HW2

Esercizio 1 Dato l'insieme $L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 - x_2 \geq 0, -x_1 + 1/2x_2 \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, dire se L è uno spazio lineare.

Esercizio 2 Dato l'insieme $S = \{\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ determinare la rappresentazione grafica di $cone(S)$ e $conv(S)$

Esercizio 3 Dati i due problemi:

(P1)

$$\begin{aligned} &\min x \\ &\text{s.t.} \\ &\sin(x) \geq 0 \\ &0 \leq x \leq 2\pi \end{aligned}$$

(P2)

$$\begin{aligned} &\min \sin(x) \\ &\text{s.t.} \\ &0 \leq x \leq 2\pi \end{aligned}$$

dire se sono problemi di programmazione convessa oppure no.

Esercizio 4 Un'industria manifatturiera fabbrica due prodotti, A e B utilizzando due macchine utensili M_1 e M_2. Per avere un prodotto finito è necessaria la lavorazione su entrambe le macchine ed il tempo di lavorazione (espresso in ore) richiesto da ciascuna operazione è riportato nella seguente tabella:

	A	B
M_1	4	t
M_2	2	5

Il tempo t di lavorazione del prodotto B su M_1 può variare da 1 a 3 ore grazie ad un'operazione di attrezzaggio della macchina. Quest'ultima ha un costo inversamente proporzionale al tempo di lavorazione con un fattore pari a 1000 EURO.
La macchina M_1 è disponibile per 40 ore settimanali, mentre M_2 lo è per 35 ma, per quest'ultima, si può ottenere ulteriore tempo fino ad un massimo di 4 ore al costo di 100 Euro per ogni ora supplementare.

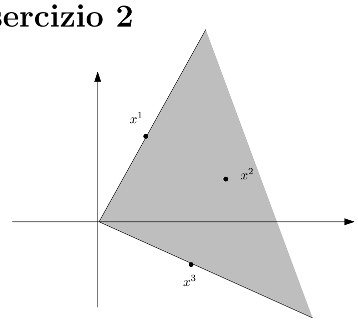
Il ricavo dalla vendita di una unità di prodotto A e B è rispettivamente di 200 e 150 Euro.

Formulare un modello di Programmazione Matematica che permetta di elaborare un piano di produzione che massimizzi il profitto (= ricavi − costi) settimanale.

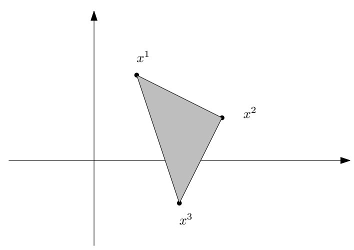
Soluzione

Esercizio 1 Disegnando L si vede facilmente che $L = \{\mathbf{0}\}$, quindi è uno spazio lineare.

Esercizio 2



Cone(S)



Conv(S)

Esercizio 3 P1: Il vincolo $\sin(x) \geq 0$ corrisponde all'intervallo $x[0, \pi]$, quindi descrive un insieme convesso. Quindi la regione ammissibile è convessa. La funzione obiettivo è lineare, quindi il problema P1 è di programmazione convessa;

P2: La funzione $\sin(x)$ non è convessa nell'intervallo $[0, 2\pi]$ che descrive la regione ammossibile, quindi il problema non è di programmazione convessa.

Esercizio 4 Variabili decisionali:

- x_A, x_B quantità di prodotto risp. A, B in una settimana;
- t tempo di lavorazione di B sulla macchina M_1
- y tempo macchina M_2 aggiuntivo

Formulazione:

$$
\begin{aligned}
& \max 200x_A + 150x_B - 1000/t - 100y \\
& \text{s.t.} \\
& \qquad 4x_A + tx_B \leq 40 \qquad \text{consumo } M_1 \\
& \qquad 2x_A + 5x_B - y \leq 35 \qquad \text{consumo } M_2 \\
& \qquad 1 \leq t \leq 3 \\
& \qquad 0 \leq y \leq 4 \\
& \qquad x_A, x_B \geq 0
\end{aligned}
$$

Notate bene che, in questo caso, abbiamo ottenuto un modello NON lineare.