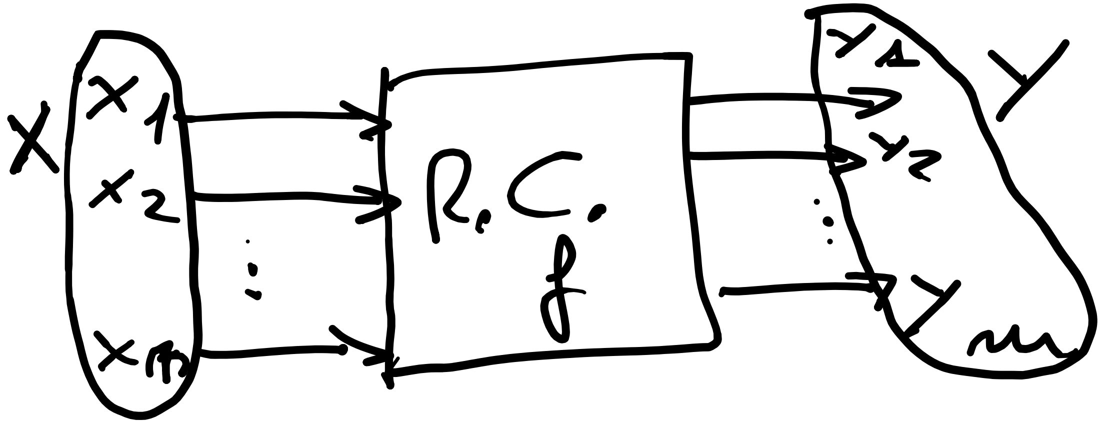
Reti logiche

- Reti combinatorie
  - algebra booleana
  - porte logiche
  - forme canoniche
  - minimizzazione di funzioni
  - operatori NAND, NOR, XOR e NXOR
  - porte a tre stati
  - moduli combinatori:
    - codificatori, decodificatori, multiplexer e demultiplexer
  - realizzazione di funzioni mediante multiplexer
  - circuito sommatore
  - ALU semplificata
- Reti sequenziali

RETI LOGICHE → RETI COMBINATORIE
RETI LOGICHE → RETI SEQUENZIALI

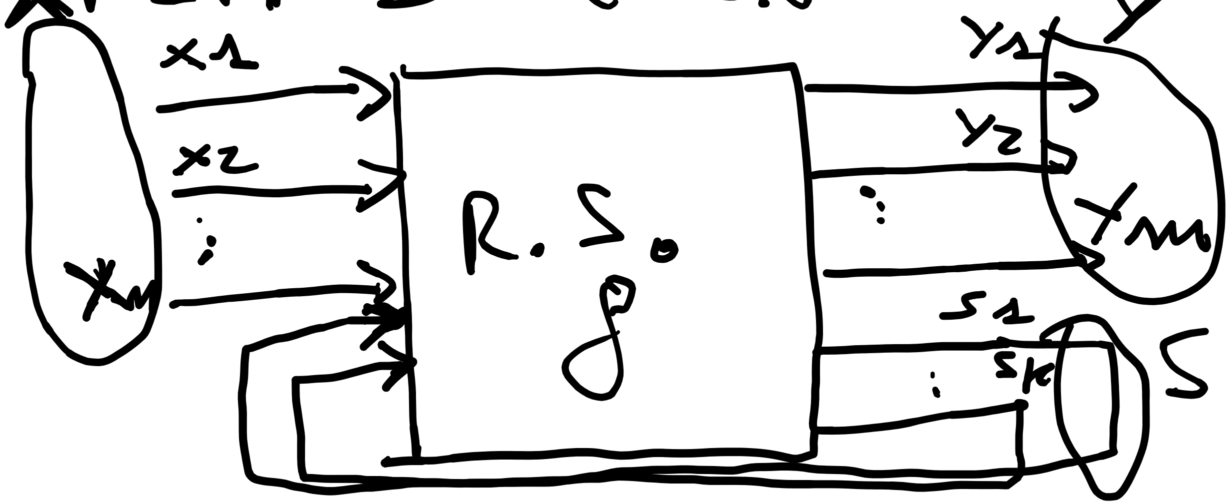
RETI COMBINATORIE



$$Y = f(X)$$

CALCOLI IMMEDIATI

RETI SEQUENZIALI



$$Y = f(X, S)$$

CALCOLI ITERATIVI

Prodotto logico		
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Somma logica		
A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Comple-mentazione	
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Tabella 3.1 Tabelle di verità delle tre operazioni fondamentali dell'algebra.

- Una funzione logica può essere espressa in forma algebrica o in forma tabellare:

ESEMPIO

$f(x,y,z)=x+yz$

x	*y*	*z*	*f*
0	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*1*	*0*
0	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*
1	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*1*	*1*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,x_2\,x_3$$

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabella 3.2 Esempio di tabella di verità la funzione di tre variabili $y = f(x_1, x_2, x_3)$. Sulle tabelle di verità le configurazioni delle variabili sono riportate ordinatamente per riga. Nel caso specifico, si hanno 8 righe, numerate da 0 a $2^3 - 1 = 7$.

Proprietà dell'algebra

1. Idempotenza: $x+x=x,\ xx=x$
   Dim. (per induzione perfetta): $1+1=1, 0+0=0, 1\cdot 1=1, 0\cdot 0=0$

2. Distributiva: $x(y+z)=xy+xz,\ x+yz=(x+y)(x+z)$

3. Associativa: $x+(y+z)=(x+y)+z, x(yz)=(xy)z$
   NB: grazie a questa proprietà le espressioni xyz e x+y+z non risultano ambigue

4. Commutativa: $x+y=y+x,\ xy=yx$

5. Per ogni variabile booleana x vale
   - $x+0=x,\ x\cdot 1=x$
   - $x+1=1,\ x\cdot 0=0$
   - $x\cdot\neg x=0,\ x+\neg x=1$
   - $\neg\neg x=x$ (doppia negazione)

6. Assorbimento: $x+xy=x,\ x(x+y)=x$
   Dim. $x+xy=x\cdot 1+xy=x(1+y)=x\cdot 1=x$ $\quad x(x+y)=xx+xy=x+xy$

7. Teorema di De Morgan: $\neg(x+y)=\neg x\cdot\neg y,\ \neg(x\cdot y)=\neg x+\neg y$
   - vale anche nel caso generale di n variabili

8. Principio di dualità: qualsiasi proprietà continua a valere se si scambiano tra loro le operazioni $\cdot$ e $+$ e gli 1 con gli 0

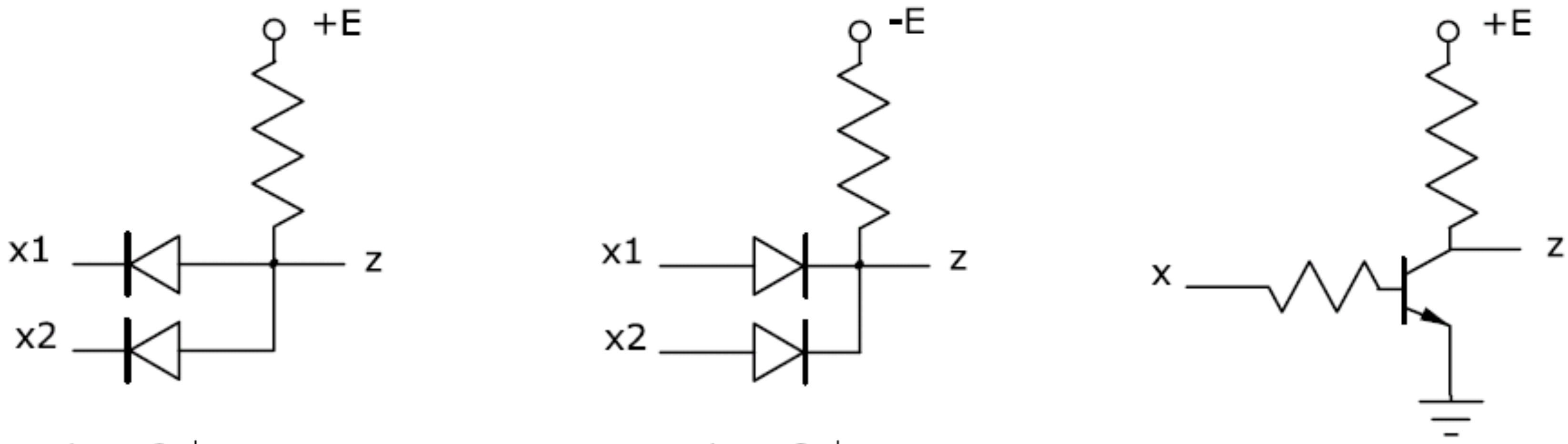
Esercizio

- Dimostrare tutte le proprietà finora elencate facendo ricorso al metodo dell'induzione perfetta o gli altri metodi usati
- Verificare come per ogni coppia valga il principio di dualità
- Stabilire quali proprietà non valgono nell'aritmetica classica

A livello circuitale …

- Vediamo ora come realizzare a livello circuitale le operazioni dell'algebra booleana
- Indichiamo con *A* e *B* due valori di tensione rispettivamente alto e basso compresi tra +*E* e –*E* della tensione di alimentazione
- Possiamo associare *A* al valore *1* e *B* al valore *0* (logica positiva), o viceversa (logica negativa)
- Vediamo brevemente i circuiti corrispondenti alla logica positiva

Le porte logiche sono realizzate con un’opportuna combinazione di dispositivi elettronici come diodi e transistor…



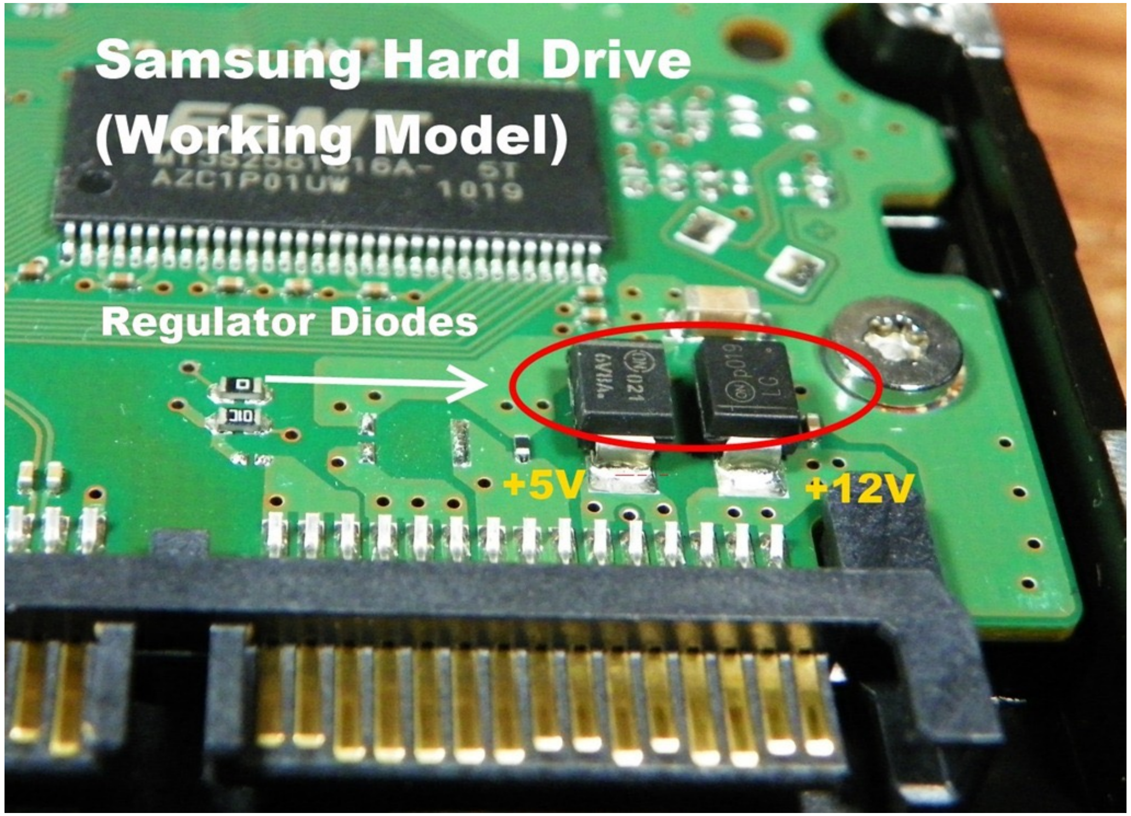
x1	x2	z
B	B	B
B	A	B
A	B	B
A	A	A

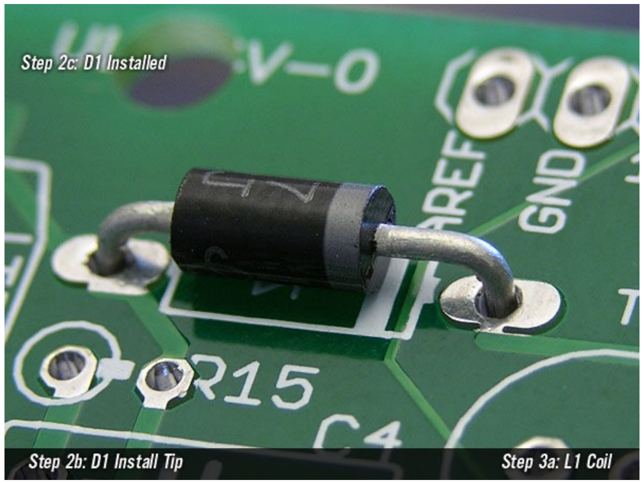
x1	x2	z
B	B	B
B	A	A
A	B	A
A	A	A

x	z
B	A
A	B

Figura 3.4 Realizzazioni elettroniche di circuiti logici elementari e relative relazioni di ingresso uscita.

Esempi di diodi





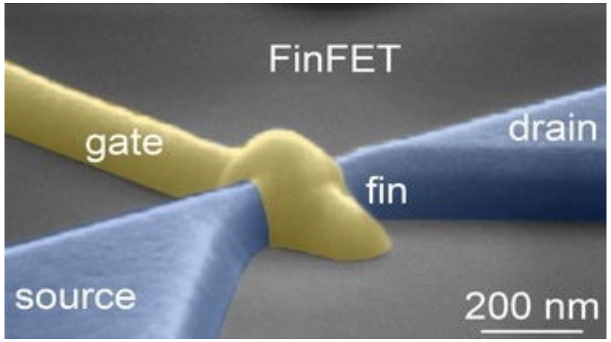
Esempi di transistor

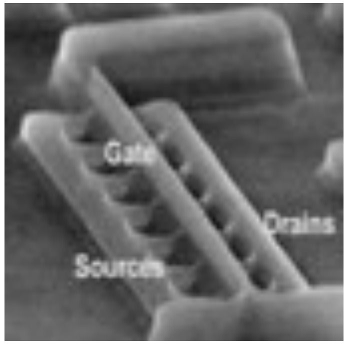
… Legge di Moore (famiglia Intel)

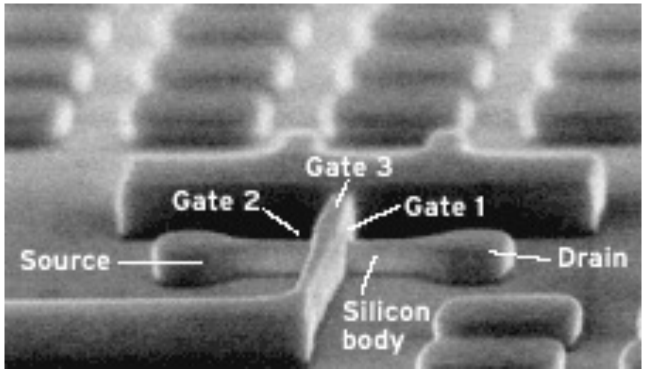
Data di introduzione	Nome del chip	N. di transistori (/1000)	Tecnologia (μm) 10^{-6}	Frequenza (MHz)
Novembre 1971	4004	2,3	10	0,108
Aprile 1972	8008	3,5	10	0,500
Aprile 1974	8080	4,5	6	2
Giugno 1978	8086	29	3	5
Febbraio 1982	80286	134	1,5	8
Ottobre 1985	80386	275	1,5	16
Aprile 1989	80486	1.200	1	25
Marzo 1993	Pentium	3.100	0,8	60
Novembre 1995	PentiumPro	5.500	0,6	150
Maggio 1997	Pentium II	7.500	0,35	233
Febbraio 1999	Pentium III	9.500	0,25	450
Novembre 2000	Pentium 4	42.000	0,18	1400
Marzo 2003	Pentium M	77.000	0,13	1300
Gennaio 2006	Core 2	291.000	0,065	1200
Gennaio 2008	Core 2 Quad	820.000	0,045	2500

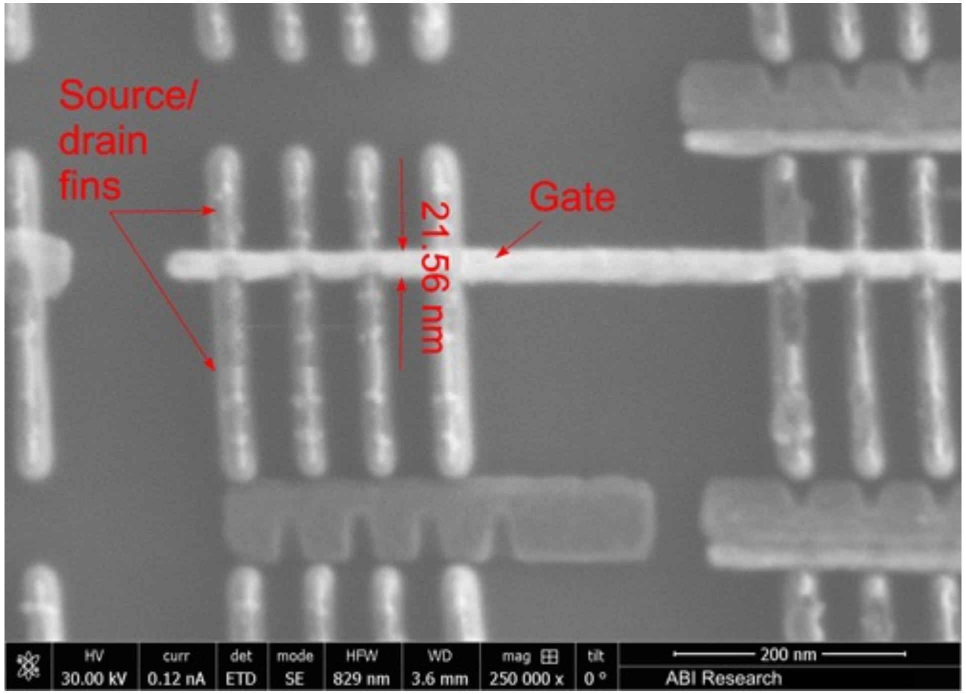
Tabella 1.2 - Aumento del numero di transistori delle CPU Intel. I dati riportati si riferiscono al modello di introduzione. Per i modelli introdotti in più versioni, la tabella riporta i dati relativi alla versione di più bassa capacità. Per esempio, il PentiumPro è stato introdotto in ben quattro versioni, di cui la meno potente (quella riportata) era tecnologia a $0,6\,\mu m$ e frequenza pari a 150 MHz, mentre la più avanzata era in tecnologia a $0,35\mu m$ e frequenza pari a 200 MHz.

Transistor nei processori

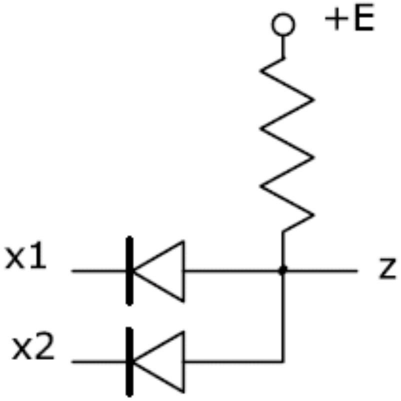




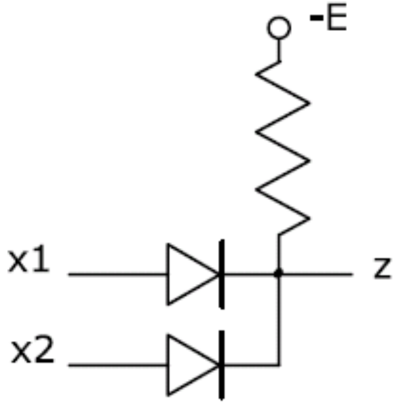




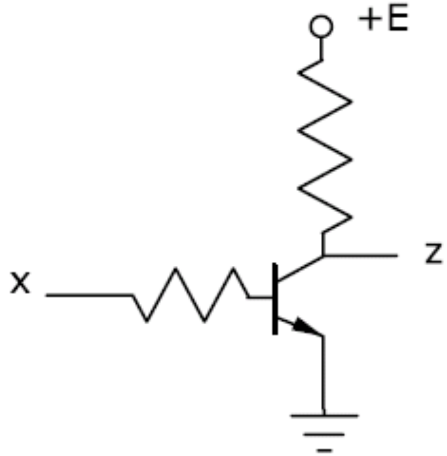
Qualche breve cenno sul loro funzionamento



x1	x2	z
B	B	B
B	A	B
A	B	B
A	A	A



x1	x2	z
B	B	B
B	A	A
A	B	A
A	A	A



x	z
B	A
A	B

Figura 3.4 Realizzazioni elettroniche di circuiti logici elementari e relative relazioni di ingresso uscita.

Sostituzione A = 1, B = 0:

x1	x2	z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x1	x2	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	z
0	1
1	0

Sostituzione A = 0, B = 1:

x1	x2	z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x1	x2	z
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	z
1	0
0	1

Figura 3.5 Tabelle di verità per le funzioni di ingresso uscita di Figura 3.4.

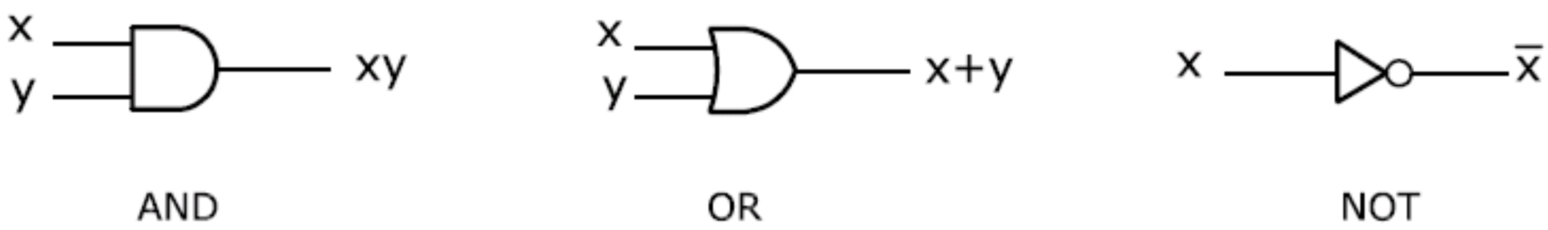
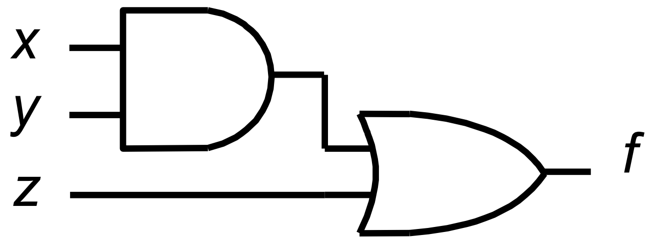


Figura 3.6 Simboli standard per le porte AND, OR e NOT.

- Grazie alle porte logiche, è possibile rappresentare ogni funzione mediante circuiti logici nel seguente modo

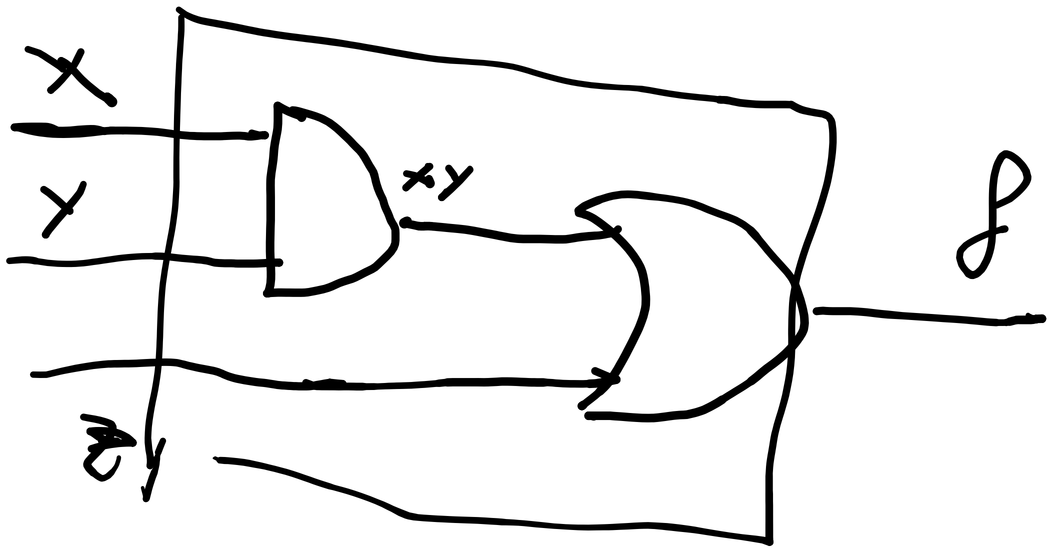
1. si sostituiscono gli operatori con le porte corrispondenti
2. si prendono le variabili, costanti ed espressioni come ingressi e uscite nelle porte

- Esempio: *f(x,y,z)=xy+z* corrisponde al seguente circuito



$f = xy + z$

rete combinatoria
(rappresentazione grafica)



I forma canonica: somma di prodotti

- Le così dette forme canoniche permettono il passaggio sistematico (in modo meccanico e deterministico) da una funzione booleana data in forma tabellare ad una sua rappresentazione come espressione booleana (rete a due livelli)

- Data una funzione di *n* variabili descritta tramite una tabella di verità, è sempre possibile ottenere un'espressione detta prima forma canonica

- Tale forma è costituita dalla somma di un numero di termini pari al numero di righe nella tabella dove la funzione ha valore 1

- Ogni termine corrisponde ad una riga ed è costituito dal prodotto di tutte le *n* variabili, ognuna delle quali compare in modo diretto se nella riga è pari ad *1,* in modo negato altrimenti

- Tali termini sono chiamati prodotti fondamentali o *mintermini*, e corrispondono a funzioni che valgono *1* solo nella riga corrispondente

- La prima forma canonica ottenuta è detta somma di prodotti fondamentali o mintermini

Esempio

- $f(x,y,z)=x+yz$

mintermini	x	y	z	f	
$m_0=\neg x \neg y \neg z$	0	0	0	0	
$m_1=\neg x \neg y\ z$	0	0	1	0	
$m_2=\neg x\ y \neg z$	0	1	0	0	
$m_3=\neg x\ y\ z$	0	1	1	1	$\rightarrow m_3$
$m_4=\ x \neg y \neg z$	1	0	0	1	$\rightarrow m_4$
$m_5=\ x \neg y\ z$	1	0	1	1	$\rightarrow m_5$
$m_6=\ x\ y \neg z$	1	1	0	1	$\rightarrow m_6$
$m_7=\ x\ y\ z$	1	1	1	1	$\rightarrow m_7$

$$\longrightarrow f(x,y,z) = m_3+m_4+m_5+m_6+m_7 =$$
$$= \neg x\ y\ z + x \neg y \neg z + x \neg y\ z + x\ y \neg z + x\ y\ z$$

- Un modo sintetico per esprimere tale funzione è

$$f(x,y,z)=\sum\nolimits_3(3,4,5,6,7)$$

- Per ottenere la stessa forma canonica a partire da un'espressione è possibile usare il seguente metodo:

  1. si trasforma la formula in somma di prodotti (tramite la proprietà distributiva)
  2. si moltiplica ogni prodotto per il termine $(x+\neg x)$ per ogni variabile mancante x
  3. si applica la proprietà distributiva e di idempotenza

- Esempio:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x+yz=x(y+\neg y)(z+\neg z)+(x+\neg x)\,yz= \\
&=(xy+x\neg y)\,(z+\neg z)+xyz+\neg xyz= \\
&=(xy+x\neg y)z+(xy+x\neg y)\neg z+xyz+\neg xyz= \\
&=xyz+xy\neg z+x\neg yz+x\neg y\neg z+xyz+\neg xyz= \\
&=xyz+xy\neg z+x\neg yz+x\neg y\neg z+\neg xyz
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\underline{x+\bar{x}=1}}$$

POS $(x+y)(z+w) =$

SOP $= xz + xw + yz + yw$

$$f(x,y,z) = x + yz =$$

$$= x\cdot 1 + yz\cdot 1 =$$

$$= x(y+\bar{y})(z+\bar{z}) + (x+\bar{x})yz =$$

$m_7 \quad m_6 \quad m_5 \quad m_4$

$$= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} +$$

$$+ \cancel{xyz} + \underbrace{\bar{x}yz}_{m_3} = \sum_3 (3,4,5,6,7)$$

$$\boxed{x+x=x}$$

$$f(x,y,z) = x + yz =$$

$$= \underset{m_4}{\overset{1\,0\,0}{x\bar{y}\bar{z}}} + \underset{m_5}{\overset{1\,0\,1}{x\bar{y}z}} + \underset{m_6}{\overset{1\,1\,0}{xy\bar{z}}} + \underset{m_7}{\overset{1\,1\,1}{xyz}} +$$

$$+ \underset{m_3}{\overset{0\,1\,1}{\bar{x}yz}} + x\cancel{yz}$$

SoP canonica

II forma canonica: prodotto di somme

- Data una funzione di *n* variabili descritta tramite una tabella di verità, è sempre possibile ottenere un'espressione detta seconda forma canonica
- Tale forma è costituita dal prodotto di un numero di termini pari al numero di righe nella tabella dove la funzione ha valore 0
- Ogni termine corrisponde ad una riga ed è costituito dalla somma di tutte le *n* variabili, ognuna delle quali compare in modo diretto se nella riga è pari ad *0,* in modo negato altrimenti
- Tali termini sono chiamati somme fondamentali o *maxtermini*, e corrispondono a funzioni che valgono *0* solo nella riga corrispondente
- La seconda forma canonica ottenuta è detta prodotto di somme fondamentali o maxtermini

Esempio

- $f(x,y,z)=x+yz$

maxtermini

	x	y	z	f		
$M_0 = x+y+z$	0	0	0	0	→	M_0
$M_1 = x+y+\neg z$	0	0	1	0	→	M_1
$M_2 = x+\neg y+z$	0	1	0	0	→	M_2
$M_3 = x+\neg y+\neg z$	0	1	1	1		
$M_4 = \neg x+y+z$	1	0	0	1		
$M_5 = \neg x+y+\neg z$	1	0	1	1		
$M_6 = \neg x+\neg y+z$	1	1	0	1		
$M_7 = \neg x+\neg y+\neg z$	1	1	1	1		

→ $f(x,y,z) = M_0 M_1 M_2 =$

$= (x+y+z)(x+y+\neg z)(x+\neg y+z)$

- Un modo sintetico per esprimere tale funzione è

$f(x,y,z)= \prod_3(0,1,2)$

- Per ottenere la stessa forma canonica a partire da un'espressione è possibile usare il seguente metodo:

  1. si trasforma la formula in prodotti di somme (tramite la proprietà distributiva)
  2. si aggiunge ad ogni addendo il termine $(x \cdot \neg x)$ per ogni variabile mancante x
  3. si applica la proprietà distributiva e di idempotenza

- Esempio:

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x+yz=(x+y)(x+z)=(x+y+(z\cdot\neg z))(x+(y\cdot\neg y)+z)= \\
&=(x+y+z)(x+y+\neg z)(x+y+z)(x+\neg y+z)= \\
&=(x+y+z)(x+y+\neg z)(x+\neg y+z)
\end{aligned}
$$

$f(x,y,z) = x + yz =$

passare alla forma PoS canonica

$= (x+y)(x+z) =$ (SoP)

$= (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)$

$\quad\;\; 0\;0\;0 \qquad\quad 0\;0\;1 \qquad\quad 0\;1\;0$

$= \underline{\prod_3 (0,1,2)} = \underline{\sum_3 (3,4,5,6,7)}$

$$f(x,y,z) = x + yz = \quad (\text{Sop non canonica})$$

$$= \overset{1\,0\,0}{x\bar{y}\bar{z}}_{4} + x\bar{y}z_{5} + xy\bar{z}_{6} + xyz_{7} + \bar{x}yz_{3} =$$

$$= \sum\nolimits_3 (3,4,5,6,7) =$$

$$= \prod\nolimits_3 (0,1,2) = \overset{0\,0\,0}{(x+y+z)}(x+y+\bar{z}) \cdot \overset{0\,1\,0}{(x+\bar{y}+z)}$$

Proprietà forme canoniche

- E' possibile andare da una forma canonica all'altra in modo diretto a partire dalla notazione concisa

- Esempio: $f(x,y,z)=\sum_3(3,4,5,6,7)=\prod_3(0,1,2)$

indici delle righe che non compaiono nella sommatoria, compaiono nella produttoria e viceversa

- Vediamo come ottenere l'asserto applicando il teorema di De Morgan:

$$\neg f(x,y,z) = m_0+m_1+m_2=\neg x\neg y\neg z+\neg x\neg yz+\neg xy\neg z$$

le righe a 0 diventano a 1 e viceversa

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \neg\neg f(x,y,z)=\neg(m_0+m_1+m_2)= \\ &=\neg(\neg x\neg y\neg z+\neg x\neg yz+\neg xy\neg z)= \\ &=\neg(\neg x\neg y\neg z)\cdot\neg(\neg x\neg yz)\cdot\neg(\neg xy\neg z)= \\ &=(x+y+z)\cdot(x+y+\neg z)\cdot(x+\neg y+z)= M_0\cdot M_1\cdot M_2 \end{aligned}$$

$f(x,y,z)= m_3+m_4+m_5+m_6+m_7 = (\neg xyz)+(x\neg y\neg z)+(x\neg yz)+(xy\neg z)+(xyz)$

Forme SP e PS

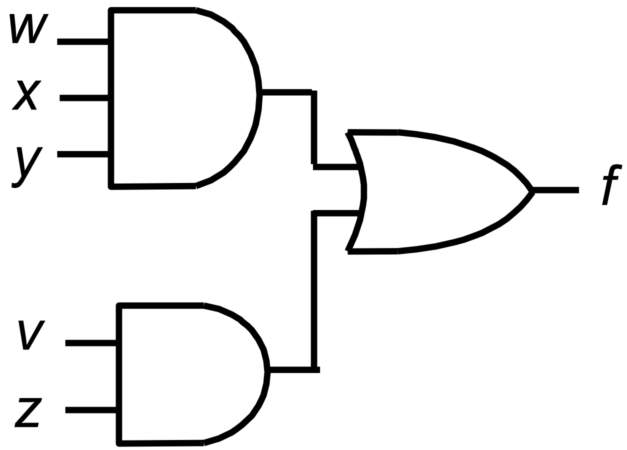
- Un'espressione è in forma SP se è costituita dalla somma di prodotti (complementi a parte)
- Una forma canonica SP è un caso particolare di forma SP
- Esempio: wx+yz, ¬*wx+y¬z,…*
- Ad una forma SP corrisponde naturalmente un circuito a due livelli, in cui il livello di ingresso è dato da tutte porte AND e quello di uscita da una porta OR

- Un'espressione è in forma PS se è costituita dal prodotto di somme e (complementi a parte)
- Una forma canonica PS è un caso particolare di forma PS
- Esempio: x(¬y+z), (w+¬*x)(¬y+¬z),…*
- Ad una forma PS corrisponde naturalmente un circuito a due livelli, in cui il livello di ingresso è dato da tutte porte OR e quello di uscita da una porta AND

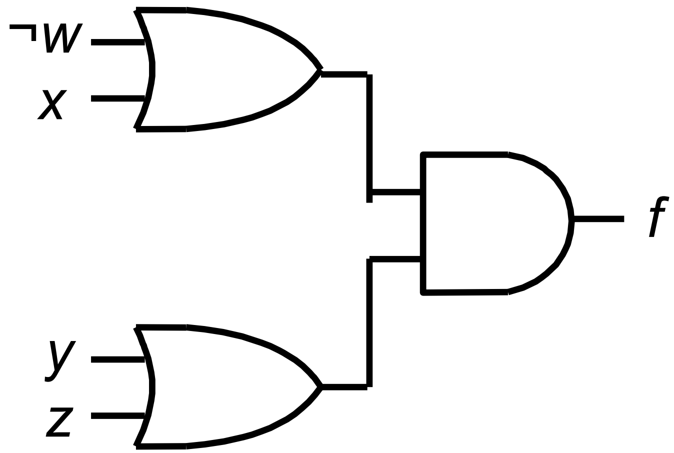
- NB: la strutturazione a livelli non tiene conto delle porte NOT, in quanto solitamente nei circuiti tutti gli ingressi sono disponibili sia in forma diretta che complementata

Esempi

$f(w,x,y,v,z)=wxy+vz$



$f(w,x,y,z)= (\neg w+x)(y+z)$



1) $xyz + \bar{x}\bar{y}$

forma canonica

SoP canonica: $xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

$$= \sum_3 (0, 1, 7)$$

$$= \prod_3 (2, 3, 4, 5, 6)$$

$$= (x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot \ldots\ldots$$

2) $A(\overline{B} + \overline{B}C) =$

forma canonica

PoS canonica

$$= (A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C)$$

$$(\overline{B}+\overline{B})(\overline{B}+C) =$$

$$= (A+\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+B+\overline{C})(A+B+C)$$

$$(\overline{B}+\overline{A}+\overline{C})(\overline{B}+ \text{- - - - -})$$

$$(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+C)\dots$$

2) $A(\overline{B} + \overline{B}C) =$

forma canonica

Sop

$= A\overline{B} + A\overline{B}C =$

$= A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$

$= \sum_3 (4,5) = \prod_3 (0,1,2,3,6,7)$

3) $(x+\bar{y})(x+y) = f(x,y,z)$

passa dalla PoS alla SoP

PoS canonica

$$\overset{2}{(x+\bar{y}+z)}\,\overset{3}{(x+\bar{y}+\bar{z})}\,\overset{1}{(x+y+\bar{z})}\cdot\underset{0}{(x+y+z)} = \prod_3(0,1,2,3) =$$

$$= \sum_3(4,5,6,7) = x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$