CAPITOLO 6

Calcolo Integrale di Funzioni di una Variabile

Integrale: Definizione e prime Proprietà

PROBLEMA. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, calcolare l'area A tra il grafico di f e l'asse x, cfr. Figura 49.

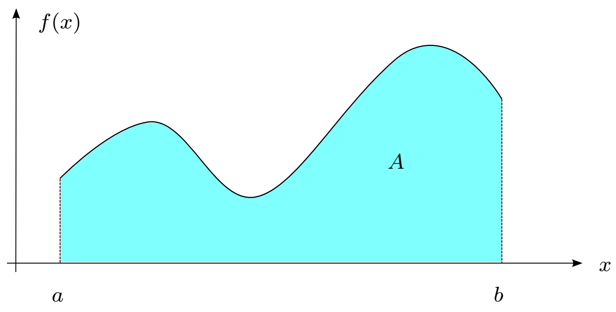


FIGURA 49. L'area A.

L'idea per risolvere questo problema è di approssimare l'area A da sotto e da sopra, cioè per eccesso e per difetto.

Se poniamo $m := \inf f$ e $M := \sup f$, allora sicuramente vale

$$m \cdot (b-a) \leq A \leq M \cdot (b-a),$$

che però dà una approssimazione troppo scarsa. Per migliorarla dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in tanti sottointervalli e procediamo in ogni sottointervallo come prima. Per precisare questa idea ci serve una

Definizione 6.1.

- Un insieme $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ si chiama *partizione di $[a, b]$* se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e P è una partizione di $[a, b]$, allora definiamo per $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$m_i := \inf\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\big\},$$

$$M_i := \sup\big\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\big\},$$

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} (= \text{ lunghezza dell'intervallo } [x_{i-1}, x_i])$$

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i =: \textit{ somma inferiore} \text{ (cfr. Figura 50)}$$

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i =: \textit{ somma superiore} \text{ (cfr. Figura 50)}$$

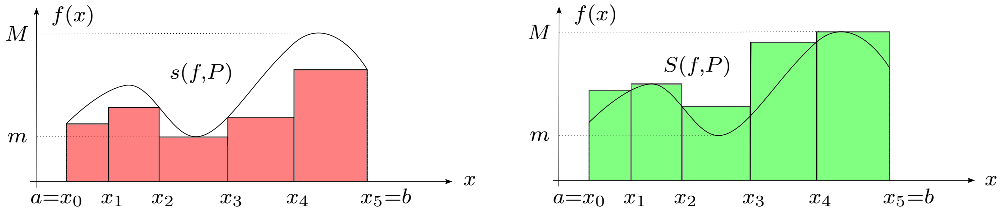


FIGURA 50. Somma inferiore $s(f, P)$ e somma superiore $S(f, P)$.

Quindi per ogni partizione P di $[a, b]$ vale

$$s(f, P) \leq A \leq S(f, P),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di A per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(f, P)$ meglio è,
- più *piccolo* è $S(f, P)$ meglio è.

Se non c'è differenza tra "la migliore" approssimazione da sotto (cioè quella più grande per difetto) e quella "migliore" da sopra (cioè quella più piccola per eccesso), allora il problema è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*.

Per precisare questo procedimento facciamo la seguente

Definizione 6.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se

$$\sup\big\{s(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\big\} = \inf\big\{S(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\big\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann[1]). In questo caso $A = I$ e

$$I := \int_a^b f(x)\, dx$$

si dice *integrale* di f (= funzione integranda) in $[a, b]$ (= dominio dell'integrazione).

OSSERVAZIONI.

- Come variabile di integrazione non è necessario scegliere x si può anche scrivere

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(s)\, ds = \int_a^b f(t)\, dt = \ldots$$

- L'area sotto l'asse x è *negativa*, per esempio se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := -1$ per ogni $x \in [0, 1]$ allora $\int_0^1 f(x)\, dx = -1$.

[1]Ci sono altri modi per affrontare questo problema che portano a definizioni diverse, per esempio quella di Lebesgue.

- f è integrabile $\iff$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione $P = P_\varepsilon$ tale che
$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

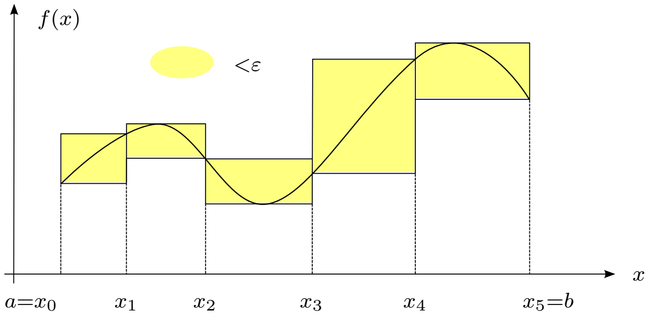


Figura 51. Criterio per l'integrabilità.

- L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta una somma continua di aree infinitesime, cfr. Figura 52. Questa interpretazione spiega l'uso della notazione

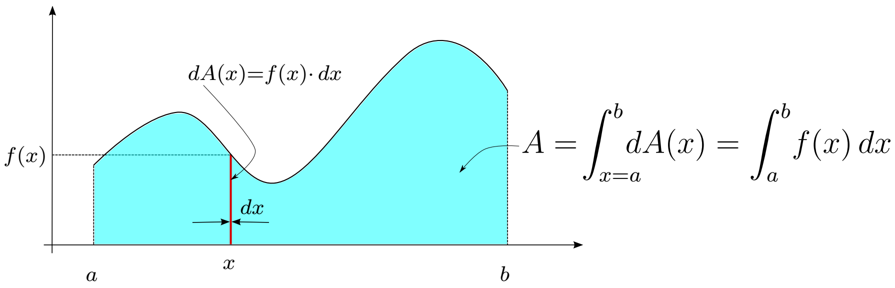


Figura 52. Integrale come somma continua.

$\int_a^b f(x)\,dx$ inventata da Leibniz più di 300 anni fa.

Consideriamo alcuni

<u>ESEMPI</u>. • Se f è costante, cioè $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $s(f, P) = S(f, P) = c \cdot (b - a)$ per $P = \{a, b\}$ e quindi f è integrabile con $\int_a^b f(x)\, dx = c \cdot (b - a)$.

- La funzione di Dirichlet (cfr. pagina 97)

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  non è integrabile. Infatti visto che per ogni partizione P ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 1) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 0) segue $m_i = 0$ e $M_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Così risulta per ogni partizione

$$s(f, P) = 0 \neq b - a = S(f, P)$$

  che implica che f non è integrabile.

Continuiamo studiando alcune

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio $[a, b]$ è uno *spazio vettoriale*) e

$$\boxed{\int_a^b \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx}$$

  (cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);
- Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx}$$

  (cioè l'integrale è *monotona*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx}$$

(*disuguaglianza triangolare*).

- per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx}$$

(*additività* dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione) ove definiamo

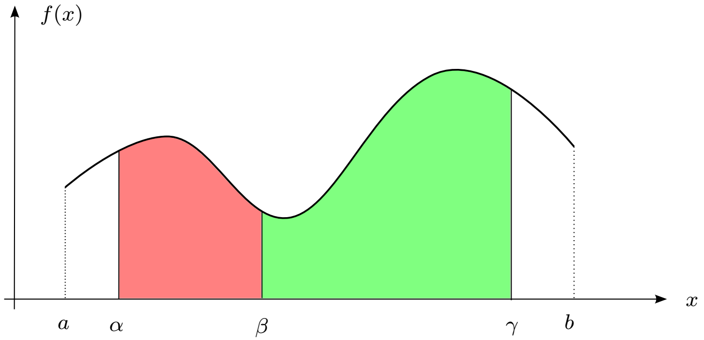


FIGURA 53. Additività rispetto agli estremi di integrazione.

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx := 0 \qquad \text{e} \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx := -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx \quad \text{se } \alpha > \beta;$$

per esempio $\int_1^0 f(x)\,dx := -\int_0^1 f(x)\,dx$.

Se la funzione integranda e il dominio di integrazione hanno qualche simmetria, allora l'integrale si semplifica nella seguente maniera.

<u>PROPOSIZIONE</u> 6.3. *Sia* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *integrabile. Allora*

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ *se* f *è dispari,*
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ *se* f *è pari,*

FIGURA 54. Integrazione di funzioni simmetrici.

A questo punto si pongono due

<u>Problemi</u>. (i) Quali funzioni sono integrabili?
(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$?

Per i nostri scopi il seguente risultato dà una risposta sufficiente al primo problema.

<u>Teorema</u> 6.4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata e*

- *ha un numero finito di discontinuità, oppure*
- *è monotona*

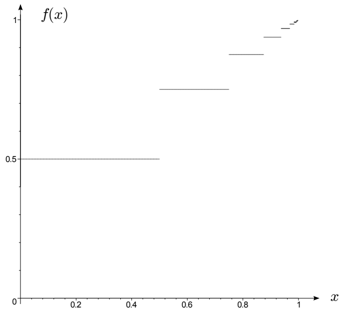
allora f è integrabile. In particolare ogni $f \in \mathrm{C}[a, b]$ è integrabile.

Qui l'ultima affermazione segue dal primo punto visto che una funzione continua su $[a, b]$ ha zero punti di discontinuità ed è limitata per Weierstraß.

<u>Esempi</u>. Le funzioni $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \text{se } x \in \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right), \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \in [0, 1), \\ x^2 - 2 & \text{se } x \in [1, 2), \\ \sin(2x) & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

sono integrabili in quanto f (nonostante abbia un numero infinito di punti di discontinuità) è crescente e g ha soltanto 2 punti di discontinuità



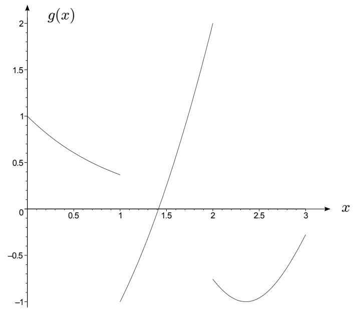


Figura 55. Esempi di funzioni integrabili non continue.

($x_0 = 1$ e $x_1 = 2$), cf. Figura 55.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Passiamo ora al secondo problema, cioè cerchiamo modi per calcolare $A = \int_a^b f(x)\,dx$ visto che soltanto in casi particolarmente semplici è possibile di determinare A usando la definizione.

Perciò ci serve prima il seguente

<u>TEOREMA</u> 6.5 (*Teorema della Media*). *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$, allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

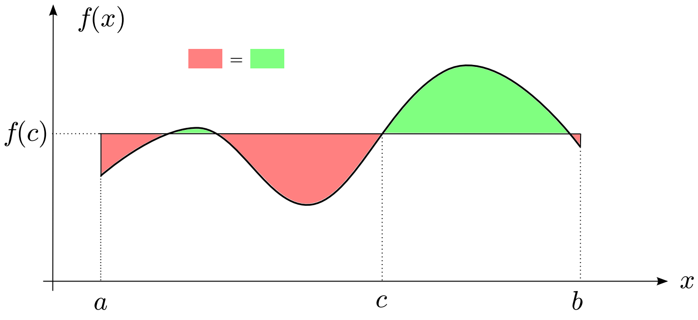


FIGURA 56. Teorema della media.

DIMOSTRAZIONE. Per Weierstraß esistono

$$m := \min f, \qquad M := \max f.$$

Inoltre vale (cfr. pagina 189)

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a) \qquad \Rightarrow$$

$$\min f = m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{= \textit{valor medio} \text{ di } f \text{ in [a,b]}} \le M = \max f.$$

Quindi per il teorema dei valori intermedi (cfr. pagina 99) esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

□

Dal teorema della media segue un risultato molto importante:

TEOREMA 6.6 (*Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*). *Sia $f \in C[a, b]$ allora la funzione*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(s)\,ds \quad = \text{funzione integrale di } f \ \text{(cfr. Figura 57)}$$

è derivabile con

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{per ogni } x \in [a, b].$$

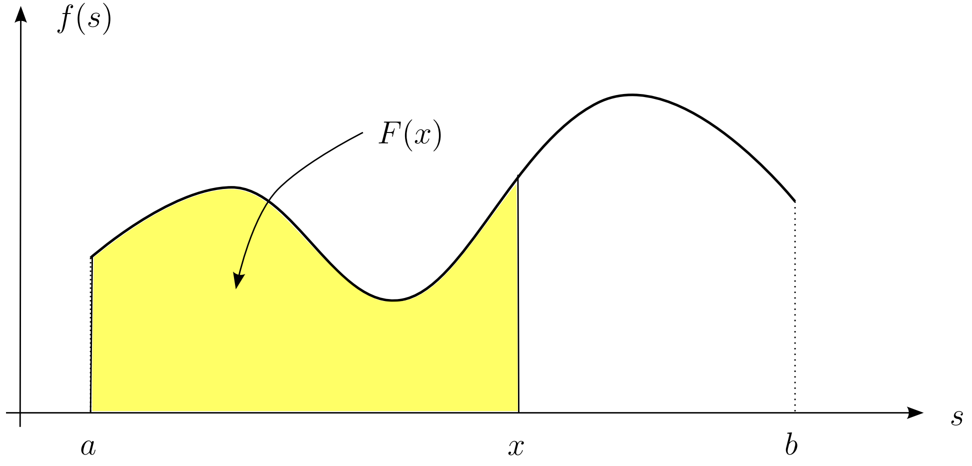


FIGURA 57. La funzione integrale.

DIMOSTRAZIONE. Per verificare la derivabilità di F dobbiamo studiare il suo rapporto incrementale per $h \to 0$. Allora usando prima l'additività dell'integrale rispetto agli estremi di integrazione e poi il teorema della media segue

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(s)\,ds - \int_a^x f(s)\,ds}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(s)\,ds}{h} \\ &= \frac{h \cdot f(c)}{h} = f(c)\end{aligned}$$

per un $c = c_{x,h}$ tra x e $x+h$. Quindi $h \to 0$ implica $c_{x,h} \to x$ e la continuità di f implica

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_{x,h}) \to f(x) \qquad \text{per } h \to 0,$$

cioè F è derivabile con $F'(x) = f(x)$. □

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- Se G è una funzione derivabile tale che $G' = f$, allora G si dice *primitiva di* f. L'insieme

$$\int f(x)\,dx := \{G : G \text{ e una primitiva di } f\}$$

  si chiama *integrale indefinito di* f.

- Per distinguere un integrale indefinito $\int f(x)\,dx$ (che rappresenta un'insieme di funzioni) da un integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ (che è un numero reale), quest'ultimo viene anche chiamato *integrale definito*.

- Se F e G sono due primitive di $f \in \mathrm{C}[a,b]$ allora

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

e per la caratterizzazione delle funzioni costanti (cfr. pagina 136) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Per questo motivo se F è una primitiva qualsiasi di f si scrive spesso

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria di integrazione.

Siamo ora in grado di dare una soluzione al secondo problema.

<u>Corollario</u> 6.7. *Se $f \in \mathrm{C}[a,b]$ e G è una primitiva di f (cioè $G' = f$), allora*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: \big[G(x)\big]_a^b =: G(x)\Big|_a^b}$$

Dimostrazione. Sia F la funzione integrale di f. Allora per il Teorema fondamentale F è una primitiva di f e quindi per l'osservazione precedente esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$ per ogni $x \in [a,b]$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{=F(b)} - \overbrace{\int_a^a f(x)\,dx}^{=0=F(a)} \\ &= F(b) - F(a) = \big(G(b)+c\big) - \big(G(a)+c\big) \\ &= G(b) - G(a).\end{aligned}$$

□

Quindi vale la seguente

<u>Osservazione</u>. $\boxed{\text{Per calcolare } \int_a^b f(x)\,dx \text{ “basta” trovare una primitiva di } f.}$

Abbiamo scritto “basta” tra virgolette poiché come vedremo trovare una primitiva di una funzione f (si dice anche integrare f) generalmente non è un compito semplice.

Tuttavia possiamo ora calcolare i primi integrali non banali.

<u>Esempi</u>. • Visto che $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ segue $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{7}{3}$.

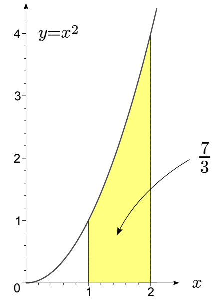


Figura 58. Area sotto il grafico.

• Sia $G(x) := \ln|x|$ per $x \neq 0$. Allora G è derivabile e

$$G'(x) = \begin{cases} \left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ \left(\ln(-x)\right)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

<u>Osservazione</u>. Questo fatto ci permette di dare una nuova rappresentazione per il logaritmo: Per $x > 0$ vale

$$\int_1^x \frac{1}{s}\, ds = \ln(s)\big|_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x) \quad \text{(cfr. Figura 59).}$$

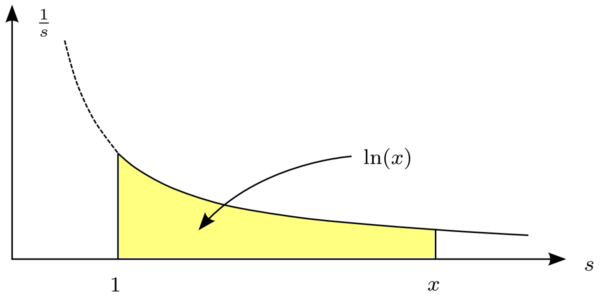


Figura 59. Il logaritmo.

- Visto che per ogni $r \neq -1$ vale $\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = x^r$ insieme con l'esempio precedente segue

$$\boxed{\int x^r\, dx = \begin{cases} \ln|x| + c & \text{se } r = -1 \\ \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c & \text{se } r \neq -1 \end{cases}}$$

- La funzione $G(x) := \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è derivabile con $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e quindi

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + c}$$

- $\boxed{\int e^x \, dx = e^x + c}$
- $\boxed{\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c}$ $\boxed{\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c}$
- $\boxed{\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + c}$ $\boxed{\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + c}$

In questi esempi era semplice di indovinare la primitiva di una funzione integranda data (per esempio per x^r con $r \neq -1$) oppure siamo partiti con una funzione derivabile G che poi per definizione diventa la primitiva della sua derivata $f = G'$.

Nelle applicazioni invece è in generale data una funzione integranda f per la quale non è immediato indovinare una primitiva.

Quindi ci poniamo il seguente

<u>Problema</u>. Come si può trovare una primitiva di una funzione più complicata?

Per esempio, il logaritmo ln è continuo e quindi integrabile ma come si può calcolare

$$\int \ln(x) \, dx = ?$$

Per risolvere questo problema studiamo ora alcuni

Metodi di Integrazione

L'idea per trovare una primitiva di una funzione è che, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, *la derivazione e l'integrazione sono operazioni inverse*, cioè:

Se h è derivabile con continuità (brevemente si dice $h \in \mathrm{C}^1$), allora

$$(*) \qquad \int h'(x) \, dx = h(x) + c.$$

Così una regola di derivazione implica una regola associata di integrazione.

Integrazione per Parti. Sappiamo che se f, g sono C^1 allora anche $h := f \cdot g$ è C^1 con

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Quindi da $(*)$ segue

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx = \int \underbrace{\big(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\big)}_{=h'(x)}\, dx = \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{=h(x)} + c$$

Così risultano le formule

- *Integrazione per Parti* (versione indefinita)

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx}$$

- *Integrazione per Parti* (versione definita)

$$\boxed{\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx}$$

Quindi il metodo di integrazione per parti corrisponde alla regola di derivazione di un prodotto.

Vediamo ora come si applica questa regola

<u>Esempi</u>. • Utilizziamo integrazione per parti per calcolare

$$\int x^r \cdot \ln(x)\, dx$$

per $r \neq -1$. A questo punto dobbiamo decidere quale dei fattori è $f'(x)$ e quale $g(x)$. Ma visto che con la scelta $f'(x) = \ln(x)$ non si può continuare non conoscendo la primitiva del logaritmo, l'unica possibilità è $x^r = f'(x)$ e $\ln(x) = g(x)$ e quindi (siccome $r \neq -1$) $f(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Così risulta

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^r}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\, dx &= \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{r+1}}{r+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \int x^r\, dx \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \\
&= \frac{x^{r+1}}{r+1} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{r+1}\right) + c.
\end{aligned}$$

In questo esempio il metodo integrazione per parti funziona poiché il logaritmo $g(x) = \ln(x)$ è una funzione "complicata" con derivata $g'(x) = \frac{1}{x}$ "semplice". Quindi passando la derivata da $f(x)$ a $g(x)$ l'integrale si semplifica. Inoltre possiamo dire che per $r = 0$ otteniamo $g(x) = x^0 = 1$ per ogni x e quindi abbiamo anche calcolato

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \big(\ln(x) - 1\big) + c.$$

Se si vuole calcolare questo integrale direttamente (cioè senza il fattore x^r) si deve procedere con un piccolo trucco:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)}\,dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{g(x)} - \int \overbrace{\underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}}^{=1}\,dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + c.\end{aligned}$$

- Anche l'integrale

$$\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

si può calcolare usando integrazione per parti. Perciò scegliamo $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \cos(x)$ (ma funzionerebbe anche viceversa). Allora $f(x) = e^x$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\,dx = \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\sin(x)\big)}_{g'(x)}\,dx.$$

Sembra che non è cambiato molto, invece il trucco è di integrare un'altra volta per parti, dove usiamo u, v invece di f, g per non confonderci

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \cos(x)\,dx &= e^x \cdot \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx \\ &= e^x \cdot \cos(x) + \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}\,dx.\end{aligned}$$

Così siamo tornati all'integrale iniziale e a prima vista il procedimento risulta essere inutile. Invece abbiamo trovato un'equazione del tipo

$$I = E + \alpha \cdot I$$

per l'integrale I in questione con un'espressione E nota e, molto importante,

$$\alpha = -1 \neq 1.$$

Nel caso $\alpha = 1$ l'integrale si semplifica e quindi tutto era infatti inutile. Per $\alpha \neq 1$ invece l'equazione si risolve facilmente come $I = \frac{E}{1-\alpha}$ cioè (visto che qui $1 - \alpha = 2$)

$$\int e^x \cdot \cos(x)\,dx = \frac{e^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)}{2} + c.$$

- Consideriamo

$$\int \cos^2(x)\, dx.$$

Allora, con $f'(x) = g(x) = \cos(x)$ otteniamo $f(x) = \sin(x)$ e $g'(x) = -\sin(x)$ e quindi

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}\, dx = \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\sin(x)\big)}_{g'(x)}\, dx$$

Ora si potrebbe avere la stessa idea come nell'integrale precedente di integrare un'altra volta per parti. Ciò invece non funziona e porta soltanto all'annullamento di tutto. Invece si usa la relazione $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ che implica

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\, dx &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int \underbrace{\sin^2(x)}_{1-\cos^2(x)}\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1\, dx - \int \cos^2(x)\, dx \\ &= \sin(x) \cdot \cos(x) + x - \int \cos^2(x)\, dx\end{aligned}$$

che, come prima, è un'equazione per l'integrale in questione che è facilmente da risolvere con la soluzione

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) + x}{2} + c.$$

Integrazione per Sostituzione. Abbiamo visto come il metodo integrazione per parti segue dalla regola per la derivazione di un prodotto. Ora invece partiamo con la regola della catena (per derivare le funzioni composte) e cerchiamo la regola corrispondente per l'integrazione.
Sia $f \in \mathrm{C}[a, b]$ con una primitiva F. Sia, inoltre $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivabile con continuità e $\varphi' \neq 0$. Allora la funzione composta[2]

$$h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, \quad h(t) := F\big(\varphi(t)\big)$$

è derivabile con

$$h'(t) = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t).$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione $(*)$ a pagina 201 risulta la formula chiamata

- *Integrazione per Sostituzione* (versione indefinita)

$$\boxed{\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = F\big(\varphi(t)\big) + c.}$$

  dove F è una primitiva di f, cioè $F' = f$.

Sostituendo nella versione indefinita gli estremi $t = \beta$ e $t = \alpha$ segue dal corollario sul Teorema Fondamentale a pagina 198

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt &= F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \\
&= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) \\
&= F(x)\Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato la formula

[2]per non confonderci usiamo come variabili $t \in [\alpha, \beta]$ e $x \in [a, b]$.

- *Integrazione per Sostituzione* (versione definita)

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx}$$

Prima di considerare esempi concreti deduciamo due regole generali di integrazione:

<u>Esempi</u>.

- Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = \frac{1}{x}$ con la primitiva $F(x) = \ln|x|$ e per φ una funzione C^1 con $\varphi(t) \neq 0$ per ogni t allora segue

$$\boxed{\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \ln\big|\varphi(t)\big| + c}$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\begin{aligned}\int \tan(t)\, dt &= \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, dt \\ &= -\int \frac{\overbrace{-\sin(t)}^{\varphi'(t)}}{\underbrace{\cos(t)}_{\varphi(t)}}\, dt \\ &= -\ln\big|\cos(t)\big| + c.\end{aligned}$$

- Se nella versione indefinita della formula integrazione per sostituzione scegliamo $f(x) = x$ con la primitiva $F(x) = \frac{x^2}{2}$ e per φ una funzione C^1 allora segue

$$\boxed{\int \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt = \frac{\varphi(t)^2}{2} + c}$$

Un esempio concreto di questo tipo è

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{\varphi(t)} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{\varphi'(t)}\, dt = \frac{\sin^2(t)}{2} + c.$$

<u>Osservazione</u>. In pratica, si usa il metodo integrazione per sostituzione nel seguente modo: Nella funzione integranda (nella variabile t) si indovina un espressione $\varphi(t)$ che indichiamo con x, cioè si fa la *sostituzione* $x := \varphi(t)$. Considerando x come funzione in t si deriva rispetto a t e si ottiene (formalmente)

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(t) \cdot dt$$

Così risulta già la versione indefinita: Se $F' = f$, allora

$$\int \underbrace{f\big(\overbrace{\varphi(t)}^{=x}\big)}_{=f(x)} \cdot \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{=dx} = \int f(x)\, dx = F(x) + c = F\big(\varphi(t)\big) + c.$$

Per ottenere la versione definitiva basta osservare che

- $t = \alpha \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\alpha)$, e
- $t = \beta \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t) = \varphi(\beta)$

cioè $t \in [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$[3] $\iff$ $x \in [a, b]$ e quindi

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx.$$

Questo ragionamento è puramente formale, ma dimostra la forza delle notazioni per le derivate (come rapporti $\frac{df}{dx}$ tra infinitesimi) e gli integrali (come somme continue $\int f(x)\, dx$) inventati più di 300 anni fa da Leibniz.

Vediamo ora come funziona questo procedimento in un esempio concreto:

[3]se $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, altrimenti $t \in [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]$

<u>Esempi</u>. • Calcoliamo

$$\int_1^2 t \cdot \sqrt{t-1}\, dt.$$

In questo caso l'idea è far sparire la radice ponendo $x := \sqrt{t-1}$ $(= \varphi(t))$. Visto che anche il fattore t nell'integrale deve essere espresso nella nuova variabile risolviamo l'equazione $x := \sqrt{t-1}$ per t:

$$x^2 = t - 1 \quad \Rightarrow \quad t = x^2 + 1.$$

Ora ci sono 2 modi per trovare la relazione tra dx e dt:

- consideriamo (come sopra indicato) $x = \sqrt{t-1}$ come funzione in t e deriviamo rispetto a t, cioè

$$\frac{dx}{dt} = \left((t-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \tfrac{1}{2} \cdot (t-1)^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-1}} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \cdot dx.$$

oppure

- consideriamo $t = x^2 + 1$ come funzione in x e deriviamo rispetto a x, cioè

$$\frac{dt}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \cdot dx$$

e quindi le due possibilità portano allo stesso risultato. Inoltre abbiamo

- $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1-1} = 0$, e
- $t = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2-1} = 1$.

Quindi risulta

$$\begin{aligned}\int_1^2 \underbrace{t}_{x^2+1} \cdot \underbrace{\sqrt{t-1}}_{x} \underbrace{dt}_{2x \cdot dx} &= \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (x^2+1) \cdot x \cdot 2x \cdot dx \\ &= 2 \cdot \int_0^1 (x^4+x^2)\, dx \\ &= 2\Big[\tfrac{x^5}{5} + \tfrac{x^3}{3}\Big]_0^1 \\ &= 2\Big(\tfrac{1^5}{5} + \tfrac{1^3}{3} - 0\Big) = \frac{16}{15}\ .\end{aligned}$$

Nell'esempio precedente si trattava di un integrale definito in t per il quale abbiamo calcolato gli estremi nella nuova variabile x. Anziché calcolare gli estremi in x, dopo la integrazione si può anche tornare alla variabile iniziale (che per integrali indefiniti è sempre necessario) e poi sostituire gli estremi originali. Così faremo nei prossimi esempi.

- Calcoliamo

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\, dt.$$

Allora, per fare sparire la radice procediamo come prima e poniamo $x := \sqrt{t}$ cioè $t = x^2$. Ciò implica $\frac{dt}{dx} = 2x$ e quindi $dt = 2x \cdot dx$. Ora non calcoliamo gli estremi in x ma li sostituiamo con "…" intendendo che non ci interessano in questo momento. Così risulta

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\, dt = \int_{\dots}^{\dots} e^x \cdot 2x\, dx.$$

Questo è un tipico integrale che si risolve per parti e quindi dobbiamo individuare chi è f' e chi g. Qui la scelta giusta è $f'(x) = e^x$ e $g(x) = x$ poiché se facciamo viceversa l'integrale non si semplifica ma diventa tipo $\int x^2 e^x \, dx$ che è ancora più difficile. Allora

$$\begin{aligned} 2\int_{\dots}^{\dots} \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{f'(x)} \, dx &= 2\left(x \cdot e^x \Big|_{\dots}^{\dots} - \int_{\dots}^{\dots} 1 \cdot e^x \, dx \right) \\ &= 2\Big[x \cdot e^x - e^x \Big]_{\dots}^{\dots} \\ (x = \sqrt{t}) \qquad &= 2\Big[e^{\sqrt{t}} \big(\sqrt{t} - 1 \big) \Big]_1^4 \\ &= 2\Big(e^2 \cdot (2-1) - e^1 \cdot (1-1) \Big) = 2 \cdot e^2. \end{aligned}$$

In questo esempio abbiamo visto che può capitare che si devono usare entrambi i metodi, cioè integrazione per sostituzione e anche integrazione per parti.

- Consideriamo ora l'integrale indefinito

$$\int \cos\big(\ln(t)\big) \, dt.$$

In questo esempio facciamo sparire il logaritmo ponendo $x := \ln(t)$ cioè $t = e^x$. Ciò implica

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x \cdot dx.$$

Quindi otteniamo

$$\int \cos\big(\underbrace{\ln(t)}_{x}\big) \underbrace{dt}_{e^x \cdot dx} = \int \cos(x) \cdot e^x \, dx.$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato a pagina 205 usando integrazione per parti e quindi

$$\begin{aligned} &= \frac{e^x\big(\sin(x)+\cos(x)\big)}{2} + c \\ \big(x = \ln(t)\big) \qquad &= e^{\ln(t)} \cdot \frac{\sin\big(\ln(t)\big)+\cos\big(\ln(t)\big)}{2} + c \\ &= t \cdot \frac{\big(\sin(\ln(t))+\cos(\ln(t))\big)}{2} + c \end{aligned}$$

Ripetiamo che in questo esempio, come per tutti gli integrali indefiniti, dopo la sostituzione è necessario tornare alla variabile iniziale, in questo caso t.

Mentre negli esempi passati era abbastanza semplice indovinare la sostituzione (cioè trovare il $\varphi(t)$ che poi viene chiamato x) ci sono integrali dove la sostituzione è abbastanza difficile da trovare.

- Calcoliamo l'area A di un cerchio di raggio 1 data dall'equazione

  $$x^2 + y^2 = 1.$$

  Risolvendo l'equazione nel primo quadrante si ottiene $y = \sqrt{1-x^2}$ e per simmetria segue

  $$A = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

  Con la sostituzione $x := \sin(t)$ cioè $t = \arcsin(x)$ segue

  - $\frac{dx}{dt} = \cos(t) \Rightarrow dx = \cos(t) \cdot dt$,
  - $x = 0 \Rightarrow t = \arcsin(0) = 0$,
  - $x = 1 \Rightarrow t = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

Visto che per $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vale $\cos(t) \geq 0$ risulta $\cos(t) = +\sqrt{1 - \sin^2(t)}$ e quindi

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\sqrt{1 - \sin^2(t)}}^{=\cos(t)} \cdot \cos(t) \cdot\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt.$$

Abbiamo calcolato questo integrale già a pagina 206

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\, dt = \frac{\sin(t) \cdot \cos(t) + t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi risulta

$$A = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Nella stessa maniera si può verificare che l'area $A(r)$ di un cerchio di raggio $r \geq 0$ è data da

$$A(r) = \pi \cdot r^2.$$

- Calcoliamo

$$\int \arctan(x)\, dx$$

Visto che $\arctan(x)$ (come anche $\ln(x)$) è una funzione "complicata" con una derivata $\frac{1}{1+x^2}$ molto più semplice, l'idea per risolvere questo integrale é usare l'integrazione per parti. Perciò useremo il trucco di inserire il fattore 1 che abbiamo già usato per integrare il logaritmo $\ln(x)$

(cfr. pagina 204):

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'(x)}\,dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x}^{\varphi'(x)}}{\underbrace{1+x^2}_{\varphi(x)}}\,dx \\ &= x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c,\end{aligned}$$

dove per l'ultimo integrale abbiamo usato la formula a pagina 208. Altrimenti si potrebbe anche utilizzare la sostituzione $t := 1+x^2$ e procedere come negli altri esempi.

<u>Osservazione</u>. Gli esempi che abbiamo visto dimostrano chiaramente che integrare una funzione può essere difficile ed impegnativo mentre in confronto derivare è una semplice procedura che si può fare abbastanza meccanicamente. In effetti ci sono funzioni continue (che quindi, per il teorema fondamentale, possiedono una primitiva) composizione di funzioni elementari tali che le primitive non possono essere espresse usando solo funzioni elementari. Per esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\pm x^2}$$

sono continue (infatti C^∞) ma le loro primitive *non* si possono esprimere utilizzando solo le funzioni che abbiamo incontrati finora. Quindi in un certo senso non si possono calcolare

$$\int e^{x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int e^{-x^2}\,dx$$

e questo fatto dimostra che integrare *esplicitamente* una funzione può essere addirittura impossibile.

<u>ESEMPIO</u>. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(1-e^{s^2}\right) ds}{\sin(x^3)} =: l.$$

SOLUZIONE. Come indicato sopra non possiamo calcolare l'integrale. Però, grazie alle Regole di l'Hospital e il Teorema Fondamentale del calcolo integrale ciò non è neanche necessario! Prima di derivare sostituiamo $\sin(x^3)$ con l'espressione x^3 che è asintotica per $x \to 0$ e possiede derivate molto più semplici. Quindi, per il principio di sostituzione, vale

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \left(1-e^{s^2}\right) ds}{x^3} \quad \left(= \tfrac{0}{0}\right) \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

Integrazione di Funzioni Razionali

<u>Problema</u>. Come si integra una funzione razionale $\frac{p(x)}{q(x)}$ per due polinomi p, q, per esempio

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2}\, dx \quad ?$$

A questo problema c'è sempre una soluzione che inoltre coinvolge soltanto i tre integrali notevoli per x^r con $r \neq -1$, x^{-1} e $\frac{1}{1+x^2}$.

Il problema, però, è scomporre la funzione integranda in una somma tra un polinomio e fratti semplici in maniera che si possono utilizzare tali integrali.

Perciò si procede in 3 passi:

1° Passo (divisione con resto): Se grado$(p) \geq$ grado(q), allora dividiamo p per q con resto ottenendo polinomi s e r con

- $p = s \cdot q + r$,
- grado$(r) <$ grado(q),

cioè

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\ .$$

Per esempio per $p(x) = x^4 - 2x^2 + 10$ e $q(x) = x^2 - 3x + 2$ otteniamo

$$\begin{array}{rrrrr}
\big(\ x^4 & & -2x^2 & & +10\big) : \big(x^2 - 3x + 2\big) = x^2 + 3x + 5 + \dfrac{9x}{x^2 - 3x + 2} \\
-x^4 & +3x^3 & -2x^2 & & \\
\hline
 & 3x^3 & -4x^2 & & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & -6x & \\
\hline
 & & 5x^2 & -6x & +10 \\
 & & -5x^2 & +15x & -10 \\
\hline
 & & & & 9x
\end{array}$$

2° Passo: Usando la linearità dell'integrale si ottiene

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \underbrace{\int s(x)\,dx}_{\text{semplice da calcolare}} + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

Per esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x^2+10}{x^2-3x+2}\,dx &= \int x^2+3x+5\,dx + \int \frac{9x}{x^2-3x+2}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+5x+\int \frac{9x}{x^2-3x+2}\,dx.\end{aligned}$$

3° Passo (decomposizione in fratti semplici): Si calcola

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx.$$

Consideriamo soltanto il caso grado$(q) = 2$ cioè $q(x) = ax^2 + bx + c$, $r(x) = dx + e$. Ci sono 3 casi secondo il segno del discriminante di $q(x)$:

(i) $b^2 - 4ac > 0$, cioè $q(x)$ ha due zeri reali distinti x_1, x_2.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$, cioè $q(x)$ ha soltanto uno zero (doppio) reale x_0.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$, cioè $q(x)$ non ha zeri reali.

Caso (i): I due zeri distinti di $q(x)$ sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A\cdot\ln|x-x_1| + B\cdot\ln|x-x_2| + c.$$

L'esempio precedente con $q(x) = x^2 - 3x + 2$ entra proprio in questo caso: Qui abbiamo

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \text{ opp. } 2.$$

Inoltre $r(x) = 9x$ e quindi cerchiamo costanti $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{9 \cdot x - 0}{x^2 - 3x + 2} \overset{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B) \cdot x - (2A+B)}{(x-1) \cdot (x-2)}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{Bmatrix} A + B = 9 \\ 2A + B = 0 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} A = -9 \\ B = 18 \end{Bmatrix}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{9x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{-9}{x-1} + \frac{18}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{9x}{x^2 - 3x + 2}\, dx = -9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Così risulta

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 10}{x^2 - 3x + 2}\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x - 9 \cdot \ln|x-1| + 18 \cdot \ln|x-2| + c.$$

Caso (ii): L'unico zero di $q(x)$ è dato da

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx = A \cdot \ln|x - x_0| - \frac{B}{x - x_0} + c.$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1}\, dx.$$

Allora il denominatore si annulla se e solo se

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = 1 = x_0.$$

Quindi cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{3 \cdot x + 0}{x^2 - 2x + 1} \overset{!}{=} \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} = \frac{A \cdot x + (B - A)}{(x - 1)^2}$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\left\{ \begin{aligned} A &= 3 \\ B - A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 3 \end{aligned} \right\}$$

e quindi otteniamo

$$\frac{3x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{3x}{x^2 - 2x + 1}\, dx = 3 \cdot \ln|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + c.$$

Caso (iii): In questo caso $q(x)$ non ha zeri reali. Allora si possono trovare due costanti $A, B \in \mathbb{R}$ (uniche) tali che

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x)}{q(x)} + \frac{B}{q(x)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A \cdot \ln|q(x)| + B \int \frac{1}{q(x)}\,dx,$$

dove abbiamo usato la formula $\int \frac{q'(x)}{q(x)}\,dx = \ln|q(x)|$ (cfr. pagina 208). Rimane da calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{q(x)} = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx.$$

Per fare ciò si cercano costanti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$q(x) = ax^2 + bx + c = \gamma \cdot \left(1 + \left(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)$$

Usando la sostituzione

$$t := \frac{x+\alpha}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta} \quad \Rightarrow \quad dx = \beta \cdot dt$$

risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{q(x)} &= \int \frac{dx}{\gamma \cdot \left(1 + \left(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \cdot \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + c. \end{aligned}$$

Riassumendo, in questo caso otteniamo

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = A \cdot \ln|q(x)| + \frac{\beta \cdot B}{\gamma} \cdot \arctan\Big(\frac{x+\alpha}{\beta}\Big) + c.$$

dove

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A \cdot q'(x) + B}{q(x)} \qquad \text{e} \qquad q(x) = \gamma \cdot \Big(1 + \big(\tfrac{x+\alpha}{\beta}\big)^2\Big).$$

Come esempio concreto consideriamo l'integrale

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}\,dx.$$

Visto che il discriminante del denominatore $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 13 < 0$ siamo nel terzo caso. Allora, cerchiamo prima $A, B \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{4 \cdot x + 0}{x^2 - 4x + 13} \overset{!}{=} \frac{A \cdot \overbrace{(x^2 - 4x + 13)'}^{=2x-4} + B}{x^2 - 4x + 13} = \frac{2A \cdot x + (-4A + B)}{x^2 - 4x + 13}.$$

Confrontando i coefficienti ciò vale se e solo se

$$\begin{Bmatrix} 2A = 4 \\ -4A + B = 0 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} A = 2 \\ B = 8 \end{Bmatrix}$$

e quindi

$$\int \frac{4x}{x^2 - 4x + 13}\,dx = 2 \cdot \ln\big(x^2 - 4x + 13\big) + 8 \int \frac{1}{x^2 - 4x + 13}\,dx.$$

Inoltre vale

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9 = 9 \cdot \Big(1 + \big(\tfrac{x-2}{3}\big)^2\Big)$$

cioè $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 9$ e così con la sostituzione $t := \frac{x-2}{3} \Rightarrow dx = 3dt$ risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,dx &= \frac{1}{9} \cdot \int \frac{dx}{1 + \big(\frac{x-2}{3}\big)^2} \\ &= \frac{3}{9} \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \cdot \arctan(t) + c \\ &= \tfrac{1}{3} \cdot \arctan\big(\tfrac{x-2}{3}\big) + c.\end{aligned}$$

Riassumendo otteniamo il risultato finale

$$\int \frac{4x}{x^2-4x+13}\,dx = 2 \cdot \ln\big(x^2 - 4x + 13\big) + \tfrac{8}{3} \cdot \arctan\big(\tfrac{x-2}{3}\big) + c.$$

<u>ALTRI ESEMPI</u>. • Calcolare $\int_0^1 \frac{2}{\cosh(x)}\, dx$ (Sost. $e^x = t$).

• Calcolare $\int \frac{2}{\sinh(x)}\, dx$. (Sost. $e^x = t$).

Calcolo di Aree Piane*

Ricordiamo che per una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad = \text{area tra il grafico di } f \text{ e l'asse } x,$$

dove, però, l'area sotto l'asse x è *negativa*. Quindi per calcolare l'area A di una funzione che assume sia valori positivi sia negativi si deve dividere il dominio in sottointervalli in cui $f(x)$ non cambia segno:

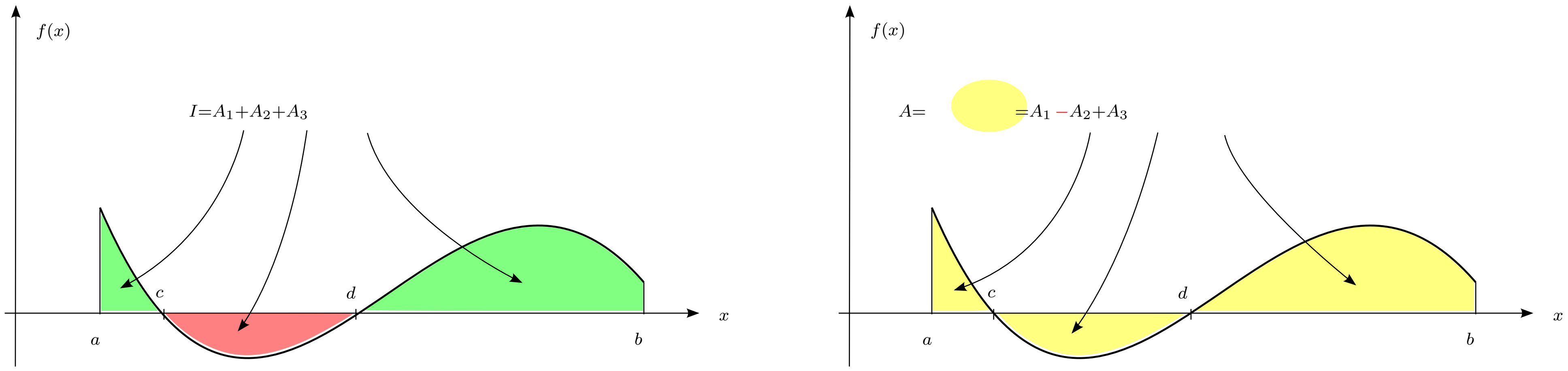


FIGURA 60. Calcolo di aree.

Quindi in questo esempio vale

$$I = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{mentre}$$
$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Più in generale, se vogliamo determinare l'area A compresa tra i grafici di due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili, cfr. Figura 61, allora

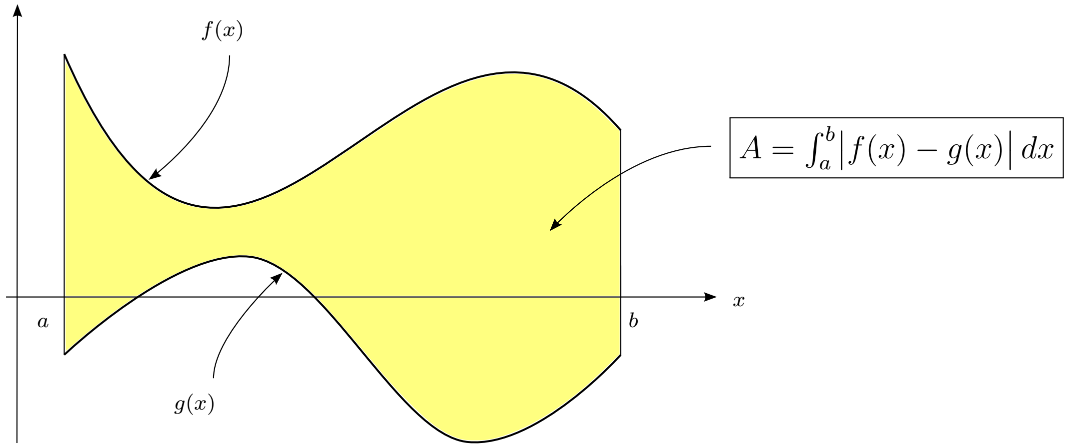


Figura 61. Calcolo dell'area tra due grafici.

Esempio. Calcolare l'area A compresa tra i grafici di x^2 e $\sqrt{x}$ per $x \in [0, 1]$, cfr. Figura 62. Allora, visto che $x^2 \le \sqrt{x}$ per $x \in [0, 1]$ abbiamo

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

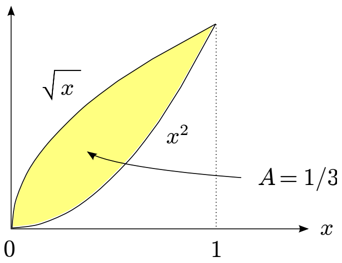


FIGURA 62. Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.

Se invece i grafici si intersecano, allora bisogna calcolare le ascisse dei punti di intersezione e poi spezzare il dominio di integrazione come sopra.

ESEMPIO. Calcolare l'area A tra i grafici di $f(x) := x^3 - 2x$ e $g(x) := x^2$, cfr. Figura 63.

SOLUZIONE. Per cominciare dobbiamo calcolare i punti di intersezione tra f e g. Allora

$$x^3 - 2x = x^2 \quad \iff \quad 0 = x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (x^2 - x - 2) \quad \iff \quad x = -1,\ 0,\ 2.$$

Inoltre vale

$$f(x) = x^3 - 2x \geq g(x) = x^2 \quad \iff \quad x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty)$$

e quindi

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{0} \left|(x^3 - 2x) - x^2\right| dx &= \int_{-1}^{0} \big((x^3 - 2x) - x^2\big)\, dx + \int_{0}^{2} \big(x^2 - (x^3 - 2x)\big)\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2\right]_{0}^{2} \\ &= \big(0 - (\tfrac{1}{4} - 1 + \tfrac{1}{3})\big) + \big(\tfrac{2^3}{3} - \tfrac{2^4}{4} + 2^2\big) \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

□

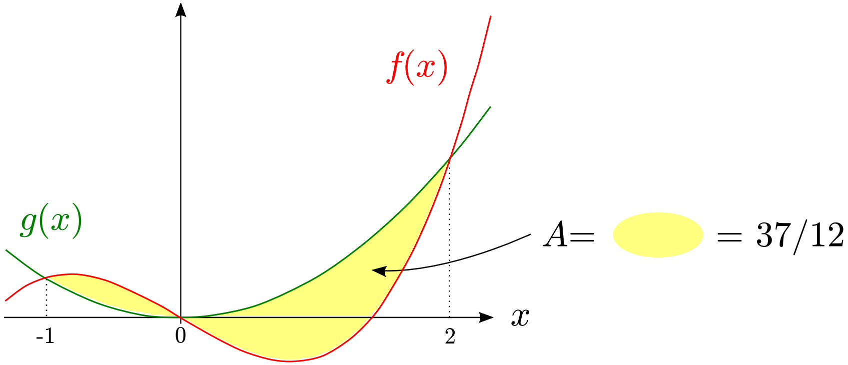


FIGURA 63. Esempio: Calcolo dell'area tra due grafici.

Calcolo della Lunghezza di una Curva*

L'idea per calcolare la lunghezza di una curva è di scomporla in segmenti di lunghezza infinitesime e poi di sommare questi infinitesimi usando l'integrale per ottenere la lunghezza cercata. Mentre il caso generale viene trattato in Analisi 2, qui consideriamo soltanto curve che sono date da un grafico di una funzione $f \in \mathrm{C}^1[a,b]$. Allora, dalla Figura 64 segue per il teorema di Pitagora che la lunghezza del segmento infinitesimale dl è data da $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Visto che $f'(x) = \frac{dx}{dy}$ "segue"[4] $dy = f'(x) \cdot dx$ e quindi

$$dl = \sqrt{dx^2 + \big(f'(x)\big)^2 \cdot dx^2} = \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \cdot dx.$$

Sommando le lunghezze di questi segmenti infinitesimi, per x tra a e b, otteniamo la formula

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx}$$

[4]Ricordiamo che questi conti sono puramente formali ma portano, grazie a una notazione ingegnosa, a un risultato giusto.

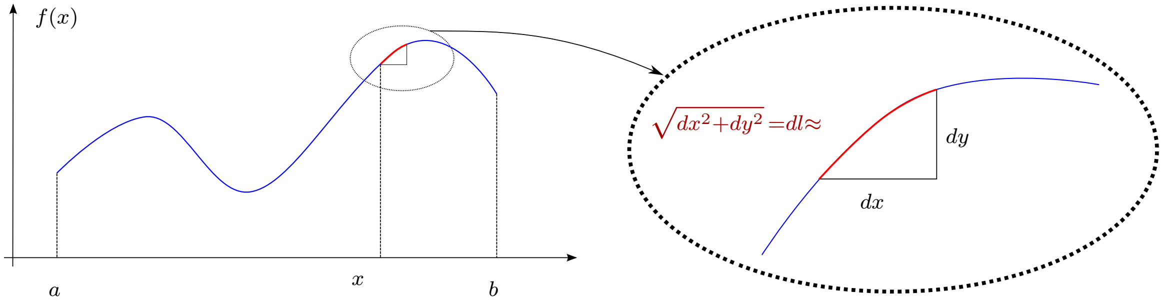


FIGURA 64. Lunghezza di una curva.

per la lunghezza dalla curva data dal grafico di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ che è derivabile con continuità.

<u>ESEMPIO</u>. Calcoliamo la lunghezza l della curva data dal grafico di $f(x) = \cosh(x)$ per $x \in [a,b]$ (cfr. la catenaria, pagina 78). Allora $1 + \big(f'(x)\big)^2 = 1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$. Visto che $\cosh(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$l = \int_a^b \sqrt{\cosh^2(x)}\, dx = \int_a^b \cosh(x)\, dx = \sinh(b) - \sinh(a).$$

Calcolo di Volumi di Corpi di Rotazione*

L'idea utilizzata nel paragrafo precedente di scomporre una quantità cercata in parti infinitesimi e poi di sommarli usando l'integrale per trovare il risultato si può anche usare per calcolare il volume V di un solido. Più precisamente, l'idea è di scomporre il solido in sezioni di spessore infinitesimale e poi di sommare queste sezioni usando l'integrale per ottenere il volume cercato. Mentre il caso generale viene trattato in Capitolo 9, qui consideriamo soltanto corpi ottenuti facendo ruotare intorno all'asse x il grafico di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (cfr. Figura 65).
Allora, usando il fatto che l'area di un cerchio di raggio $r \geq 0$ è data da $A(r) = \pi \cdot r^2$ (cfr. pagina 214) otteniamo

$$dV = \pi \cdot f^2(x) \cdot dx \qquad = \text{volume della sezione}$$

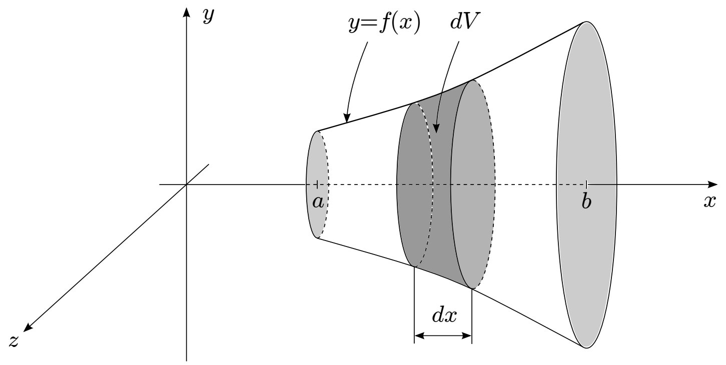


Figura 65. Corpo di rotazione.

e quindi risulta

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx}$$

<u>Esempi</u>. • Calcoliamo il Volume di un cono di altezza h e raggio r della base.
Allora $f(x) = \frac{r}{h} \cdot x$ per $x \in [0, h]$ e quindi

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$

• Calcoliamo il Volume di una sfera di raggio r.
Allora $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e quindi

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r = 2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Integrali Impropri

Ricordiamo che finora un'integrale definito rappresenta un'area A tra l'asse x e il grafico

- di una *funzione integranda f* *limitata*,
- su un *dominio di integrazione $[a, b]$* *limitato*.

Questo significa che al momento non abbiamo definito integrali del tipo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(funzione integranda } \textit{non} \text{ limitata)}$$

oppure

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{(dominio di integrazione } [0, +\infty) \ \textit{non} \text{ limitato)}$$

cfr. Figura 66.

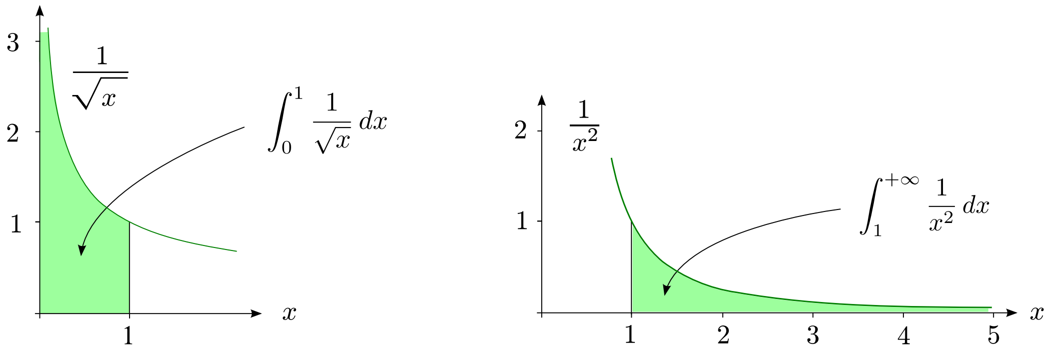


FIGURA 66. Integrali impropri.

Però con il concetto di limite è semplice eliminare questi due vincoli.

Definizione 6.8 (*Integrale Improprio*). Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che f è integrabile in $[a, c]$ per ogni $a < c < b$. Allora, se converge

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx =: A$$

si dice che l'integrale

$$\int_a^b f(x)\, dx := A \quad (= \textit{integrale improprio} \text{ oppure } \textit{generalizzato})$$

esiste nel senso *improprio* oppure che *converge*[5]. Una definizione analoga si ha per $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Esempi.

- Per $r \in \mathbb{R}$ studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} x^r\, dx := \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^r\, dx.$$

Conviene considerare 2 casi

- $r = -1$: Allora

$$\int_1^c x^{-1}\, dx = \ln(x)\Big|_1^c = \ln(c) - \ln(1) \to +\infty \quad \text{per } c \to +\infty,$$

cioè l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$$

diverge.

[5]Per integrali impropri si usa lo stesso linguaggio delle serie, cioè si parla di convergenza e divergenza etc.

- $r \neq -1$: Allora

$$\int_1^c x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\bigg|_1^c = \frac{c^{r+1}}{r+1} - \frac{1}{r+1} \xrightarrow{(c\to+\infty)} \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r+1<0 \iff r<-1, \\ +\infty & \text{se } r+1>0 \iff r>-1. \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x^r\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{r+1} & \text{se } r<-1, \\ +\infty & \text{se } r\geq -1. \end{cases}}$$

Per esempio per $r = -2 < -1$ otteniamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{-2+1} = 1.$$

FIGURA 67. Integrali impropri.

- Consideriamo ora la stessa funzione integranda ma sul dominio di integrazione $[0, 1]$, cioè studiamo[6]

$$\int_0^1 x^r\,dx := \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^r\,dx.$$

Come prima conviene considerare 2 casi

- $r = -1$: Allora

$$\int_c^1 x^{-1}\,dx = \ln(x)\Big|_c^1 = \ln(1) - \ln(c) \to -(-\infty) = +\infty \quad \text{per } c \to 0^+,$$

cioè l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

diverge.

- $r \neq -1$: Allora

$$\int_c^1 x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}\Big|_c^1 = \frac{1}{r+1} - \frac{c^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{(c\to 0^+)} \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r+1 > 0 \iff r > -1, \\ +\infty & \text{se } r+1 < 0 \iff r < -1. \end{cases}$$

Quindi risulta

$$\boxed{\int_0^1 x^r\,dx = \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{se } r > -1, \\ +\infty & \text{se } r \leq -1. \end{cases}}$$

Per esempio per $r = -\frac{1}{2} > -1$ otteniamo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2.$$

[6] qui il limite è solo necessario se $r < 0$.

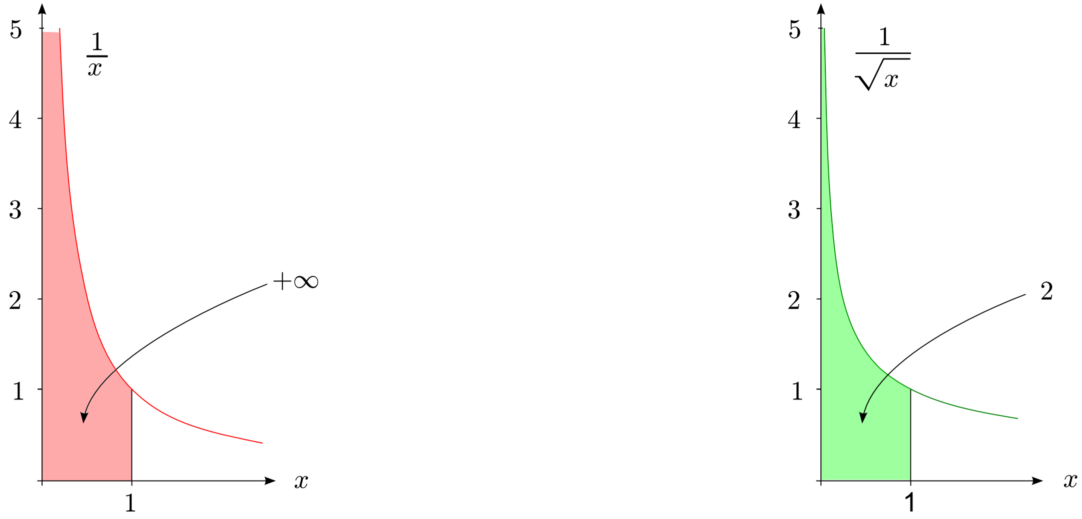


FIGURA 68. Integrali impropri.

Mentre per x^r nei due esempi precedenti era abbastanza semplice trovare una primitiva abbiamo visto che può essere difficile e addirittura impossibile integrare esplicitamente una funzione. Perciò si pone il seguente[7]

[7]Questo problema è molto simile a quello che abbiamo incontrato nel capitolo sulle serie: come si può studiare la convergenza di una serie *senza* avere una formula esplicita per le somme parziali, cfr. pagina 50.

PROBLEMA. Come si può studiare la convergenza di un'integrale improprio senza conoscere una primitiva della funzione integranda?

Evidenziamo che così non chiediamo più di calcolare il valore dell'integrale ma soltanto di verificare che esiste e sia finito.

TEOREMA 6.9 (*del Confronto per gli Integrali Impropri*). *Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e tale che per ogni $a < c < b$, f, g siano integrabili su $[a, c]$. Se*

- *$|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$ (cioè g è un* maggiorante di $|f|$*) e*
- *$\int_a^b g(x)\, dx$ converge,*

allora converge anche $\int_a^b f(x)\, dx$. Un risultato simile vale anche per $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$.

ESEMPI. • Consideriamo l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$

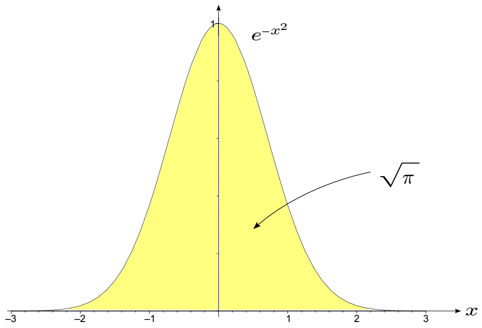


FIGURA 69. Integrale improprio della "Campana di Gauss".

In questo caso non soltanto uno degli estremi è "critico" (nel senso che è infinito oppure un'asintoto verticale della funzione integranda) ma entrambi. In questi casi si spezza l'integrale nella somma di due integrali scegliendo un punto c tra gli estremi.

Nel caso in questione per simmetria conviene scegliere il punto $c = 0$ e quindi definiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx := \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Visto che $f(x) = e^{-x^2}$ è una funzione pari, dalla proposizione su pagina 193 segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

e quindi l'integrale converge su $(-\infty,+\infty)$ se e solo se converge su $[0,+\infty)$. A questo punto ci serve una funzione maggiorante per la quale l'integrale improprio converge. Poiché

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

dove il primo integrale è un'integrale definito e quindi esiste finito, basta che tale funzione sia maggiorante soltanto per $x \geq 1$. Allora, per $x \geq 1$ vale

$$|f(x)| = e^{-x^2} \leq 2x\cdot e^{-x^2} =: g(x)$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{c} 2x\cdot e^{-x^2}\,dx &= -\int_{1}^{c} -2x\cdot e^{-x^2}\,dx\\
&= -e^{-x^2}\Big|_{1}^{c}\\
&= e^{-1} - e^{-c^2} \to e^{-1} \qquad \text{per } c\to+\infty.
\end{aligned}$$

Quindi $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge e per il criterio del confronto converge anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e di conseguenza anche $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

<u>Osservazione</u>. In seguito (cfr. pagina 283) dimostreremo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

- Verifichiamo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ converge.

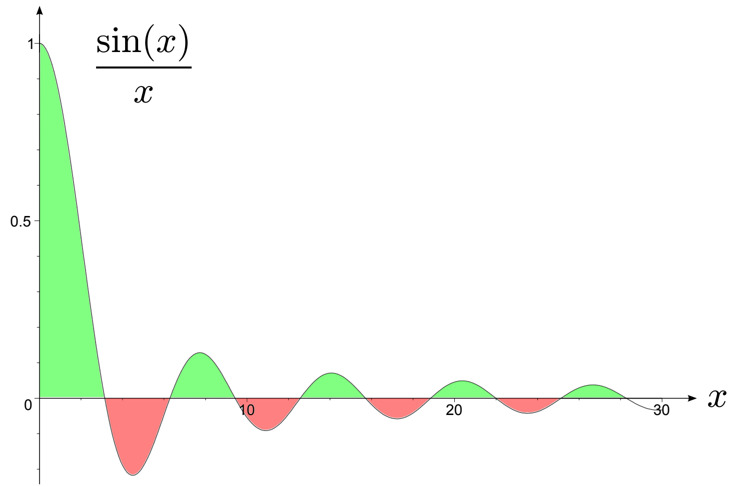


FIGURA 70. Integrale improprio convergente.

Visto che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ solo l'estremo $b = +\infty$ è "critico". Quindi l'integrale converge su $[0, +\infty)$ se e solo se converge su $[1, +\infty)$. Integrando per parti risulta

$$\begin{aligned}\int_1^c \underbrace{\frac{1}{x}}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\, dx &= \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{g(x)}\Big|_1^c - \int_1^c \underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{f'} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{g}\, dx \\ &= \underbrace{\cos(1) - \frac{\cos(c)}{c}}_{\to\cos(1) \text{ per } c\to+\infty} - \int_1^c \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx$$

converge. Ora è semplice trovare un maggiorante per il quale converge l'integrale improprio. Infatti

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{converge}$$

(vedi pagina 232). Quindi anche l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

converge. Notiamo che qui era necessario

- integrare una volta per parti (aumentando così il grado del denominatore da x a x^2) visto che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty \quad \text{diverge}$$

- considerare l'integrale su $[1, +\infty)$ e non su $[0, +\infty)$ visto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = +\infty \quad \text{diverge.}$$

Concludiamo questo capitolo con alcune osservazioni su

Integrali Impropri e Serie. Spesso gli elementi di una serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sono dati dai valori di una funzione $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ in $x = k$, cioè

$$a_k = f(k), \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

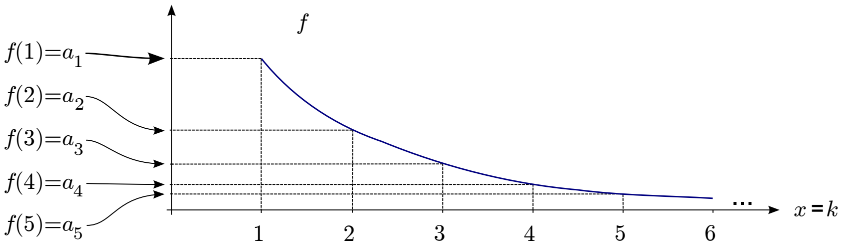


FIGURA 71. Integrali impropri e serie: $f(k) = a_k$.

Quindi si può chiedere che legame c'è tra

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Interpretando la somma della serie come area dimostreremo il seguente

TEOREMA 6.10 (*Criterio Integrale per le Serie*). *Se $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ è decrescente e $a_k := f(k)$, allora*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \quad \textit{converge.}$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$": Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora dal seguente grafico segue

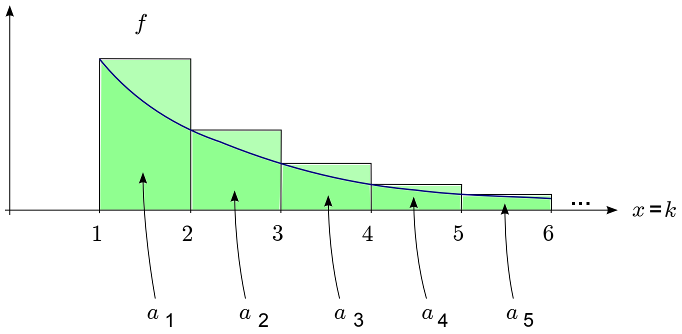


Figura 72. La serie maggiora l'integrale.

$$F(c) := \int_1^c f(s)\, ds \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad \text{per ogni } c \geq 1.$$

Inoltre, F è crescente e quindi per il teorema su pagina 92 converge

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \int_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

"$\Leftarrow$": Se invece l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, allora dal grafico segue

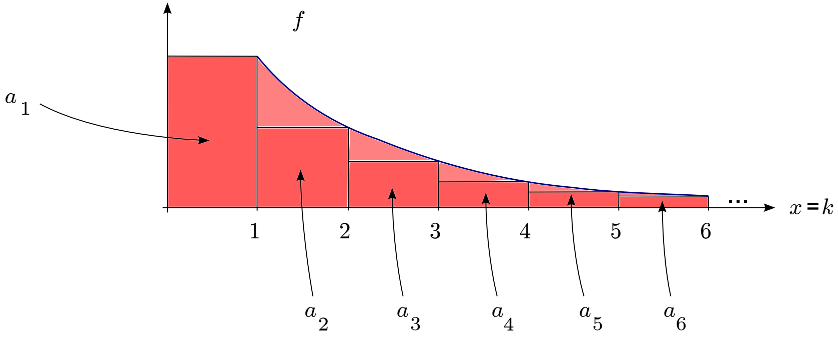


FIGURA 73. L'integrale maggiora la serie.

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \le a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{per ogni } n = 1, 2, 3 \ldots$$

Inoltre la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ è a termini positivi e quindi convergente per il teorema su pagina 51. $\square$

<u>Esempio</u>. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, cfr. pagina 58. Allora per $\alpha \leq 0$ la successione $\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ non è infinitesima e quindi la serie diverge a $+\infty$. Se invece $\alpha > 0$, allora la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$, $x \geq 1$, e derivabile con

$$f'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} < 0 \quad \text{per ogni } x \geq 1.$$

Quindi f è decrescente e dal Criterio Integrale per le Serie segue che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 1.$$

dove la seconda equivalenza è stata dimostrata su pagina 232 con $r = -\alpha$.

Quindi possiamo definire la funzione

$$\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad \zeta(s) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

che si chiama la *funzione zeta di Riemann* ed è legato all'ipotesi di Riemann, uno dei problemi aperti più importanti della matematica.