Modelli di PL: allocazione ottima di risorse

- Un esempio
- Modelli a risorse condivise
- Modelli a risorse alternative
- Modelli multi-periodo

Allocazione ottima di robot

- Un' azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: economica (E), normale (N), lusso (L)
- ogni autovettura viene lavorata da tre robot: A, B disponibili 8 ore al giorno e C disponibile 5 ore al giorno
- durate della lavorazione (min.) di ciascun robot su ciascuna vettura:

	economica	normale	lusso
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10

- il numero di autovetture L non deve superare il 20% del totale, mentre il numero di E deve essere almeno il 40%
- tutte le vetture vengono vendute e il ricavo ammonta rispettivamente a $1000, 1500, 2200$ Euro per ciascuna autovettura di tipo E,N e L

Formulare il modello di PL che permetta di elaborare un piano di produzione che massimizzi il ricavo totale

Modellazione

- variabili decisionali: x_E, x_N, x_L numero di autovetture del modello risp. E, N, L da produrre in un giorno
- funzione obiettivo: ricavo dalle vendite

$$\max 1000x_E + 1500x_N + 2200x_L$$

- capacità produttiva

$$\begin{aligned} 20x_E + 30x_N + 62x_L &\leq 480 \\ 31x_E + 42x_N + 51x_L &\leq 480 \\ 16x_1 + 81x_N + 10x_L &\leq 300 \end{aligned}$$

- mix produttivo

$$\begin{aligned} x_L &\leq 0.2(x_E + x_N + x_L) \\ x_E &\geq 0.4(x_E + x_N + x_L) \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_E \geq 0, x_N \geq 0, x_L \geq 0$$

Modello di PL

$$\max 1000x_E + 1500x_N + 2200x_L$$

subject to

$$20x_E + 30x_N + 62x_L \leq 480$$

$$31x_E + 42x_N + 51x_L \leq 480$$

$$16x_E + 81x_N + 10x_L \leq 300$$

$$0.8x_L - 0.2x_E - 0.2x_N \leq 0$$

$$0.6x_E - 0.4x_N - 0.4x_L \geq 0$$

$$x_E, x_N, x_L \geq 0$$

Osservazione Le variabili sono *continue* ma rappresentano quantità indivisibili (numero di autovetture). Se aggiungiamo il vincolo che x_E, x_L, x_N siano intere, perdiamo la linearità del problema

Variante

- Una riorganizzazione del processo produttivo permette ora di produrre un'autovettura (di qualsiasi tipo) **utilizzando un solo robot**
- le nuove durate delle operazioni sono (adesso i valori di una colonna sono in alternativa!):

	economica	normale	lusso
A	80	50	102
B	41	95	71
C	36	109	40

- i prezzi di vendita non sono cambiati: $1000, 1500, 2200$ Euro per ciascuna autovettura di tipo E,N e L, rispettivamente

Come cambia il modello?

Modellazione

- **nuove variabili decisionali**: x_{ij}, $i = A, B, C; j = E, N, L$
  numero di autovetture del modello j costruite dal robot i
- funzione obiettivo

$$\max 1000(x_{AE} + x_{BE} + x_{CE}) + 1500(x_{AN} + x_{BN} + x_{CN}) +$$

$$+2200(x_{AL} + x_{BL} + x_{CL})$$

- capacità produttiva

$$\begin{aligned} 80x_{AE} + 50x_{AN} + 102x_{AL} &\leq 480 \\ 41x_{BE} + 95x_{BN} + 71x_{BL} &\leq 480 \\ 36x_{CE} + 109x_{CN} + 40x_{CL} &\leq 300 \end{aligned}$$

Modellazione

- mix produttivo il numero di autovetture L non deve superare il 20% del totale, mentre il numero di E deve essere almeno il 40%

$$x_{AL} + x_{BL} + x_{CL} \leq 0.2 \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=E,L,N} x_{ij}$$

$$x_{AE} + x_{BE} + x_{CE} \geq 0.4 \sum_{i=A,B,C} \sum_{j=E,L,N} x_{ij}$$

- vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = A, B, C; j = E, N, L$$

Modello di PL

$$\max 1000(x_{AE}+x_{BE}+x_{CE})+1500(x_{AN}+x_{BN}+x_{CN})+$$
$$+2200(x_{AL}+x_{BL}+x_{CL})$$

subject to

$$80x_{AE}+50x_{AN}+102x_{AL}\leq 480$$
$$41x_{BE}+95x_{BN}+71x_{BL}\leq 480$$
$$36x_{CL}+109x_{CN}+40x_{CL}\leq 300$$
$$x_{AL}+x_{BL}+x_{CL}\leq 0.2\sum_{i=A,B,C}\sum_{j=E,L,N}x_{ij}$$
$$x_{AE}+x_{BE}+x_{CE}\geq 0.4\sum_{i=A,B,C}\sum_{j=E,L,N}x_{ij}$$
$$x_{ij}\geq 0,\qquad i=A,B,C;j=E,N,L$$

In generale

- m risorse $R_1, \ldots, R_m$
- n prodotti $P_1, \ldots, P_n$
- produrre un'unità di P_j richiede una quantità a_{ij} di risorsa R_i

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & P_1 & \cdots & P_j & \cdots & P_n \\
\hline
R_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
R_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
R_m & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
$$

- le risorse sono limitate: si dispone di b_i unità della risorsa R_i $i = 1, \ldots, m$
- p_j ricavo dalla vendita di un'unità di P_j, $j = 1, \ldots, n$

Caso 1: risorse condivise

- variabili decisionali: $x_1, \ldots, x_n$ quantità da produrre di ciascun prodotto
- funzione obiettivo: ricavo totale

$$\max z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

- vincoli sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Caso 2: risorse alternative

- variabili decisionali: x_{ij} quantità di prodotto j da produrre con la risorsa i
- funzione obiettivo: ricavo totale

$$\max z = p_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1} + p_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2} + \ldots + p_n \sum_{i=1}^{m} x_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

- vincoli sulla capacità produttiva

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + \ldots + a_{1n}x_{1n} &\leq b_1 \\ a_{21}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{2n} &\leq b_2 \\ \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \ldots + a_{mn}x_{mn} &\leq b_m \end{aligned}$$

- vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

Modelli multi-periodo

- Un'industria manifatturiera fabbrica due tipi di prodotti P_1 e P_2
- ogni prodotto finito richiede 4 Kg di materiale grezzo e l'utilizzo di due macchine: una per la levigatura e una per la pulitura
- l'industria dispone settimanalmente di 75 Kg di materiale grezzo
- la disponibilità massima settimanale della levigatrice è 80 ore mentre quella della pulitrice è 60 ore.
- il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ciascun prodotto finito è il seguente

	P_1	P_2
levigatura	4	2
pulitura	2	5

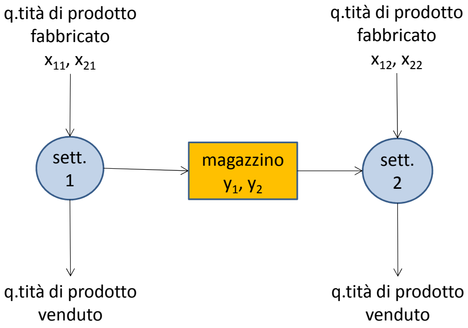
Modelli multi-periodo

- si deve programmare la produzione nelle due successive settimane, sapendo che si dovranno vendere almeno 12 prodotti tipo P_1 e 4 tipo P_2 nella prima settimana; ed almeno 8 prodotti tipo P_1 e 12 tipo P_2 nella seconda.
- i prodotti fabbricati nella settimana 1 possono anche essere tenuti in **magazzino** e venduti nella settimana 2, al costo unitario di 2 Euro (indipendente dal tipo)
- vendendo un'unità di prodotto P_1 si ricavano 10 Euro nella settimana 1 e 11 nella settimana 2; i ricavi per P_2 sono risp. 15 e 8 Euro.

Formulare il modello di PL che permetta di massimizzare il profitto (ricavo $-$ costo) complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti nelle due settimane

Formulazione

variabili decisionali: x_{ij} quantità di prodotto P_i, $i = 1, 2$ fabbricato nella settimana j, $j = 1, 2$; y_1, y_2 quantità di prodotto risp. P_1 e P_2 immagazzinato



Formulazione: capacità produttiva

Ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ciascun prodotto finito:

	P_1	P_2
levigatura	4	2
pulitura	2	5

la levigatrice è disponibile 80 ore e la pulitrice per 60 ore settimanali:

$$4x_{11} + 2x_{21} \leq 80$$
$$2x_{11} + 5x_{21} \leq 60$$
$$4x_{12} + 2x_{22} \leq 80$$
$$2x_{12} + 5x_{22} \leq 60$$

Formulazione: disponibilità di materia prima

Ogni prodotto finito richiede 4 Kg di materiale grezzo e si dispone settimanalmente di 75 Kg di materiale grezzo

$$4x_{11} + 4x_{21} \leq 75$$
$$4x_{12} + 4x_{22} \leq 75$$

Formulazione: vincoli sulla domanda

Vendere <u>almeno</u> 12 prodotti tipo P_1 e 4 tipo P_2 nella prima settimana; ed <u>almeno</u> 8 prodotti tipo P_1 e 12 tipo P_2 nella seconda

vincoli di conservazione

$$\begin{aligned} x_{11} - y_1 &\geq 12 \\ x_{21} - y_2 &\geq 4 \\ x_{12} + y_1 &\geq 8 \\ x_{22} + y_2 &\geq 12 \end{aligned}$$

vincoli di non negatività

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Formulazione: funzione obiettivo

Vendendo un'unità di prodotto P_1 si ricavano 10 Euro nella settimana 1 e 11 nella settimana 2; i ricavi per P_2 sono risp. 15 e 8 Euro.

- ricavo prima settimana: $10(x_{11} - y_1) + 15(x_{21} - y_2)$
- ricavo seconda settimana: $11(x_{12} + y_1) + 8(x_{22} + y_2)$
- costo magazzino: $2(y_1 + y_2)$

Quindi otteniamo:

$$\max 10(x_{11}-y_1)+15(x_{21}-y_2)+11(x_{12}+y_1)+8(x_{22}+y_2)-2(y_1+y_2)$$

Il modello

$$\max 10x_{11} + 15x_{21} + 11x_{12} + 8x_{22} - y_1 - 9y_2$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
&4x_{11} + 2x_{21} \leq 80 \\
&2x_{11} + 5x_{21} \leq 60 \\
&4x_{12} + 2x_{22} \leq 80 \\
&2x_{12} + 5x_{22} \leq 60 \\
&4x_{11} + 4x_{21} \leq 75 \\
&4x_{12} + 4x_{22} \leq 75 \\
&x_{11} - y_1 \geq 12 \\
&x_{21} - y_2 \geq 4 \\
&x_{12} + y_1 \geq 8 \\
&x_{22} + y_2 \geq 12 \\
&x_{ij} \geq 0, i = 1, 2; j = 1, 2 \\
&\quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Discussione

Risolvendo il modello con un qualche algoritmo (che studieremo presto!) otteniamo

$$x_{11} = 12.0000, x_{21} = 6.7500, x_{12} = 8.4375, x_{22} = 10.3125, y_2 = 1.6875$$

quindi, il piano di produzione piú redditizio è:

- **settimana 1:** produciamo e vendiamo esattamente la quantità minima richiesta di P_1 mentre produciamo 2.75 di prodotto 2 in eccesso di cui 1.6875 va in magazzino;
- **settimana 2:** vendiamo $0.4375 P_1$ in eccesso ed esattamente la quantità minima di P_2