CAPITOLO 3

Funzioni Reali di una Variabile Reale

Definizione 3.1. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ si dice *funzione reale di una variabile reale*.

In questo caso il grafico

$$G(f) = \Big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

cioè si può disegnare nel piano xy.

Esempio. Definiamo $A(r) :=$ area di un cerchio di raggio $r \geq 0$. Questa regola definisce una funzione $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con immagine $A([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Inoltre $A(r) = \pi r^2$ e quindi il grafico $G(A) \subset \mathbb{R}^2$ è dato da (parte di) una parabola:

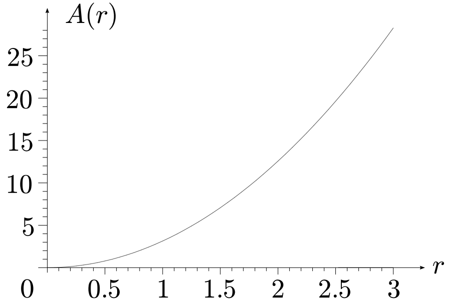


Figura 11. Grafico di $A(r)$.

Operazioni e Composizione tra Funzioni

Somma, Differenza, Prodotto e Frazioni di Funzioni. Le operazioni algebriche si possono facilmente estendere dai numeri reali alle funzioni reali. Se $f : X_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : X_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni allora definiamo per $X := X_1 \cap X_2$

- la *somma* $f + g : X \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ per $x \in X$;
- la *differenza* $f - g : X \to \mathbb{R}$, $(f - g)(x) := f(x) - g(x)$ per $x \in X$;
- il *prodotto* $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per $x \in X$;
- la *frazione* $\frac{f}{g} : X_0 \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per $x \in X_0 := \{z \in X : g(z) \neq 0\}$;

Un altro modo per costruire una nuova funzione da due funzioni date è la

Composizione di funzioni. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ allora la funzione

$$g \circ f : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big),\ x \in X$$

si dice *funzione composta di f e g*.

<u>Esempio</u>. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = \sin(x)$ allora $(g \circ f)(x) = \sin|x|$. In questo esempio possiamo anche considerare $f \circ g$ per il quale si ottiene $(f \circ g)(x) = \big|\sin(x)\big|$. Quindi in generale $f \circ g \neq g \circ f$.

Proprietà di Funzioni Reali

Elenchiamo in seguito alcune proprietà importanti di funzioni reali.

Funzioni Invertibili.

Definizione 3.2. Una funzione $f : X \to Y$ si dice

- *iniettiva*, se per ogni $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *al più* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste *almeno* un $x \in X$ con $f(x) = y$;
- *biettiva* se f è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste *un unico* $x \in X$ con $f(x) = y$.

<u>Esempio</u>. Consideriamo la funzione $f_k : X_k \to Y_k$, $f_k(x) := x^2$ per diverse scelte di $X_k, Y_k \subseteq \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$:

(a) $X_1 = \mathbb{R}$, $Y_1 = \mathbb{R}$. In questo caso

- per $0 < y \in Y_1$ esistono due $x_1, x_2 \in X_1$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2 = y$ e quindi f_1 non è iniettiva;
- per $y < 0$ non esiste $x \in X_1$ tale che $f_1(x) = x^2 = y$ e quindi f_1 non è suriettiva.

Riassumendo f_1 non è né iniettiva né suriettiva.

(b) $X_2 = \mathbb{R}$, $Y_2 = [0, +\infty)$. In questo caso

- per $0 < y \in Y_2$ esistono due $x_1, x_2 \in X_2$, $x_1 = -\sqrt{y} \neq x_2 = +\sqrt{y}$ con $(x_1)^2 = (x_2)^2$ e quindi f_2 non è iniettiva;
- per $y \in Y_2$ definiamo $x := +\sqrt{y} \in X_2$ che implica $f_2(x) = x^2 = y$ e quindi f_1 è suriettiva.

Riassumendo f_2 non è iniettiva ma è suriettiva.

(c) $X_3 = [0, +\infty)$, $Y_3 = \mathbb{R}$. In questo caso per $0 \leq y \in Y_3$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_3$ con $x^2 = y$ mentre per $0 > y \in Y_3$ non esiste $x \in X_3$ tale che $f_3(x) = x^2 = y$. Quindi

- f_3 è iniettiva;
- f_3 non è suriettiva.

Riassumendo f_3 è iniettiva ma non è suriettiva.

(d) $X_4 = [0, +\infty)$, $Y_4 = [0, +\infty)$. In questo caso per ogni $y \in Y_4$ $x := +\sqrt{y}$ è l'unico $x \in X_4$ con $x^2 = y$. Quindi

- f_4 è iniettiva;
- f_4 è suriettiva.

Riassumendo f_4 è biettiva.

<u>Osservazioni</u>. • Al livello del grafico $G(f)$ per una funzione reale $f : X \to Y$ vale:

- f è iniettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *al più* una volta;
- f è suriettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *almeno* una volta;
- f è biettiva $\iff$ ogni retta orizzontale attraverso un punto $y \in Y$ interseca $G(f)$ *un'unica* volta;

cfr. Figura 12

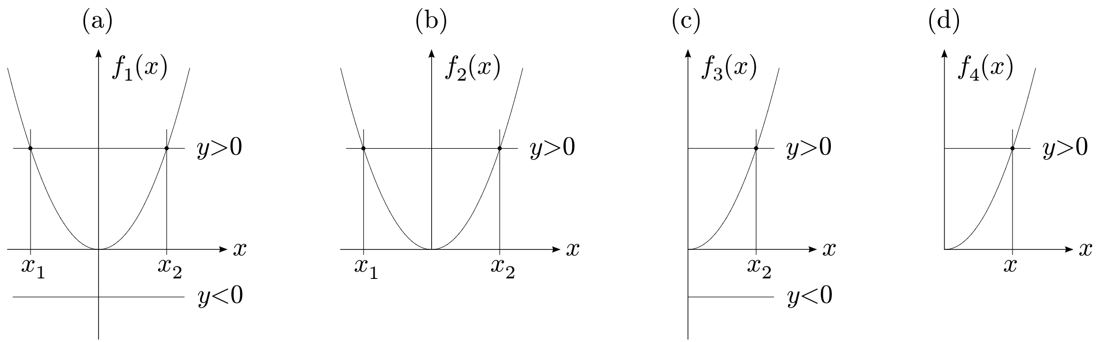


Figura 12. Funzione (a) non iniettiva, non suriettiva; (b) non iniettiva ma suriettiva; (c) iniettiva ma non suriettiva; (d) iniettiva e suriettiva cioè biettiva.

- Una funzione $f : X \to Y$ è biettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che
  - $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x$ per ogni $x \in X$, e
  - $(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = y$ per ogni $y \in Y$.

  In questo caso g è unica, si chiama *funzione inversa* di f e si scrive $f^{-1} := g$.

- Dal fatto che $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ segue che i grafici $G(f)$ di f e $G(f^{-1})$ di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$, cfr. Figura 13.

<u>Esempio</u>. Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) := x^2$ è invertibile. In questo caso la funzione inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è data da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. In particolare, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$ *!!!*

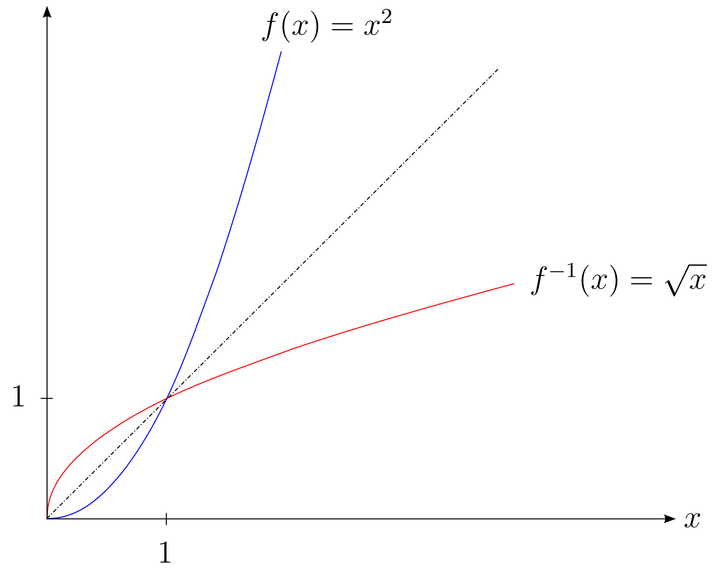


Figura 13. Grafico di $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Funzioni Limitate. Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- *limitata superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \le M$ per ogni $x \in X$;
- *limitata inferiormente* se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \le f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *limitata* se è superiormente e inferiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tale che $m \le f(x) \le M$ per ogni $x \in X$.

<u>Esempi</u>.

- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è inferiormente ma non superiormente limitata;
- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ non è inferiormente né superiormente limitata;
- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ è limitata, cfr. pagina 79.

Funzioni Simmetriche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un dominio simmetrico rispetto a $x = 0$ (cioè $x \in X \Rightarrow -x \in X$). Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice

- *pari*, se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in X$;
- *dispari*, se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in X$.

OSSERVAZIONI.
- f è pari $\iff$ il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y;
- f è dispari $\iff$ il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine, cfr. Figura 14

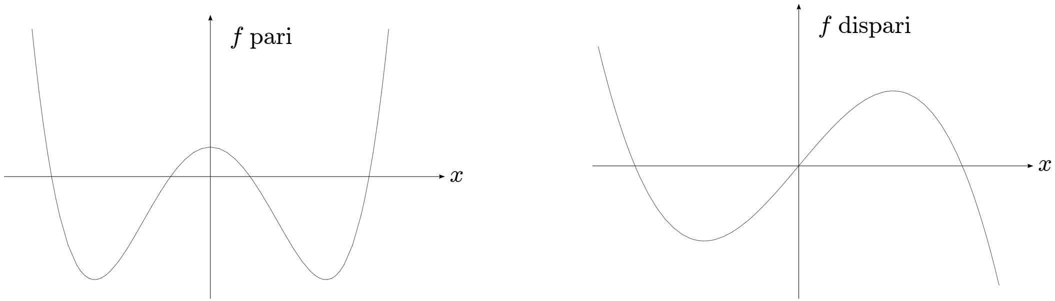


FIGURA 14. Funzione pari e dispari.

- Se f è dispari e $0 \in X$ (= dominio di f) allora $f(0) = 0$.
- Valgono le seguente regole per prodotto e rapporto tra funzioni pari (=p) e dispari (=d):

$f_1 \cdot f_2$ opp. $\frac{f_1}{f_2}$	f_1=p	=d
f_2=p	p	d
=d	d	p

Inoltre vale "pari ± pari = pari" e "dispari ± dispari = dispari".

<u>Esempi</u>.

- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ è pari, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è dispari.
- Più in generale si ha: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è
  - pari $\iff$ n è pari,
  - dispari $\iff$ n è dispari.
- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ è pari, $g(x) = -5x^3 - 2x$ è dispari, quindi $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^4-2x^2+4}{-5x^3-2x}$ è dispari.

Funzioni Monotone. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$. Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice

- *crescente*, se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *strettamente crescente*, se $f(x_1) < f(x_2)$;
- *decrescente*, se $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *strettamente decrescente*, se $f(x_1) > f(x_2)$.
- *(strettamente) monotona*, se è (strettamente) crescente oppure (strettamente) decrescente.

<u>Esempi</u>.

- $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ è strettamente crescente;
- $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ non è monotona;
- $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0]$ è decrescente.

Funzioni Periodiche. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $T > 0$ tale che $x + T \in X$ per ogni $x \in X$. Allora $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* T, se T è il più piccolo numero > 0 tale che $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in X$.

<u>Esempio</u>. $f(x) = \sin(x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi$.

Funzioni Elementari

Nel seguito iniziamo una lista di funzioni elementari che utilizzeremo nello svolgimento del corso.

Polinomi. Se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ allora l'espressione

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

si dice *polinomio*. Se $a_n \neq 0$ allora n si dice *grado* di p. Un polinomio della forma $p(x) = ax^n$ si dice anche *monomio*.

<u>Esempio</u>. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ è un polinomio di grado $n = 3$.

Funzioni Razionali. Se p e $q \neq 0$ sono due polinomi di grado n ed m rispettivamente, l'espressione

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

si chiama *funzione razionale* con grado $n - m$. Il dominio X della funzione razionale r è data da $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

<u>Esempio</u>. $r(x) = \frac{2x^2-1}{2x^5-10x^3+8x}$ è una funzione razionale di grado $2 - 5 = -3$ e con dominio $X = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Potenze ed Esponenziali.

<u>Problema</u>. Come si può definire a^r per $a > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, per esempio quanto vale

$$2^\pi = ?$$

Per risolvere questo problema, cioè per dare una definizione rigorosa di a^r, useremo alcuni risultati del Capitolo 1 procedendo in 2 passi:

1° Passo: $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \neq q \in \mathbb{N}$, allora usando le radici (introdotte con il metodo di Erone a pagina 38) definiamo

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Per esempio

$$a^{-\frac{3}{4}} := \sqrt[4]{a^{-3}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^3, \qquad 2^{3,141} := \sqrt[1000]{2^{3141}} = \left(\sqrt[1000]{2}\,\right)^{3141}.$$

Si osservi che per definire $\sqrt[q]{a}$, per q pari, deve essere $a > 0$.

2° Passo: $r \in \mathbb{R}$. Per semplificare la presentazione consideriamo solo il caso $a > 1$ e $r > 0$, gli altri casi si possono trattare similmente.
Se $r \in \mathbb{R}$ ha la rappresentazione $r = p, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1} \ldots$ allora definiamo

$$r_n := p, \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n 000 \ldots = \frac{p\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n}{10^{n+1}} \in \mathbb{Q}.$$

Per esempio per $r = \pi$ vale $r_2 = 3,141 = \frac{3141}{1000}$.

Così abbiamo definito una successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con le proprietà

- $r_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $r_n \in [p, p+1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to+\infty} r_n = r$ poiché $0 \leq r - r_n = 0{,}0\ldots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots \leq 10^{-n} \to 0$ per $n \to +\infty$,
- $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

Visto che $r_n \in \mathbb{Q}$ possiamo definire

$$a_n := a^{r_n}$$

come nel primo passo. Siccome la funzione a^x con $x \in \mathbb{Q}$ per $a > 1$ è crescente, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è

- crescente poiché $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, e
- limitata poiché $a_n \in [a^p, a^{p+1}]$.

Quindi per il teorema sulle successioni monotone limitate (cfr. pagina 37) il limite

$$a^r := \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$

converge e definisce la potenza a^r di base a ed esponente r.

<u>Proposizione</u> 3.3. *Per le potenze valgono le regole*

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ *per ogni* $a > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$;
- $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$ *per ogni* $a > 0$, $r, s \in \mathbb{R}$;
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ *per ogni* $a, b > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

Fissando la base e facendo variare l'esponente come argomento, oppure il viceversa, possiamo definire altre 2 funzioni elementari.

<u>Definizione</u> 3.4. • $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^r$ per $r \in \mathbb{R}$ fisso si dice *funzione potenza di esponente r*, cfr. Figura 15.

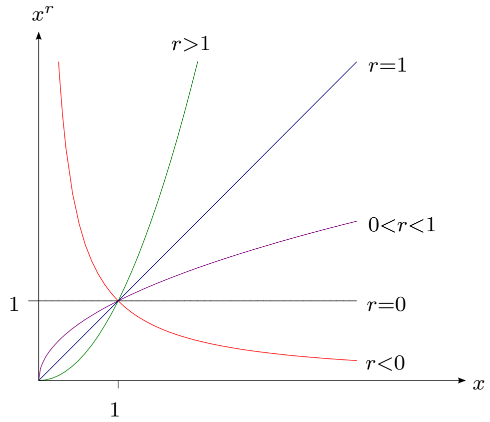


FIGURA 15. La funzione potenza.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Per $r \geq 0$ si può estendere la funzione potenza x^r su $[0, +\infty)$ definendo $0^r := 0$. Inoltre per certi valori di $r \in \mathbb{R}$ si può definire x^r anche per $x < 0$, per esempio $x^2 = x \cdot x$ oppure $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

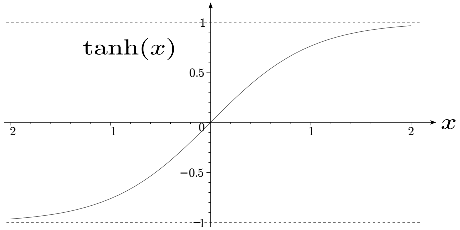
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := a^x$ per $a > 0$ fisso si dice *funzione esponenziale di base a*, cfr. Figura 16.

FIGURA 16. Funzione esponenziale di base a e funzione esponenziale.

L'esponenziale più importante è quello in base $a = e$ che si chiama *funzione esponenziale* e che fornisce una delle funzioni più importanti della matematica.

Funzioni Iperboliche. Con la funzione esponenziale definiamo le seguenti tre funzioni:

- *Coseno Iperbolico* $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Seno Iperbolico* $\sinh(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- *Tangente Iperbolico* $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.



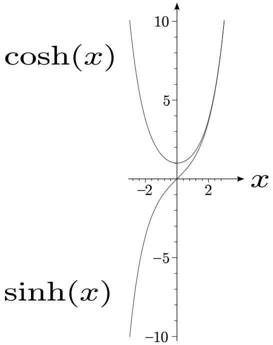


FIGURA 17. Le funzioni iperboliche.

<u>OSSERVAZIONI</u>. • $\cosh$ è pari e inferiormente limitata. Infatti $\cosh(x) \geq 1$, in particolare $\cosh(x) \neq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di $\cosh$ si chiama anche *"catenaria"* in quanto l'andamento è quello caratteristico di una catena che si lascia pendere (cfr. Figura 18).

FIGURA 18. La catenaria.

- sinh è dispari e strettamente crescente.
- tanh è dispari, strettamente crescente e limitata: $-1 \leq \tanh(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Vale la relazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Funzioni Circolari. Per definire le funzioni circolari dobbiamo dapprima misurare angoli in *radianti* (cfr. Figura 19).

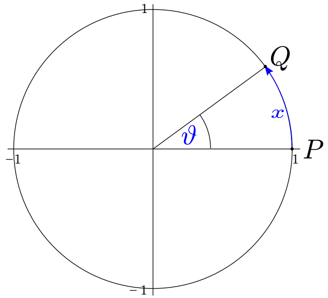


Figura 19. Misura di angoli in radianti.

Quindi l'angolo $\vartheta = x$ (radianti), dove $x =$ lunghezza dell'arco $PQ \in [0, 2\pi)$ orientato in senso antiorario. Per $x < 0$ oppure $x \geq 2\pi$ si può identificare x con $x \bmod 2\pi$. Per esempio $90° = \frac{\pi}{2}$, $180° = \pi$, $270° = \frac{3\pi}{2}$, $360° = 2\pi$ e $3\pi \bmod 2\pi = \pi$, $-5\pi \bmod 2\pi = \pi$ etc.

Introduciamo ora con $\vartheta = x$ radianti graficamente le funzioni

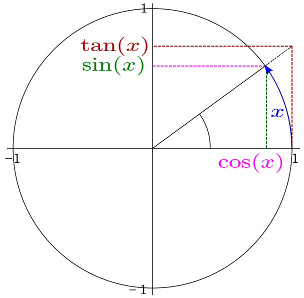
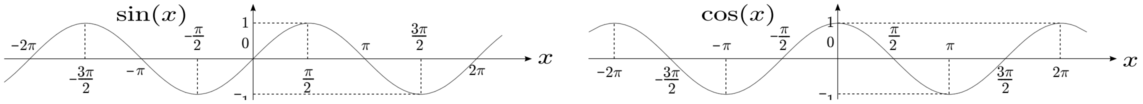


FIGURA 20. Definizione delle funzioni circolari.

- *Seno*: $\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Coseno*: $\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- *Tangente*: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



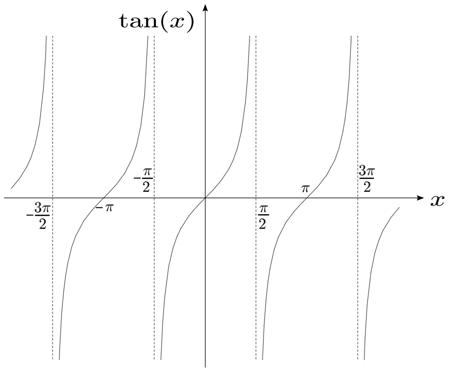


FIGURA 21. Grafici di sin, cos e tan.

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- cos è pari, limitata ($-1 \leq \cos(x) \leq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.
- sin è dispari, limitata ($-1 \leq \sin(x) \leq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$) e periodica di periodo $T = 2\pi$.
- tan è definita per $x \neq \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dispari, né inferiormente né superiormente limitata ma periodica di periodo $T = \pi$.

- Per le funzioni circolari valgono numerose relazioni, per esempio
  - $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (ciò segue dal Teorema di Pitagora, cfr. Figura 20);
  - $\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
  - $\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

  Le ultime due relazioni si chiamano *formule di prostaferesi*.

Limiti delle Funzioni Reali

Data una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \overline{\mathbb{R}}$ consideriamo il seguente

PROBLEMA. Studiare il comportamento di $f(x)$ per x vicino (ma differente!) a c.

Abbiamo già considerato un caso particolare di questo problema:

ESEMPIO. Se $X = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ diventa una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove $a_n = f(n)$ e il problema si trasforma nello studio di a_n per n "vicino a" $+\infty$, cioè ci ha portato al concetto di limite per le successioni.

Per analizzare questo problema per una funzione reale qualsiasi ci serve dapprima una

Definizione 3.5. $c \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice *punto di accumulazione* dell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

- $x_n \in X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.

I primi 2 punti si possono brevemente scrivere come $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$. Quindi c è un punto di accumulazione di X se in $X \setminus \{c\}$ si può avvicinare al punto c.

ESEMPI.

- $c = 3$ *non* è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in quanto non esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \setminus \{3\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$.
- $c = +\infty$ è infatti l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$.
- $c = -1$ *non* è un punto di accumulazione di $[0, +\infty)$.
- Se $I \subset \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo con gli estremi a e b, allora c è un punto di accumulazione di $I \iff c \in [a, b]$.

Ora siamo in grado di generalizzare il concetto di limite dalle successioni alle funzioni reali arbitrarie.

Definizione 3.6 (*Limiti per le Funzioni*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di X. Allora diremo che

f tende a $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c

se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$ segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. In questo caso scriviamo

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = l} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{f(x) \to l \text{ per } x \to c}.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>.

- Il limite, se esiste, è unico.
- Se nel seguito scriviamo "$\lim_{x \to c} f(x)$" supponiamo sempre che c sia un punto di accumulazione del dominio X di f. Per esempio $\lim_{x \to -1} \sqrt{x}$ *non* è ammesso poiché $c = -1$ non è un punto di accumulazione del dominio $X = [0, +\infty)$ della radice.
- Il fatto che nella definizione di limite consideriamo soltanto successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con limite c ma $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ riflette il fatto che studiamo $f(x)$ per x vicino ma differente a c.
- Il concetto di limite per le funzioni come definito sopra si basa su quello del limite per le successioni. Esiste anche un'altra possibilià di introdurre limiti per le funzioni che non fa riferimento alle successioni. Questa alternativa dipende però dal fatto se c ed l sono finiti oppure infiniti e quindi servono molti casi per coprire tutte le possibilità, cfr. pagina 289 nell'Appendice.

<u>ESEMPI</u>.

- $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$. Dal grafico su pagina 80 si vede che $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi per $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ risulta

$$\underbrace{0}_{\to 0} < |\sin(x_n)| \leq \underbrace{|x_n|}_{\to 0} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e per il teorema dei Carabinieri segue $\sin(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$. Allora $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$ per definizione.

- $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$. Per la formula di prostaferesi (cfr. pagina 81) segue

$$1 - \cos(x) = \cos(0) - \cos(x) = 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Allora per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ risulta

$$1 - \cos(x_n) = 2\sin^2\left(\tfrac{x_n}{2}\right) \to 2 \cdot 0^2 = 0.$$

Quindi $\lim_{x \to 0} \big(1 - \cos(x)\big) = 0$ cioè $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ *non esiste*. Definiamo $f(x) := \frac{|x|}{x}$ per $x \neq 0$. Allora

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

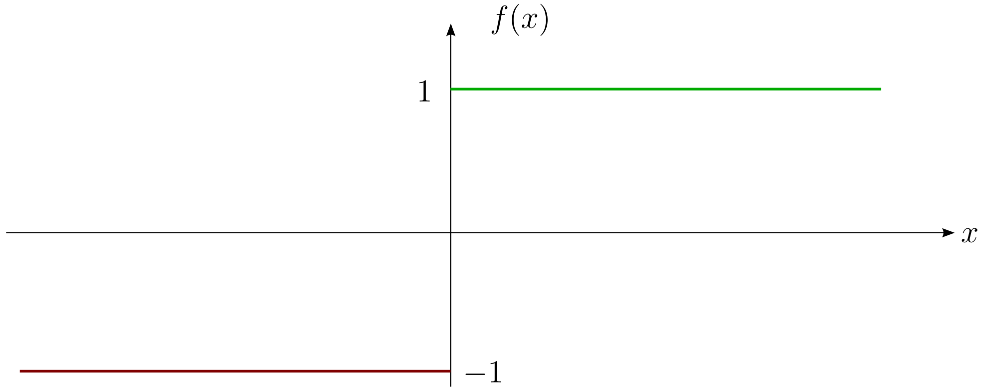


Figura 22. Funzione segno.

Quindi per $x_n := \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$ segue $f(x_n) = (-1)^n$ che non ammette limite per $n \to +\infty$. Ciò dimostra che $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

<u>Osservazione</u>. Nonostante l'ultimo limite di $f(x) = \frac{|x|}{x}$ per $x \to 0$ non esista, si ha che

- $f(x)$ tende a $+1$ se ci avviciniamo a $c = 0$ da destra,
- $f(x)$ tende a -1 se ci avviciniamo a $c = 0$ da sinistra.

Per precisare ciò ci serve una

Definizione 3.7 (*Limite Destro e Sinistro*). Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Diremo che

- $x_n \to c$ *da destra* per $n \to +\infty$, se $x_n \to c$ e $x_n \geq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \to c^+$ per $n \to +\infty$ oppure $\lim_{n\to+\infty} x_n = c^+$.
- $x_n \to c$ *da sinistra* per $n \to +\infty$, se $x_n \to c$ e $x_n \leq c$ definitivamente. In questo caso usiamo la notazione: $x_n \to c^-$ per $n \to +\infty$ oppure $\lim_{n\to+\infty} x_n = c^-$.
- $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c *da destra*, se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \to c^+$ segue $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \to l$ per $x \to c^+$ oppure $\lim_{x\to c^+} f(x) = l$.
- $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ per x tendente a c *da sinistra*, se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{c\}$ con $x_n \to c^-$ segue $f(x_n) = l$ per $n \to +\infty$. In questo caso usiamo la notazione: $f(x) \to l$ per $x \to c^-$ oppure $\lim_{x\to c^-} f(x) = l$.

$\lim_{x\to c^+} f(x) = l$ e $\lim_{x\to c^-} f(x) = l$ si dicono *limite destro* e *limite sinistro* rispettivamente.

Esempi.

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$.

Osservazioni.

- $\lim_{x\to c} f(x) = l \iff \lim_{x\to c^+} f(x) = l = \lim_{x\to c^-} f(x)$.
- Il concetto di limite destro e sinistro si possono definire anche senza l'utilizzo delle successioni. Però facendo così si devono considerare vari casi secondo le possibilità $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$, cfr. pagina 289 nell'Appendice.

Limiti e Asintoti.

- Se $\lim\limits_{x\to c^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ con $c \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto verticale* $x = c$.
- Se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$, allora si dice che f ha un *asintoto orizzontale* $y = l$.

Esempi.

- La funzione $\tan(x)$ ha asintoti verticali nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, cfr. il grafico a pagina 80.
- La funzione $\tanh(x)$ ha asintoti orizzontali nei punti $y = -1, +1$, cfr. il grafico su pagina 78.

Come nel caso delle successioni valgono anche per i limiti delle funzioni le

Regole per il Calcolo dei Limiti. Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = l_2$ con $c \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, allora

- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = l_1 \pm l_2$;
- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2$;
- $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ se $l_2 \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)\big)^{g(x)} = (l_1)^{l_2}$ se $l_1 > 0$;
- $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |l_1|$.

Queste regole seguono direttamente dalle regole corrispondenti per le successioni. Inoltre valgono anche per il limite destro e sinistro e anche per $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ se al limite si ottiene una forma determinata.
In sostanza il risultato precedente manifesta il fatto che le operazioni algebriche sono compatibili con il concetto di limite. Cioè non ha importanza se si fa prima l'operazione e poi il limite oppure viceversa, se tutte le forme ottenute sono determinate.

Anche i risultati riguardanti limiti e ordinamento per le successioni si generalizzano facilmente alle funzioni.

Limiti e Ordinamento. Se $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in X$ e $f(x) \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to c \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

- $l_1 \leq l_2$ (*Teorema del Confronto*);
- se inoltre per $h : X \to \mathbb{R}$ vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per $x \in X$ e $l_1 = l_2$, allora anche $h(x) \to l_1$ per $x \to c$ *(Teorema dei Carabinieri)*.

Come già per le successioni anche per calcolare limiti di funzioni il Teorema dei Carabinieri è spesso molto utile. L'idea per la sua applicazione è di incastrare l'espressione che si vuole studiare ($= h(x)$) tra due carabinieri ($= f(x)$ e $g(x)$) che sono piú semplici da studiare e ammettono lo stesso limite, cfr. Figura 23.

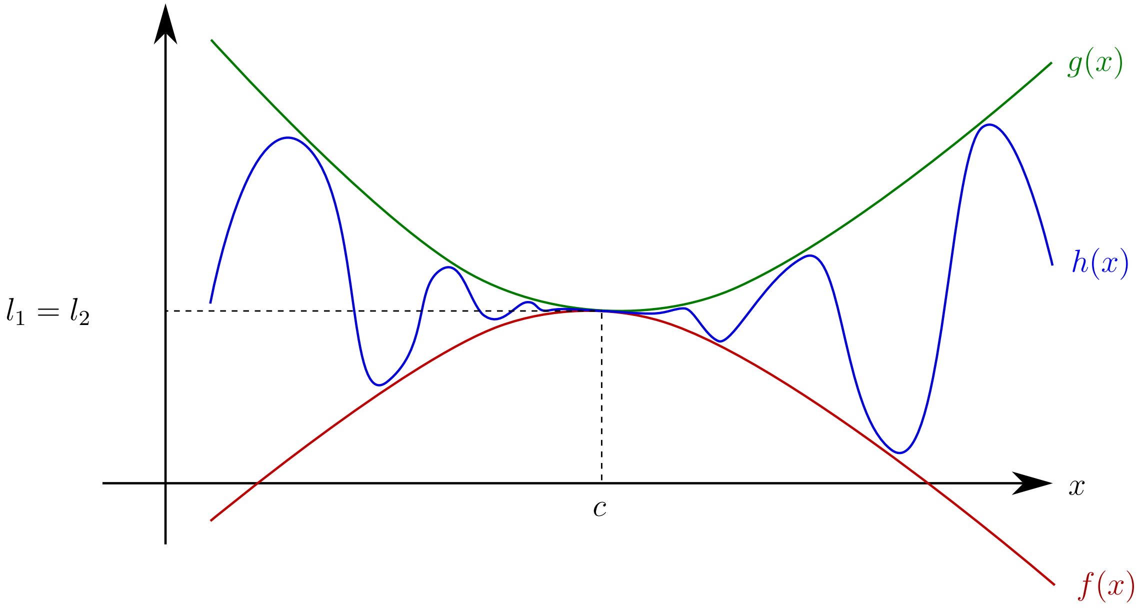
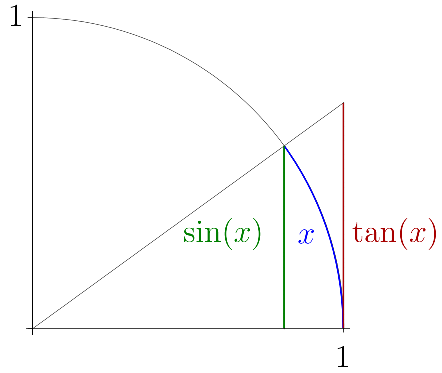


FIGURA 23. Teorema dei Carabinieri.

Esempi: Tre Limiti Notevoli.

(1) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$

Dimostrazione. Graficamente si vede che per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ vale



$$0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Figura 24. Relazione tra x, $\sin(x)$ e $\tan(x)$.

dividendo per $\sin(x) > 0$ segue

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

quindi per gli inversi otteniamo

$$\underbrace{1}_{\to 1} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \underbrace{\cos(x)}_{\to 1} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Inoltre $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari e quindi dal Teorema dei Carabinieri segue che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. □

(2) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$

Dimostrazione. Per $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ vale

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\overbrace{1-\cos^2(x)}^{=\sin^2(x)}}{x^2 \cdot \big(1+\cos(x)\big)} \\ &= \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\right)^2}_{\to 1^2 = 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}}}_{\to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

per $x \to 0$. □

(3) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

Dimostrazione. Partiamo dalla relazione $e^x = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli segue

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \tfrac{x}{n} = 1 + x \qquad \text{se } \tfrac{x}{n} \geq -1 \text{ cioè } n \geq -x$$

Allora $(1+\frac{x}{n})^n \geq 1 + x$ definitivamente e quindi per il teorema del confronto risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = e^x \geq 1 + x \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo in questa relazione x con $-x$ otteniamo inoltre

$$e^{-x} = \tfrac{1}{e^x} \geq \underbrace{1 - x}_{>0 \text{ per } x<1}$$

e quindi per gli inversi vale

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \text{se } x < 1.$$

Riassumendo abbiamo verificato che per ogni $x < 1$ vale

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \qquad \text{(sottraendo 1)} \Rightarrow$$

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \qquad \text{(dividendo per } x \neq 0) \Rightarrow$$

<u>se $1 > x > 0$:</u>

$$\underbrace{1}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^+} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^+} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

<u>se $x < 0$:</u>

$$\underbrace{1}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^-} \geq \frac{e^x - 1}{x} \geq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\to 1 \text{ per } x \to 0^-} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

per il Teorema dei Carabinieri. □

Anche il teorema sulla convergenza delle successioni monotone (cfr. pagina 37) si generalizza facilmente alle funzioni.

<u>Teorema</u> 3.8. *Se* $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è monotona allora*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) =: l^- \in \overline{\mathbb{R}} \qquad e \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) =: l^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$

esistono. Inoltre vale

$$\begin{aligned} l^- &= \sup\{f(x) : x \in X,\, x < c\}, & l^+ &= \inf\{f(x) : x \in X,\, x > c\} & &\textit{se } f \textit{ è crescente,} \\ l^- &= \inf\{f(x) : x \in X,\, x < c\}, & l^+ &= \sup\{f(x) : x \in X,\, x > c\} & &\textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{aligned}$$

Passiamo ora ai

Limiti per le Funzioni Composte. Se per $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ e $c, l, y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ vale

- $\lim_{x \to c} f(x) = y_0$,
- $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$,
- $f(x) \neq y_0$ per $c \neq x \in X$ vicino a c

allora

$$\lim_{x \to c} g\big(f(x)\big) = l.$$

Questo risultato *non* vale senza la terza condizione che riflette il fatto che per l'esistenza e il valore del limite il valore della funzione nel punto limite è indifferente.

<u>Esempio</u>. Sappiamo che

- $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$ (qui $f = \sin$, $c = 0$ e $y_0 = 0$),
- $\lim_{y \to 0} \cos(y) = 1$ (qui $g = \cos$, $l = 1$),
- $\sin(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| < \pi$ (quindi possiamo scegliere $\delta := \pi$)

Con il risultato precedente risulta che

$$\lim_{x \to 0} \cos\big(\sin(x)\big) = 1$$