Richiami di algebra lineare e geometria di $\mathbb{R}^n$

- combinazione lineare, conica e convessa
- spazi lineari
- insiemi convessi, funzioni convesse

rif. BT 1.5

Combinazione lineare

Definizione

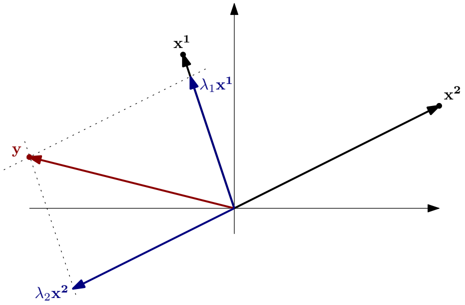
Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \frac{5}{7}, \lambda_2 = -\frac{4}{7}$



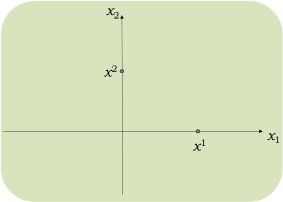
Involucro lineare

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice *involucro lineare* di S o *sottospazio generato da S* l'insieme $lin(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S

Esempi

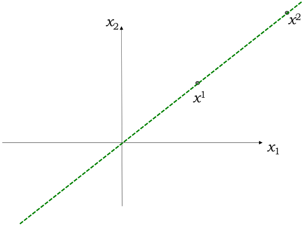
$$S = \{\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$



$$\mathbf{y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow lin(S) = \mathbb{R}^2$

$$S = \{\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$



$$\mathbf{y} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow lin(S)$ retta per $(0,0), \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$

Indipendenza lineare

Definizione

Un insieme $S = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ si dice *linearmente indipendente* se non esistono k numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}_n$

Un insieme $S = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k\}$ di punti di $\mathbb{R}^n$ non linearmente indipendente si dice *dipendente*

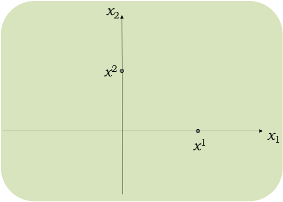
Proprietà

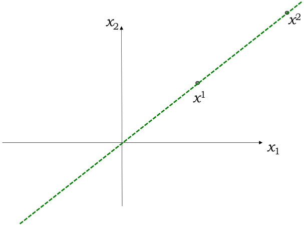
- Se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente, ogni suo sottoinsieme è linearmente indipendente (cioè, S non contiene alcun sottoinsieme linearmente dipendente)
- L'insieme $\{\mathbf{0}_n\}$ è linearmente dipendente. Quindi, il vettore $\mathbf{0}_n$ non appartiene ad alcun insieme linearmente indipendente

Esempi (continua)

$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

$$S = \{x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$





$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
S lin. indipendente

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff \lambda_1 = -2\lambda_2$
S lin. dipendente

Spazi lineari

Definizione

Un insieme $L \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno *spazio lineare* (o *sottospazio* di $\mathbb{R}^n$) se qualsiasi combinazione lineare di ogni sottoinsieme finito di elementi di L appartiene a L, cioè $lin(L) = L$

Proprietà Ogni spazio lineare contiene il vettore nullo.

Basi

Definizione
Dato un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce base di L una collezione B di vettori linearmente indipendenti tale che $L = lin(B)$

Proprietà Tutte le basi di un dato sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi

Definizione
Il numero di elementi di una base di un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *dimensione* del sottospazio, indicato con $dim(L)$

Nota

- $dim(\mathbb{R}^n) = n$
- i sottospazi 1-dimensionali sono rette per l'origine, 2-dimensionali piani per l'origine, ...

Proprietà delle basi

- ogni sottospazio proprio $L \subset \mathbb{R}^n$ ha $dim(L) < n$
- Se L è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^n$ allora $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti gli elementi di L (diciamo $\perp L$)
- se $dim(L) = m < n$ allora esistono $n - m$ vettori linearmente indipendenti ortogonali a L

Teorema

Dati i vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^K$, sia $L = lin(\{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^K\})$ tale che $dim(L) = m$. Allora:

(i) esiste una base di L composta da m fra i vettori di $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^K$

(ii) se $k \leq m$ e $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ sono linearmente indipendenti, possiamo formare una base di L scegliendo $m - k$ fra i vettori $\mathbf{x}^{k+1}, \ldots, \mathbf{x}^K$ e aggiungendoli a $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$

Funzioni lineari

Definizione
Dati due spazi lineari $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $T \subseteq \mathbb{R}^m$, si dice *funzione lineare* un funzione $f : S \to T$ tale che, per ogni coppia $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed un qualunque scalare $k \in \mathbb{R}$, soddisfi:

(i) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$
(ii) $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$

Ogni funzione lineare f da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ si può rappresentare con una matrice A di dimensioni $m \times n$, cioè, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Nel caso $m = 1$: $f(\mathbf{x}) = c^T\mathbf{x}$, con c vettore di $\mathbb{R}^n$

Combinazione conica

Definizione

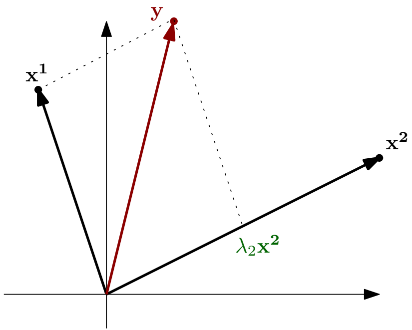
Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione conica* dei vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali **non-negativi** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$



Combinazione affine

Definizione

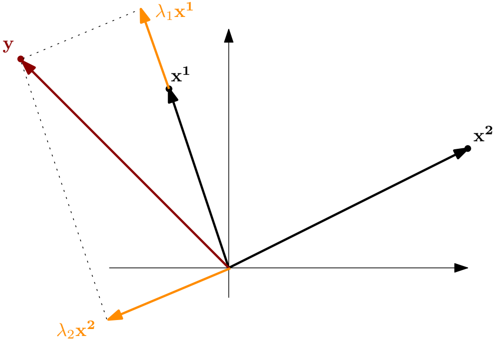
Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione affine* dei vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tali che

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} -7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$



Combinazione convessa

Definizione

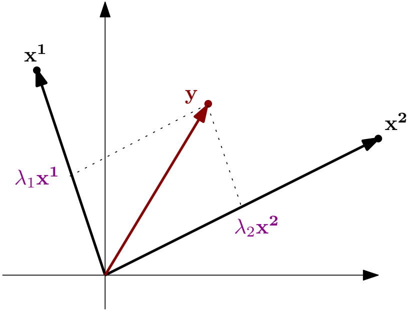
Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione convessa* dei vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali **non negativi** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, tali che

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$



Riassumendo

Definizione

Un vettore $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ se esistono k moltiplicatori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}^k$$

Se $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ la combinazione è detta *conica*

Se $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ la combinazione è detta *affine*

Una combinazione conica ed affine si dice *convessa*

Involucro conico, affine, convesso

Ricordiamo che, dato un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice *involucro lineare* di S l'insieme $lin(S)$ di tutte le combinazioni lineari di elementi di S

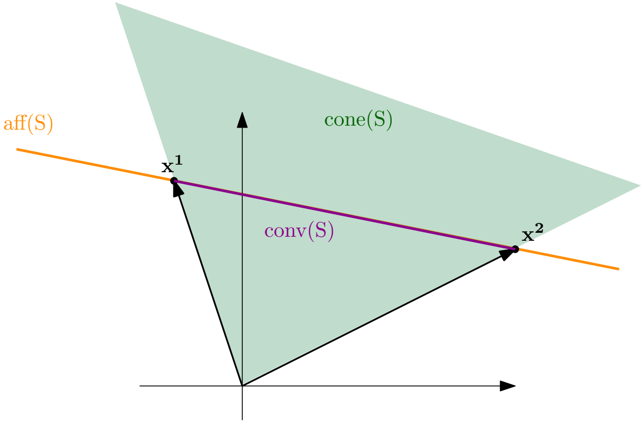
Analogamente, definiamo:

- *involucro conico* di S l'insieme $cone(S)$ di tutte le combinazioni coniche di elementi di S
- *involucro affine* di S l'insieme $aff(S)$ di tutte le combinazioni affini di elementi di S
- *involucro convesso* di S l'insieme $conv(S)$ di tutte le combinazioni convesse di elementi di S

Esempio

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; S = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$$

$$lin(S) = \mathbb{R}^2$$



Insiemi convessi

Definizione
Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ due punti di $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei punti $\mathbf{z}$ ottenuti come

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$$

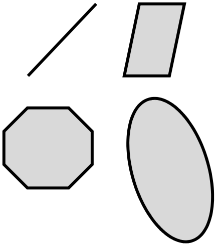
per $\lambda \in [0,1]$, si dice *segmento* (chiuso) di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Definizione
Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ il segmento di estremi $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ appartiene interamente ad S, cioè

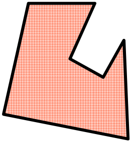
$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S, \qquad \lambda \in [0,1]$$

l'insieme vuoto, $\mathbb{R}^n$ e l'insieme costituito da un solo elemento sono insiemi convessi (banali)

Esempi



convessi



non convesso

Intersezione di insiemi convessi

Teorema
Siano $S, T \subset \mathbb{R}^n$ insiemi convessi. Allora $S \cap T$ un insieme convesso.

Dimostrazione Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \cap T$. Comunque scelto un $\lambda \in [0, 1]$ si ha che:
$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in S$, in quanto S convesso
$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in T$, in quanto T convesso
Quindi, $\mathbf{z} \in S \cap T$, ovvero $S \cap T$ convesso.

$\square$

Funzioni convesse

Definizione
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* su S se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

se la disuguaglianza è stretta, cioè se

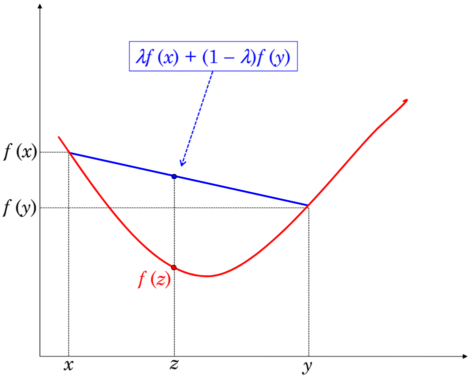
$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

con $\lambda \in (0, 1)$, allora la funzione si dice *strettamente convessa*

La definizione è ben posta in quanto $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$ per $\lambda \in [0, 1]$, grazie alla convessità di S

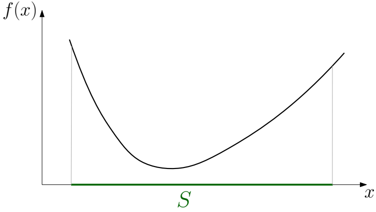
Graficamente

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y})$$

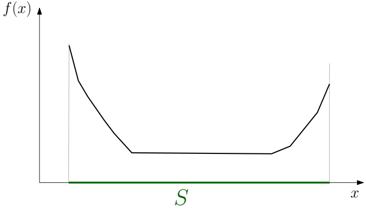


Quindi, una funzione convessa "giace al di sotto delle sue corde" (vale anche se $n > 1$)

Graficamente



$f(x)$ strettamente convessa su S



$f(x)$ convessa su S
ma non strettamente

Esempi di funzioni convesse

- x^2
- x
- e^x
- $-\log x$
- $\max\{-x, 2x\}$
- $|x|$

Consideriamo una funzione lineare $f(\mathbf{x}) = c^T\mathbf{x}$. Dati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = c^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) =$$

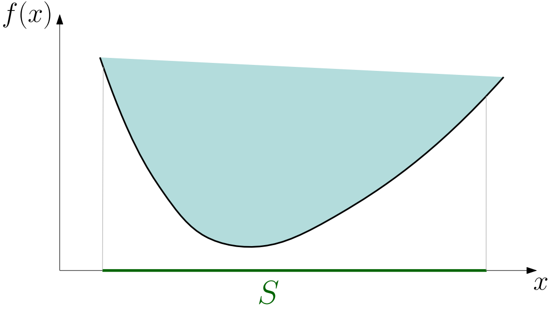
$$= \lambda c^T\mathbf{x} + (1-\lambda)c^T\mathbf{y} = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y})$$

quindi, una funzione lineare è convessa (ma non strettamente) su $\mathbb{R}^n$

Epigrafico

Data una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ definita sull'insieme $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce *epigrafico* di f il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\text{epi}f = \{(x, \mu)\, :\, x \in S,\, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq\, f(x)\} \subseteq S \times \mathbb{R}$$



una funzione f è convessa su S se e solo se il suo epigrafico è convesso

Funzioni concave

Definizione
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso. Una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ si dice *concava* su S se $-f$ è convessa su S. In altre parole, f è concava se per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ ed ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$