Esercizi: Foglio 3 (Variabili aleatorie e vettori aleatori discreti)

Alessia Nota

April 20, 2023

Esercizio 0.1 Una variabile aleatoria X è tale che $\mathbb{P}(X \leq 10) = \alpha$, $\mathbb{P}(10 < X \leq 20) = \beta$ $\mathbb{P}(X > 15) = \gamma$. Calcolare $\mathbb{P}(X > 10)$, $\mathbb{P}(X \leq 20)$, $\mathbb{P}(10 < X \leq 15)$ e $\mathbb{P}(X \leq 15 \mid X \leq 20)$.

Soluzione
Abbiamo:

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \alpha,$$

$$\mathbb{P}(X \geq 20) = \mathbb{P}(\{X \geq 10\} \cup \{10 < X \geq 20\}) = \mathbb{P}(\{X \geq 10\}) + \mathbb{P}(\{10 < X \geq 20\}) = \alpha + \beta,$$

$$\mathbb{P}(10 < X \leq 15) = 1 - \mathbb{P}(\{X \leq 10\}) - \mathbb{P}(\{X > 15\}) = 1 - \alpha - \gamma.$$

Infine

$$\mathbb{P}(X \leq 15 \mid X \leq 20) = \frac{PP(X \leq 15)}{\mathbb{P}(X \leq 20)} = \frac{1-\gamma}{\alpha+\beta}$$

visto che $\{X \leq 15\}$ è un sottoevento di $\{X \leq 20\}$.

Esercizio 0.2 Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \frac{1}{3} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Dopo aver dato la definizione di legge di una variabile aleatoria, di densità di probabilità e di funzione di ripartizione, calcolare la densità di X. Poi, calcolare anche $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$, $\mathbb{P}(X < 3)$.

Soluzione
La densità di probabilità di X v.a. discreta $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è data da:

$$p_X(-1) = \frac{1}{3}, \quad p_X(1) = \frac{1}{6}, \quad p_X(3) = \frac{1}{4}, \quad p_X(4) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(X > 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(2 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X <\leq 3) - \mathbb{P}(X = 3) = F_X(3) - p_X(3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 0.3 Nel gioco del lotto ad ogni estrazione cinque numeri vengono estratti simultaneamente da un'urna che contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Fissiamo un numero, ad es. il 67, e indichiamo con p la probabilità che esso esca in una singola estrazione.

a) Quanto vale p? In media ogni quante settimane viene estratto il 67?

b) Quale è la proabilità che dopo 30 estrazioni il 67 non sia ancora uscito?

c) Supponiamo che nelle prime 100 estrazioni il 67 non sia ancora uscito. Quale è la probabilità che esso esca entro la 101-esima? Quale è la probabilità che esso esca dopo la 130-esima?

d) Quale è la probabilità che esso esca almeno 6 volte nelle prime 50 estrazioni?

Soluzione

a) Il calcolo di p si riconduce alla distribuzione ipergeometrica. La probabilità di estrarre 1 pallina dal gruppo formato dal solo elemento 67 e 4 dal gruppo degli altri 89 numeri in 5 estrazioni senza rimpiazzo è data da:

$$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

Poiché è ragionevole supporre che le estrazioni di settimane diverse siano indipendenti tra loro, sappiamo che il numero T di settimane che trascorrono fino alla prima estrazione del 67 segue una distribuzione geometrica modificata di parametro $p = \frac{1}{18}$. Dunque, ricordando il valore della speranza matematica di una v.a. geometrica, il numero medio di settimane prima della prima estrazione è $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = 18$.

b) In due modi: poiché le estrazioni di settimane diverse sono indipendenti, il numero di volte in cui il 67 viene estratto in 30 settimane si modellizza come il numero di successi in 30 prove indipendenti con probabilità $p = \frac{1}{18}$ di successo in ogni singola prova. Il numero di estrazioni che contengono il 67 tra i numeri estratti è dunque una v.a. di legge binomiale $B(n, p) = B(30, p)$. La probabilità di avere 0 successi è dunque

$$\binom{30}{0}(1p)^{30} = 0,18 = 18\%.$$

Alternativamente si può osservare che, poiché il primo istante T di successo in uno schema successo-insuccesso ha una distribuzione geometrica, otteniamo

$$\mathbb{P}(T > k) = \sum_{k=31}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)^{30}}{1-(1-p)} = (1-p)^{30}$$

c) Se T indica il numero di settimane fino alla prima estrazione del 67, allora gli eventi A, B, C definiti rispettivamente come

- A=il 67 non è uscito nelle prime 100 estrazioni
- B=il 67 esce entro la 101-esima estrazione

- C=il 67 esce solo dopo la 130-esima estrazione

si possono scrivere $A = \{T > 100\}, B = \{T \leq 10\}, C = \{T > 130\}$. Per la proprietà di mancanza di memoria della legge geometrica abbiamo

$$\mathbb{P}(B^c \,|\, A) = \mathbb{P}(T > 101 \,|\, T > 100) = \mathbb{P}(T > 1) = 1 - p$$

$$\mathbb{P}(C \,|\, A) = \mathbb{P}(T > 130 \,|\, T > 100) = \mathbb{P}(T > 30) = (1 - p)^{30}.$$

d) l numero di volte in cui il 67 viene estratto in 50 settimane segue una legge binomiale $B(50, p)$ con $p = \frac{1}{18}$. Dunque la probabilità che il 67 sia presente almeno 6 volte in 50 settimane vale

$$\sum_{k=6}^{50} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} = 1 - 0.94 = 0.06.$$

Esercizio 0.4 Sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità p. Il momento $r-$esimo di X è definito da

$$M_r := \mathbb{E}[X^r] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i)^r p_X(x_i).$$

Si determinino i primi 5 momenti di X se X ha la seguente funzione di probabilità:

$$p_X(-2) = \frac{1}{2}, \quad p_X(1) = p_X(3) = \frac{1}{4}.$$

Notare che M_1 è il valore atteso di X, mentre M_2 viene utilizzato nel calcolo della varianza e dello scarto quadratico medio.

Soluzione Abbiamo

$$M_1 := \mathbb{E}[X] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i) p_X(x_i) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

$$M_2 := \mathbb{E}[X^2] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i)^2 p_X(x_i) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} = 4,5.$$

$$M_3 := \mathbb{E}[X^3] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i)^3 p_X(x_i) = -8 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} + 27 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

$$M_4 := \mathbb{E}[X^4] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i)^4 p_X(x_i) = 16 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} + 81 \cdot \frac{1}{4} = 28,5.$$

$$M_5 := \mathbb{E}[X^5] = \sum_{i\,:\,x_i \in Im(X)} (x_i)^5 p_X(x_i) = -32 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2} + 243 \cdot \frac{1}{4} = 45.$$

Esercizio 0.5 Un dado viene lanciato 7 volte. Un lancio viene detto un successo se si presenta un 5 o un 6.

a) Quale è la probabilità che si presenti esattamente tre volte un 5 o un 6?

b) Quale è la probabilità che si presenti almeno una volta un 5 o un 6?

c) Quale è la probabilità che si presenti un successo prima del quarto lancio?

Soluzione Sia X la v.a. che conta il numero di successi in $n = 7$ lanci. La probabiliità di successo è pari a $p = \mathbb{P}(\{\text{esce5}\} \bigcup \{\text{esce6}\}) = \mathbb{P}(\{\text{esce5}\}) + \mathbb{P}(\{\text{esce6}\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ e probabiliità di insuccesso $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. $X \sim B(n, p) = B(7, \frac{1}{3})$.

a) $\mathbb{P}(X = 3) = 73 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

b) La probabilità che non si presenti mai un 5 o un 6 è pari a $q^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ quindi la probabilità che si presenti almeno una volta un 5 o un 6 è non

$$1 - q^7 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

c) Sia T la v.a. che indica il primo istante di successo in uno schema successo-insuccesso, T ha una distribuzione geometrica. Quindi otteniamo

$$\mathbb{P}(T < 4) = \sum_{k=1}^{3} p(1-p)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$$

Esercizio 0.6 Secondo la questura, il numero medio di furti in città è di $3,4$ al mese.

a) Calcolare la probabilità che il prossimo anno si verifichi almeno 1 furto.

b) Calcolare la probabilità che il prossimo anno ci siano al massimo 2 furti.

Soluzione Il fenomeno avviene con una intensità pari a $r = 3,4$ al mese.

a) In questo caso il tempo di osservazione è $t = 12$ mesi e quindi $\lambda = r \cdot t = 3,4t = 3,4 \cdot 12$. Il numero di eventi nel tempo t può essere rappresentato da una v.a. X che segue una legge di Poisson di intensità $\lambda = 41$: $X \sim \text{Poiss}(41)$ con $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(rt)^k e^{-rt}}{k!} = \frac{(41)^k e^{-41}}{k!}$ per $k = 0, 1, \ldots$. Quindi

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-rt} = 1 - e^{-41}$$

a) In questo caso

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-rt} = 1 - e^{-41}$$

b) In questo caso invece

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = e^{-41} + (41)e^{-41} + \frac{(41)^2 e^{-41}}{2}$$

Esercizio 0.7 Un'urna contiene 10 palline bianche, 8 palline nere e 6 palline rosse. Vengono estratte 5 palline senza reinbussolamento. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di palline bianche e Y la variabile aleatoria che conta il numero di palline nere.

i) Si determini la densità, la media e la varianza di $Z = X - Y$.[1]

ii) Si dica se X e Y sono indipendenti.

iii) Stesse domande nel caso in cui a ogni estrazione le palline vengono reimmesse nell'urna.

Soluzione

Esercizio 0.8 Data la distribuzione di probabilità congiunta delle variabili casuali X e Y :

$Y \setminus X$	0	1	2
1	0,25	0	0,25
2	0,15	0	0,15
3	0	0,2	0

i) stabilire se le variabili X e Y sono indipendenti;

ii) calcolare $\mathbb{P}(Y \geq 2, X > 0)$ e $\mathbb{P}(Y \geq 2 \mid X > 0)$;

iii) calcolare il valore atteso e la varianza della variabile casuale $Z = X - 2Y$.

Soluzione

i) Di seguito si riportano la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali delle v.c. X e Y :

$Y \setminus X$	0	1	2	$p_Y(k)$
1	0,25	0	0,25	0,5
2	0,15	0	0,15	0,3
3	0	0,2	0	0,2
$p_X(k)$	0,4	0,2	0,4	

Se le variabili casuali X e Y fossero indipendenti si avrebbe che

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y), \qquad y = 1, 2, 3, \quad x = 0, 1, 2$$

. Si osservi che, secondo la distribuzione congiunta fornita dal testo dell'esercizio, si ha

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0 \neq 0.2 \cdot 0.5 = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$$

. Di conseguenza le variabili casuali X e Y non sono indipendenti.

ii)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 0, Y \geq 2) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) \\ &= 0 + 0,15 + 0,2 + 0 = 0,35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq 2 \mid X > 0) &= \frac{\mathbb{P}(X > 0, Y \geq 2)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{0,35}{(\mathbb{P}(X = 1) + P(X = 2))} \\ &= \frac{0,35}{(0,2 + 0,4)} = 0.5833. \end{aligned}$$

[1] Aspettare la lezione del 17.04 per risolvere questo punto. Intanto, anticipiamo che la varianza è definita come il valore atteso del quadrato della variabile aleatoria centrata $X - \mathbb{E}[X]$ cioè $Var(X) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big]$. Una formula alternativa e più pratica, per calcolare la varianza, è $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

ii) Dalle proprietà del valore atteso si ha che

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X - 2Y] = \mathbb{E}[X] - 2\mathbb{E}[Y].$$

Siccome

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{2} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = (0 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,2) + (2 \cdot 0,4) = 1$$

e

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y=0}^{3} y \cdot \mathbb{P}(Y = y) = (1 \cdot 0,5) + (2 \cdot 0,3) + (3 \cdot 0,2) = 1,7.$$

e quindi $\mathbb{E}[Z] = 1 - 3,4 = -2,4$.

Esercizio 0.9 Sia (X, Y) una v.a. bidimensionale con densità congiunta:

$$p(x, y) = p_{X,Y}(x, y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y \qquad \text{per} \ \ (x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \mathbb{N}$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

i) Trovare le densità marginali di X e Y, si tratta di densità note?

ii) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathbb{E}[Y]$,

iii) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y = 4)$.

Soluzione

i) Innanzitutto, controlliamo che risulta $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y) = 1$ come deve essere. Abbiamo:

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left[\sum_{x=1}^{3} 1\right]\left[\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y\right] = 3\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{j+1}\right]$$
$$= 3\left(\frac{1}{4}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^j = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 1$$

Si ha:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y = \left[\sum_{y=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^y\right] - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}, \qquad x \in \{1, 2, 3\}$$

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x=1}^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^y = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^y = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{y-1}, \qquad y \in \mathbb{N}.$$

Possiamo riconosce che $X \sim \mathrm{Unif}(\{1; 2; 3\})$ e Y ha legge geometrica di parametro $p = \frac{3}{4}$.

ii) Si trova facilmente utilizzando la definizione di valore atteso che $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$; $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$ da

iii) Si ha:

$$\mathbb{P}(X+Y=4) = p_{X,Y}(1,3)+p_{X,Y}(2,2)+p_{X,Y}(3,1) = \left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4} = \frac{21}{64}.$$

$* \quad * \quad *$

Osservazione: Si poteva pervenire allo stesso risultato, in maniera più complicata, ragionando nel modo seguente. Prima, troviamo la densità discreta della v.a. $Z = X + Y$, che assume valori $z \in \{2, 3, \dots\}$. Esiste una formula che fornisce la densità della somma di v.a., che è la seguente:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x \text{ opportune}} p(x, z - x) \qquad z = 2, 3, \dots$$

dove dove le x opportune sono quelle per cui ha senso l'espressione $p(x, z - x)$ ovvero $x \in \{1, 2, 3\}$ e $z - x \geq 1$, cioè $x \leq z - 1$. Pertanto, si ha

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{x=1}^{z-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{z-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^z \sum_{x=1}^{z-1} (4)^x$$

Quindi, per $z = 4$ abbiamo

$$\mathbb{P}(Z = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \sum_{x=1}^{3} (4)^x = \frac{21}{64}$$

che coincide con il risultato trovato sopra in modo diverso.