

CAPITOLO 2

Serie numeriche

Consideriamo il seguente

PROBLEMA. Sommare tutti gli elementi di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cioè dare senso alla somma *infinita*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

L'idea per risolvere questo problema è di considerare prima le *somme parziali* (oppure *ridotte*) n -esime

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

e poi mandare $n \rightarrow +\infty$.

Convergenza e prime Proprietà

Definizione 2.1. Diremo che la *serie numerica* $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- *converge* alla *somma* $s \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$;
- *diverge* a $\pm\infty$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \pm\infty$ e in questo caso scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \pm\infty$;
- è *irregolare* (oppure *oscillante*), se $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare.

Quindi studiare una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ significa studiare la successione delle somme parziali $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ESEMPLI. • *Serie geometrica.* Se $q \in \mathbb{R}$ allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{è irregolare} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. 1° caso $q = 1$: Se $q = 1$ allora $q^k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$s_n = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n = n + 1 \rightarrow \infty.$$

2° caso $q \neq 1$: In questo caso le somme parziali valgono (cfr. pagina 19)

$$s_n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q}{1 - q} \cdot q^n.$$

La tesi ora segue dal comportamento della successione geometrica, cfr. pagina 26

- *Serie armonica.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty.$$

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE. Useremo la divergenza della serie armonica per dimostrare che (teoricamente) si può costruire una scala autoportante che superare qualsiasi distanza. Perciò consideriamo gradini della lunghezza $l = 2$ e del peso 1 che sistemiamo uno sul altro (senza usare colle o fissaggi) in maniera di superare una distanza massima. Usando solo 2 gradini è molto semplice: dobbiamo sistemare il gradino sotto tale che lo spigolo capita esattamente sotto il (bari)centro del gradino sopra:

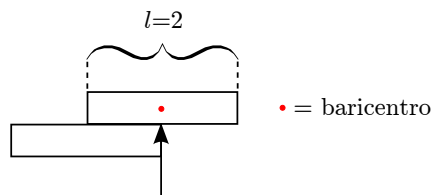


FIGURA 4. Scala autoportante: 2 gradini.

Continuiamo e sistemiamo un terzo gradino *sotto* i primi due:¹ Se x indica lo sbalzo del secondo al terzo gradino, dalla legge della leva (cfr. Figura 5) segue

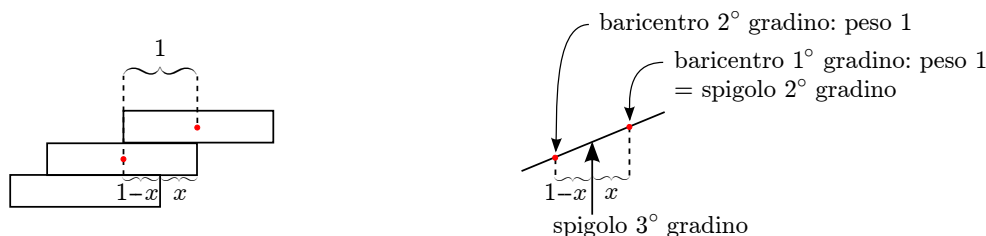


FIGURA 5. Scala autoportante: 3 gradini.

$$1 \cdot (1 - x) = 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

¹sopra non si può aggiungere niente senza che crollasse tutto!

Continuando in questa maniera arriviamo al punto in cui dobbiamo sistemare il $(n + 1)$ -esimo gradino *sotto* quelli n precedenti. Come prima dobbiamo piazzare il gradino sottostante in maniera che lo spigolo capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai $n = (n - 1) + 1$ gradini sovrastanti. Visto che

- lo spigolo del n -esimo gradino capita esattamente sotto il baricentro del corpo fatto dai primi $(n - 1)$ gradini (e quindi dal peso $n - 1$) e
 - la distanza tra lo spigolo del n -esimo gradino e il suo baricentro è 1
- sempre per la legge della leva segue (cfr. Figura 6)

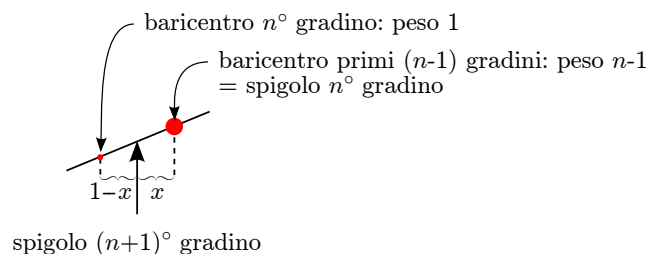


FIGURA 6. Scala autoportante: $n + 1$ gradini.

$$1 \cdot (1 - x) = (n - 1) \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}.$$

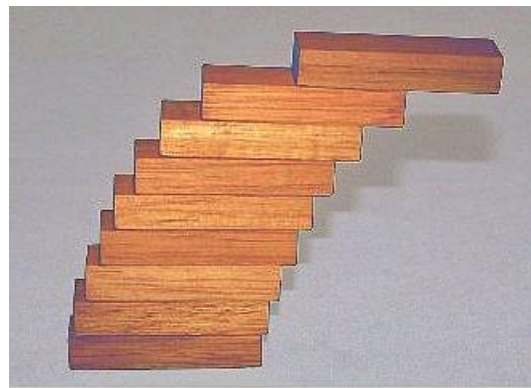
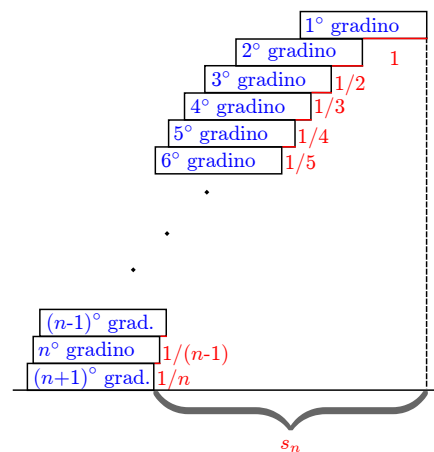


FIGURA 7. Scala autoportante che supera (teoricamente) qualsiasi distanza.

Così con $n + 1$ gradini abbiamo costruita una scala autoportante che supera la distanza

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Comunque, con 10.000 gradini di lunghezza $l = 2m$ in questa maniera si superano appena $9,21m$ e per superare $10m$ servono addirittura 22028 gradini!

- *Serie di Mengoli.*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione si può dimostrare (Esercizio!)² che

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

□

Solo in casi rari è possibile trovare una formula esplicita semplice per le somme parziali di una serie. Di conseguenza si pone il seguente

PROBLEMA. Come si può studiare la convergenza di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ *senza* conoscere una formula semplice per le somme parziali s_n ?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare la somma della serie ma soltanto di verificare che la somma esiste e sia finita. Iniziamo con la seguente

²In alternativa si può usare il seguente trucco:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{\overbrace{(k+1) - k}^{=1}}{k \cdot (k+1)} = \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{=\text{somma telescopica}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

PROPOSIZIONE 2.2 (*Condizione necessaria*). Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $s := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. Allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = s$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. Così risulta

$$\begin{aligned} s_n - s_{n-1} &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \\ &= a_n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

Evidentemente questa condizione è soltanto necessaria ma *non* sufficiente per la convergenza come si vede dalla serie armonica. Come vedremo nel seguente paragrafo l'ordine in \mathbb{R} ci aiuta a risolvere (parzialmente) il problema posto sopra.

Serie a Termini Positivi

Se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ cioè $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente. Quindi possiamo usare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone (cfr. pagina 37) per studiare il comportamento della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. In questa maniera otteniamo

TEOREMA 2.3. Se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (basta anche $a_k \geq 0$ definitivamente), allora

$$\text{la serie } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \begin{cases} \text{converge} & \text{se e solo se } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è limitata,} \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se e solo se } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ non è limitata.} \end{cases}$$

Quindi per una serie a termini positivi basta verificare la limitatezza della successione delle somme parziali per ottenere convergenza. Inoltre risulta che una serie a termini positivi non può essere irregolare.

ESEMPIO. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \text{serie esponenziale}$$

Per verificare la convergenza osserviamo che per $k \geq 2$ vale

$$k! = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}_{\geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1}} \geq 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Questa relazione vale però anche per $k = 0$ e $k = 1$ e quindi risulta che

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e di conseguenza $s := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ converge. Inoltre dal teorema del confronto segue che $s \leq 4$.

OSSERVAZIONE. In seguito dimostreremo che $s = e$, cioè

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.}$$

Nell'esempio precedente per dimostrare la convergenza della serie esponenziale l'abbiamo confrontata con la serie geometrica con $q = \frac{1}{2}$. Nel seguente risultato generalizziamo questa idea e consideriamo 2 serie qualsiasi.

PROPOSIZIONE 2.4 (*Criterio del confronto*). Sia $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente. Allora

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{\text{maggiorante}} \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{\text{minorante}} \text{ converge}$$

oppure

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k}_{\text{minorante}} \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} b_k}_{\text{maggiorante}} \text{ diverge}$$

ESEMPIO. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Visto che $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ per ogni $k \geq 1$ segue dalla divergenza della serie armonica $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ la divergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Del criterio precedente esiste anche una versione asintotica.

PROPOSIZIONE 2.5 (*Criterio del confronto, versione asintotica*). Sia $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ definitivamente tali che converge

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} =: l \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ diverge}$$

Se inoltre $l \neq 0$ (in particolare se $a_k \sim b_k$ per $k \rightarrow +\infty$), allora valgono anche le implicazioni opposte, cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ converge}$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ diverge}$$

ESEMPIO. Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Per studiare la convergenza confrontiamola con la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$. Allora

$$\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k \cdot (k+1)}} = \frac{k \cdot (k+1)}{k^2} = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1 = l \neq 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Quindi, visto che la serie di Mengoli converge, converge anche la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

OSSERVAZIONE. Usando metodi più sofisticati si può dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLEMA. Data una serie, trovare una serie minorante divergente oppure una serie maggiorante convergente per applicare il Criterio del Confronto.

Una possibilità per affrontare questo problema è di usare come seconda serie la serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ per $q > 0$. Sfruttando questa idea si possono dimostrare i seguenti due criteri.

PROPOSIZIONE 2.6 (*Criterio della Radice*). Sia $a_k \geq 0$ definitivamente. Se esiste

$$q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- converge se $q < 1$,
- diverge se $q > 1$,
- non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.

ESEMPIO. Sia $a_k := \frac{a^k}{k^k}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{a}{k} \rightarrow 0 = q < 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

PROPOSIZIONE 2.7 (*Criterio del Rapporto*). Sia $a_k > 0$ definitivamente. Se esiste

$$q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- converge se $q < 1$,
- diverge se $q > 1$,
- non si può concludere nulla sul comportamento della serie se $q = 1$.

ESEMPIO (*Serie Esponenziale*). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a > 0$ fisso. Allora

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \frac{a^{k+1} \cdot k!}{\underbrace{(k+1)!}_{=k! \cdot (k+1)} \cdot a^k} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0 = q < 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ converge.

Concludiamo questo paragrafo con un importante

ESEMPIO (*Serie Armonica Generalizzata*). Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ fisso. Allora sappiamo per il criterio del confronto che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

- diverge per $\alpha = 1 \Rightarrow$ diverge per ogni $\alpha \leq 1$,
- converge per $\alpha = 2 \Rightarrow$ converge per ogni $\alpha \geq 2$

dove le implicazioni seguono dal criterio del confronto: Se

$$\begin{array}{llllll} \alpha \leq 1 & \Rightarrow & k \geq k^\alpha & \Rightarrow & \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha} & \text{cioè } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{ è un minorante divergente,} \\ \alpha \geq 2 & \Rightarrow & k^2 \leq k^\alpha & \Rightarrow & \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^\alpha} & \text{cioè } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ è un maggiorante convergente} \end{array}$$

della serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Mancano però i parametri $\alpha \in (1, 2)$. Quindi si pone la domanda come si comporta la serie armonica generalizzata per questi parametri. Come vedremo in seguito (cfr. pagina 243) vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.8.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

OSSERVAZIONE. La serie armonica generalizzata è legata all'**ipotesi di Riemann**, considerata il più importante problema aperto della matematica.

Serie a Termini di Segno Variabili

Abbiamo visto che la serie armonica diverge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty.$$

Cioè facendo un numero sufficientemente grande di passi di lunghezza $\frac{1}{k}$ in avanti si supera qualsiasi limite.

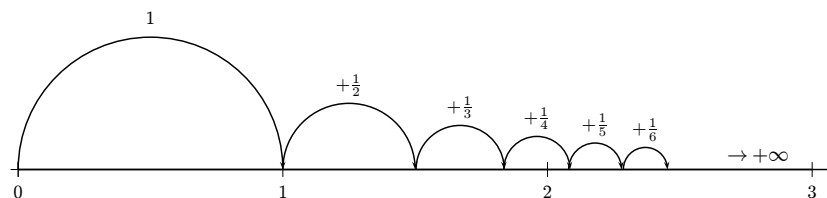


FIGURA 8. Divergenza della serie armonica

PROBLEMA. Che cosa succede se dopo ogni passo invertiamo direzione o, in termini matematici, se i termini cambiamo segno? Cioè come si comporta la *Serie di Leibniz*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm \dots ?$$

Per ottenere una idea tracciamo un grafico simile a quello precedente:

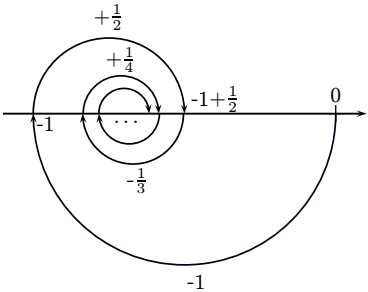


FIGURA 9. Convergenza della serie di Leibniz.

Dalla Figura 9 si può avere l'impressione che la serie converge. Ciò è infatti vero per la

PROPOSIZIONE 2.9 (*Criterio di Leibniz*). Se la successione $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è

- decrescente, e
- infinitesima

allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k =: s \in \mathbb{R}$ converge. Inoltre vale $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cfr. Figura 10.



FIGURA 10. Criterio di Leibniz: Stima dell'errore.

OSSERVAZIONE. Si può verificare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$$

ESEMPIO. Sia $a_k := \frac{1}{k^\alpha}$ per $\alpha > 0$. Allora $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è decrescente e infinitesima e quindi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{converge per ogni } \alpha > 0.$$

Confrontando la serie armonica con la serie di Leibniz ricaviamo un'importante

OSSERVAZIONE. Se

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}}_{\text{convergenza (semplice)}} \quad \not\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ converge}}_{\text{convergenza assoluta}}$$

Infatti per $a_k = (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge mentre

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^k \cdot \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \quad \text{diverge.}$$

Invece vale il contrario:

PROPOSIZIONE 2.10. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora converge anche $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè la convergenza assoluta implica la convergenza semplice.

Questa proposizione è molto utile in quanto la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ è sempre a termini positivi e quindi può essere studiata con i criteri per tale serie. Per esempio, dal criterio del rapporto e della radice a $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ otteniamo la seguente

PROPOSIZIONE 2.11. Se

$$q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \text{oppure} \quad q := \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

ESEMPIO (*Serie Esponenziale*). Sia $a_k := \frac{a^k}{k!}$ per $a \in \mathbb{R}$ fisso. Allora

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|a|^k}{k!}} = \frac{|a|}{k+1} \rightarrow 0 = q < 1$$

e quindi la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

OSSERVAZIONE. In seguito (vedi pagina 175) dimostreremo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

Concludiamo con un'osservazione abbastanza sorprendente.

OSSERVAZIONE. Mentre per una somma finita l'ordine degli addendi non influisce al risultato, p.e.

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 4 + 1 + 3 + 2 = 3 + 1 + 2 + 4 = \dots$$

ciò in generale *non* vale per le serie, cioè per somme *infinite*.

Per esempio si può verificare che per qualsiasi $s \in \overline{\mathbb{R}}$ esiste un “riordinamento” della serie di Leibniz $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$, cioè un ordine per sommare gli elementi della successione $((-1)^k \cdot \frac{1}{k})_{k \geq 1}$, che converge esattamente alla somma s . In altre parole, sommando gli elementi $(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ nell'ordine giusto si può avere qualsiasi somma. In questo senso una somma infinita non è più commutativa, cioè indipendente dall'ordine degli addendi.

Questo fenomeno, però, si verifica solo per le serie che convergono ma non convergono assolutamente come per esempio la serie di Leibniz. Per una serie che converge assolutamente invece ogni riordinamento converge alla stessa somma.