CAPITOLO 9

Calcolo Integrale per Funzioni di due Variabili

Integrali Doppi: Definizione e prime Proprietà

Ci poniamo il seguente

<u>PROBLEMA</u>. Data una funzione $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata, calcolare il volume V compreso tra il grafico di f (che in generale rappresenta una superfice nello spazio tridimensionale) e il piano xy.

Come nel caso degli integrali in una variabile, l'idea è di approssimare il volume V da sotto e da sopra, cioè per difetto (con somme inferiori) e per eccesso (con somme superiori). Però, in questo caso il dominio X non è più un semplice intervallo ma può avere una geometria molto più complicata.

Pertanto scegliamo prima un rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ tale che $X \subseteq R$ e definiamo

$$(*) \qquad \bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se } (x,y) \in X; \\ 0, & \text{se } (x,y) \in R \setminus X. \end{cases}$$

cioè estendiamo f ponendola 0 fuori da X. Allora, i volumi compresi tra i grafici di f e $\bar{f}$ da un lato e il piano xy dall'altro sono uguali. Poi creiamo una partizione di R in sotto-rettangoli a partire da partizioni di $[a,b]$ e $[c,d]$ e approssimiamo il volume compreso tra il grafico di $\bar{f}$ e ogni sotto-rettangolo. Più precisamente:

- Date due partizioni

$$P_x = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\} \quad \text{di } [a,b] \text{ e}$$
$$P_y = \{c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d\} \quad \text{di } [c,d],$$

definiamo la partizione (cfr. Figura 85)

$$P_{xy} := P_x \times P_y \quad \text{di } R = [a,b] \times [c,d] \text{ nei rettangoli}$$
$$R_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{per } i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

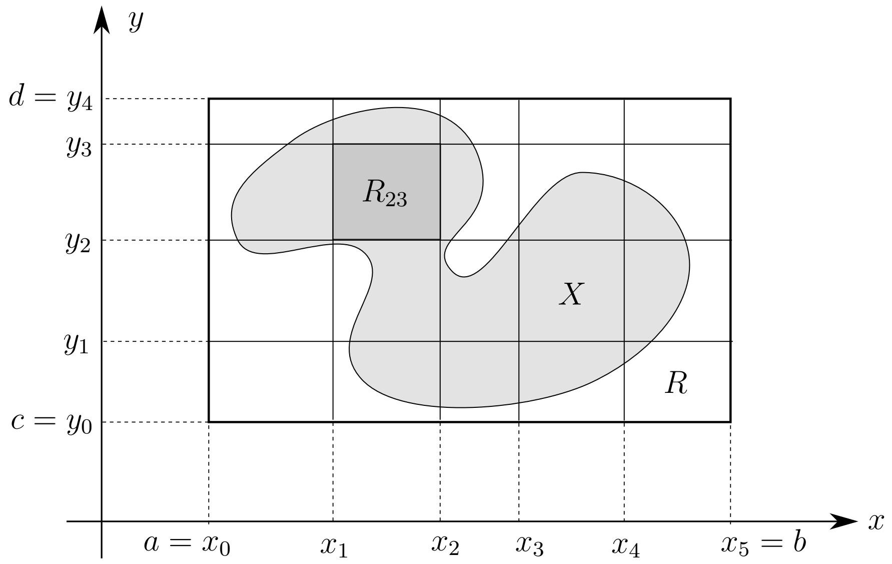

Figura 85. Partizione del rettangolo R contenente X ($n = 5$, $m = 4$).

- Per P_{xy} poniamo per $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} m_{ij} &:= \inf\big\{\bar{f}(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\big\}, \\ M_{ij} &:= \sup\big\{\bar{f}(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\big\}, \\ |R_{ij}| &:= (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \text{ area del rettangolo } R_{ij}, \end{aligned}$$

  e definiamo

$$\begin{aligned} s(\bar{f}, P_{xy}) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \textit{ somma inferiore}, \\ S(\bar{f}, P_{xy}) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \cdot |R_{ij}| =: \textit{ somma superiore}. \end{aligned}$$

Quindi per ogni partizione P_{xy} di R vale

$$s(\bar{f}, P_{xy}) \leq V \leq S(\bar{f}, P_{xy}),$$

cioè le somme inferiori sono sempre approssimazioni di V per difetto mentre le somme superiori danno sempre approssimazioni per eccesso. Perciò

- più *grande* è $s(\bar{f}, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione (per difetto),
- più *piccolo* è $S(\bar{f}, P_{xy})$ migliore è l'approssimazione (per eccesso).

Se non c'è differenza tra la migliore approssimazione da sotto (cioè quella più grande) e quella migliore da sopra (cioè quella più piccola), allora il problema di determinare il volume V è (teoricamente) risolto e f si dice *integrabile*. Tutto ciò motiva la seguente

Definizione 9.1. Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata. Se per $\bar{f}$ definita in $(*)$ vale

$$\sup\big\{s(\bar{f}, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } R\big\} = \inf\big\{S(\bar{f}, P_{xy}) : P_{xy} \text{ partizione di } R\big\} =: I,$$

allora f si dice *integrabile* (secondo Riemann). In questo caso $V = I$ e si definisce *l'integrale doppio*

$$\iint_X f(x, y)\, dx\, dy := I$$

della funzione integranda f nel dominio dell'integrazione X.

OSSERVAZIONI.

- Si può dimostrare che la definizione precedente è indipendente dalla particolare scelta del rettangolo R contenente X.
- Il volume sotto il piano xy conta in maniera negativo.

ESEMPI.

- Se f è costante, cioè $f(x, y) = c$ per ogni $(x, y) \in X := [a, b] \times [c, d]$ è facile verificare che f è integrabile con integrale $\iint_X f(x, y)\, dx = c \cdot (b - a) \cdot (d - c)$.
- Per costruire un esempio di funzione *non* integrabile, si può estendere la funzione di Dirichlet (cfr. pagina 97) in $\mathbb{R}^2$.

  La funzione $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$,

  $$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale,} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

  non è integrabile. Infatti, come nel caso dell'esempio unidimensionale, per ogni partizione P_x di $[a, b]$ si ha che ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene sia punti razionali (in cui f ammette il valore 1) sia punti irrazionali (in cui f ammette il valore 0). Quindi segue $m_{ij} = 0$ e $M_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Così risulta per ogni partizione P_{xy}

  $$s(f, P_{xy}) = 0 \neq (b - a) \cdot (d - c) = S(f, P_{xy})$$

  per cui f non è integrabile.

Visto che integrando la funzione identicamente 1 sul dominio X si ottiene il volume $V = 1 \cdot \text{area}(X)$ del cilindro contenente i punti compresi tra il grafico di f e il piano xy, cfr. Figura 86, si ottiene la seguente definizione di misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

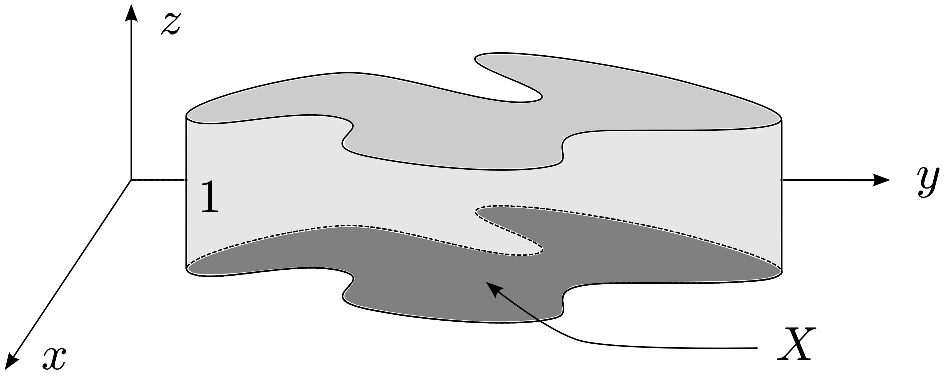

Figura 86. La misura di un'insieme.

Definizione 9.2. Se $X \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato tale che la funzione $\mathbb{1} : X \to \mathbb{R}$, $\mathbb{1}(x, y) = 1$ è integrabile, allora si dice che X è *misurabile* e si pone

$$\boxed{|X| := \iint_X 1\, dx\, dy \ = \textit{misura} \ (= \text{area}) \text{ di X}}$$

Proprietà dell'Integrale. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrabili con $X \subset \mathbb{R}^2$ misurabile. Allora

- $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ è integrabile per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (cioè l'insieme delle funzioni integrabili con dominio X è uno spazio vettoriale) e

$$\iint_X \big(\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)\big)\, dx\, dy = \alpha \cdot \iint_X f(x,y)\, dx\, dy + \beta \cdot \iint_X g(x,y)\, dx\, dy$$

  (cioè l'integrale è un'operazione *lineare*);

- Se $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in X$ allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint_X g(x,y)\, dx\, dy$$

  (cioè l'integrale è *monotono*);

- anche $|f|$ è integrabile e

$$\left| \iint_X f(x,y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_X |f(x,y)|\, dx\, dy$$

  (*disuguaglianza triangolare*).

- Se $|X| = 0$, allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

- Se $X = X_1 \cup X_2$ e $|X_1 \cap X_2| = 0$, allora

$$\iint_X f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{X_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{X_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

  (*additività* dell'integrale rispetto alla decomposizione di insiemi)

A questo punto, come nel caso di funzioni di una variabile, si pongono due

Problemi. (i) Quali funzioni $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono integrabili?

(ii) Se f è integrabile, come si può calcolare $\iint_X f(x,y)\,dx\,dy$?

Visto che l'integrabilità di $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dipende sia dal dominio X sia dalla regolarità di f, la situazione non è così semplice come per funzioni di una variabile.

Teorema di Fubini–Tonelli

Nel caso f è continua su una regione limitata da intervalli e grafici di funzioni il Teorema di Fubini–Tonelli da una risposta a entrambi i problemi.

Definizione 9.3. Un insieme $X \subset \mathbb{R}^2$ limitato si dice

(i) *y-semplice* se esistono due funzioni continue $g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\boxed{X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a,b],\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}}$$

(ii) *x-semplice* se esistono due funzioni continue $h_1,\ h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ tali che

$$\boxed{X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\right\}}$$

(iii) *semplice* se è y-semplice o x-semplice

(iv) *regolare* se è l'unione di un numero finito di domini semplici.

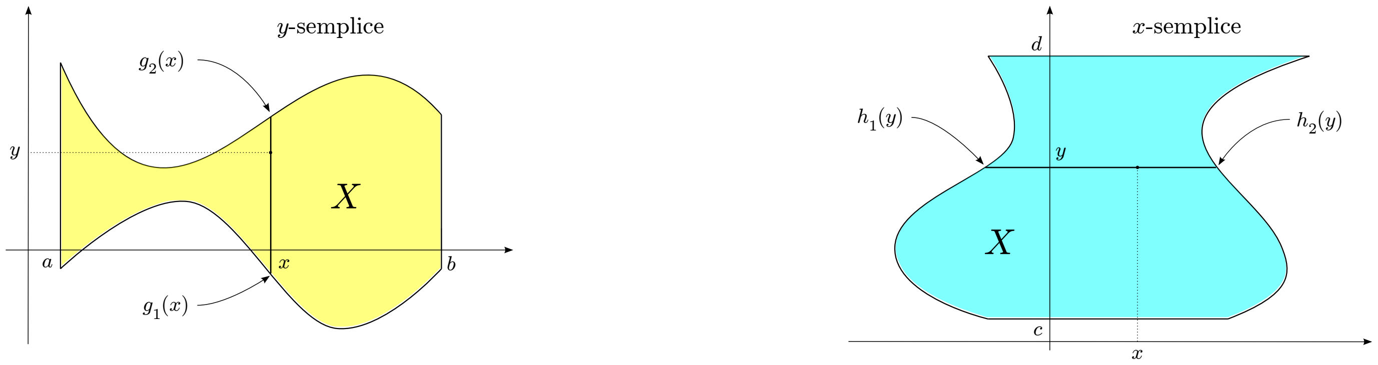

Figura 87. Domini y- e x-semplici.

L'idea del seguente risultato è quella di ridurre il calcolo dell'integrale doppio al calcolo in successione di due integrali in una variabile.

Teorema 9.4 (*Teorema di Fubini–Tonelli*). *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e X un dominio semplice. Allora f è integrabile su X. Inoltre,*

(i) se X è y-semplice

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

(ii) se X è x-semplice

$$\boxed{\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Interpretazione geometrica di Fubini–Tonelli. L'idea di fondo per calcolare V è di decomporlo in una unione di fette di spessore infinitesimale e poi sommare il volume di tale fette. Per spiegarlo meglio supponiamo che X sia y-semplice. Allora per ogni $x \in [a,b]$ consideriamo l'integrale interno

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

che rappresenta la superficie del taglio di V al punto x, cfr. Figura 88. Moltiplicando per lo spessore dx otteniamo $dV(x) := A(x) \cdot dx$ che rappresenta

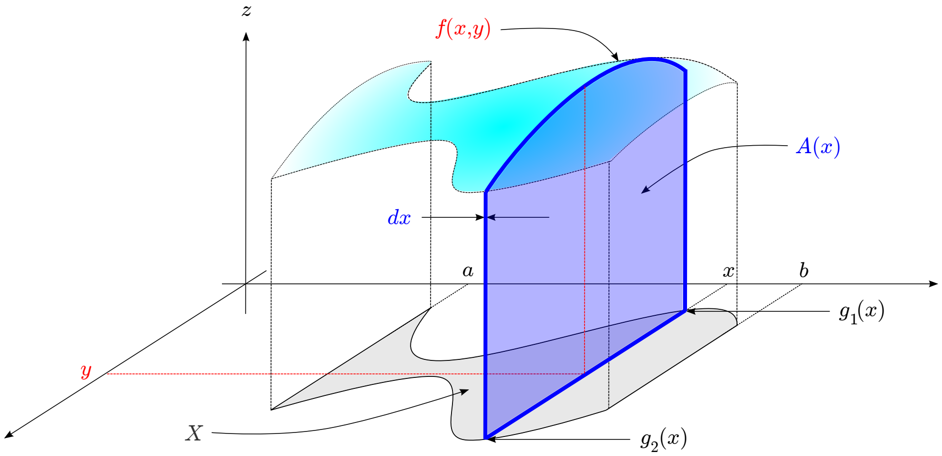

Figura 88. Il teorema di Fubini–Tonelli per X y-semplice.

il volume della x-esima fetta infinitesimale. L'integrale esterno

$$\int_{x=a}^{b} dV(x) = \int_{x=a}^{b} A(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

poi somma i volumi di tutte le fette infinitesimali e quindi rappresenta il volume complessivo V.

<u>ESEMPIO</u>. Calcolare

$$\iint_X 2x^2y\,dx\,dy \qquad \text{ove} \quad X=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in[0,1],\ x+1\le y\le 2\big\}.$$

Il dominio si presenta già nella forma di un dominio y-semplice, cf. Figura 89.

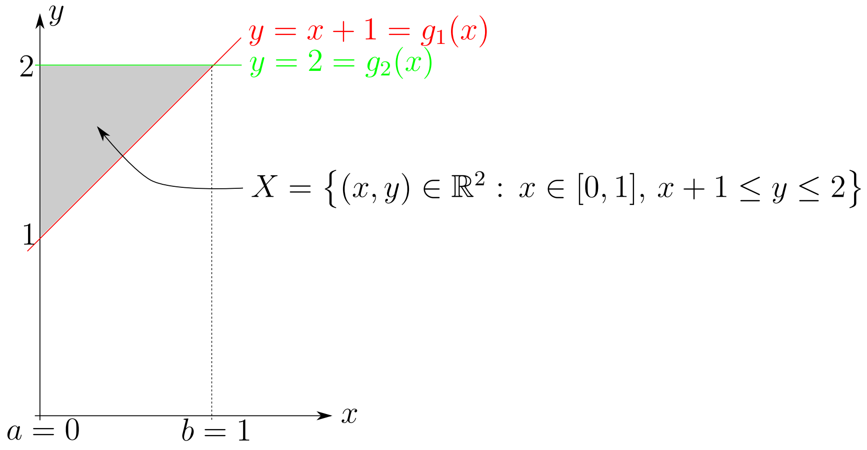

FIGURA 89. Esempio di un dominio y-semplice.

Quindi

$$\begin{aligned}\iint_X 2x^2y\,dx\,dy &= \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x+1}^{2} 2x^2y\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{1} 2x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x+1}^{2} dx\\ &= \int_{x=0}^{1}(4x^2-x^4-2x^3-x^2)\,dx = \left[4\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{4}{3}-\frac{1}{5}-\frac{2}{4}-\frac{1}{3}-0=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

<u>ESERCIZIO</u>. Verificare che il dominio nell'esercizio precedente è anche x-semplice e calcolare l'integrale usando Fubini–Tonelli per domini x-semplici. (Soluzione: $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\in[1,2],\ 0\le x\le y-1\}$).

<u>ESEMPIO</u>. Calcolare

$$\iint_X \sin(y^3)\,dx\,dy \qquad \text{ove} \quad X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [0,1], \, \sqrt{x} \le y \le 1\right\}.$$

Anche in questo caso, il dominio si presenta già nella forma di un dominio y-semplice, tuttavia se applichiamo la formula per domini y-semplici

$$\iint_X \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sin(y^3)dy\right)\,dx = ???$$

otteniamo la funzione integranda $\sin(y^3)$ che non è integrabile elementarmente rispetto y.

Però, vale anche $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \in [0,1], \, 0 \le x \le y^2\right\}$ e quindi X è anche x-semplice, cfr. Figura 90.

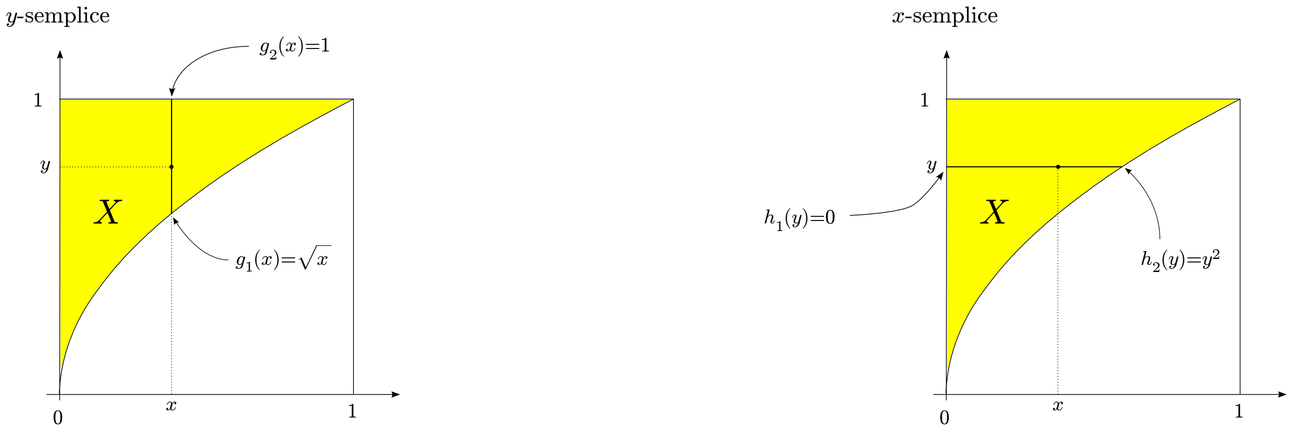

FIGURA 90. Dominio y- e x-semplice.

Così risulta

$$\iint_X \sin(y^3)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sin(y^3)dx\right) dy = \int_0^1 [x]_0^{y^2} \cdot \sin(y^3)dy = \int_0^1 y^2 \cdot \sin(y^3)dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos(y^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\big(1-\cos(1)\big)$$

Quindi in alcuni casi può essere necessario vedere il dominio come semplice rispetto ad una variabile piuttosto che all'altra.

Osservazione. Dal teorema di Fubini–Tonelli segue che se il dominio è un *rettangolo*, cioè $X = [a,b]\times[c,d]$, e $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$, allora

$$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy.$$

Integrazione in Coordinate Polari

Per domini X "circolari" di integrazione conviene spesso di passare dalle coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari (ρ, ϑ) per semplificare la rappresentzione di X. Per fare ciò serve il seguente risultato.

<u>Proposizione</u> 9.5. *Sia $f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabile. Se il dominio X in coordinate cartesiane (x, y) corrisponde al dominio X' in coordinate polari (ρ, ϑ), allora*

$$\boxed{\iint_X f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{X'} f\big(\rho \cdot \cos(\vartheta), \rho \cdot \sin(\vartheta)\big) \cdot \rho \cdot\, d\rho\, d\vartheta}$$

<u>Osservazione</u>. Si noti che passano alle coordinate polari l'elemento infinitesimale di area $dx\, dy$ si trasforma in $\rho \cdot\, d\rho\, d\vartheta$, cfr. Figura 91.

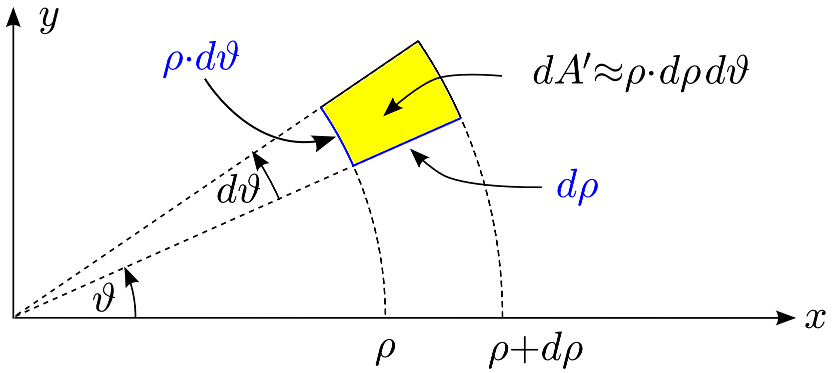

Figura 91. Cambiamento di variabili per coordinate polari.

<u>Esempio</u>. Calcolare

$$\iint_X xy\,dx\,dy \qquad \text{ove} \quad X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2 \le 1,\, 0 \le y \le x\right\}.$$

In questo tipo di problemi è opportuno dapprima disegnare il grafico.

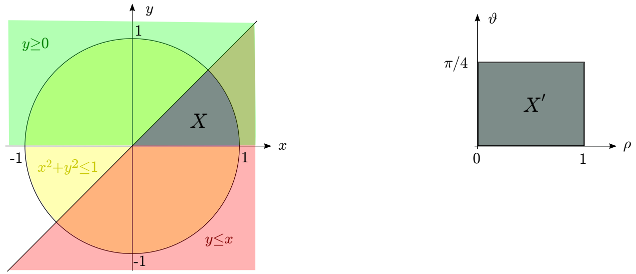

Figura 92. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

Il dominio è x- (e anche y-) semplice. Però il dominio essendo un settore circolare, è molto più facilmente rappresentabile in coordinate polari come

$$X' = \left\{(\rho,\vartheta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) :\, 0 \le \rho \le 1,\, 0 \le \vartheta \le \tfrac{\pi}{4}\right\} = [0,1] \times [0, \tfrac{\pi}{4}].$$

Quindi dalla proposizione precedente si ha (è importante non dimenticare il fattore ρ!!)

$$\iint_X xy\,dx\,dy = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho\cos(\vartheta) \cdot \rho\sin(\vartheta) \cdot \rho \cdot\, d\rho\,d\vartheta$$

Visto che X' è un rettangolo, ricordando l'osservazione su pagina 278, segue

$$\iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{4}]} \rho^3 \cdot \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2(\vartheta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}$$

<u>ALTRI ESEMPI.</u> • Calcolare la misura $|X|$ del dominio $X \subset \mathbb{R}^2$ che in coordinate polari è dato da

$$X' = \{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1],\ 0 \le \rho \le R(\vartheta)\}$$

per una funzione continua $R : [\vartheta_0, \vartheta_1] \to [0, +\infty)$, cfr. Figura 93.

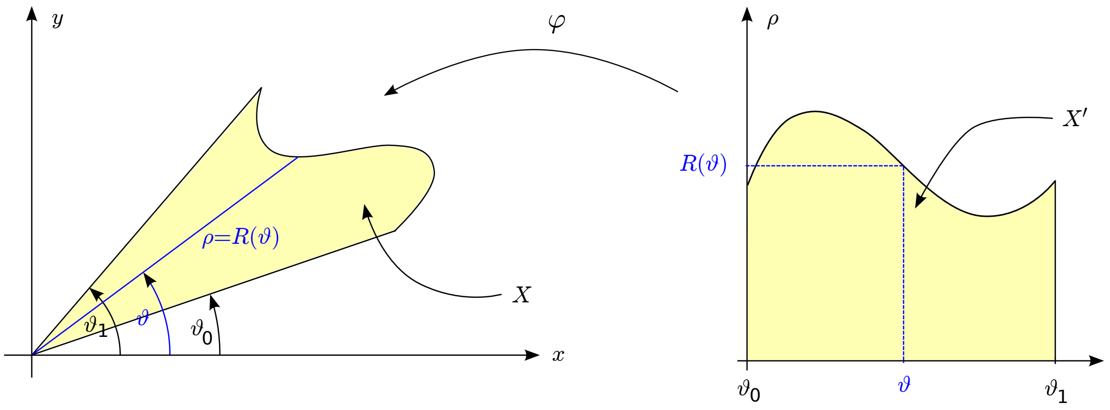

FIGURA 93. Dominio in coordinate cartesiane e polari.

Visto che il dominio X' è ρ-semplice, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
|X| &= \iint_X 1\,dx\,dy = \iint_{X'} \rho\,d\rho\,d\vartheta \\
&= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \int_0^{R(\vartheta)} \rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=R(\vartheta)} d\vartheta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} R^2(\vartheta)\,d\vartheta.
\end{aligned}$$

Per dare un esempio concreto calcoliamo l'area della *spirale di Archimede* data in coordinate polari da $X' := \big\{(\rho, \vartheta) : \vartheta \in [0, 2\pi],\ 0 \le \rho \le \vartheta)\big\}$, cfr. Figura 94.

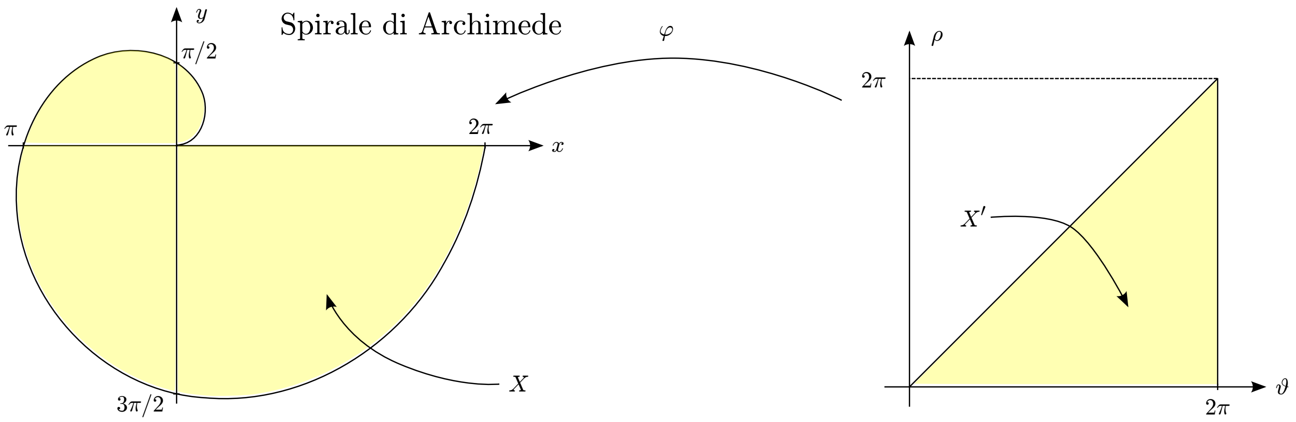

Figura 94. La spirale di Archimede.

In questo caso $R(\vartheta) = \vartheta$ e quindi otteniamo

$$|X| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \vartheta^2\, d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \cdot \pi^3.$$

- Calcolare
$$I_R := \iint_{X_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad \text{per} \quad X_R := \{(x,y) : x^2+y^2 \le R^2\}.$$
Per risolvere l'integrale passiamo alle coordinate polari. Visto che il cerchio X_R in coordinate cartesiane corrisponde in coordinate polari al rettangolo $X'_R = [0,R] \times [0,2\pi]$ risulta (usando l'osservazione a pagina 278)
$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho\,d\vartheta\,d\rho = \int_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \cdot 2\pi\Big|_0^R = \pi \cdot \left(1 - e^{-R^2}\right). \end{aligned}$$
Osserviamo che $\lim_{R\to+\infty} I_R = \pi$. Visto che per $R \to +\infty$ (in un certo senso) $X_R \to \mathbb{R}^2 = (-\infty,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$ "segue" (usando di nuovo l'osservazione a pagina 278)
$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2. \end{aligned}$$
Quindi siamo riusciti a calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
che non è possibile usando una primitiva di e^{-x^2}, cfr. l'osservazione a pagina 215. Invece, passando alle coordinate polari, grazie al fattore ρ, si passa da e^{-x^2} a $\rho \cdot e^{-\rho^2}$ che è molto semplice da integrare.