Introduzione alla Ricerca Operativa

- Cos'è la Ricerca Operativa?
- Fasi di uno studio di RO
- Modellazione matematica: un esempio
- Classificazione dei problemi di Ottimizzazione
- Problema dell'assegnamento

Cos'è la Ricerca Operativa?

La Ricerca Operativa è la disciplina che concerne l'utilizzo del metodo scientifico nei processi decisionali

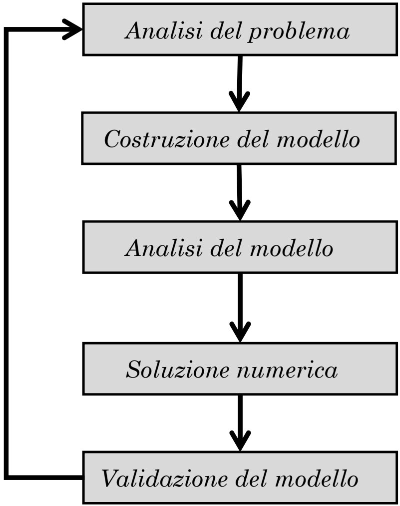
- Analisi e modellazione dei sistemi, allo scopo di prevederne l'evoluzione e/o di individuare le scelte ottimali rispetto agli obiettivi desiderati.
- Intrinsecamente interdisciplinare: Matematica Applicata /Informatica/ Ingegneria /Economia
- Gli strumenti della RO: modelli matematici, statistici e simulativi trattati attraverso tecniche sia analitiche che numeriche.

Esempi di processi decisionali

- pianificare la produzione di energia di uno stato nei prossimi anni
- pianificare i turni del personale di un ospedale o di un call center in modo da garantire un adeguato livello di servizio a costi contenuti
- determinare i percorsi dei veicoli per la raccolta differenziata in modo da minimizzare la distanza complessiva percorsa
- programmare le attività per la realizzazione di un'opera pubblica in modo da completarla il prima possibile
- assegnare le frequenze di trasmissione ad una rete di telefonia mobile in modo da massimizzare la copertura dell'utenza
- gestire un portafoglio di azioni ed obbligazioni

Casi di studio in
`www.informs.org/Impact/O.R.-Analytics-Success-Stories`

Fasi di uno studio di RO



Il problema del pasticciere - NEWTON, febbraio 2004

Un pasticciere produce 2 tipi di uova, EXTRA e SUPER utilizzando cacao, nocciole e latte

	Cacao	Nocciole	Latte
EXTRA	1 Kg/uovo	1 Kg/uovo	2 Kg/uovo
SUPER	3 Kg/uovo	1 Kg/uovo	1 Kg/uovo

Il pasticciere ha a disposizione:

- 36 Kg. di cacao
- 16 Kg. di nocciole
- 28 Kg. di latte

mentre dalla vendita ricava:

- 40 EUR/uovo EXTRA
- 60 EUR/uovo SUPER

Problema: massimizzare il ricavo totale dalla vendita

Analisi del problema

- Analisi della struttura: problema singolo decisore (il pasticciere),
- Individuazione dei legami logici e funzionali: vincoli sulle risorse
- Individuazione degli obiettivi: massimizzare il ricavo (singolo criterio)

Il problema del pasticciere - NEWTON, febbraio 2004

Un pasticciere produce 2 tipi di uova, EXTRA e SUPER utilizzando cacao, nocciole e latte

	Cacao	Nocciole	Latte
EXTRA	1 Kg/uovo	1 Kg/uovo	2 Kg/uovo
SUPER	3 Kg/uovo	1 Kg/uovo	1 Kg/uovo

Il pasticciere ha a disposizione:

- 36 Kg. di cacao
- 16 Kg. di nocciole
- 28 Kg. di latte

mentre dalla vendita ricava:

- 40 EUR/uovo EXTRA
- 60 EUR/uovo SUPER

Problema: massimizzare il ricavo totale dalla vendita

Modellazione

1. scelta delle variabili decisionali: x_E, x_S quantità di uova da preparare risp. di tipo EXTRA E SUPER

   Attenzione a distinguere le variabili dai dati

2. definizione della funzione obiettivo: max ricavo

$$\max 40x_E + 60x_S$$

3. descrizione delle scelte possibili (vincoli): disponibilità delle risorse

cacao	$1x_E + 3x_S \leq 36$
nocciole	$1x_E + 1x_S \leq 16$
latte	$2x_E + 1x_S \leq 28$

Il modello

$$\begin{aligned} \max 40x_E + 60x_S \\ \text{s.t.} \quad \\ x_E + 3x_S \leq 36 \\ x_E + x_S \leq 16 \\ 2x_E + x_S \leq 28 \\ x_E, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Osservazione: richiediamo che le variabili assumano valori <u>reali</u> non-negativi

Ipotesi

- Proporzionalità Il contributo di una variabile alla f.o. ed ai vincoli è proporzionale al suo valore, secondo una costante moltiplicativa

  ad es. per produrre 1 uovo di tipo SUPER, servono 3 Kg di cacao indipendentemente dalla quantità di uova

- Additività Il contributo complessivo delle variabili alla f. o. ed ai vincoli è dato dalla somma dei singoli contributi

  ad es., per produrre x_E uova di tipo EXTRA e x_S uova di tipo SUPER, servono $x_E + 3x_S$ Kg di cacao

- Frazionarietà Non abbiamo imposto che le variabili siano intere: possibile che la soluzione del problema ci chieda di produrre quantità frazionarie di uova.

Analisi del modello

$$
\begin{aligned}
\max 40x_E + 60x_S & \\
x_E + 3x_S &\leq 36 \\
x_E + x_S &\leq 16 \\
2x_E + x_S &\leq 28 \\
x_E, x_S &\geq 0
\end{aligned}
$$

- esistenza ed unicità delle soluzioni
- caratterizzazione analitica delle soluzioni ottime
- stabilità delle soluzioni rispetto a variazioni dei parametri del modello
- relazioni con altri problemi noti

Soluzione numerica

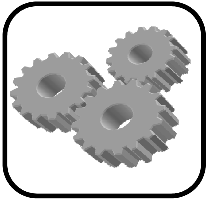
$\max\ 40\, x_1 + 60\, x_2$

$1\, x_1 + 3\, x_2 \leq 36$

$1\, x_1 + 1\, x_2 \leq 16$

$2\, x_1 + 1\, x_2 \leq 28$

$x_1,\, x_2 \geq 0$



$x_1^* = 6\ x_2^* = 10,\ f\,(x^*) = 840$

Soluzione

Il modello

$$\max 40x_E + 60x_S$$

s.t.

$$x_E + 3x_S \leq 36$$

$$x_E + x_S \leq 16$$

$$2x_E + x_S \leq 28$$

$$x_E, x_S \geq 0$$

$$x_E^* = 6, x_S^* = 10$$

soluzione resitituita da un algoritmo

Validazione del modello

L'analisi delle soluzioni "sul campo" può evidenziare errori nel modello. Ad esempio, il pasticciere non ci aveva detto che per preparare le uova serve anche lo zucchero!

Integriamo l'input del problema:

	zucchero
EXTRA	15g/uovo
SUPER	20g/uovo
	280 g

si deve aggiungere il vincolo

$$15x_E + 20x_S \leq 280$$

non è soddisfatto dalla soluzione! Quindi va ricalcolata

Problema di Ottimizzazione

In generale, data una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ed un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *Problema di Ottimizzazione* un problema della forma:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

X è detto *regione ammissibile*

$f : X \to \mathbb{R}$ è detta *funzione obiettivo*

Un problema di ottimizzazione consiste quindi nel trovare, se esiste, un punto di minimo $\mathbf{x}^*$ della funzione f fra i punti dell'insieme X.

$\mathbf{x}^*$ è detta *soluzione ottima*, $f(\mathbf{x}^*)$ *valore ottimo*

Classificazione

- problemi di ottimizzazione **continua**
  le variabili possono assumere tutti i valori reali ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)
  - *vincolata* se $X \subset \mathbb{R}^n$
  - *non vincolata* se $X = \mathbb{R}^n$
- problemi di ottimizzazione **discreta**
  le variabili sono vincolate ad assumere valori interi ($\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$)
  - *ottimizzazione intera* se $X \subseteq \mathbb{Z}^n$
  - *ottimizzazione booleana* se $X \subseteq \{0, 1\}^n$
- problemi **misti**
  solo alcune delle variabili sono vincolate ad assumere valori interi

Problemi di Programmazione Matematica

Spesso l'insieme X è descritto da un numero finito m di disuguaglianze del tipo $g_i(\mathbf{x}) \geq b_i$, con $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Quindi:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_1(\mathbf{x}) \geq b_1, \ldots, g_m(\mathbf{x}) \geq b_m\}$$

le disuguaglianze $g_i(\mathbf{x}) \geq b_i$ sono dette *vincoli*

Problema di Programmazione Matematica:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) & \\ g_i(\mathbf{x}) \geq b_i, & \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Classificazione

- Programmazione Lineare (PL)

  la funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$ e le funzioni $g_i(\mathbf{x})$, $i = i, \ldots, m$ sono lineari, cioè esprimibili nella forma

  $$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

- Programmazione Non Lineare (PNL)

  almeno una delle funzioni non è lineare

Problema dell'assegnamento

3 artigiani sono disponibili a realizzare tre lavori. Assegnare un lavoro ad un artigiano comporta un costo.
Riassumiamo tali costi in una tabella:

		lavori		
		1	2	3
	1	10	12	20
artigiani	2	7	15	18
	3	14	10	9

Problema:
Assegnare esattamente un lavoro ad ogni artigiano in modo da minimizzare i costi

Modello matematico

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lavoro } j \text{ assegnato all'artigiano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min 10x_{11}+12x_{12}+20x_{13}+7x_{21}+15x_{22}+18x_{23}+14x_{31}+10x_{32}+9x_{33}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

ad ogni artigiano un lavoro

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

ogni lavoro ad un artigiano