Minimizzazione (per forme SP)

- Minimizzazione di funzioni: determinare l'espressione che le rappresentano aventi un numero minimo di prodotti e prodotti con poche variabili

- Equivalentemente, consiste nel determinare circuiti che le realizzano di dimensione minima, ossia con poche porte e pochi ingressi

- In generale non esiste una forma minima, ma diverse forme minimali, ossia che non possono essere ulteriormente ridotte

- Quanto diremo vale per forme SP, ma per il principio di dualità è possibile trasporre il tutto a forme PS

- Un metodo di minimizzazione classico è quello delle cosiddette mappe di Karnaugh

- Si basa sul principio che dato un qualsiasi prodotto X, l'espressione $Xx+X\neg x$ può essere semplificata nel seguente modo:

  $$Xx+X\neg x=X(x+\neg x)=X\cdot 1=X$$

- La minimizzazione di forme SP consiste nell'applicazione sistematica di tale proprietà mediante la determinazione di termini **adiacenti** $X\boldsymbol{x}$ e $X\boldsymbol{\neg x}$

- Il metodo delle mappe di Karnaugh può essere applicato convenientemente per determinare termini adiacenti in funzioni di al più *5* variabili

- In tali mappe ogni casella corrisponde ad una riga delle tabelle di verità, e caselle (o celle) adiacenti corrispondono a termini adiacenti

- Le tabelle sono "avvolgenti", ossia la prima e l'ultima riga sono adiacenti e lo stesso vale per la prima e l'ultima colonna

Mappe di Karnaugh di ordine ≤ 4: corrispondenza celle - valori funzioni

x	0	1
	f(0)	f(1)

x \ y	0	1
0	f(00)	f(01)
1	f(10)	f(11)

x \ yz	00	01	11	10
0	f(000)	f(001)	f(011)	f(010)
1	f(100)	f(101)	f(111)	f(110)

wx \ yz	00	01	11	10
00	f(0000)	f(0001)	f(0011)	f(0010)
01	f(0100)	f(0101)	f(0111)	f(0110)
11	f(1100)	f(1101)	f(1111)	f(1110)
10	f(1000)	f(1001)	f(1011)	f(1010)

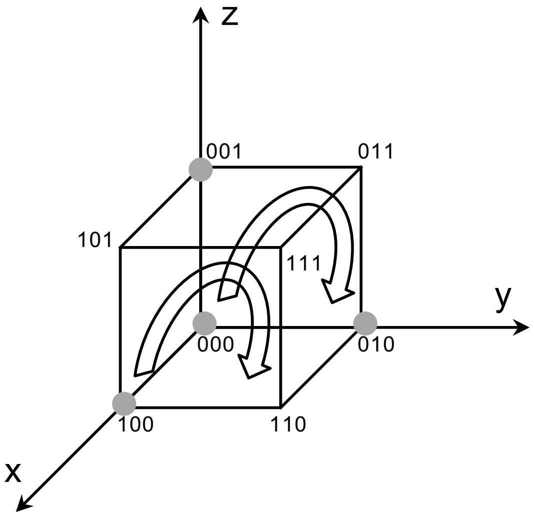
NB: ogni casella riporta il valore di *f* per la configurazione di variabili che ne dà le coordinate

Mappe di Karnaugh di ordine ≤ 4: corrispondenza celle - valori funzioni

data una funzione a n variabili, le 2^n configurazioni delle sue variabili possono essere viste come vertici di un n-cubo

due veritici adiacienti differiscono di una sola coordinata

caso n=3



x \ yz	00	01	11	10
0	f(000)	f(001)	f(011)	f(010)
1	f(100)	f(101)	f(111)	f(110)

Mappe di Karnaugh di ordine ≤ 4: corrispondenza celle - mintermini

x	0	1
	m_0	m_1

x \ y	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

x \ yz	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

wx \ yz	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

Esempio

w	x	y	z	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	1	0
10	0	0	0	1

- Come già accennato, nelle mappe celle (o caselle) adiacenti corrispondono a termini adiacenti del tipo $Xx+X\neg x$
- Gli *1* in celle adiacenti vengono raggruppati in *sottocubi*
- I sottocubi possono solo avere un numero di *1* che è una potenza di *2* (*1,2,4,8,…)*
- Come già visto, un sottocubo di dimensione *1* corrisponde ad un mintermine
- Un sottocubo di dimensione *2* permette un passo di semplificazione tra mintermini adiacenti

Es.: sottocubo di dimensione 2

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$$f(w,x,y,z) = \neg w x \neg \mathbf{y} z + \neg w x \mathbf{y} z = \neg w x z$$

- Un sottocubo di dimensione *4* permette un ulteriore passo di semplificazione tra termini adiacenti

- In particolare, a partire da un gruppo di *4* celle adiacenti contenenti *1,* si arriva ad un unico termine con *2* variabili in meno

- Tale termine è equivalente all'OR dei *4* mintermini corrispondenti alle celle pari ad *1*

- Vediamo un esempio …

Es.: sottocubo di dimensione 4

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$$f(w,x,y,z) = \neg w x \neg \mathbf{y} z + \neg w x \mathbf{y} z + w x \neg \mathbf{y} z + w x \mathbf{y} z =$$

$$\neg \mathbf{w} x z \qquad + \qquad \mathbf{w} x z \qquad =$$

$$xz$$

- Si noti che ad un sottocubo corrisponde un termine costituito dal prodotto delle variabili il cui valore è lo stesso in tutte le configurazioni di input corrispondenti alle celle del sottocubo
- Ognuna di tali variabili nel termine compare in modo diretto se in tutte le celle è pari ad *1,* in modo negato altrimenti
- Rivediamo tale proprietà mediante un ulteriore esempio contenente tra l'altro sottocubi che si sovrappongono
- In tale esempio sfruttiamo la proprietà di idempotenza per mostrare come riportarsi ai casi precedenti con un singolo sottocubo

Es.: sottocubi sovrapposti

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$\neg wxz$

$\neg wxy$

$$f(w,x,y,z) = \neg wx\neg yz + \neg wxyz + \neg wxy\neg z =$$

$$\neg wx\mathbf{\neg y}z + \neg wx\mathbf{y}z + \mathbf{\neg wxyz} + \neg wxy\mathbf{\neg z} =$$

$$\neg wxz + \neg wxy$$

Vediamo altri esempi in cui per brevità nelle tabelle non sono riportati gli 0 delle funzioni

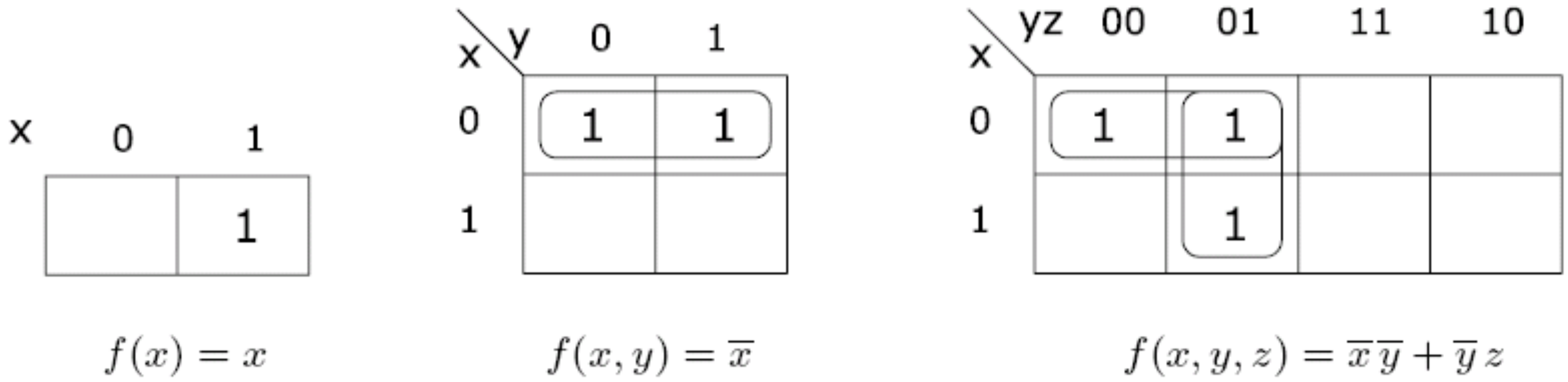


Figura 3.9 Esempi di funzioni sulle mappe di Karnaugh e loro minimizzazione.

SI

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1		
1		1		

NO

- Iterando i discorsi precedenti, abbiamo che un sottocubo di dimensione 2^m permette m passi di semplificazione tra termini adiacenti

- Da un OR di 2^m mintermini si arriva ad un unico termine **equivalente** con m variabili in meno

- Un sottocubo di dimensione 2^m è anche detto di ordine m

- Nei sottocubi di ordine m gli *1* non possono comparire a caso, ma ci sono restrizioni circa la loro disposizione

- In pratica, ogni cella contenente un *1* deve essere adiacente ad esattamente m altre celle contenenti *1* dello stesso sottocubo

x \ yz	00	01	11	10
0	1	1		
1		1		

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z = \overline{x}\,\overline{y}$
prodotto di 3-1=2 var.i

In generale

- una funzione booleana di *n* variabili viene rappresentata su una mappa di Karnaugh di ordine *n*
- una mappa di ordine *n* contiene 2^n celle
- le coordinate delle caselle corrispondono alle 2^n configurazioni delle *n* variabili
- le celle sono disposte in modo da avere ognuna *n* adiacenti
- un sottocubo di ordine $m \leq n$ è un insieme di 2^m celle in cui ogni cella è adiacente ad altre *m* del sottocubo
- un sottocubo di ordine *m* con tutte le celle pari ad *1* corrisponde ad un prodotto delle *(n-m)* variabili che non variano nel sottocubo, in forma diretta se esse valgono sempre *1*, complementata altrimenti
- quindi più aumenta la dimensione del sottocubo, più è piccolo il prodotto che gli corrisponde
- sottocubo massimale: sottocubo di *1* non contenuto in un sottocubo di *1* di dimensione (ordine) maggiore

- Copertura di una funzione: insieme di sottocubi che coprono tutti e soli gli *1* della funzione nella mappa

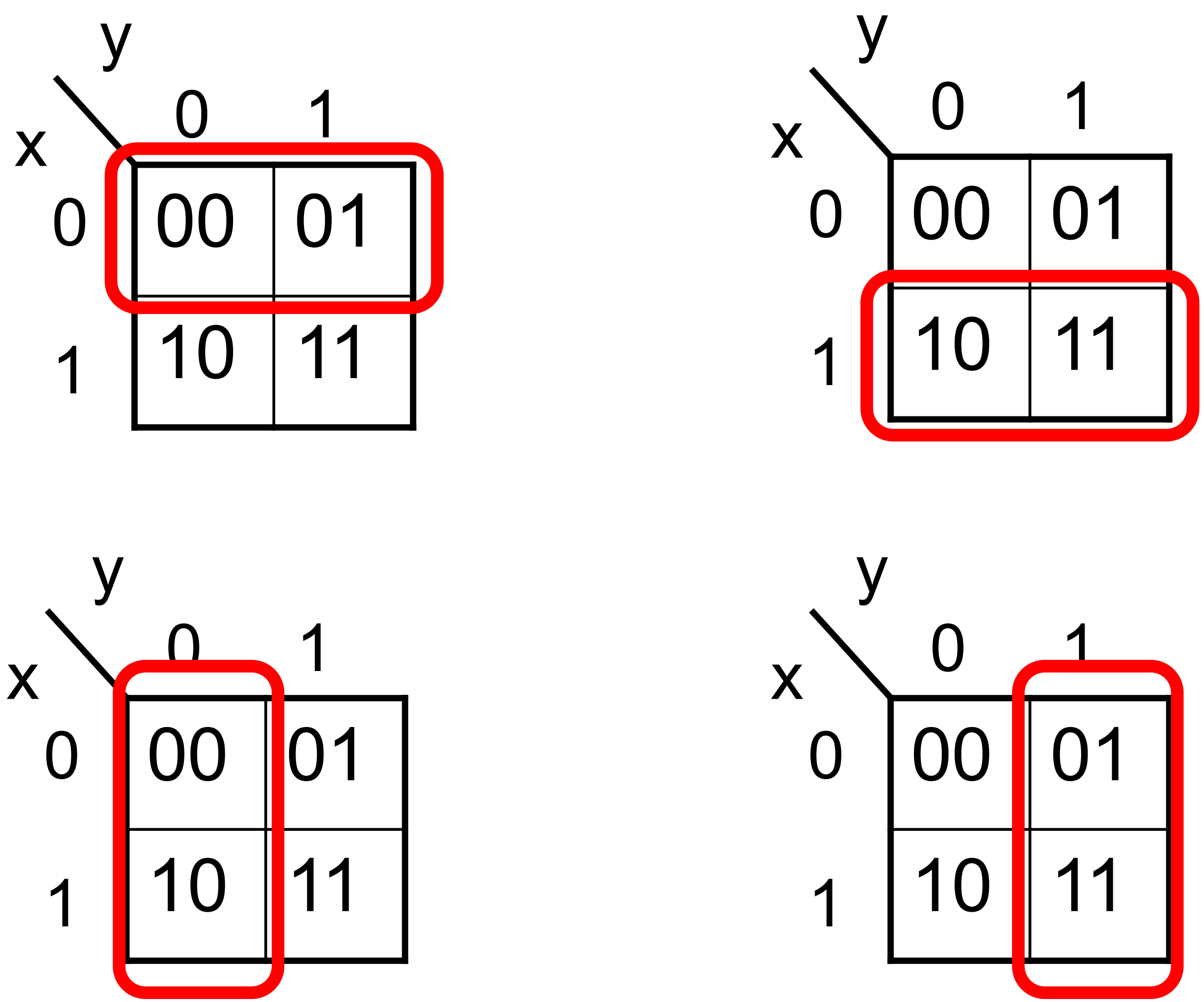
- Una copertura corrisponde ad una forma minimale se
  1. è costituita da un insieme minimale di sottocubi, ossia nessuno di essi può essere eliminato senza violare la proprietà di ricoprimento (pochi prodotti)
  2. ogni sottocubo è massimale, ossia corrisponde ad un prodotto che non può essere ulteriormente ridotto (prodotti piccoli e pochi)

- Riassumendo, per trovare una forma minimale, bisogna determinare una copertura formata da un insieme minimale di sottocubi massimali

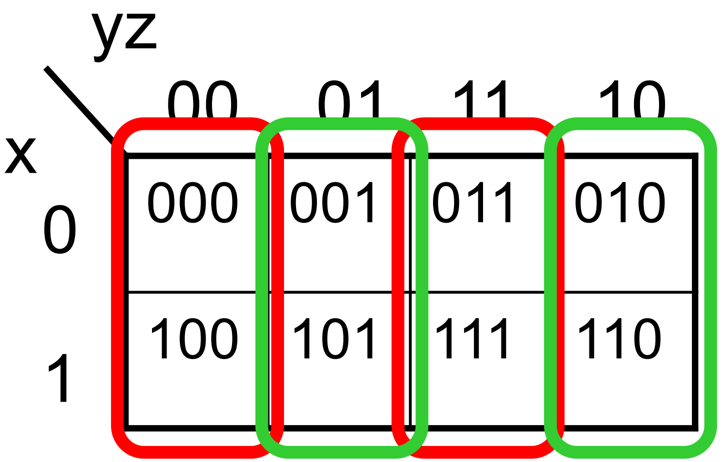
Una terminologia analoga:

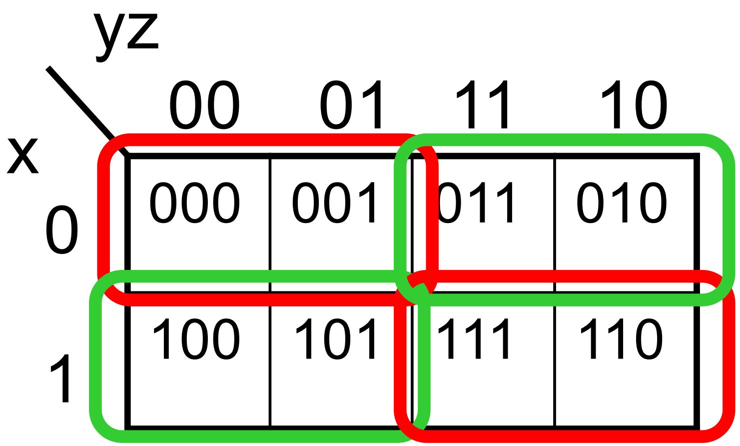
- un implicante è un prodotto che corrisponde ad un sottocubo di *1*
- un implicante è primo se corrisponde ad un sottocubo massimale
- minimizzare consiste nel trovare un insieme minimale di implicanti primi i cui sottocubi coprono la funzione

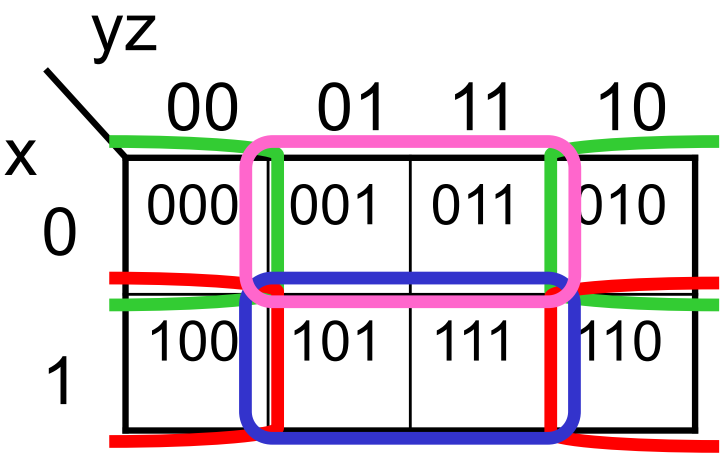
Mappe di Karnaugh a 2 variabili: sottocubi di ordine 1



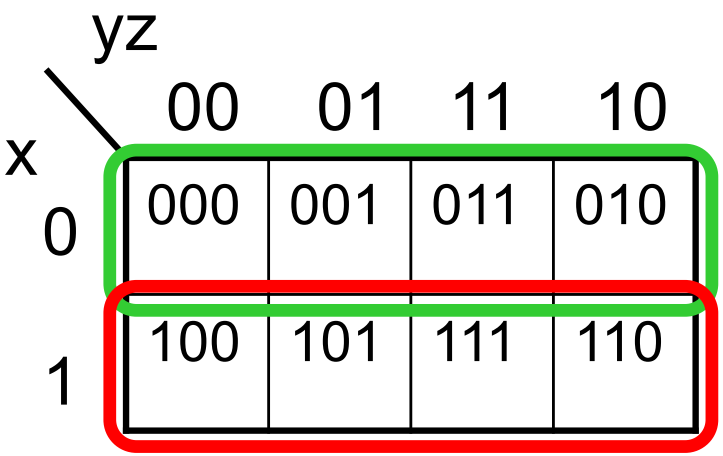
Mappe di Karnaugh a 3 variabili: sottocubi di ordine 1

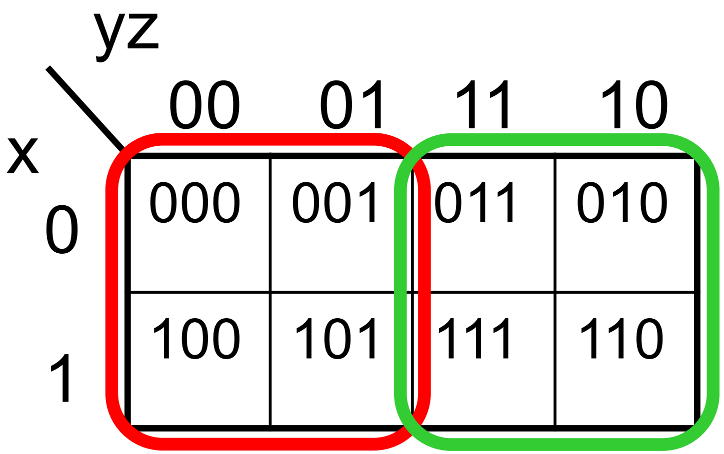


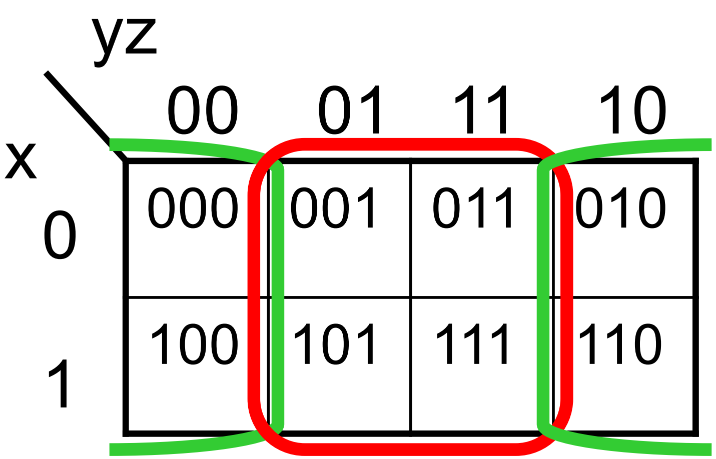




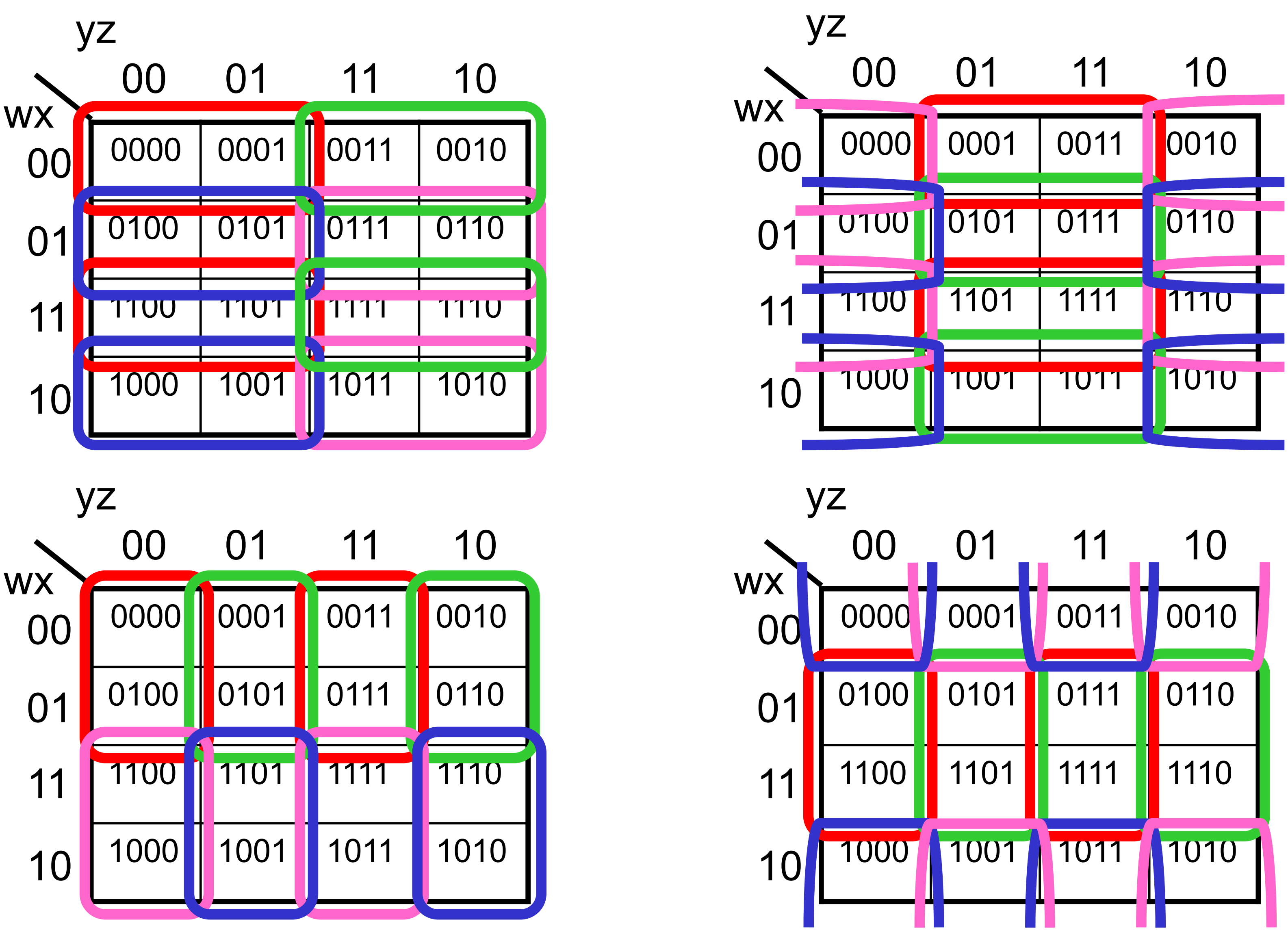
Mappe di Karnaugh a 3 variabili: sottocubi di ordine 2



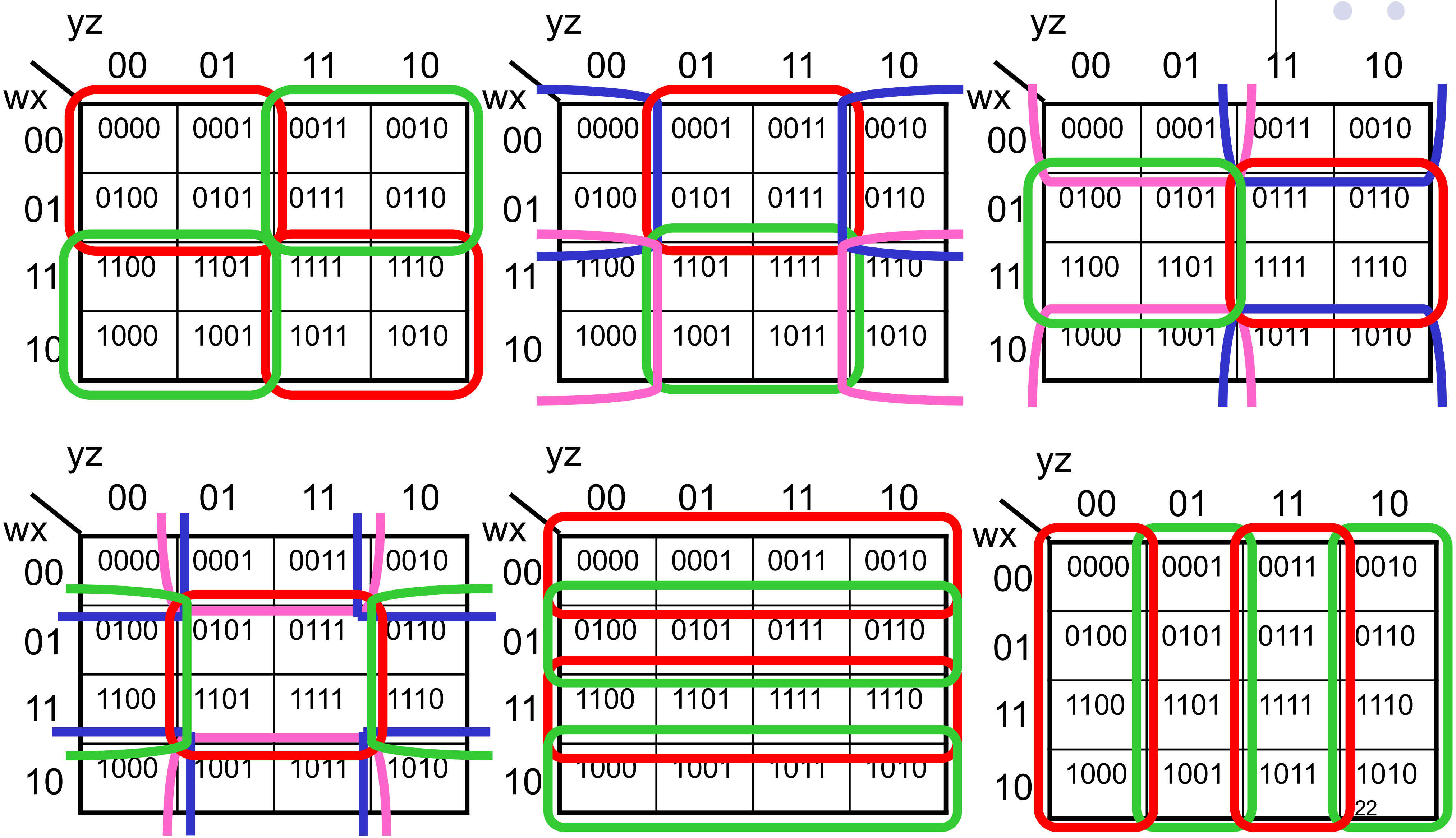




Mappe di Karnaugh a 4 variabili: sottocubi di ordine 1



Mappe di Karnaugh a 4 variabili: sottocubi di ordine 2



Mappe di Karnaugh a 4 variabili: sottocubi di ordine 3

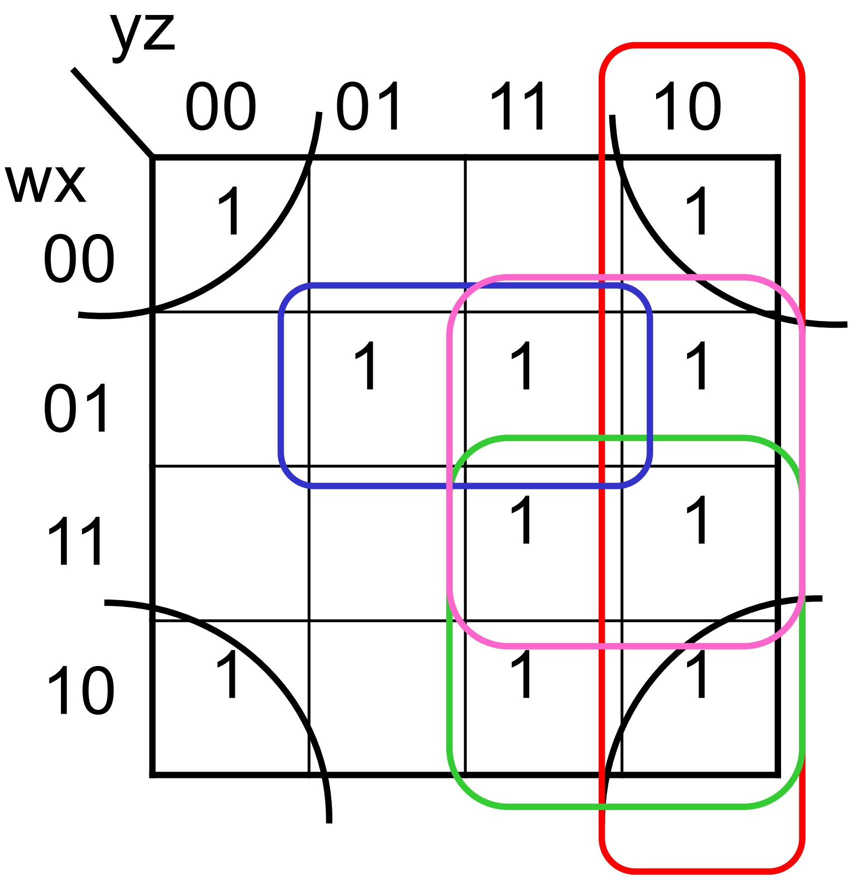
wx \ yz	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

wx \ yz	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

Es.: Copertura f(w,x,y,z)



¬wxz

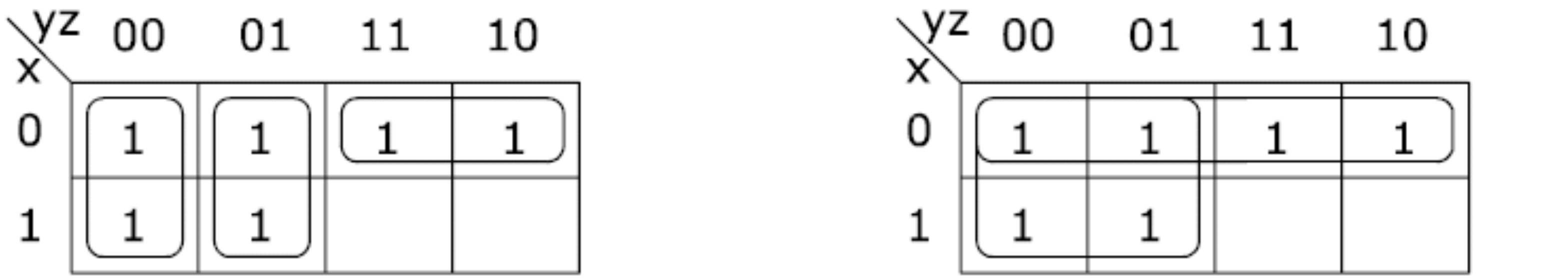
wy

y¬z

¬x¬z

~~xy~~

$f(w,x,y,z) = \neg wxz + wy + y\neg z + \neg x\neg z$



$a)\ f(x,y,z) = \overline{y}\,\overline{z} + \overline{y}\,z + \overline{x}\,y$

$b)\ f(x,y,z) = \overline{x} + \overline{y}$

Figura 3.10 Esempio di due diverse coperture di un stessa funzione. La copertura di destra, essendo formata da sottocubi più ampi, fornisce la minima espressione SP.

Si noti che: $\neg y + \neg xy = \neg y \neg y + \neg xy = \neg y + \neg x$

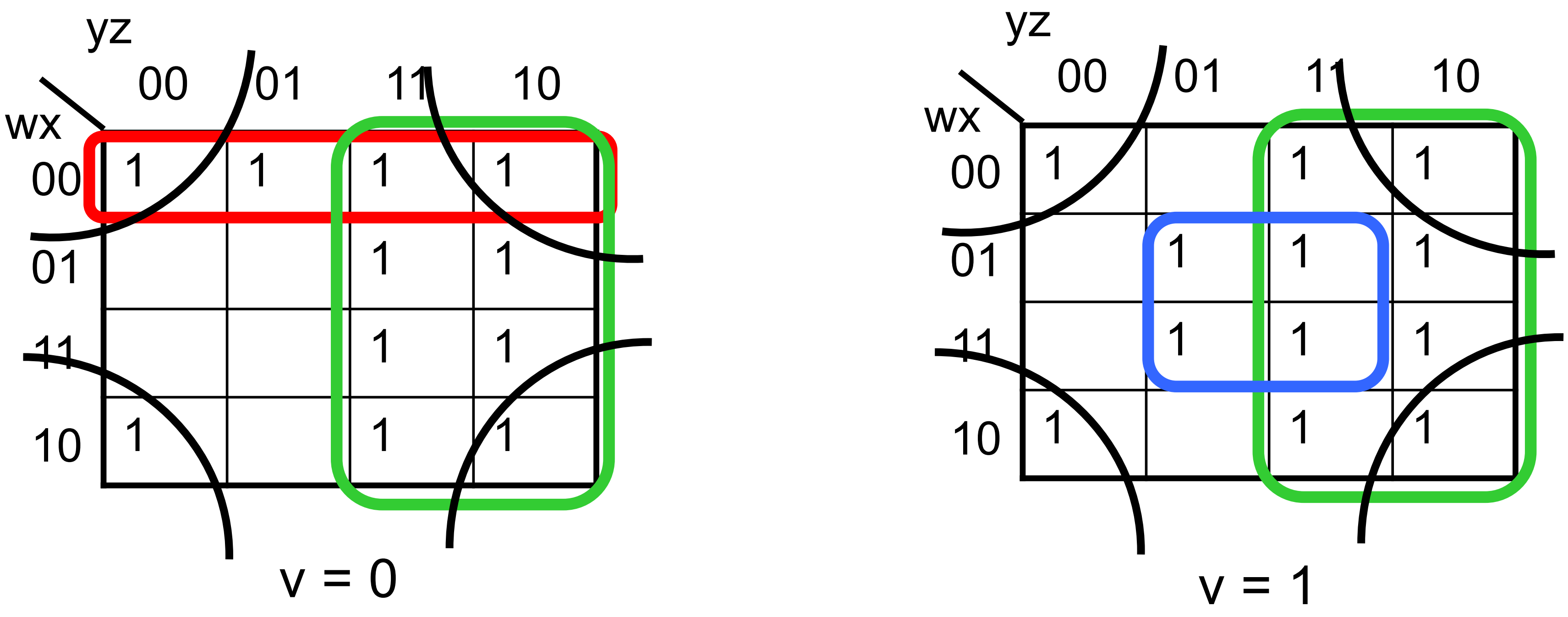
$a)\ f(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{x} + wy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}$

$b)\ f(w,x,y,z) = \overline{w}x\overline{y} + \overline{w}yz + wxy + w\overline{y}z$

Figura 3.11 Esempio di mappe di ordine 4. Sulla mappa di sinistra si noti l'implicante corrispondente alle 4 caselle poste agli angoli della mappa. Esso porta un contributo pari a $\overline{x}y$. L'espressione minima SP relativa alla mappa di destra non comprende l'implicante primo xz in quanto non essenziale.

Errata: un contributo pari a ¬x¬z

Mappe di Karnaugh a 5 variabili



$$f(v,w,x,y,z) = y + \neg x \neg z + \neg v \neg w \neg x + vxz$$

Funzioni non completamente specificate

- Spesso il valore di una funzione non è specificato per alcune configurazioni in ingresso
- Ciò accade ad esempio quando è noto a priori che tali configurazioni non possono presentarsi
- Per segnalare tale evenienza il valore della funzione viene indicato con il segno "-", che esprime una condizione di indifferenza
- Nel minimizzare la funzione il segno - può essere posto indifferentemente *0* o *1* a seconda della convenienza
- Sottocubo massimale: sottocubo di *1* e - **contenente almeno un *1*** *e* non contenuto in un sottocubo di *1* e - di dimensione (ordine) maggiore

A	B	C	D	w	x	y	z
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	-	-	-	-
1	0	1	1	-	-	-	-
1	1	0	0	-	-	-	-
1	1	0	1	-	-	-	-
1	1	1	0	-	-	-	-
1	1	1	1	-	-	-	-

Tabella 3.3 Tabella di decodifica da codice BCD a Eccesso 3. I trattini indicano condizioni di indifferenza.

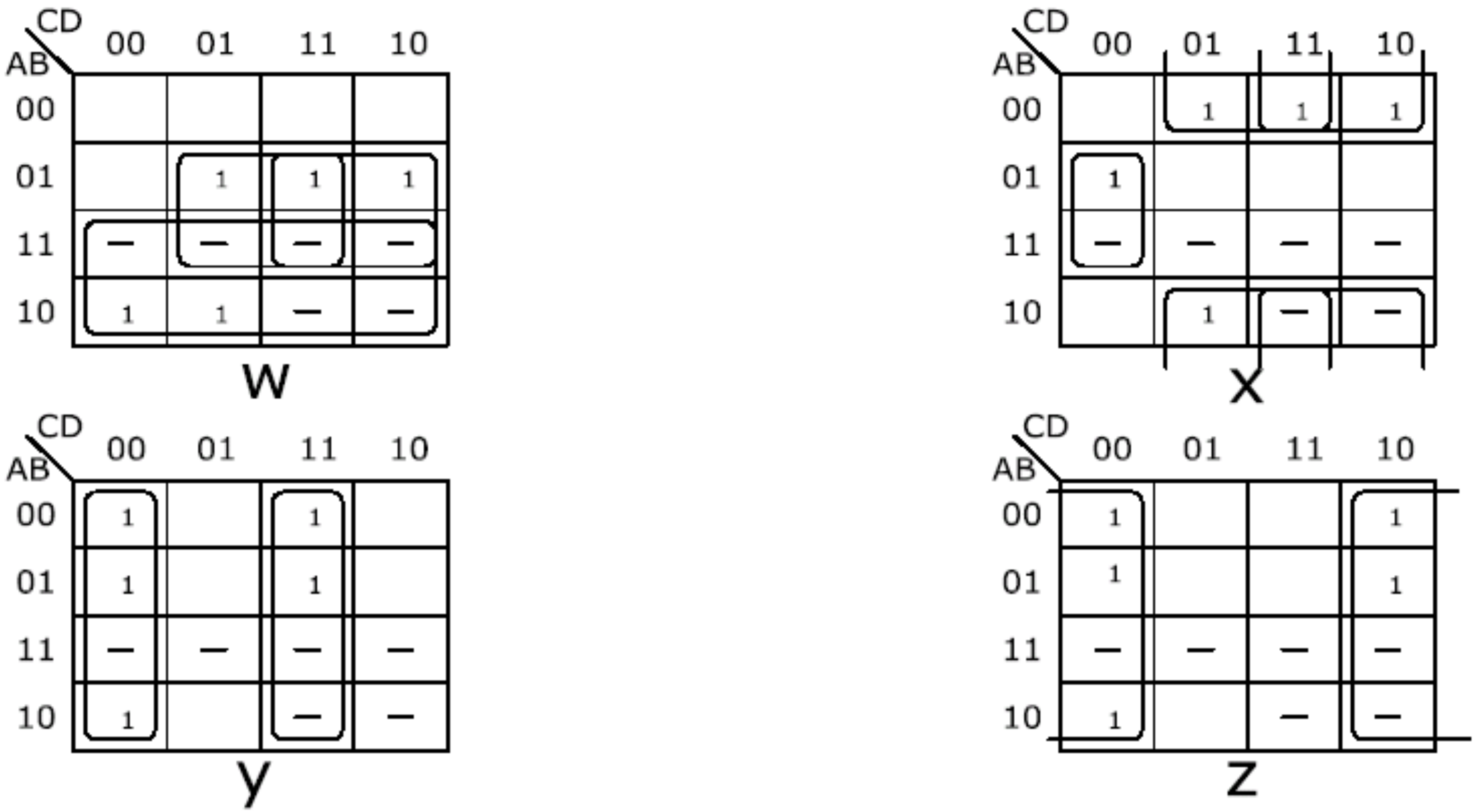


Figura 3.13 Mappe e coperture delle funzioni di uscita del decodificatore da codice BCD a Eccesso 3.