Appunti di Analisi Matematica (1)*

Docente: *Klaus Engel*

Università degli Studi dell'Aquila

http://people.disim.univaq.it/~klaus.engel

= %7E

* Note scritte in collaborazione con il prof. *Fabio Camilli*, Università "La Sapienza", Roma

CAPITOLO 0

Concetti Fondamentali

In questo capitolo introduttivo raccoglieremo alcuni concetti di matematica che servono successivamente ed inoltre stabiliremo le principale notazioni.

Insiemi

Intuitivamente un *insieme* è una raccolta di oggetti (chiamati *elementi*) distinguibili tra di loro che formano una totalità.
Per indicare un'insieme si usano generalmente lettere maiuscole $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$, per gli elementi invece lettere minuscole $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Prima di fare esempi introduciamo alcune

NOTAZIONI. • Spesso useremo i cosiddetti *quantificatori*

$$\boxed{\forall = \text{“per ogni”}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\exists = \text{“esiste”}}$$

- Per evidenziare che $A = B$ *per definizione* scriviamo $A := B$ oppure $B =: A$.
- $\Rightarrow$ indica un'*implicazione*.
- $\lightning$ indica una *contraddizione*.
- $\in$ indica il simbolo di *appartenenza*, $\notin$ indica il simbolo di *non-appartenenza*.
- $\subset$, $\subseteq$ indicano i simboli di *inclusione*.

Per definire un insieme in pratica ci sono 2 possibilità:

- elencando gli elementi tra parentesi graffe, per esempio $A := \{1, 2, 3\}$, oppure
- attraverso una proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme, per esempio $P := \{n : n \text{ è un numero primo}\}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- L'ordine degli elementi elencati non conta, per esempio $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\}$.
- Elementi ripetuti valgono una volta solo, per esempio $\{1, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Consideriamo alcuni

<u>ESEMPI</u>.

- Siano $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, $C := \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, allora $2 \in A$, $5 \notin B$, $A \subseteq C$, $A \notin C$, $A \notin A$.
- L'insieme senza alcun elemento si chiama *insieme vuoto* e si usa la notazione $\emptyset := \{\}$.
- Data un insieme A si definisce l'*insieme delle parti* $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$. Se A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.

  Per esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$ (con 3 elementi), allora $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ (con $2^3 = 8$ elementi).

Questa vista semplificata di insiemi, che comunque è sufficiente per i nostri scopi, porta facilmente a problemi come si vede dal seguente

<u>ESEMPIO</u>. *Paradosso di Russell:* Consideriamo l'insieme

$$A := \big\{X : X \text{ è un'insieme tale che } X \notin X\big\}.$$

Ora per A stesso si deve verificare $A \in A$ oppure il contrario $A \notin A$. Però

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$ ↯ poiché A per ipotesi non verifica la condizione che definisce gli elementi X di A, ma anche
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$ ↯ poiché A per ipotesi verifica la condizione che definisce gli elementi X di A.

Operazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B chiamiamo

- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ *l'unione* tra A e B;
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ *l'intersezione* tra A e B;
- $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ la *differenza* tra A e B;
- $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$ il *prodotto cartesiano* tra A e B, gli elementi (a, b) si chiamano *coppie ordinate*.

Osservazione. Se A e B sono insiemi, allora

- vale sempre $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$ (si dice che $\cup$ e $\cap$ sono operazioni *commutative*);
- in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$ e $A \times B \neq B \times A$;
- le coppie $(a, b) \in A \times B$ sono ordinate, cioè $(a, b) = (b, a)$ solo se $a = b$;
- se A ha n elementi e B ha m elementi, allora $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi;
- definiamo $A^2 := A \times A$.

Consideriamo un

Esempio. Se $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 7, 8\}$, allora

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 7, 8\}$,
- $A \cap B = \{2\}$,
- $A \setminus B = \{1, 3\} =: C \neq B \setminus A = \{7, 8\}$
- $A \times C = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ con $3 \cdot 2 = 6$ elementi.

Insiemi Numerici. Definiamo i seguenti insiemi molto importanti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{n : n \text{ è un numero naturale}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = \text{insieme dei } \textit{numeri naturali},\\
\mathbb{Z} &:= \{n : n \text{ è un numero intero}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \text{insieme dei } \textit{numeri interi},\\
\mathbb{Q} &:= \{r : r \text{ è un numero razionale}\} = \left\{\tfrac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\} = \text{insieme dei } \textit{numeri razionali},\\
\mathbb{R} &:= \{x : x \text{ è un } \textit{numero reale}\}\\
&= \left\{p, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \,|\, p \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\, \forall\, k \in \mathbb{N}\right\} = \text{insieme dei } \textit{numeri reali}.
\end{aligned}$$

<u>Esempi</u>.

- $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\to$ corso di Algebra e Geometria) è data da

$$\sqrt{2} = 1,414213562\dots.$$

In questo caso vale $p = 1$, $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 3$, $\alpha_6 = 5$,$\dots$.

- Per $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ invece vale

$$\pi = \underbrace{3}_{=p}, \underbrace{1}_{=\alpha_0}\underbrace{4}_{=\alpha_1}\underbrace{1}_{=\alpha_2}\underbrace{5}_{=\alpha_3}\underbrace{9}_{=\alpha_4}\underbrace{2}_{=\alpha_5}\underbrace{6}_{=\alpha_6}\dots$$

Proprietà dei Numeri Reali $\mathbb{R}$

(1) In $\mathbb{R}$ valgono per le operazioni *somma* "+" e *prodotto* "·" le regole dell'algebra, per esempio $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ vale

$$x + y = y + x, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Più precisamente si dice che $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ è un *campo* $\rightarrow$ corso di Algebra e Geometria.

(2) In $\mathbb{R}$ esiste un'*ordinamento totale* "<", cioè per $x, y \in \mathbb{R}$ vale una e una sola delle relazioni

$$x = y, \quad x < y \quad \text{oppure} \quad y < x.$$

(3) $\mathbb{R}$ è *completo*, cioè "la retta reale non ha buchi".

Prima di spiegare meglio la Proprietà (3) di $\mathbb{R}$ facciamo alcune

<u>Osservazioni</u>. • anziché $y < x$ scriviamo anche $x > y$, inoltre $x \le y$ (o $y \ge x$) significa $x < y$ oppure $x = y$.

- Usando l'ordinamento in $\mathbb{R}$ definiamo per $a, b \in \mathbb{R}$ i seguenti insiemi detti *intervalli*:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} = \textit{intervallo chiuso},\\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \textit{intervallo aperto},\\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\},\\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\},\\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} = \textit{intervallo chiuso},\\
[a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\} = \textit{intervallo chiuso},\\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = \textit{intervallo aperto},\\
(a,+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = \textit{intervallo aperto},\\
(-\infty,+\infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

- Valgono le seguenti regole:
  - Se $a \le b$ e $x \le y$ allora $a + x \le b + y$.
  - Se $a \le b$ e $x > 0$ allora $a \cdot x \le b \cdot x$.
  - *Attenzione:* Se $a \le b$ e $x < 0$ allora $a \cdot x \ge b \cdot x$.
  - Se $0 < a \le b$ allora $0 < \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$.
- Le Proprietà (1) e (2) valgono anche in $\mathbb{Q}$, cioè anche $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato.

Per continuare servono i concetti di

Maggioranti ed Estremo Superiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Se $s \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq s$ per ogni $a \in A$, allora s si chiama *maggiorante* di A.

(b) Se $s_0 \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A tale che $s_0 \leq s$ per ogni maggiorante s di A, allora s_0 si chiama *estremo superiore* di A.
Notazione: $\sup A := s_0 =$ *maggiorante più piccolo* di A.

(c) Se $s_0 = \sup A \in A$ allora s_0 si chiama anche *massimo* di A. Notazione: $\max A := s_0 =$ elemento più grande di A.

<u>Osservazioni</u>. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$s_0 = \sup A \iff \begin{cases} \bullet\ a \leq s_0\ \forall\, a \in A \text{ (cioè } s_0 \text{ è un maggiorante)} \\ \bullet\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A \text{ tale che } s_0 - \varepsilon < a \\ \quad \text{(cioè } s_0 - \varepsilon \text{ non è più un maggiorante),} \end{cases}$$

$$s_0 = \max A \iff \begin{cases} \bullet\ a \leq s_0\ \forall\, a \in A \\ \bullet\ s_0 \in A. \end{cases}$$

<u>Esempi</u>.

- Se $A = (0,1]$, allora $\sup A = \max A = 1$.
- Se $A = (0,1)$, allora $\sup A = 1 \notin A$ e quindi $\max A$ non esiste.

<u>Osservazione</u>.

- Non tutti gli insiemi hanno maggioranti, per esempio $A = \mathbb{N}$ non ha maggiorante poiché non esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $n \leq s$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si scrive $\sup A = +\infty$.
- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un maggiorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *superiormente limitato*.
  Per esempio $A = (0,1)$ è superiormente limitato poiché $s = 2$ è un maggiorante di A.

Dopo questo intermezzo torniamo alla Proprietà 3, cioè alla completezza di $\mathbb{R}$.

L'Assioma della Completezza. *$\mathbb{R}$ è completo, cioè ogni insieme $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore.*
In altre termini, se A ha maggioranti, allora esiste sempre il maggiorante più piccolo.

<u>Esempi</u>.

- $A := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ è superiormente limitato. Per esempio, $s = 1{,}5$ è un maggiorante poiché se x è tale che

$$x > 1{,}5 \Rightarrow x^2 > (1{,}5)^2 = 2{,}25 \Rightarrow x \neq A.$$

  Quindi $A \subset (-\infty, 1{,}5]$ e la completezza di $\mathbb{R}$ implica che esiste $s_0 = \sup A$. Ora si può verificare che $s_0^2 = 2$, cioè $s_0 = \sqrt{2}$.

- Sia $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\} \subset \mathbb{Q}$. Usando la formula del binomio di Newton (cfr. pagina 15) si può verificare che $s = 3$ è un maggiorante di A. Quindi esiste $s_0 = \sup A =: e$.

<u>Osservazioni</u>.

- $e = 2,7182818284\ldots \notin \mathbb{Q}$ viene chiamato *numero di Nepero* che insieme a π è la costante più importante della matematica.
- Il secondo esempio dimostra che in $\mathbb{Q}$ la Proprietà (3) non vale, cioè $\mathbb{Q}$ *non* è completo. In parole povere questo significa che la retta razionale ha buchi, per esempio in e, ma anche in $\sqrt{2}$ oppure in π.

Analogamente ai concetti di maggiorante ed estremo superiore si introducono i concetti di

Minoranti ed Estremo Inferiore. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Se $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq a$ per ogni $a \in A$, allora r si chiama *minorante* di A.

(b) Se $r_0 \in \mathbb{R}$ è un minorante di A tale che $r_0 \geq r$ per ogni minorante r di A, allora r_0 si chiama *estremo inferiore* di A.
Notazione: $\inf A := r_0 =$ *minorante più grande* di A.

(c) Se $r_0 = \inf A \in A$ allora r_0 si chiama anche *minimo* di A. Notazione: $\min A := r_0 =$ elemento più piccolo di A.

OSSERVAZIONI. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

$$r_0 = \inf A \iff \begin{cases} \bullet\ r_0 \leq a\ \forall\ a \in A \text{ (cioè } r_0 \text{ è un minorante),} \\ \bullet\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ a \in A \text{ tale che } a < r_0 + \varepsilon \\ \quad \text{(cioè } r_0 + \varepsilon \text{ non è più un minorante);} \end{cases}$$

$$r_0 = \min A \iff \begin{cases} \bullet\ r_0 \leq a\ \forall\ a \in A, \\ \bullet\ r_0 \in A. \end{cases}$$

ESEMPI.
- Se $A = [0, 1]$, allora $\inf A = \min A = 0$.
- Se $A = (0, 1]$, allora $\inf A = 0 \notin A$ quindi $\min A$ non esiste.

OSSERVAZIONE.
- Non tutti gli insiemi hanno minoranti, per esempio $A = \mathbb{Z}$ non ha minoranti poiché non esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $r \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. In tal caso si scrive $\inf A = -\infty$.
- Nell'ipotesi che $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ abbia un minorante (e in tal caso ne ha infiniti), allora si dice che A è *inferiormente limitato*. Per esempio $A = (0, +\infty)$ è inferiormente limitato poiché $s = -1$ è un minorante di A.
- Se A è superiormente e anche inferiormente limitato, allora si chiama *limitato*. Per esempio $A = (0, 1] \cup [3, 5)$ è limitato mentre $\mathbb{N}$ non lo è.

Funzioni

Definizione 0.1. Se A, $B \neq \emptyset$ sono due insiemi, allora una *funzione* f da A a B è una legge (spesso data in forma di una formula) che a ogni $a \in A$ associa un unico $b \in B$. In breve si scrive

$$f : A \to B, \quad f(a) = b.$$

Inoltre si chiama

- A il *dominio* di f,
- B il *codominio* di f,
- $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$ l'*immagine* di f,
- $G(f) := \big\{\big(a, f(a)\big) : a \in A\big\} \subset A \times B$ il *grafico* di f.

Esempio. Per $x \in \mathbb{R}$ definiamo il suo *modulo* (oppure *valore assoluto*) come

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per esempio $|3| = 3$, $|-4| = -(-4) = 4$. Quindi $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$ definisce una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con immagine $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Il grafico $G(f) \subset \mathbb{R}^2$ è riportato nella Figura 1.

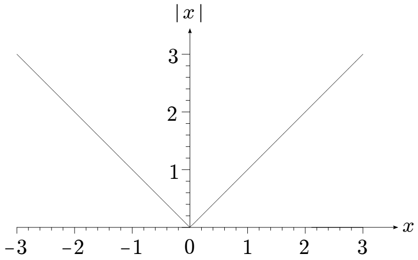

Figura 1. Il grafico del modulo.

<u>Osservazioni</u>. Per il modulo valgono le seguente relazioni importanti: Se $x, y, l \in \mathbb{R}$, allora

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|x| < l \iff -l < x < l \iff x \in (-l, l)$,
- $|-x| = |x|$ e $\big||x|\big| = |x|$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ e $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*disuguaglianza triangolare*),
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ (*disuguaglianza triangolare inversa*).

L'importanza del modulo si basa in particolare sulla seguente

<u>Osservazione</u>. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{|x - y| = \textit{distanza tra } x \textit{ e } y \textit{ sulla retta reale}}$$

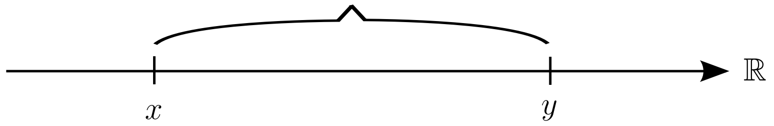

Figura 2. Modulo e distanze sulla retta reale

Quindi il modulo ci permette di misurare distanze.

Fattoriale e Coefficienti Binomiali

Definizione 0.2. Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo il suo *fattoriale*

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Per esempio $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

OSSERVAZIONI.

- $n!$ = numero di permutazioni di n oggetti distinti. Per esempio per tre oggetti a, b, c esistono $3! = 6$ permutazioni: abc, acb, bac, bca, cab, cba.
- Se $n \geq 1$ allora vale $n! = n \cdot (n-1)!$.

Definizione 0.3. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ definiamo il *coefficiente binomiale* (che si legge "n su k")

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$.

OSSERVAZIONI. Per $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$ vale

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, cioè i coefficienti binomiali sono sempre numeri naturali.
- $\binom{n}{k}$ = numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ di k elementi. Per esempio l'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$ ha $\binom{90}{6} = 622.614.630$ sottoinsiemi con 6 elementi. Quindi la probabilità di fare 6 al SuperEnalotto giocando una scheda è $\frac{1}{622.614.630} = 0.0000000016061\ldots$
- $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k}$, per esempio $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$.

<u>Osservazioni</u>. Per i coefficienti binomiali valgono le seguenti proprietà.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Le prime due regole si possono utilizzare per calcolare coefficienti binomiali con il *triangolo di Tartaglia*. La terza regola stabilisce la simmetria di questo triangolo.

$$
\begin{array}{r|ccccc}
\binom{n}{k} & k=0 & =1 & =2 & =3 & =4 \\
\hline
n=0 & 1 & & & & \\
=1 & 1 & 1 & & & \\
=2 & 1 & \boxed{2} + & \boxed{1} & & \\
 & & & \| & & \\
=3 & 1 & 3 & \boxed{3} & 1 & \\
=4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

per esempio $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$.

Formula del Binomio di Newton

Introduciamo dapprima il concetto di *sommatoria*:
Se per $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ sono dati $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ allora poniamo per la loro somma

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Per esempio $\sum_{k=2}^{5} k = 2 + 3 + 4 + 5$.

Per le sommatorie valgono le seguente regole

- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \ldots \sum_{l=m}^{n} a_l$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$.
- $r \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} r \cdot a_k$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{n} a_k$ per ogni $m \leq l < n$.
- $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$.

Se inoltre definiamo $a^0 := 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ allora vale la

<u>Proposizione</u> 0.4 (*Formula del Binomio di Newton*). *Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}}$$

Per esempio per $n = 4$ troviamo i coefficienti binomiali necessari nella 4. riga del triangolo di Tartaglia e quindi risulta:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \mathbf{1} \cdot a^0 b^4 + \mathbf{4} \cdot a^1 b^3 + \mathbf{6} \cdot a^2 b^2 + \mathbf{4} \cdot a^3 b^1 + \mathbf{1} \cdot a^4 b^0 \\ &= b^4 + 4 \cdot ab^3 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^3 b + a^4.\end{aligned}$$

Principio di Induzione

Dato un numero fisso $n_0 \in \mathbb{N}$ supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia data un'affermazione $A(n)$.

Problema. Verificare che $A(n)$ sia vera per ogni $n \geq n_0$, cioè verificare un numero *infinito* di affermazioni.

Esempio. Per $n \geq 1 =: n_0$ sia $A(n)$ l'affermazione che vale la formula

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Per esempio $A(3)$: $1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = 6$ che è vera. Abbiamo quindi dato un numero infinito di formule da verificare e ovviamente non si può procedere verificandole una per una.

Per risolvere questo problema useremo il seguente

Teorema 0.5 (*Principio di Induzione*). *Se*

- (base dell'induzione) $A(n_0)$ *è vera, e*
- (passo induttivo) *l'ipotesi* $\underbrace{A(n) \text{ vera}}_{\text{ipotesi dell'induzione}}$ *implica che anche* $A(n+1)$ *è vera,*

allora $A(n)$ *è vera per ogni* $n \geq n_0$.

Osservazione. In un certo senso il principio di induzione formalizza l'*effetto domino*: La base fa cadere il primo pezzo mentre il passo induttivo afferma che con un pezzo cade sempre anche quello successivo. Quindi se facciamo cadere il primo pezzo alla fine cadranno tutti i pezzi.

<u>ESEMPIO</u>. Dimostreremo per induzione che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 1$.

- *Base:* Dobbiamo verificare $A(1)$, cioè che vale $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ che è vero.

- *Passo induttivo:* Sotto l'ipotesi che $A(n)$ sia vera *per un certo* $n \geq n_0$ (non per tutti n, quello infatti è da verificare!) dobbiamo verificare che anche l'affermazione successiva $A(n+1)$ vale. Allora per ipotesi vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

quindi risulta

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{(n+1)} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\end{aligned}$$

che è esattamente $A(n+1)$, cioè la formula che si ottiene sostituendo in $A(n)$ il numero n con $(n+1)$.

Consideriamo altre due esempi.

<u>Esempio</u> (*Disuguaglianza di Bernoulli*). Se $x \geq -1$, allora

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}}$$

Dimostrazione. Per induzione.

- *Base:* Per $n = 0$ l'affermazione diventa $(1+x)^0 = 1 + 0 \cdot x$ che è vera.

- *Passo induttivo:* Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(*) \qquad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Sotto questo ipotesi dobbiamo verificare la disuguaglianza che si ottiene sostituendo n con $n+1$. Perciò moltiplichiamo $(*)$ con $1 + x \geq 0$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n &\geq (1+x) \cdot (1 + n \cdot x) \\ &= 1 + (n+1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x \end{aligned}$$

che era da verificare.

$\square$

<u>Esempio</u> (*Progressione Geometrica*). Sia $1 \neq q \in \mathbb{R}$, allora

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}}$$

Dimostrazione. Per induzione.

- *Base:* Per $n = 0$ l'affermazione diventa $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$ che è vera.
- *Passo induttivo:* Supponiamo che per un certo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(\#) \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Sotto questo ipotesi dobbiamo verificare la formula che si ottiene sostituendo n con $n+1$, cioè che vale anche

$$\sum_{k=0}^{(n+1)} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}.$$

Perciò sommiamo su entrambi i lati dell'equazione (#) la quantità q^{n+1} e otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

che era da verificare. □

ESERCIZI.
- Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il numero $n + n^2$ è pari.
- Verificare che per un insieme A con $n \in \mathbb{N}$ elementi l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti ha 2^n elementi.

Concludiamo con la seguente domanda.

Dov'è l'errore? *Tutti i cavalli sono bianchi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A(n)$ l'affermazione "*tutti i cavalli in un insieme di n cavalli hanno lo stesso colore*".
- *Base:* Per $n = 1$ l'affermazione è ovviamente vera.
- *Passo induttivo:* Supponendo che in un insieme di n cavalli tutti hanno sempre lo stesso colore dobbiamo verificare che anche in un insieme di $n + 1$ cavalli tutti hanno lo stesso colore. Allora togliendo dall'insieme di $n + 1$ cavalli un cavallo rimangono n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Rimettiamo il cavallo tolto dall'insieme e togliamo un'altro. Di nuovo rimane un insieme con n cavalli che per ipotesi hanno lo stesso colore. Quindi per transitività tutti i $n + 1$ cavalli hanno lo stesso colore.

Inoltre ieri ho visto un cavallo bianco in televisione e quindi tutti cavalli sono bianchi. $\square$