CAPITOLO 4

Funzioni Continue di una Variabile Reale

Funzioni Continue

<u>Osservazione</u>. Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per l'esistenza e il valore del limite $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

- *non* è importante che $c \in X$, e
- che, nel caso $c \in X$, $f(c) = l$.

Queste due condizioni invece in un certo senso caratterizzano funzioni continue.

<u>Definizione</u> 4.1 (*Continuità*). Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- *continua in* $x_0 \in X$ se per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \to x_0$ segue $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to +\infty$.
- *continua*, se è continua in ogni $x \in X$.

<u>Osservazioni</u>.

- La continuità si può anche definire senza fare riferimento alle successioni: f è continua in $x_0 \iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ con $|x - x_0| < \delta$.
- Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione di X, allora f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Se $x_0 \in X$ *non* è un punto di accumulazione di X (in questo caso si dice anche che x_0 è un punto isolato), allora f è sempre continua in x_0.

Dalla definizione di continuità e dalle regole per il calcolo dei limiti segue facilmente la seguente

<u>Proposizione</u> 4.2. *Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono continue (in $x_0 \in X$), allora anche*

- *$f \pm g : X \to \mathbb{R}$ sono continue (in x_0),*
- *$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua (in x_0),*
- *$\frac{f}{g} : X_0 \to \mathbb{R}$ è continua (in x_0 se $g(x_0) \neq 0$), dove $X_0 := \{x \in X : g(x) \neq 0\}$,*
- *$f^g : X_1 \to \mathbb{R}$ è continua (in x_0 se $f(x_0) > 0$), dove $X_1 := \{x \in X : f(x) > 0\}$,*
- *$|f| : X \to \mathbb{R}$ è continua (in x_0).*

Quindi somme, differenze, prodotti, rapporti, potenze e moduli di funzioni continue sono continue.

Da questo risultato segue che per ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme

$$\mathrm{C}(X) := \big\{ f : X \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ è continua} \big\}$$

è uno spazio vettoriale (o addirittura un algebra).

Con il teorema sul limite delle funzioni composte si può dimostrare il seguente risultato.

<u>Proposizione</u> 4.3. *Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $g : Y \to \mathbb{R}$ è continua in $y_0 := f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0. Quindi la composizione di funzioni continue è sempre continua.*

Con le due proposizioni precedenti e usando i limiti notevoli è facile verificare la continuità di vari funzioni elementari.

<u>Esempi</u>.

- *Polinomi:* $f(x) = 1$ e $g(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$ sono continue $\Rightarrow h(x) := x^k$ è continua per ogni $k \in \mathbb{N} \Rightarrow p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ è continua per ogni scelta di $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ cioè ogni polinomio è continuo.

- *Funzioni razionali:* Ogni funzione razionale è continua (nel suo dominio!), essendo il rapporto di due polinomi che sono continui.

- *Modulo*: $f(x) = |x|$ per $x \in \mathbb{R}$ è continuo (usare l'ultima osservazione a pagina 11).

- *Funzioni circolari*: Per la formula di prostaferesi vale per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \cdot \underbrace{\sin\Big(\overbrace{\tfrac{x - x_0}{2}}^{\to 0}\Big)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos\big(\tfrac{x+x_0}{2}\big)}_{\text{limitata}} \to 0 \qquad \text{per } x \to x_0,$$

  quindi sin è continua. Similmente segue che anche cos è continua e quindi anche $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ è continua.

- *Funzione esponenziale*: Per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ e $h := x - x_0$ vale $x \to x_0 \iff h \to 0$. Quindi

$$\begin{aligned} e^x - e^{x_0} &= (x - x_0) \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= h \cdot e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to 0 \cdot e^{x_0} \cdot 1 = 0 \qquad \text{per } h \to 0. \end{aligned}$$

  Ciò dimostra $e^x \to e^{x_0}$ per $x \to x_0$ e di conseguenza la funzione esponenziale è continua.

- *Funzioni iperboliche*: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ sono continue e quindi anche $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ è continua.

- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come
$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
allora f è sempre continua in ogni $x_0 \neq 0$. Inoltre f è continua in $x_0 = 0 \iff$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0) = l$$
cioè $\iff l = 1$. Si dice anche che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha una *discontinuità rimovibile* in $x = 0$.
- Se per $l \in \mathbb{R}$ definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come
$$f(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ l & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
allora f per qualsiasi scelta di $l \in \mathbb{R}$ è discontinua (cioè non continua) in $x = 0$.
- *Funzione di Dirichlet*: Se definiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
allora f è discontinua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni Continue su Intervalli

PROBLEMA. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- verificare che f ammette uno zero, cioè che esiste $c \in X$ tale che $f(c) = 0$,
- calcolare (un valore approssimativo per) c.

Il seguente teorema, che è uno dei più importanti risultati del corso, fornisce una soluzione a questo problema sotto alcune ipotesi su f. Nel seguito, per intervalli $[a, b]$, supponiamo sempre che sia $a < b$.

<u>TEOREMA</u> 4.4 (*Teorema degli Zeri*). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto (cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Usiamo il *metodo di bisezione*: Esiste una successione $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli $I_n = [a_n, b_n]$ tale che

(i) $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$,

(ii) la lunghezza di I_n è data da $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,

(iii) $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$.

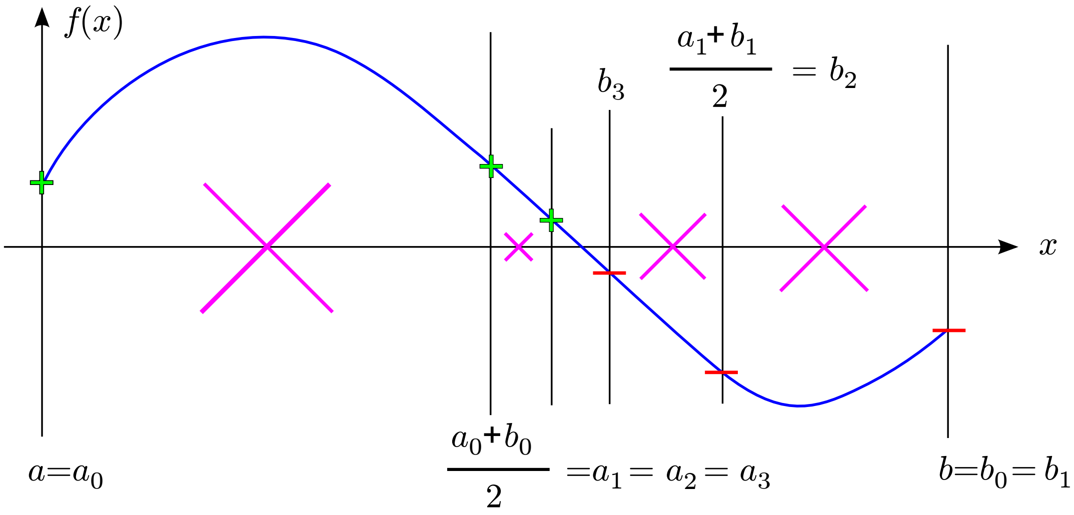

FIGURA 25. Il metodo di bisezione.

Allora, per la proprietà (i) abbiamo che

$$a = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots a_n \le \dots \le b_n \dots b_2 \le b_1 \le b_0 = b.$$

Da cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono monotone e limitate e quindi convergenti. Sia

$$\lim_{n\to+\infty} a_n =: c_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n =: c_2.$$

Da (ii) segue

$$\underbrace{b_n}_{\to c_2} = \underbrace{a_n}_{\to c_1} + \underbrace{\frac{b-a}{2^n}}_{\to \frac{b-a}{+\infty}=0} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi $c_1 = c_2 =: c$. Infine per (iii), il teorema del confronto e per la continuità di f risulta che

$$0 \ge \underbrace{f(a_n)}_{\to f(c)} \cdot \underbrace{f(b_n)}_{\to f(c)} \to f^2(c) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi $f^2(c) \le 0$ che è possibile solo se $f(c) = 0$. □

<u>Osservazione</u>. Il teorema degli zeri non soltanto stabilisce l'esistenza di uno zero c per f ma la dimostrazione dà anche un modo per trovare un valore approssimativo di c. In casi come questo si dice anche che la dimostrazione è *costruttiva*.

Dal Teorema degli zeri segue facilmente la seguente generalizzazione.

<u>Teorema</u> 4.5 (*Teorema dei Valori intermedi*). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualsiasi (non necessariamente chiuso), $f : I \to \mathbb{R}$ continua e siano*

$$m := \inf f := \inf\{f(x) : x \in I\}, \qquad M := \sup f := \sup\{f(x) : x \in I\}.$$

Allora per ogni $y \in (m, M)$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$. In altre parole, f assume tutti i valori tra $m = \inf f$ e $M = \sup f$.

La dimostrazione si fa applicando il Teorema degli Zeri alla funzione $\tilde{f}(x) := f(x) - y$.

Questo teorema ha delle applicazioni molto importanti. Come esempio dimostreremo l'esistenza dei

Logaritmi. Sia $0 < a \neq 1$. Allora per ogni $y > 0$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Questo valore x si chiama *logaritmo di y in base a* e si scrive

$$x =: \log_a(y).$$

Per la base $a = e$ otteniamo il *logaritmo naturale* $\ln(y) := \log_e(y)$.

Dimostrazione. Procediamo in 2 passi:

1° Caso: $a = e$. Visto che $e > 1$ segue $e^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$\sup\{e^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty \quad \Rightarrow \quad M := \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = +\infty.$$

Inoltre, da $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$e^{-n} = \frac{1}{\underbrace{e^n}_{\to +\infty}} \to \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{per } n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad m := \inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Infine $I := \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ è un intervallo e e^x, $x \in I$ è continua, quindi per il teorema dei valori intermedi per ogni $y \in (m, M) = (0, +\infty)$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = y$. Questo $x =: \ln(y)$ è unico poiché e^x è strettamente crescente e quindi iniettiva.

2° Caso: $0 < a \neq 1$. Cerchiamo per $y > 0$ un $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Però

$$e^{x \cdot \ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = \underline{a^x = y} = e^{\ln(y)} \iff x \cdot \ln(a) = \ln(y)$$

visto che la funzione esponenziale è strettamente crescente e di conseguenza iniettiva, e quindi

$$x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}. \qquad \square$$

Regole per i Logaritmi. Siano $0 < a, b \neq 1$, $x, y > 0$ e $r \in \mathbb{R}$. Allora

- $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$,
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$, in particolare $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$,
- $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$,
- $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$ in particolare $\log_a(x) = \log_a(e) \cdot \ln(x)$.

<u>Osservazione</u>. Con l'esistenza dei logaritmi abbiamo dimostrato che per $0 < a \neq 1$ la funzione $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è invertibile con $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. In particolare i grafici di a^x e $\log_a(x)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

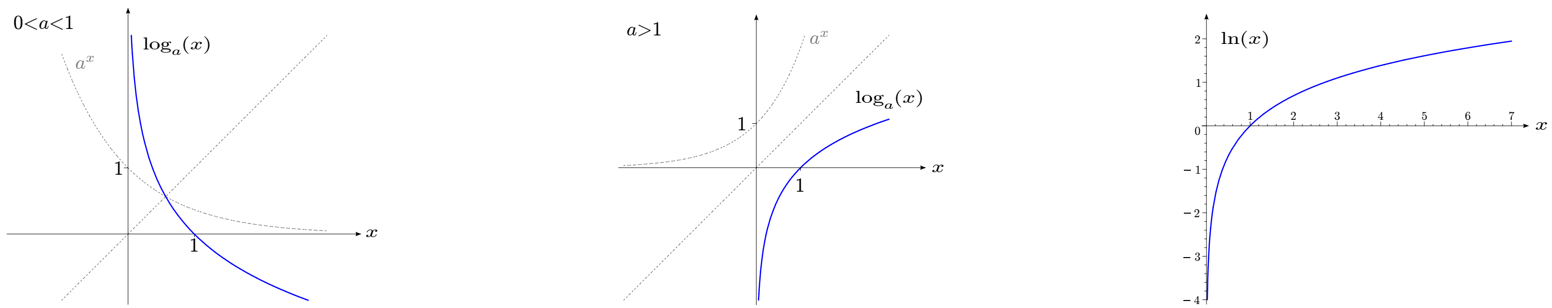

Figura 26. I Logaritmi.

Visto che in questo capitolo stiamo studiando funzioni continue si pone il

<u>Problema</u>. $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua?

La risposta è *si* per il seguente

Teorema 4.6. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in \mathrm{C}(I)$. Allora anche $J := f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è un intervallo e*
- *$f : I \to J$ è invertibile $\iff$ f è strettamente crescente oppure strettamente decrescente;*
- *se f è invertibile, $f^{-1} : J \to I$ è continua.*

Il teorema precedente *non* vale se il dominio di f non è un intervallo.

Esempio. Consideriamo $f : [-1, 0] \cup (1, 2] \to [0, 2]$, $f(x) = |x|$. Allora f è continua e invertibile ma non è strettamente monotona e $f^{-1} : [0, 2] \to [-1, 0] \cup (1, 2]$ è discontinua in $x = 1$.

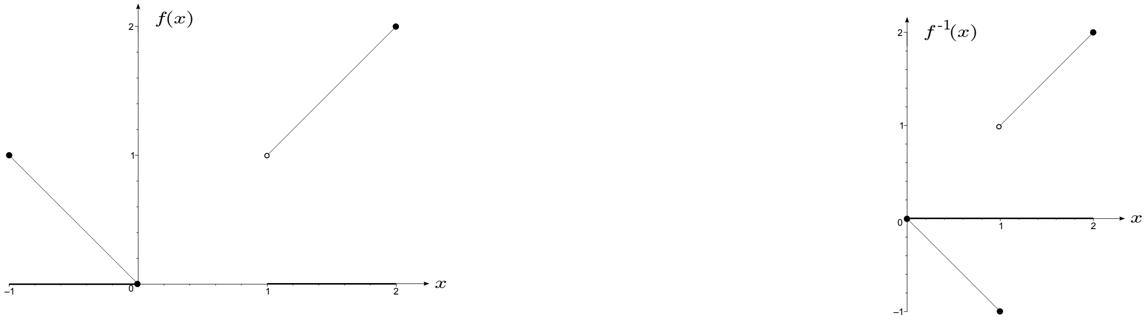

Figura 27. Funzione continua con inversa discontinua.

Altre Funzioni Invertibili

Osservazione. Possiamo utilizzare lo stesso schema che abbiamo usato per invertire l'esponenziale a^x per invertire altre funzioni f. Più precisamente, usiamo
- il teorema dei valori intermedi per verificare la suriettività di f,
- la stretta monotonia per ottenere l'iniettività di f,
- il teorema sulla continuità della funziona inversa per stabilire la continuità di f^{-1}.

In questa maniera possiamo costruire altre funzioni elementari.

Radici. Consideriamo $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f(x) = x^n$ per $n \geq 1$. Allora, f è continua, strettamente crescente, il dominio $X = [0,+\infty)$ è un intervallo, $\inf f = \min f = 0$ e $\sup f = +\infty$. Quindi f è invertibile e la funzione inversa $f^{-1} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è continua e data da $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

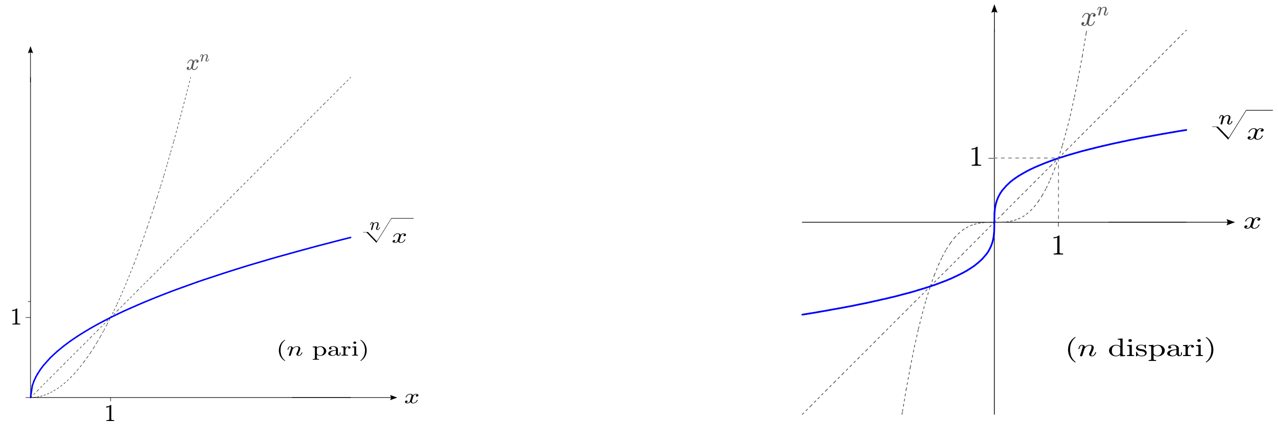

FIGURA 28. La radice n-esima.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Se nel precedente n è dispari, allora possiamo considerare f anche come funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In questo caso f rimane continua, strettamente crescente con $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$ cioè è invertibile con $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. In altre parole, per n dispari la radice $\sqrt[n]{x}$ è anche definita per argomenti $x < 0$, per esempio $\sqrt[3]{-8} = -2$. Invece per n pari e $x < 0$ la radice $\sqrt[n]{x}$ non ha senso nel campo dei numeri reali, per esempio $\sqrt{-1}$ non è più un numero reale ma *complesso*. Al livello della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ ciò si rispecchia nel fatto che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per n pari non è suriettiva (e neanche iniettiva, cfr. pagina 67).

Potenze. Dal paragrafo precendente sappiamo che $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ definisce una funzione continua per ogni $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Più in generale vale

$$x^r = \left(e^{\ln(x)}\right)^r = e^{r \cdot \ln(x)}, \quad r \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Quindi come composizione di funzioni continue ogni potenza è continua.

Inverse delle Funzioni Circolari. (Cfr. Figura 29) Considerando il grafico della funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cfr. Figura 21) si vede che non è invertibile non essendo né suriettiva né iniettiva. La suriettività, però si ottiene considerando come codominio l'insieme $[\min \sin, \max \sin] = [-1, 1]$ mentre per ottenere l'iniettività basta considerare soltanto una parte del dominio $\mathbb{R}$ in cui la funzione sin è strettamente monotona. Perciò ci sono infinite scelte ma generalmente si ristringe il dominio all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi consideriamo ora

$$\sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

che così diventa invertibile. Nella stessa maniera, considerando

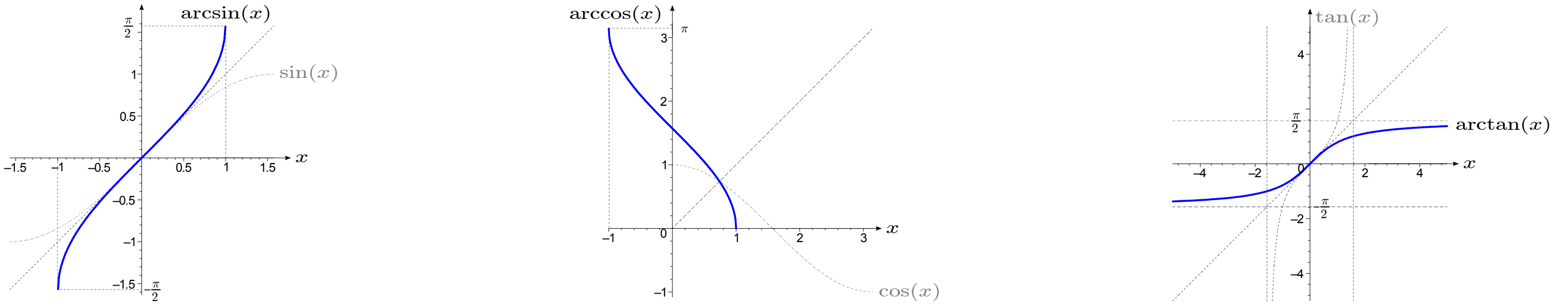

Figura 29. Inverse delle funzioni circolari.

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad \text{e} \qquad \tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

anche loro diventano invertibili e tutte le inverse *arcoseno*, *arcocoseno* e *arcotangente*

$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],$$
$$\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

sono nuovamente continue.

Inverse delle Funzioni Iperboliche. (Cfr. Figura 30) Ragionando come prima si vede che le funzioni iperboliche $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ e $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ sono invertibili e le loro inverse *areasenoiperbolico*, *areacosenoiperbolico* e *areatangenteiperbolico*

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} &:= \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh} &:= \cosh^{-1} : [1, +\infty) \to [0, +\infty), \\ \operatorname{artanh} &:= \tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

sono nuovamente continue.

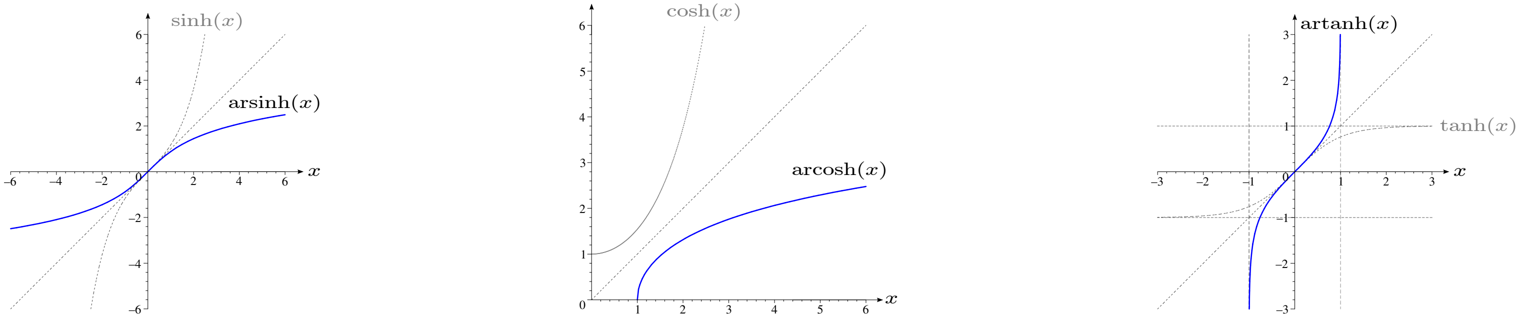

Figura 30. Inverse delle funzioni iperboliche.

<u>Osservazione</u>. Visto che $\sinh(x) = y \iff x = \operatorname{arsinh}(y)$, risolvendo l'equazione $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ per x si ottiene la rappresentazione

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big), \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Similmente segue

$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln\Big(y + \sqrt{y^2-1}\Big), \quad \text{per ogni } y \geq 1,$$
$$\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+y}{1-y}\Big), \quad \text{per ogni } y \in (-1,1).$$

Funzioni Continue su Intervalli Chiusi e Limitati

Ci poniamo il seguente

<u>Problema</u>. Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinare, se esistono, il valore minimo e quello massimo di f, cioè

$$m := \min f := \min\{f(x) : x \in X\}, \qquad M := \max f := \max\{f(x) : x \in X\},$$

La soluzione del problema si svolge in 2 passi:

(1) Verificare che minimo e massimo di f esistono,

(2) trovare x_0, x_1 tale che $\min f = f(x_0)$, $\max f = f(x_1)$.

Il primo punto si risolve con il seguente teorema mentre affronteremo il secondo punto nel prossimo capitolo usando il calcolo differenziale.

<u>Teorema</u> 4.7 (*Teorema di Weierstraß*). *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$, allora esistono $m := \min f$ e $M := \max f$. Inoltre, l'immagine è data da*

$$f\big([a,b]\big) = \big\{f(x) : x \in [a,b]\big\} = [m, M],$$

in particolare

- *f è limitata;*
- *esistono $x_0, x_1 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in [a,b]$;*
- *per ogni $y \in [m,M]$ esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = y$.*

<u>Osservazioni</u>.

- Il Teorema di Weierstraß vale soltanto su intervalli *chiusi* e *limitati* cioè del tipo $[a,b]$.
- La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1 + e^{-\sin\sqrt{x+2}}}{2 + \cos\left|9x - \frac{1}{2}\right| + \arctan\big((e + x^2)^\pi\big)}\right)}$$

  è una composizione di funzioni continue e quindi continua. Per Weierstraß ammette minimo e massimo che, però, saranno quasi impossibili da determinare. Quindi Weierstraß è un risultato di esistenza ma non aiuta per trovare x_0, x_1 e $\min f = f(x_0)$ e $\max f = f(x_1)$.