCOM sono di due tipi: costi di formazione e penali da pratiche inevase. I primi ammontano a  $300x_f + 800x_b$ . Le penali giornaliere sono date da  $5(40 - 4x_b)$ . Quindi, per 90 giorni, il costo delle penali ammonta a  $450(40 - 4x_b) = 18.000 - 1800x_b$

La funzione obiettivo quindi:

$$18.000 - 1800x_b + 300x_f + 800x_b = 18.000 + 300x_f - 1000x_b$$

Vincolo sul numero di pratiche:

$$x_b \leq 10$$

serve ad evitare che il termine in f.o. premi la lavorazione di un numero di pratiche superiore a quelle effettivamente richieste (ne vedremo un modello più raffinato in seguito).

Modello:

$$18000 + \min 300x_f - 1000x_b$$

s.t.

$$3x_f \geq 40$$

$$x_b \leq 10$$

$$3x_f + 8x_b \leq 100$$

$$x_f, x_b \geq 0$$

Risolvendo il modello (non richiesto dall'esercizio) otteniamo la soluzione ottima  $x_f = 13.333, x_b = 7.5$  di valore  $-3500$ . Questo va sommato al termine costante 18000. Quindi i costi complessivi sopportati ammontano a 14500 Euro.