Introduzione alla programmazione lineare

- struttura del problema di PL
- forme equivalenti
- rappresentazione e soluzione grafica

rif. Fi 1.2; BT 1.1, 1.4

Problema di programmazione lineare

Dati:

un vettore dei costi $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$
insiemi finiti di indici M_1, M_2, M_3 e, per ogni i contenuto in uno di essi, un vettore n-dimensionale $\mathbf{a_i}$ ed uno scalare b_i

Problema di PL:

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, && i \in M_1 \\
&\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i, && i \in M_2 \\
&\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i, && i \in M_3 \\
&x_j \geq 0, && j \in N_1 \\
&x_j \leq 0, && j \in N_2 \\
&x_j \text{ libera}, && j \notin N_1 \cup N_2
\end{aligned}$$

Notazione

- se $j \notin N_1$ e $j \notin N_2$ la corrispondente variabile x_j si dice *libera* o *non-vincolata*
- un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa tutti i vincoli si dice *soluzione ammissibile*
- l'insieme delle soluzioni ammissibili si dice *regione ammissibile*
- una soluzione ammissibile $\mathbf{x}^*$ tale che $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, per ogni $\mathbf{x}$ ammissibile si dice *soluzione ottima*

Matrici e vettori

Notazione:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{a}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_m^T & - \end{bmatrix}$$

Prerequisiti: prodotto scalare, matrice trasposta, prodotto $\mathbf{AB}$ fra matrici, matrice inversa

Forme equivalenti

Due problemi di PL si dicono *equivalenti* se, data una qualunque soluzione ammissibile di un problema, possiamo costruirne una (ammissibile) dell'altro di pari costo.
In particolare, i due problemi hanno lo stesso valore ottimo e data una soluzione ottima di uno possiamo costruirne una ottima dell'altro.

$\begin{array}{c}\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\end{array}$	$\begin{array}{c}\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\\ \mathbf{x} \geq 0_n\end{array}$	$\begin{array}{c}\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}\\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\ \mathbf{x} \geq 0_n\end{array}$
generale	*canonica*	*standard*

Regole di trasformazione

- problema da "max" a "min":

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -\min(-\mathbf{c}^T\mathbf{x})$$

- vincoli da "$\geq$" a "$=$": var. di *surplus*

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i \implies \begin{cases} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

- vincoli da "$\leq$" a "$=$": var. di *slack*

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i \implies \begin{cases} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

Regole di trasformazione

- vincoli da "$=$" a "$\geq$":

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \implies \begin{cases} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i \\ -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq -b_i \end{cases}$$

- variabili da non vincolate a vincolate:

$$x_j \text{ non vincolata} \implies \begin{cases} x_j = x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+ \geq 0 \\ x_j^- \geq 0 \end{cases}$$

Esempio: trasformazione in forma standard

forma generica:

$$\max\ 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$

passo 1.

$$-\min -3x_1 - 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$

passo 2.

$$-\min -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^-$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \geq 3$$
$$x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \leq 2$$
$$x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

passo 3.

$$-\min -3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^-$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - s_1 = 3$$
$$x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- + s_2 = 2$$
$$x_1, x_2^+, x_2^-, s_1, s_2 \geq 0$$

Soluzione grafica di problemi in due variabili

I problemi di ottimizzazione in due variabili possono essere risolti (nei casi semplici) con un metodo grafico basato su:

- rappresentazione della regione ammissibile
- visualizzazione della variazione del valore della funzione obiettivo (*linee di livello*)

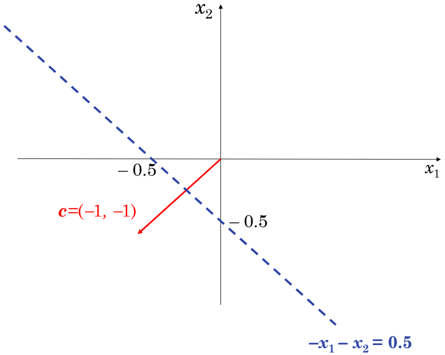
Sebbene i problemi pratici abbiano raramente solo due variabili, il metodo grafico è importante per la comprensione della struttura del problema e delle proprietà che saranno sfruttate nel progetto di algoritmi di soluzione.

Introduciamo il metodo grafico nel caso della Programmazione Lineare

Rette di livello

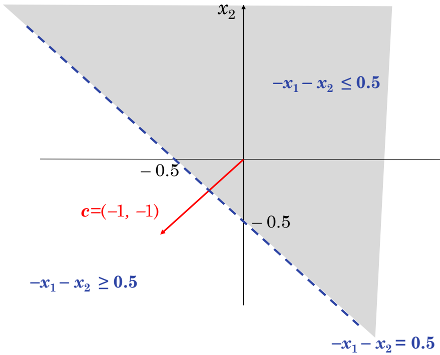
Dato il vettore dei costi $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ ed uno scalare $z \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti per cui $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$ rappresenta una retta perpendicolare al vettore $\mathbf{c}$ detta *retta di livello*

Esempio. $\mathbf{c} = (-1, -1), z = 0.5$



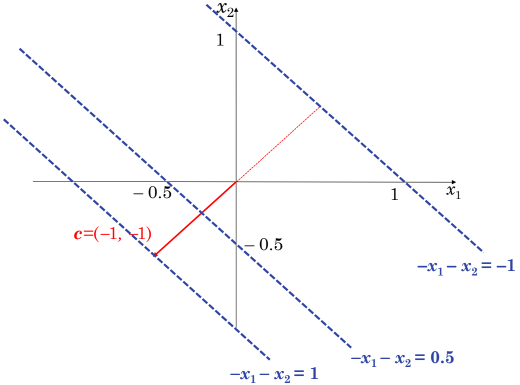
Rette di livello

La retta $c_1 x_1 + c_2 x_2 = z$ divide il piano in due semipiani, corrispondenti risp. ai punti $\mathbf{x}$ per cui $c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq z$ oppure $c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq z$



Rette di livello

Formano un fascio improprio di rette per cui valori crescenti di z corrispondono a rette traslate nel verso di $\mathbf{c}$.

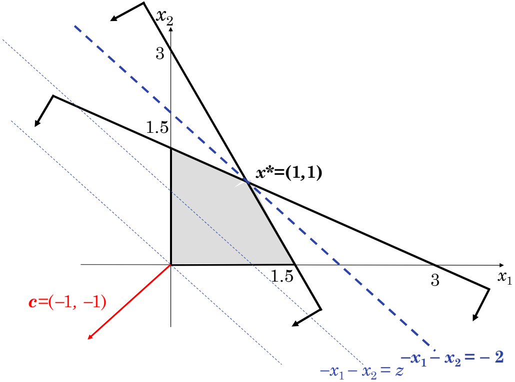


Soluzione grafica

1. Rappresentare la regione ammissibile
2. Traslare la retta di livello nel verso opposto del vettore $\mathbf{c}$ finché la retta interseca la regione ammissibile (problema in forma di min).

Esempio.

$$\begin{aligned} &\min -x_1 - x_2 \\ &\quad x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ &\quad 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



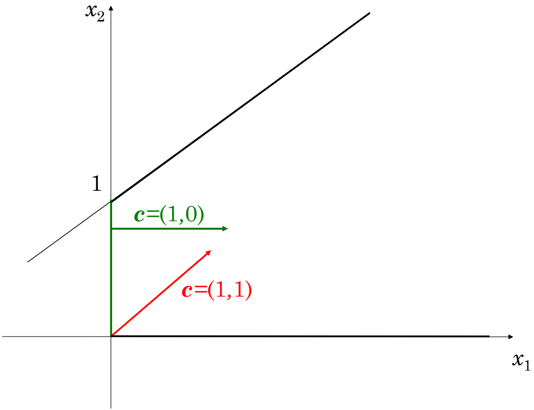
Richiamo: insiemi limitati

Definizione

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* se esiste un numero positivo M tale che $||\mathbf{x}|| \leq M$ per ogni $\mathbf{x} \in S$.

Casi possibili per un problema di PL (I)

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

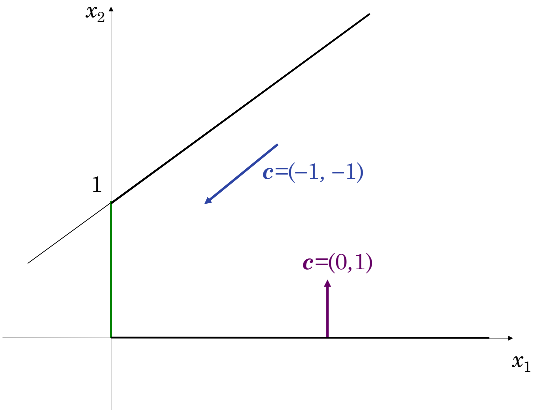


(a) $\mathbf{c} = (1, 1)$: $\mathbf{x} = (0, 0)$ è l'unica soluzione ottima

(b) $\mathbf{c} = (1, 0)$: tutti i vettori $\mathbf{x} = (0, x_2)$ con $0 \leq x_2 \leq 1$ sono soluzioni ottime (insieme limitato)

Casi possibili per un problema di PL (II)

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

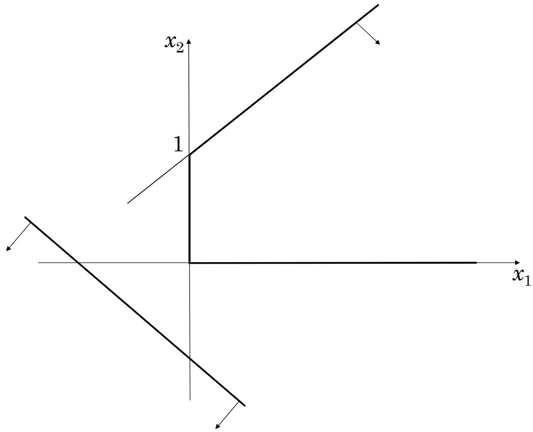


(*c*) $\mathbf{c} = (0, 1)$: tutti i vettori $\mathbf{x} = (x_1, 0)$ con $x_1 \geq 0$ sono soluzioni ottime (insieme illimitato)

(*d*) $\mathbf{c} = (-1, -1)$: per ogni sol. amm. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ si può sempre costruire un' altra sol. di valore inferiore. Il valore ottimo si dice $-\infty$

Casi possibili per un problema di PL (III)

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



(e) aggiungiamo il vincolo $x_1 + x_2 \leq -1$: la regione ammissibile è vuota

Riassumendo

In un problema di PL si hanno le seguenti possibilità:

- esiste un'unica soluzione ottima
- esistono diverse soluzioni ottime; queste possono formare un insieme limitato o illimitato
- il valore ottimo è $-\infty$ (quindi non esiste una soluzione ottima). Il problema si dice (inferiormente) *illimitato*
- la regione ammissibile vuota. Il problema si dice *inammissibile*