信号检测与估计
第二章作业

学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1.设输入信号为三角波，即

$$s(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le 1\\ 4-2t & 1<t\le 2\end{cases}$$

试确定相应的白噪声背景下的匹配滤波器(因果系统)的冲激响应、频域传递函数、输出最大信噪比，以及输出信号，并分别画出各自相应的波形图。

解：根据 MF(matched filter)理论可知：

在白噪声背景下 MF 的冲激响应$h(t)$为输入感兴趣信号(此题为三角波信号)$s(t)$的翻转共轭，即有以下形式：

$$h(t)=Ks^{*}(t_d-t)$$

其中 K 是一个常数，可取 1。t_d为时延，一方面可以保证 MF 的冲激响应函数为因果信号，另一方面表示观测输出最大 SNR 时刻。对于本题三角波来说，t_d可取大于等于其时宽 T 的数，但是由于数字系统可以利用系统中数据的存储性能，所以非因果系统可以实现，但是不能做到实时性，即有延时，故t_d取值并不是很重要，可以取 0。对于模拟系统，非因果系统的确无法实现，此题，取$t_d=2s$，从而保证系统的因果性，又因为输入感兴趣信号$s(t)$为实信号，故可得：

$$h(t)=s(2-t)=s(t)$$

由于三角波信号为矩形信号(门信号)的线性卷积，可得：

$$h(t)=s(t)=2g_{\tau}(t-1)*g_{\tau}(t)$$

其中τ为门信号门宽，此题为 1，$g_{\tau}(t)$定义为：

$$g_{\tau}(t)=\{\begin{matrix}1 & |t|\le\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{matrix}$$

可求得门函数的傅里叶变换为：

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\tau}(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt=\tau sa\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)=sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

其中$sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，也称作$\sin c(x)$。

故可得 MF 的频域传递函数为：

$$H(j\omega)=s(j\omega)=2\left|G(j\omega)\right|^2 e^{-j\omega}=2sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}$$

由 MF 理论可知，输出最大 SNR 为：

$$SNR_o(t_d)=\frac{E}{\frac{N_0}{2}}=\frac{2E}{N_0}$$

其中E为输入感兴趣信号$s(t)$的能量，$E=\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|s(j\omega)\right|^2 d\omega$，$\dfrac{N_0}{2}$为输入白噪声的功率谱密度。此题$E=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|s(t)\right|^2 dt=\int_0^1 4t^2dt+\int_1^2(4-2t)^2dt=\dfrac{8}{3}$。白噪声属于随机信号，计算其功率谱密度要进行统计平均，由于仿真一次只存在一次白噪声样本，需要做大量样本观测才能得出功率谱密度近似值，当然也可以通过计算一次白噪声样本的自相关函数做 Fourier 变换得到其功率谱密度的近似值；由于零均值白噪声的平均功率为其方差，如果已知白噪声的带宽，也可以得到功率谱密度，同时也可以查阅有关功率谱密度估计的文献来估计功率谱密度。此题将其认为是一个已知值，不加以计算，所以输出最大$SNR_o(t_d)=\dfrac{2E}{N_0}=\dfrac{16}{3N_0}$。

无噪声时的输出信号为：

$$s_0(t)=s(t)*h(t)=s(t)*s(t)=F^{-1}\left[s(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]=F^{-1}\left[s^2(j\omega)\right]$$

即为两个三角波的线性卷积。

有噪声时的输出信号为：

$$x_o(t)=x_i(t)*h(t)=F^{-1}\left[x(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

其中 $x_i(t)=s(t)+n_i(t)$（$n_i(t)$为输入白噪声信号）。由于输出信号含有噪声信号，故无法给出其具体的表达式，但可以知晓输出信号是无噪声情况下加入噪声的信号。

当输入信号 $x_i(t)$ 的 SNR 设置为-20dB，可得以下图：

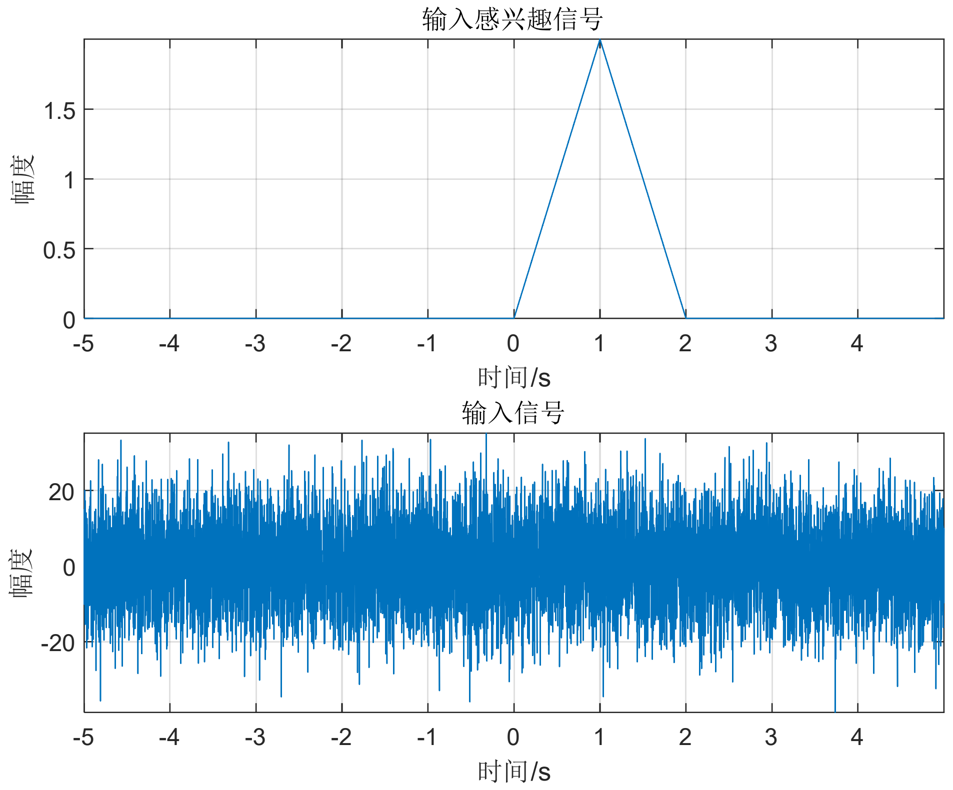

图 1.输入感兴趣信号与输入信号

由图可知，当 SNR=-20dB 时，信号功率是噪声平均功率的 $\frac{1}{100}$，可以看到信号被噪声淹没。

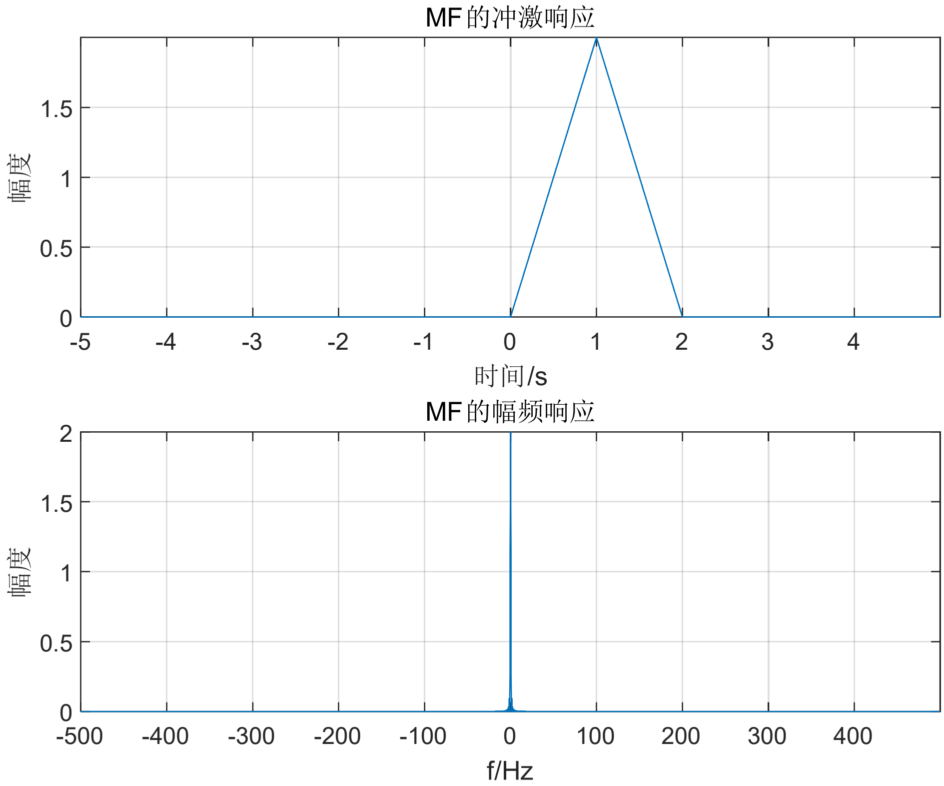

图 2.MF 冲激响应及幅频响应

理论上 MF 的冲激响应 $h(t)$ 与输入噪声 $n_i(t)$ 无关，只与输入感兴趣信号 $s(t)$ 有关，其幅频响应是一个 $\sin c$ 函数的平方的特性图。

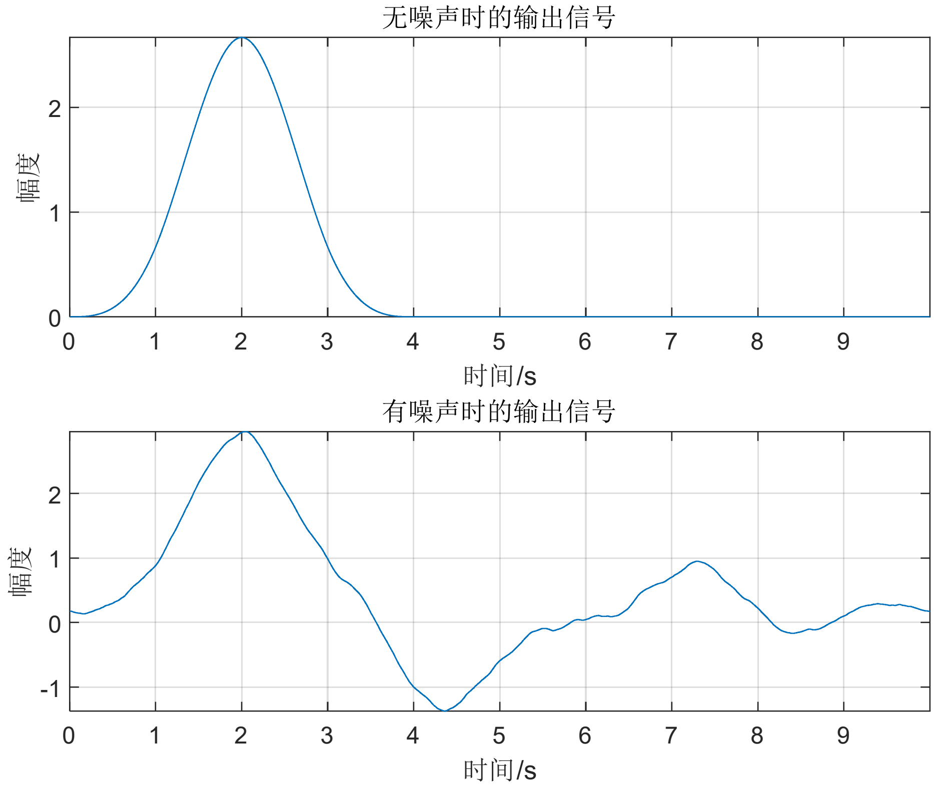

图 3.MF 输出信号

由于噪声存在，故 *MF* 输出信号有起伏变化，但其取最大值的位置不变，仍是理论上的 $t_d = 2s$ 处。

2.针对下列四种信号：

(1) $s_1(t) = AR_T(t)$

(2) $s_2(t) = AR_T(t)\sin\omega_0 t$

(3) $s_3(t) = AR_T(t)\sin(\omega_0 t + kt^2/2)$

(4) $s_4(t) = \sum_{k=0}^{N-1} Ac_k R_\tau(t-k\tau)\sin(\omega_0 t) \quad ,0 \le t \le T$

其中 $c_k \in \{-1,1\}$ 为伪随机序列（比如 *M* 序列）；$\tau=T/N$，*A* 为常数，

$$R_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

要求：分别给出上述四种信号相应的物理可实现的匹配滤波器的

(1)冲激响应 $h_k(t)$, k=1,2,3,4

(2)输出信号分量$s_{o_k}(t)$的波形，　　　k=1,2,3,4

(3) 改变信号的参数(ω_0, T, k, τ, N)值，观察$s_{o_k}(t)$，k=1,2,3,4 的变化，并说明你的发现或有何启示。

(4) 考虑输入白高斯噪声的影响，比如改变输入信噪比的大小（SNR：0～20dB），重复完成上述要求(3)。

(5)若输入同时还存在一个相应的延时信号，即$s_k(t-\tau_0)$，重复完成上述要求(4)。

解：

(1)第一种信号

根据 MF 理论可知：

MF 的冲激响应$h(t)$为输入感兴趣信号(此题为矩形信号)$s_1(t)$的翻转共轭，即有以下形式：

$$h(t) = Ks_1^*(t_d - t)$$

其中 K 是一个常数，可取 1，t_d为时延，为保证 MF 的冲激响应函数为因果信号。对于本题矩形信号来说，t_d可取大于等于其时宽 T 的数，但是由于数字系统可以利用系统中数据的存储性能，所以非因果系统可以实现，但是不能做到实时性，即有延时，故t_d取值并不是很重要，可以取 0。对于模拟系统，非因果系统的确无法实现，此题，取$t_d = T$，从而保证系统的因果性，又因为输入感兴趣信号$s_1(t)$为实信号，故可得：

$$h(t) = s_1(T-t) = s_1(t) = AR_T(t)$$

此题取 A=1，T=1。

由此可得下图：

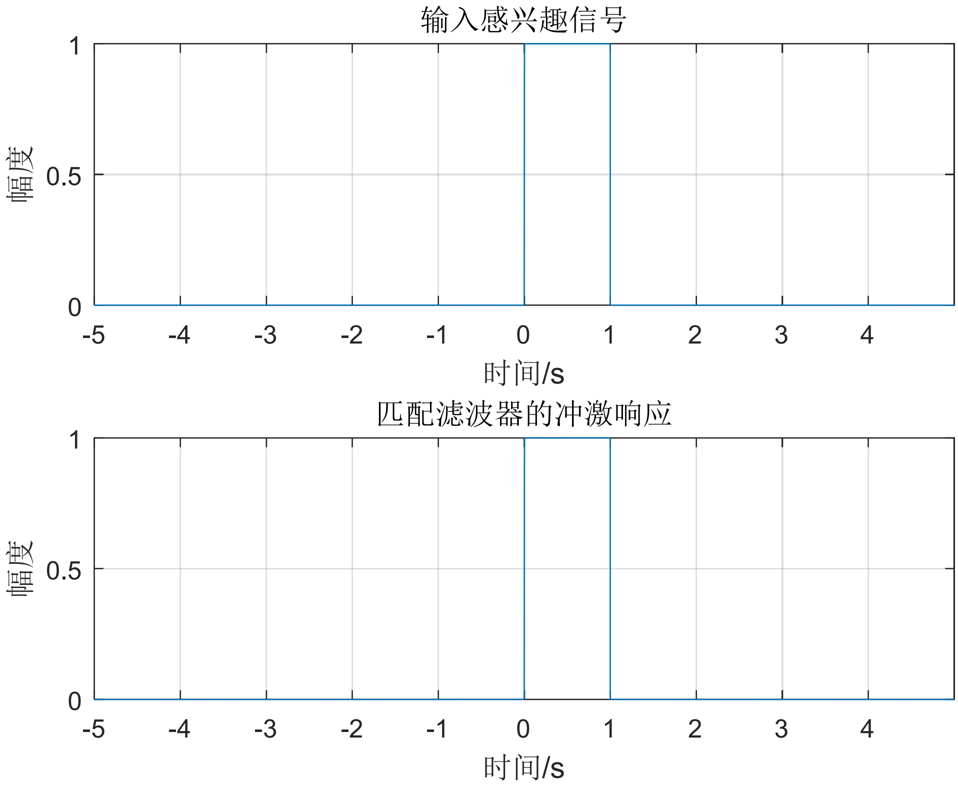

图 4.输入感兴趣信号与 MF 的冲激响应

无噪声时的输出信号为：

$$s_0(t)=s_1(t)*h(t)=s_1(t)*s_1(t)=F^{-1}\left[s_1(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]=F^{-1}\left[s_1^{\ 2}(j\omega)\right]$$

即为矩形信号的线性卷积，是一个三角波。

有噪声时的输出信号为：

$$x_o(t)=x_i(t)*h(t)=F^{-1}\left[x(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

其中$x_i(t)=s_1(t)+n_i(t)$($n_i(t)$为输入白噪声信号)。由于输出信号含有噪声信号，故无法给出其具体的表达式，但可以知晓输出信号是无噪声情况下的三角波信号加入噪声的信号。

可得下图：

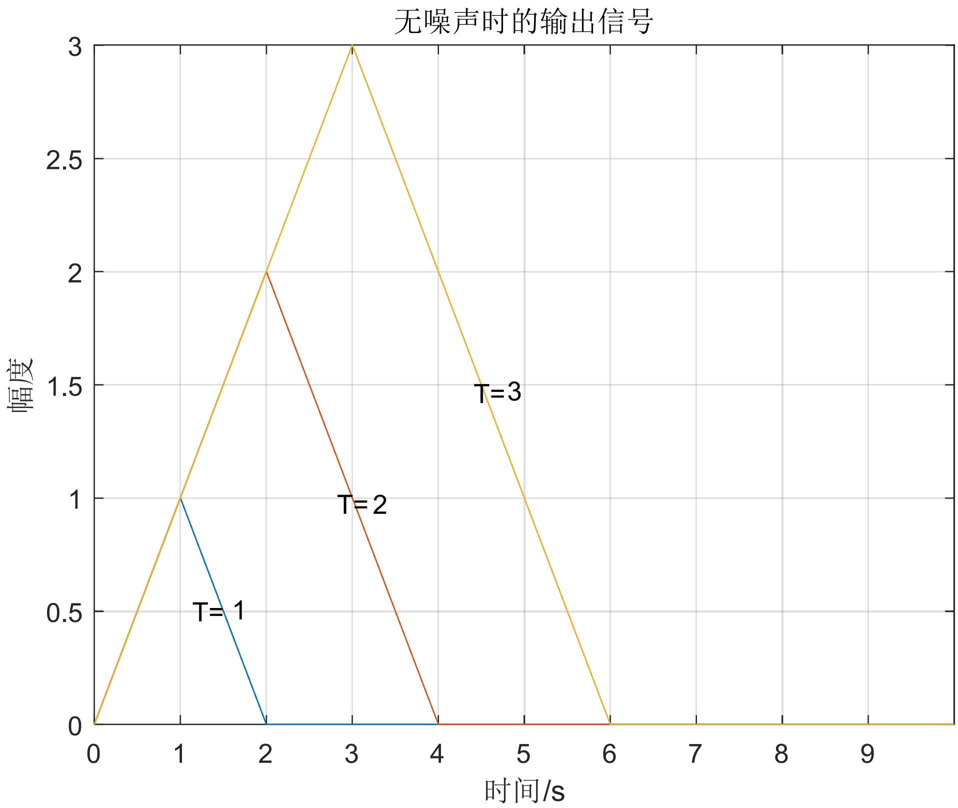

图 5.未加噪声 T=1,2,3s 时的 MF 输出

通过改变脉冲信号的时宽 T，令 T=1,,2,3*s* 变化，可以从匹配滤波器输出看到输出的最大值随脉冲信号时宽 T 线性增大，输出信号始终为三角波，且最大值取值对应于 t_d=T 处。

考虑输入有高斯白噪声，令 SNR=0,10,20dB 变化，可得输出：

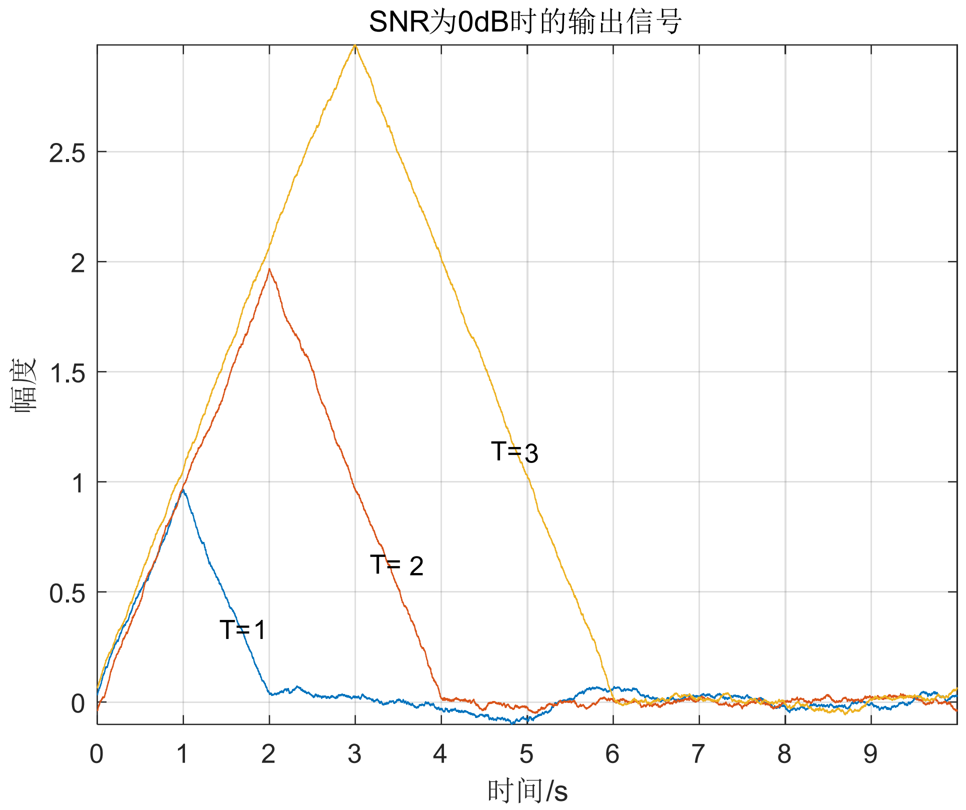

图 6.SNR 为 0dB 时的 MF 输出

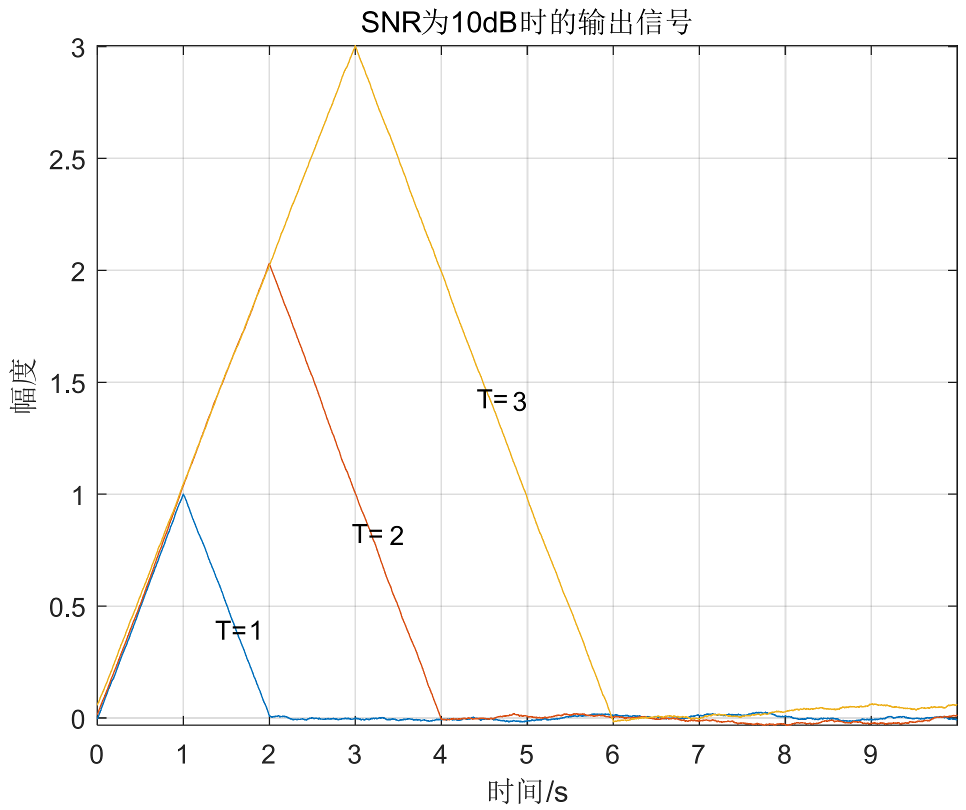

图 7.SNR 为 10dB 时的 MF 输出

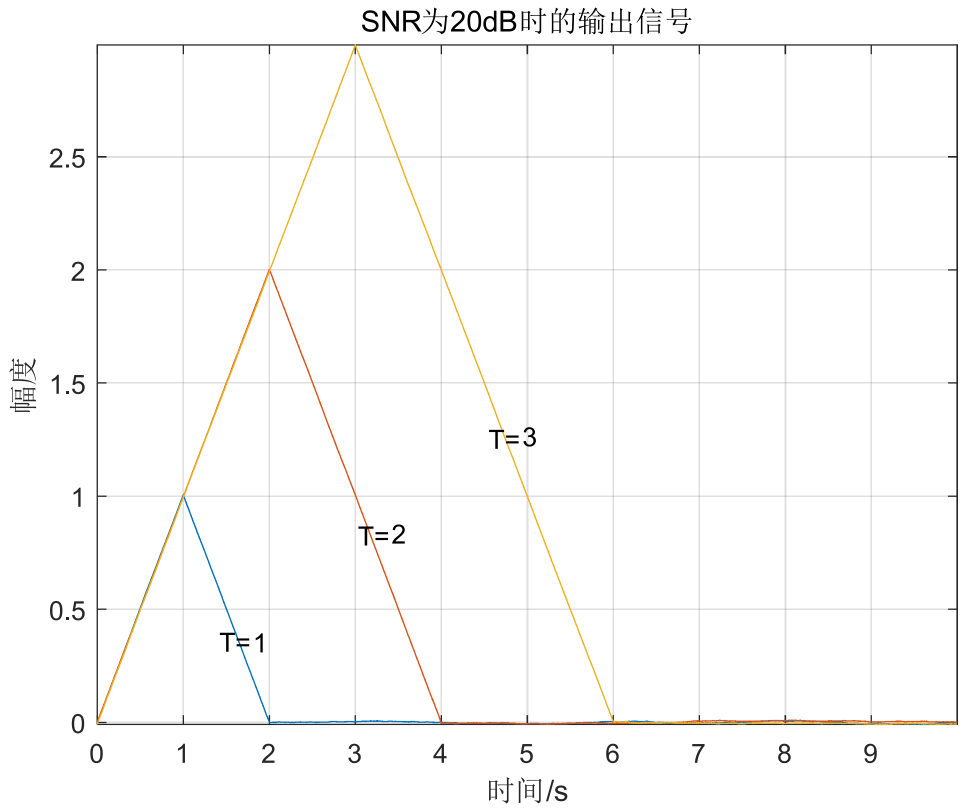

图 8.SNR 为 20dB 时的 MF 输出

由图 6 到图 8 对比可得，SNR 越大，噪声对输出波形的影响越小，但不影响取最大值的位置 t_d=T；输出波形大致保持为三角波形状。

考虑延迟信号，很明显当 $\tau_0 \geq 2T$ 时，延迟信号与原信号输出响应互不干扰，没有叠加部分。这里只讨论 $\tau_0 < 2T$ 的情况。令 τ_0=0.8T，并且使 SNR=0,10,20dB 变化，可得输出：

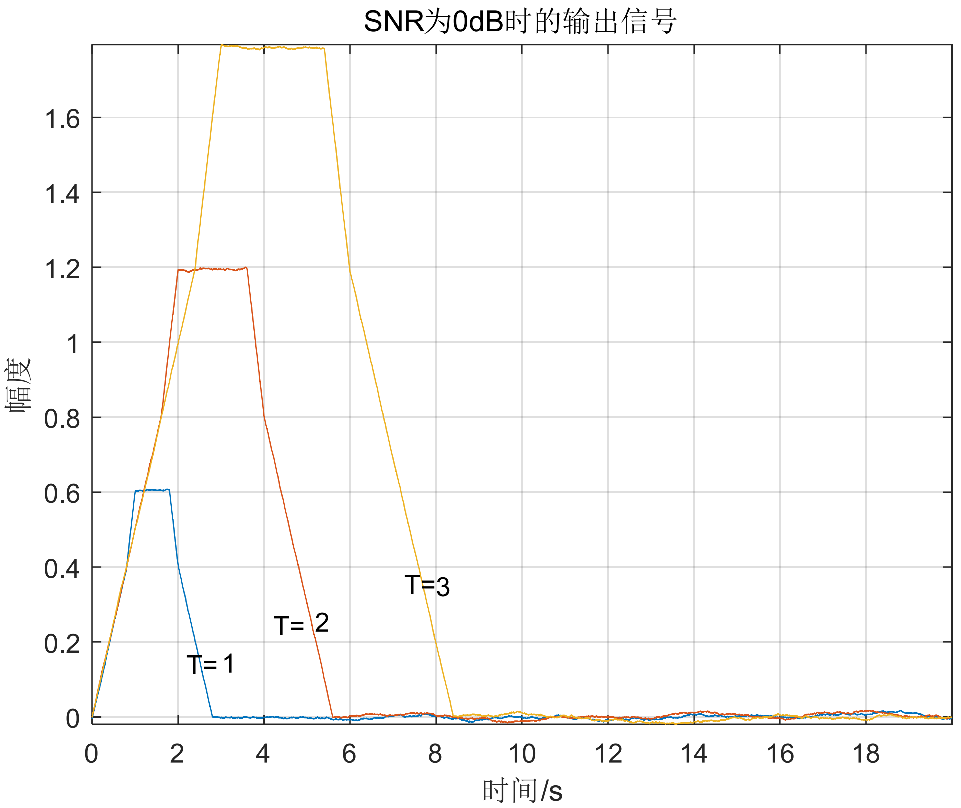

图 9. SNR 为 0dB 时的 MF 输出

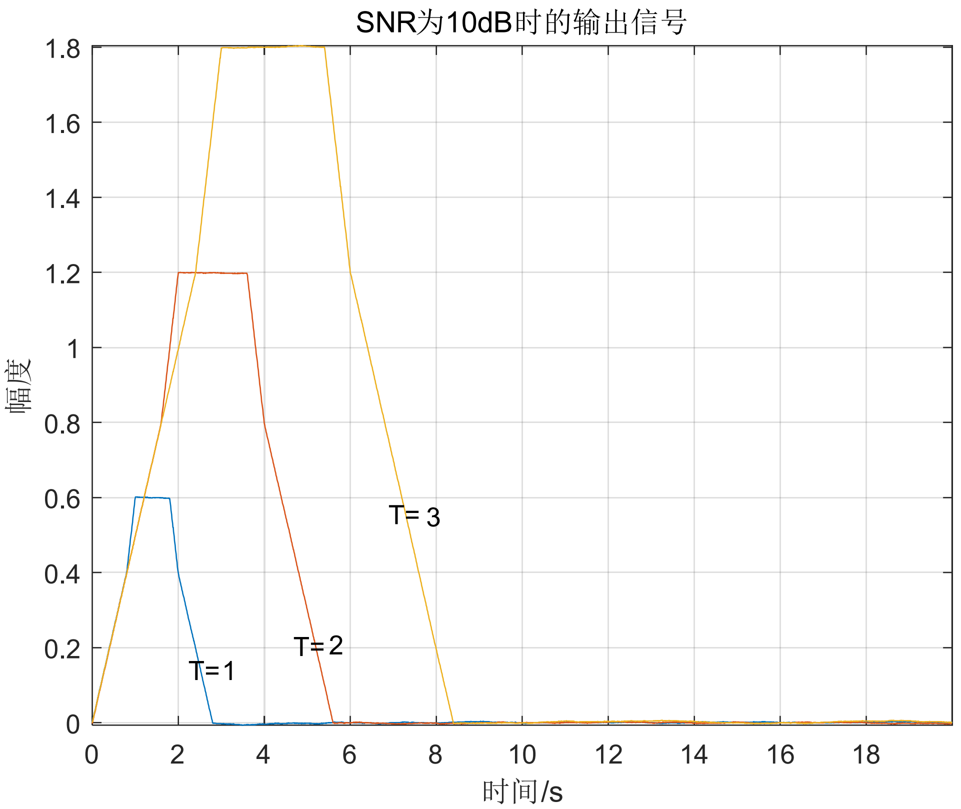

图 10.SNR 为 10dB 时的 MF 输出

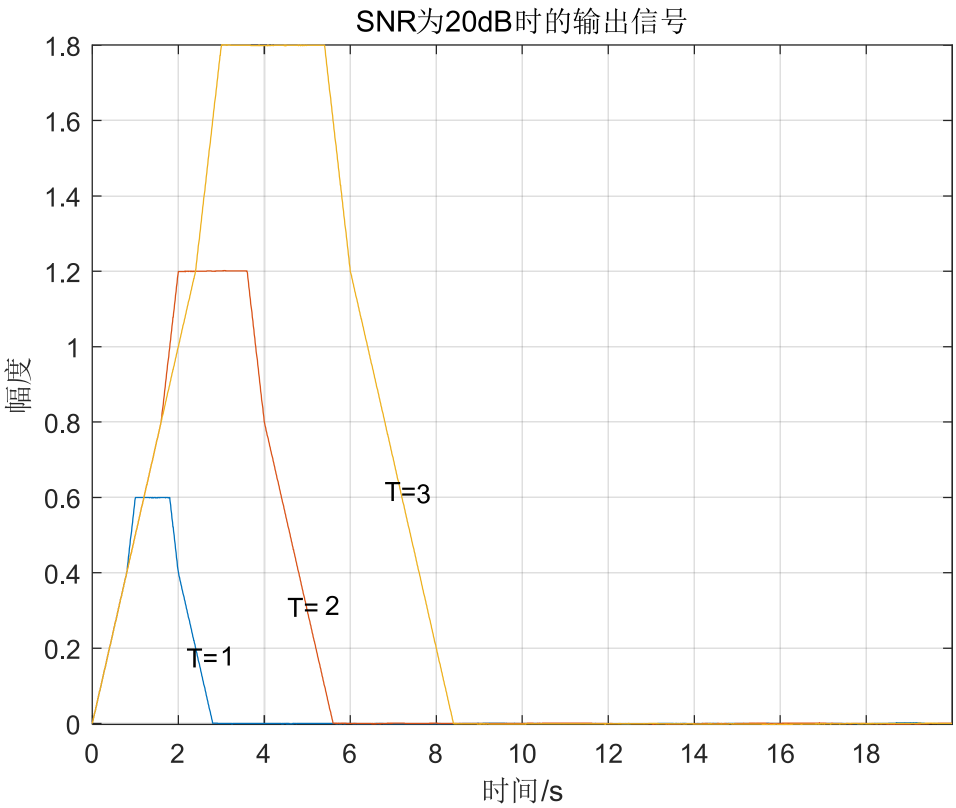

图 11.SNR 为 20dB 时的 MF 输出

令 $\tau_0=T$,并且使 SNR=0,10,20dB 变化，可得输出：

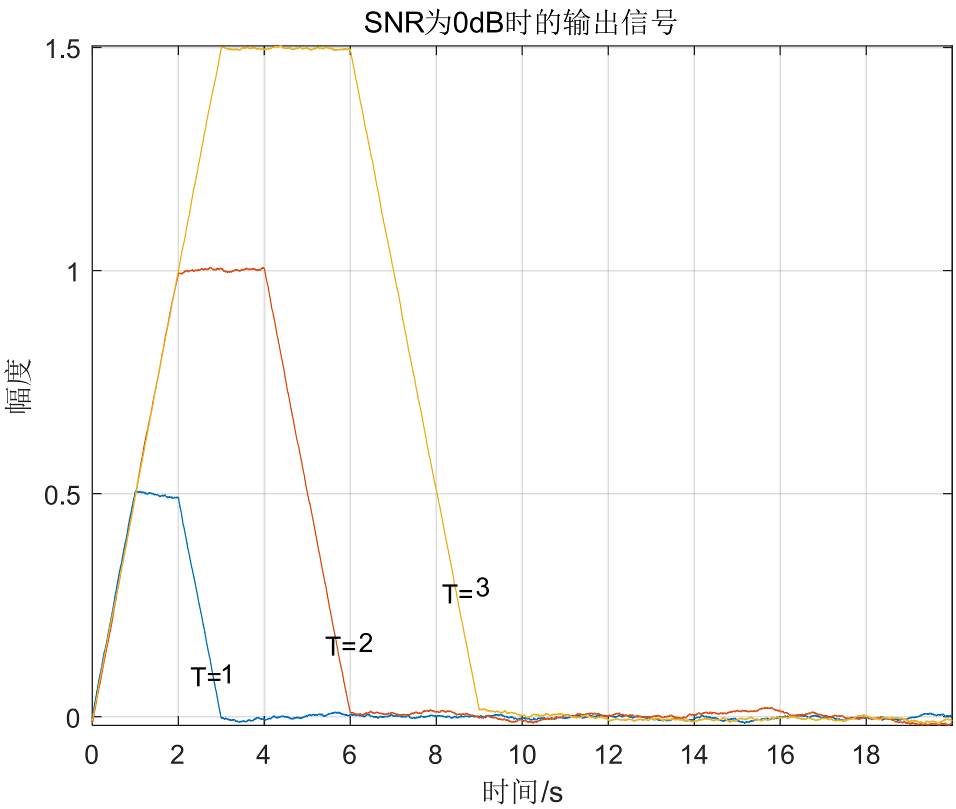

图 12.SNR 为 0dB 时的 MF 输出

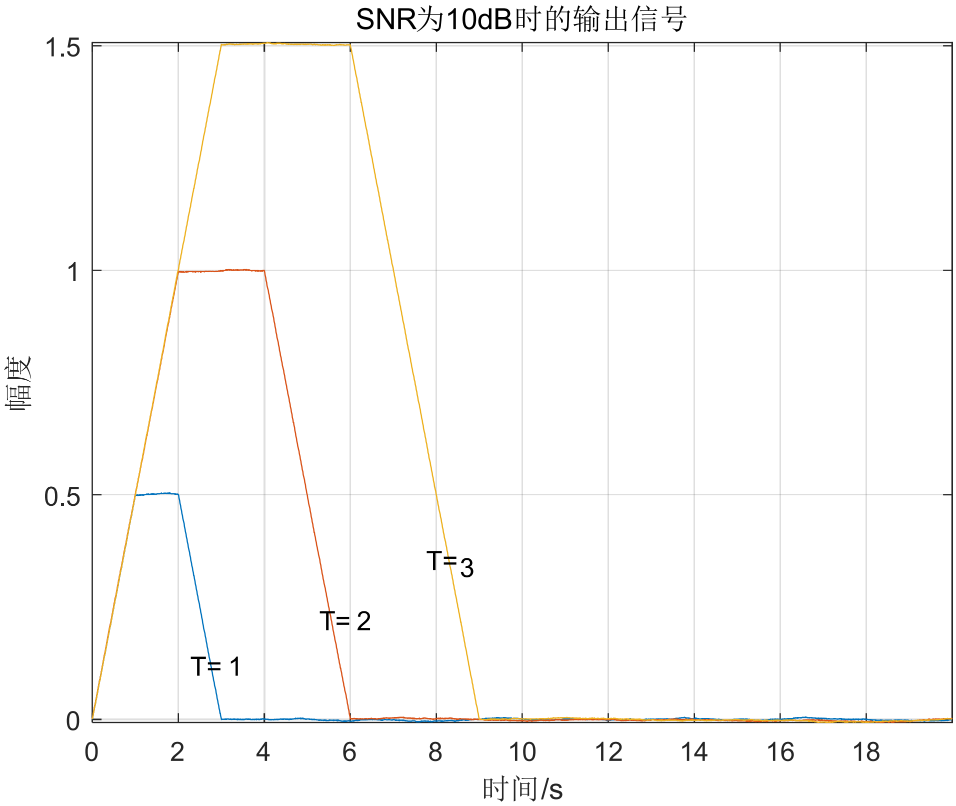

图 13.SNR 为 10dB 时的 MF 输出

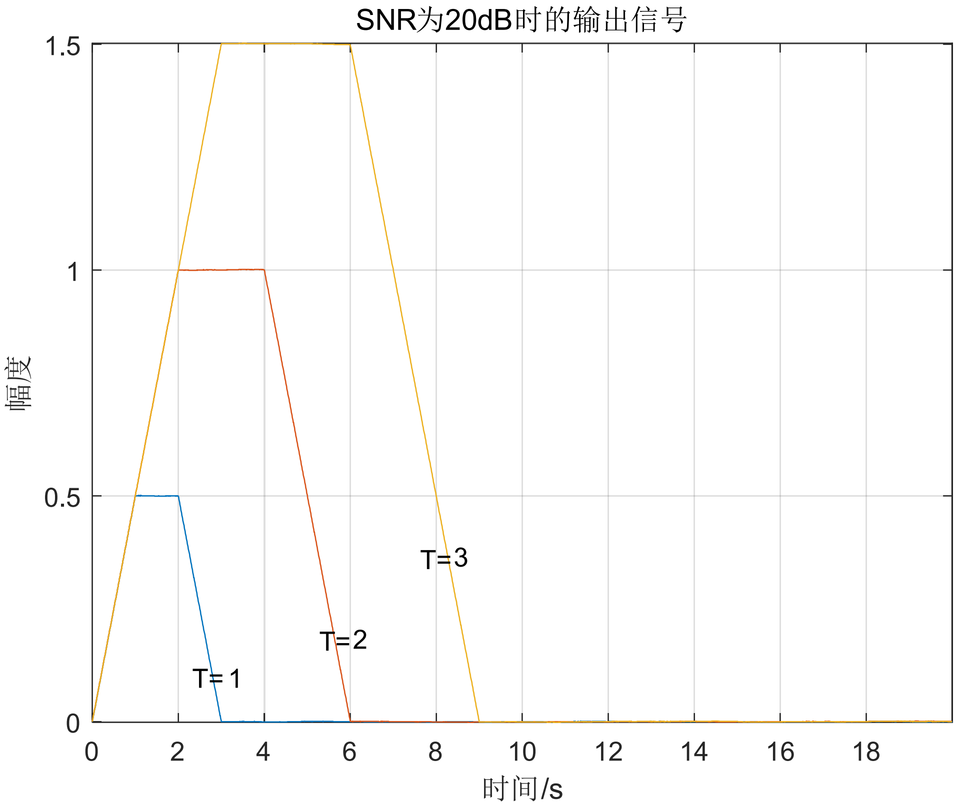

图 14.SNR 为 20dB 时的 MF 输出

令 τ_0=1.2T ,并且使 SNR=0,10,20dB 变化，可得输出：

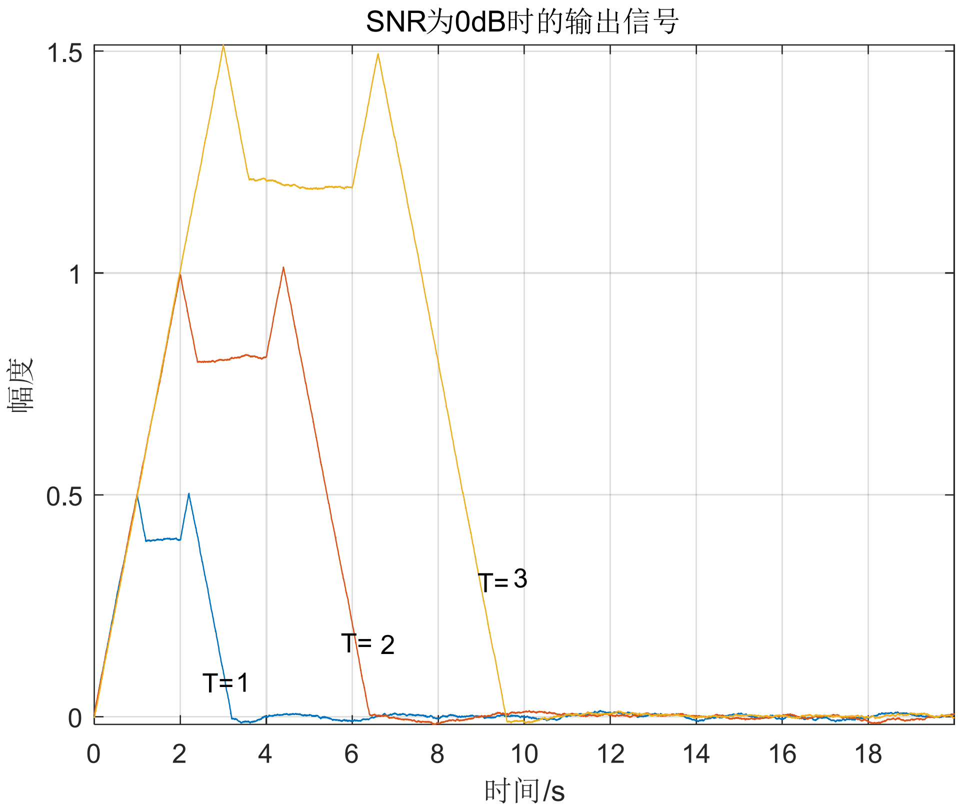

图 15.SNR 为 0dB 时的 MF 输出

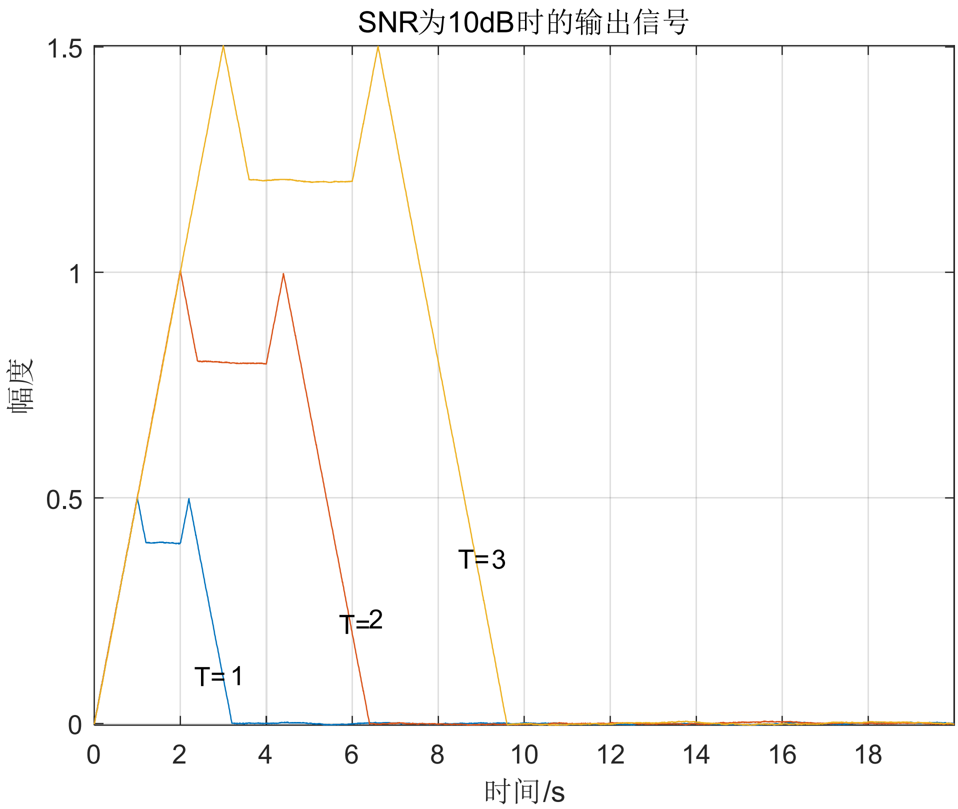

图 16.SNR 为 10dB 时的 MF 输出

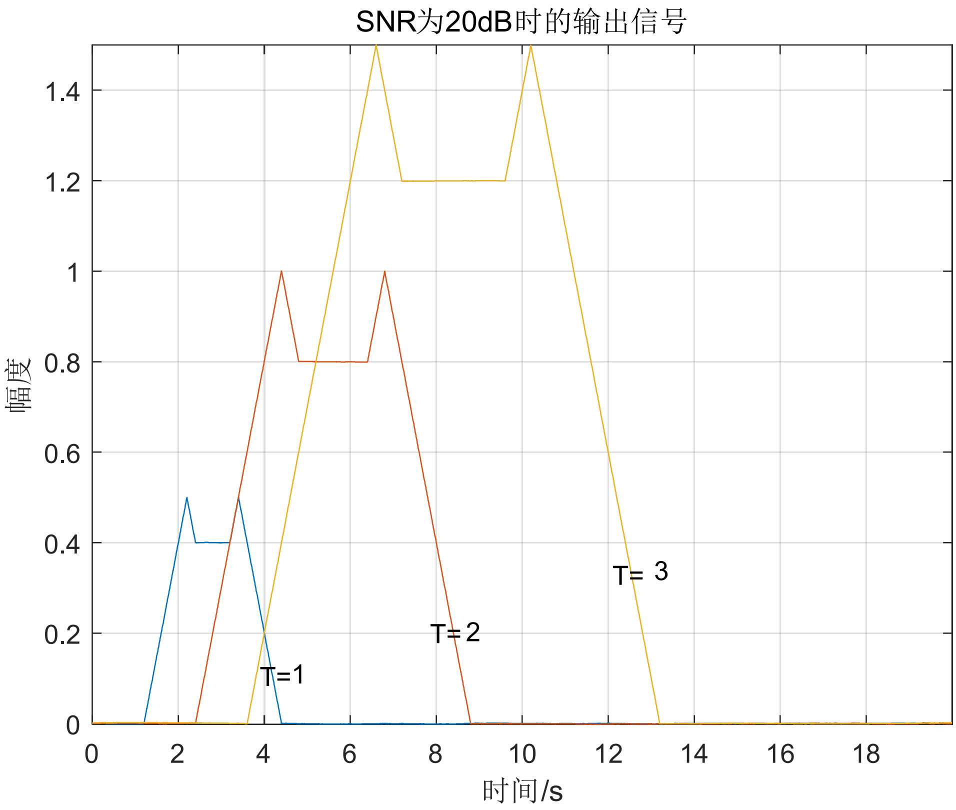

图 17.SNR 为 20dB 时的 *MF* 输出

由图 9 到图 17 对比可得，SNR 越大，噪声对输出波形的影响越小。此时输出有混叠产生，不能分辨原信号及其延迟信号的峰值，主要原因是时延比原信号时宽 T 小，如果时延比原信号时宽 T 大，则可明显分辨原信号及其延迟信号的峰值。

(2) 第二种信号

根据 MF 理论可知：

MF 的冲激响应$h(t)$为输入感兴趣信号(此题为脉冲调制正弦波信号)$s_2(t)$的翻转共轭，即有以下形式：

$$h(t)=Ks_2^*(t_d-t)$$

其中 K 是一个常数，可取 1，t_d为时延，为保证 *MF* 的冲激响应函数为因果信号。对于本题脉冲调制正弦波信号来说，t_d可取大于其时宽 T 的数，但是由于数字系统可以利用系统中数据的存储性能，所以非

因果系统可以实现，但是不能做到实时性，即有延时，故t_d取值并不是很重要，可以取 0。对于模拟系统，非因果系统的确无法实现，此题，取$t_d = T$，从而保证系统的因果性，又因为输入感兴趣信号$s_2(t)$为实信号，故可得：

$$h(t) = s_2(T-t) = AR_T(T-t)\sin\left[\omega_0(T-t)\right] = AR_T(t)\sin\left[\omega_0(T-t)\right]$$

此题取 A=1,T=1s， $f_0 = 10HZ$ 。

由此可得下图：

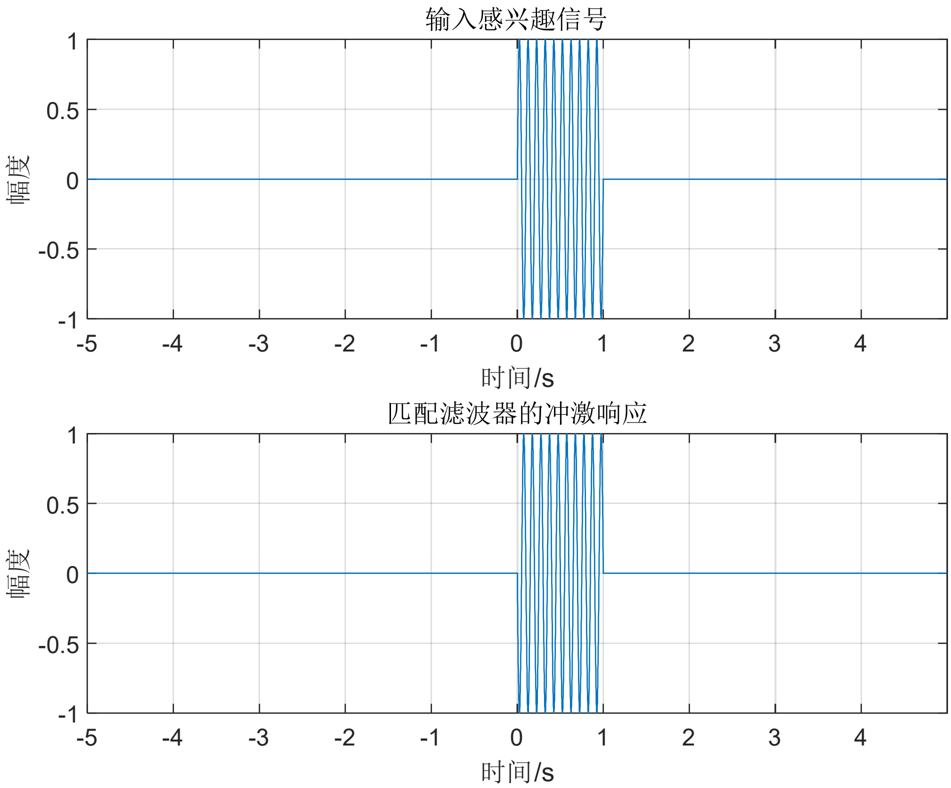

图 18.输入感兴趣信号与 *MF* 的冲激响应

不含噪声时的输出信号为：

$$s_o(t) = s_2(t) * h(t) = F^{-1}\left[s(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

含噪声时的输出信号为：

$$x_o(t) = x_2(t) * h(t) = F^{-1}\left[x(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

可得下图：

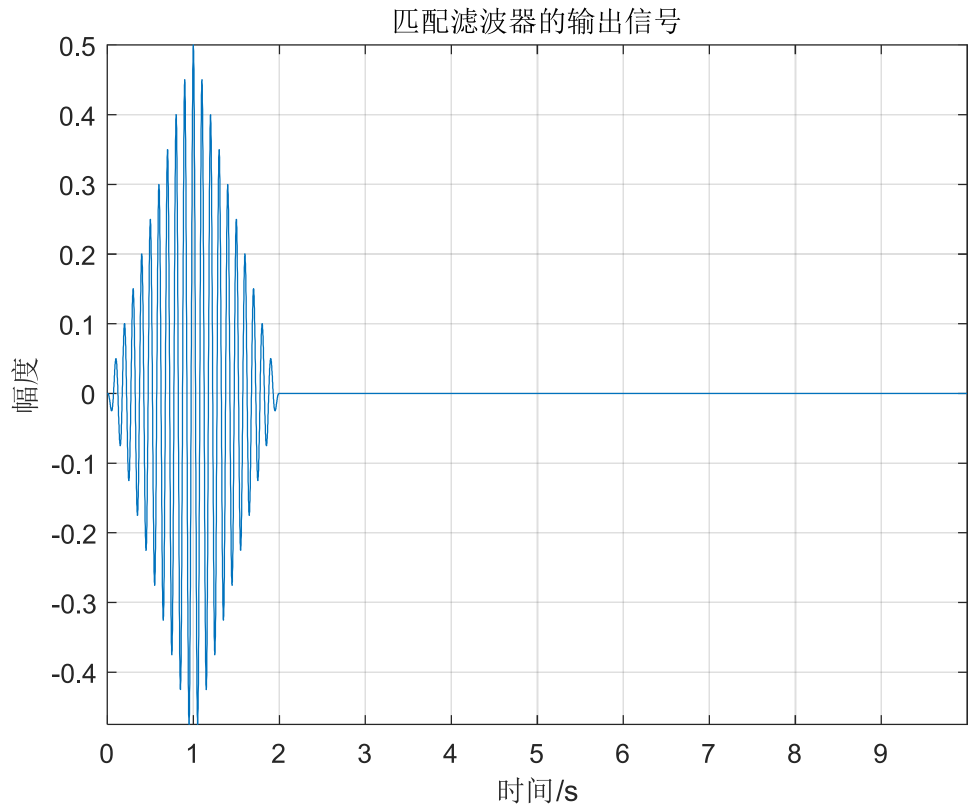

图 19.未加噪声 T=1s,f_0=10HZ 时 MF 的输出信号

通过改变脉冲调制正弦波信号的时宽 T，令 T=2,3s 变化，可以从匹配滤波器输出看到输出的最大值随脉冲信号时宽 T 正比例增大，且最大值取值对应于 t_d=T 处，这点与(1)相同。

通过改变脉冲调制正弦波信号的频率 f_0，令 $f_0=20,30HZ$ 变化，可得输出：

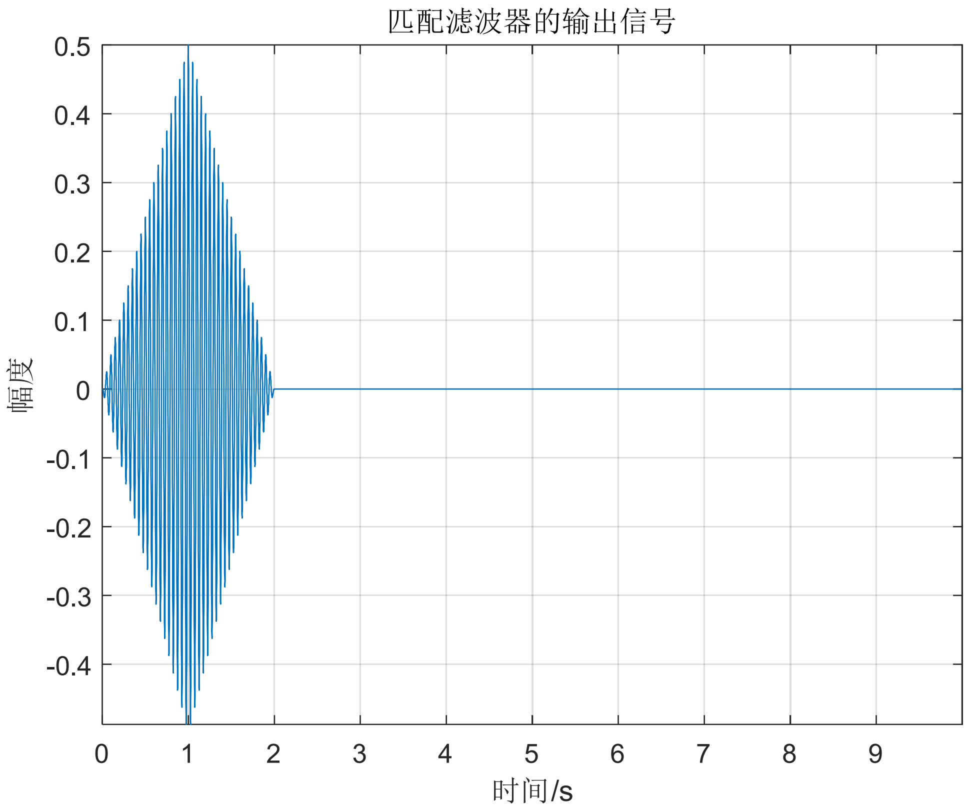

图 20.未加噪声 T=1*s*,f_0=20*HZ* 时 MF 的输出信号

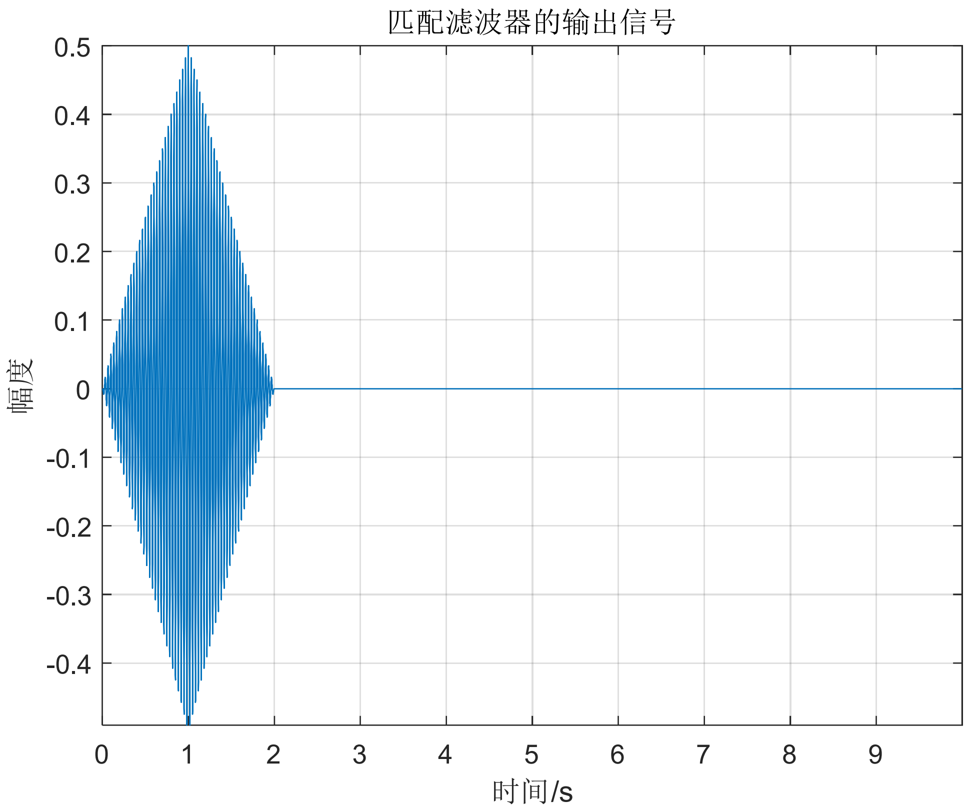

图 21.未加噪声 T=1*s*,f_0=30*HZ* 时 MF 的输出信号

由图 20,21 可知，改变脉冲调制正弦波信号的频率 f_0，匹配滤波

器输出的最大值与取最大值的时刻均没有影响，只影响了输出结果调制的正弦波信号的频率。

考虑输入有高斯白噪声，令 SNR=0,,10,20dB 变化，可得输出：

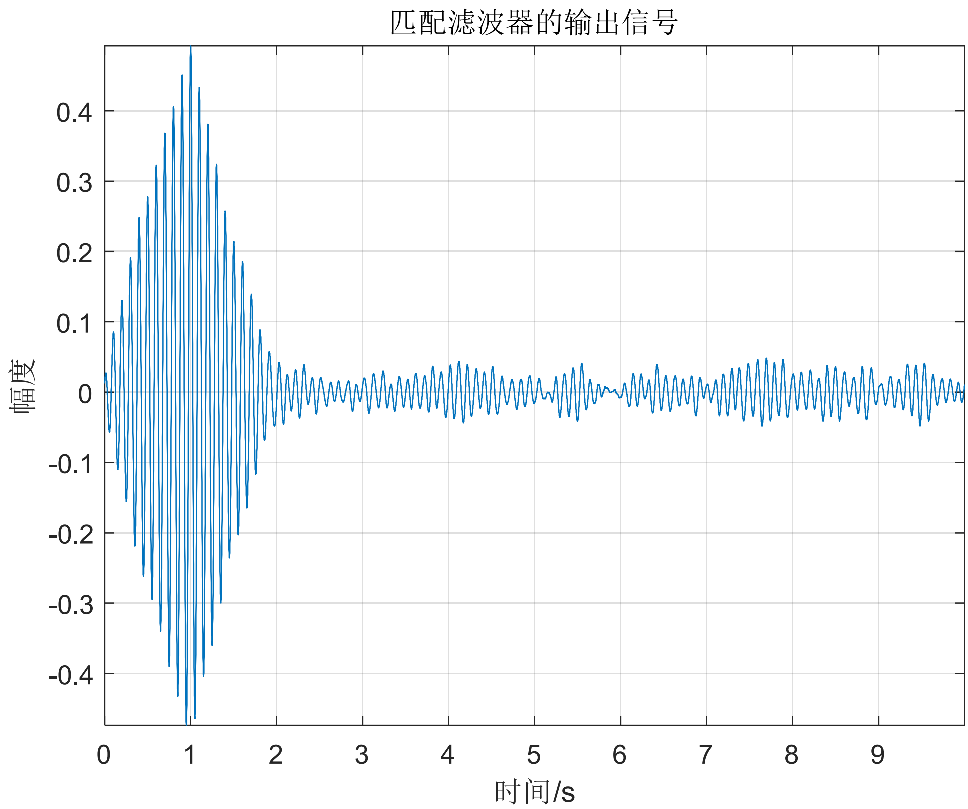

图 22.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

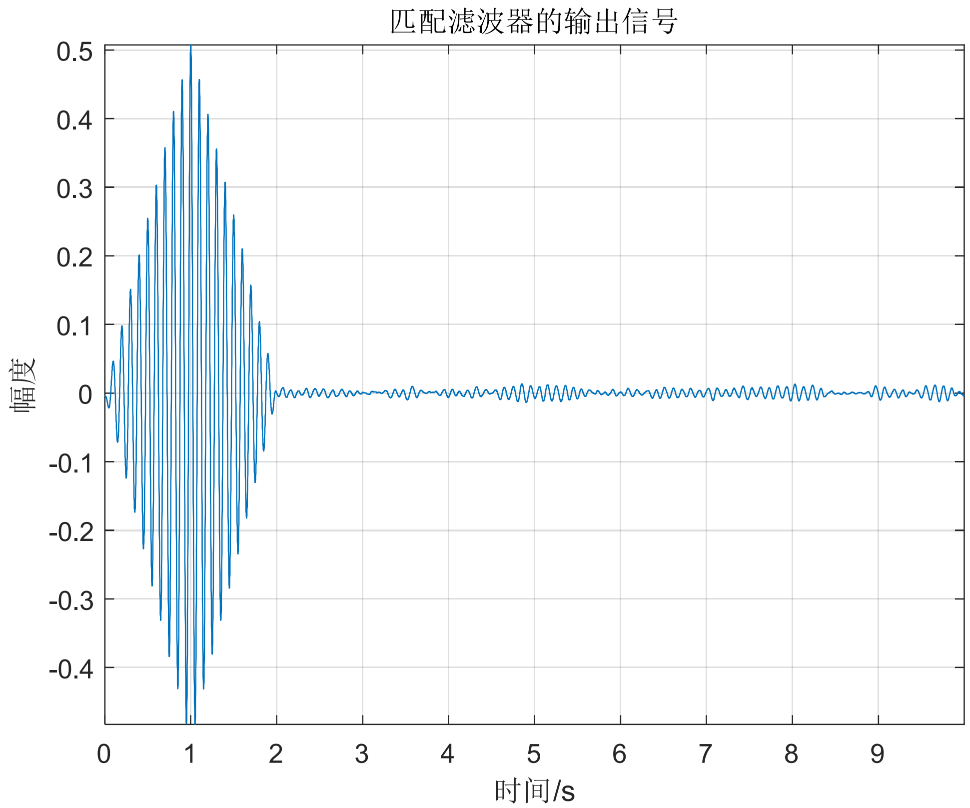

图 23.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 10dB 时的 MF 输出

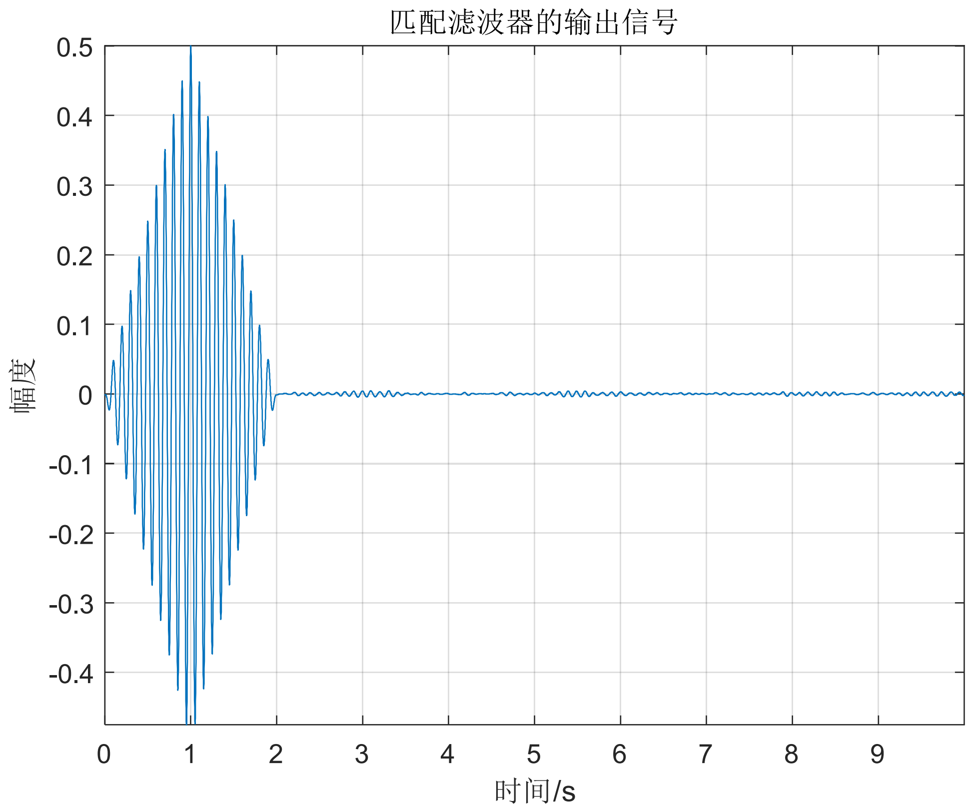

图 24.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 20dB 时的 MF 输出

由图 22 到图 24 对比可得，SNR 越大，噪声对输出波形的影响

越小，但不影响取最大值的位置 t_d=T。改变 T 与 f_0 的效果同以上分析，这里不再赘述。

考虑延迟信号，考虑延迟信号，很明显当 $\tau_0 \geq 2T$ 时，延迟信号与原信号输出响应互不干扰，没有叠加部分。这里只讨论 $\tau_0 < 2T$ 的情况。令 τ_0=$0.8T$,可得输出：

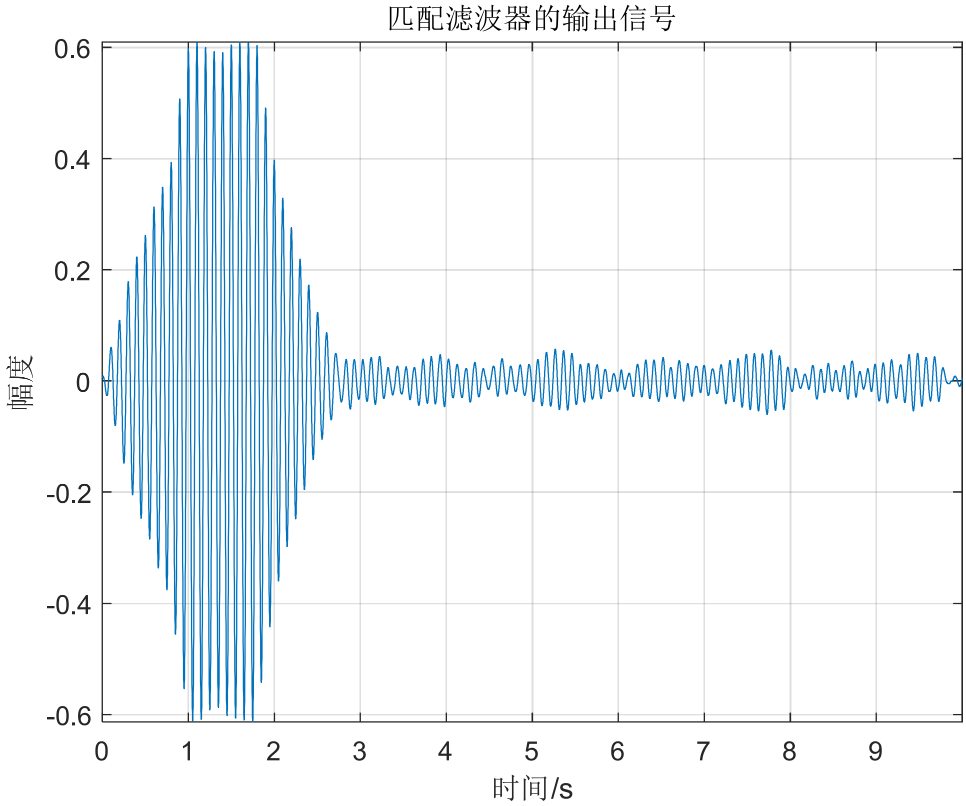

图 25.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

令 τ_0=T ,可得输出：

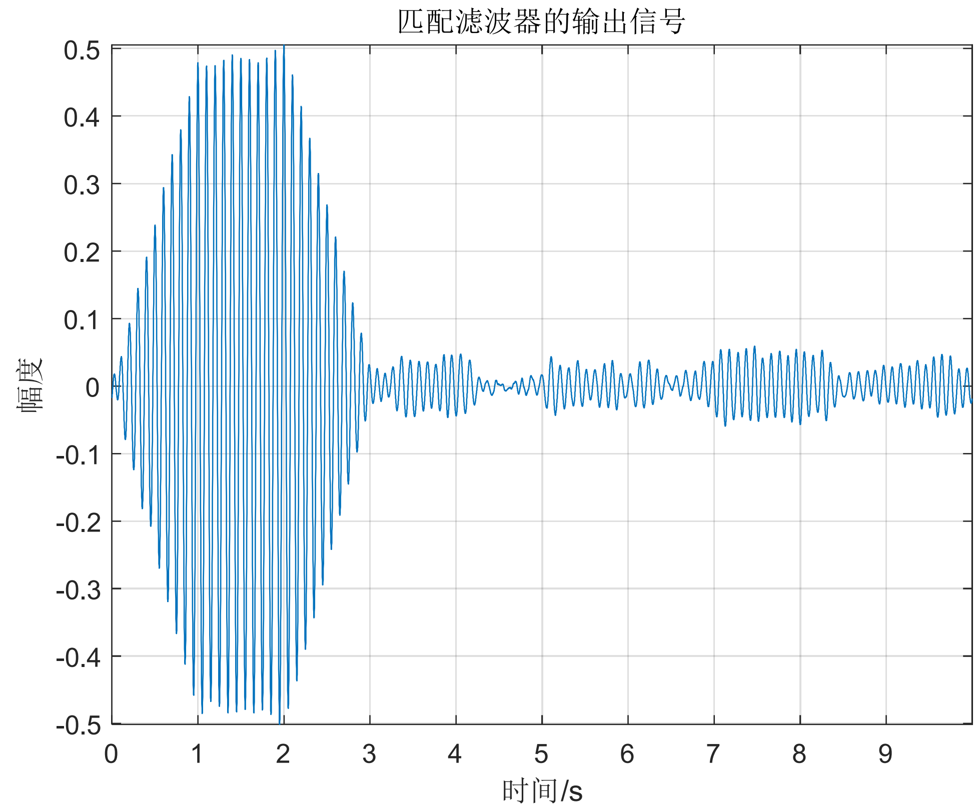

图 26.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

令 τ_0=1.2T ,可得输出：

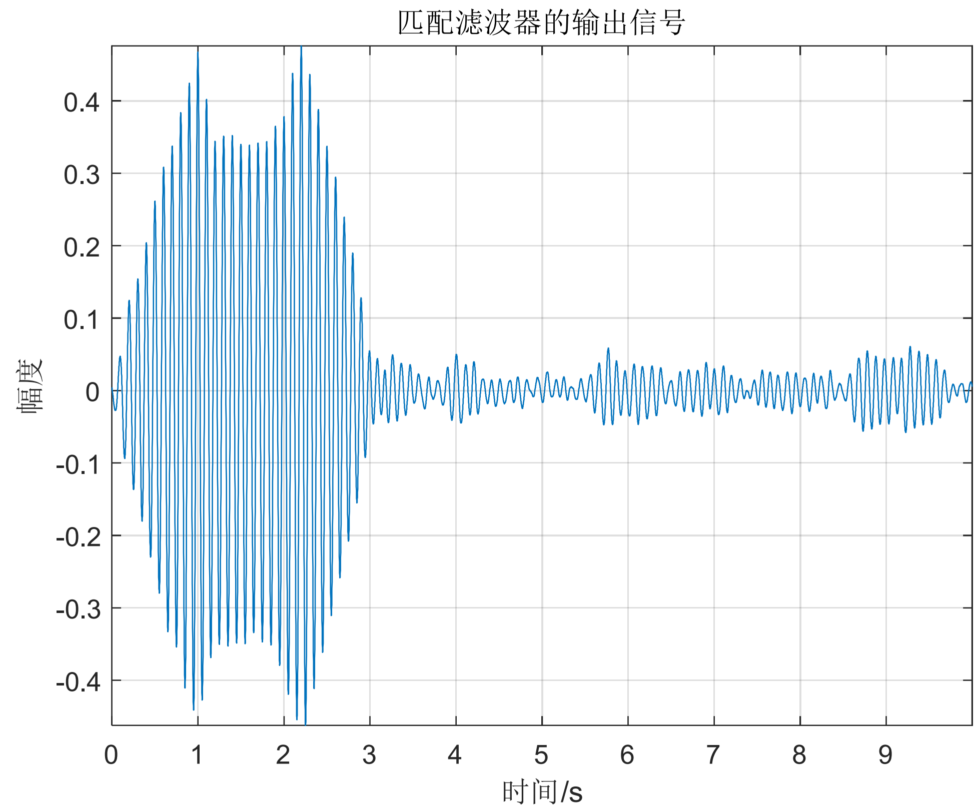

图 27.T=1s,f_0=10HZ,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

由图 25 与 26 可得，此时输出有混叠产生，不能分辨原信号及其延迟信号的峰值，主要原因是时延比原信号时宽 T 小。如果像图 27，使时延大于时宽 T，则可以分辨出原信号与延迟信号。改变其他参数的结果同上分析，不再赘述。

(3) 第三种信号

根据 MF 理论可知：

MF 的冲激响应$h(t)$为输入感兴趣信号(此题为 *chirp* 信号)$s_3(t)$的翻转共轭，即有以下形式：

$$h(t)=Ks_3^*(t_d-t)$$

其中 K 是一个常数，可取 1，t_d为时延，为保证 *MF* 的冲激响应函数为因果信号。对于本题 *chirp* 信号来说，t_d可取大于等于其时宽的数，但是由于数字系统可以利用系统中数据的存储性能，所以非因果系统可以实现，但是不能做到实时性，即有延时，故t_d取值并不是很重要，可以取 0。对于模拟系统，非因果系统的确无法实现，此题，取$t_d=T$，从而保证系统的因果性，又因为输入感兴趣信号$s_3(t)$为实信号，故可得：

$$h(t)=s_3(T-t)=AR_T(T-t)\sin\left[\omega_0(T-t)+k(T-t)^2/2\right]=AR_T(t)\sin\left[\omega_0(T-t)+k(T-t)^2/2\right]$$

此题取 A=1,T=1,f_0=10Hz,k=100 rad/s。

由此可得下图：

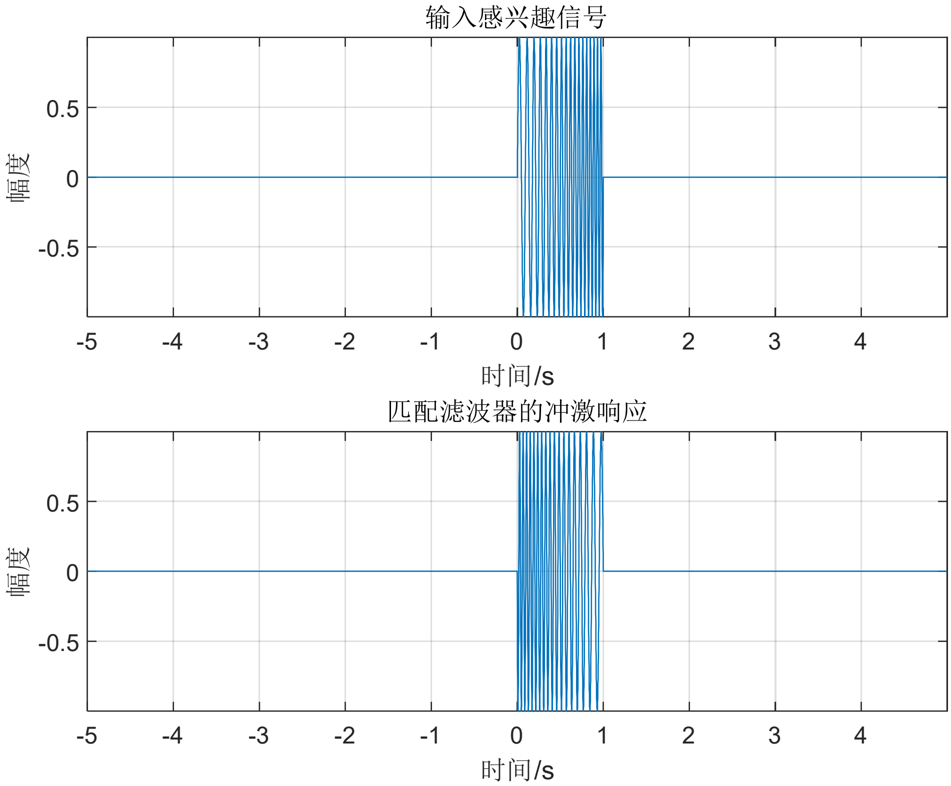

图 28.输入感兴趣信号与 MF 的冲激响应

无噪声时的输出信号为：

$$s_o(t)=s_3(t)*h(t)=F^{-1}\left[s(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

有噪声时的输出信号为：

$$x_o(t)=x_i(t)*h(t)=F^{-1}\left[x(j\omega)\cdot H(j\omega)\right]$$

其中 $x_i(t)=s_3(t)+n_i(t)$（$n_i(t)$ 为输入白噪声信号)。由于输出信号含有噪声信号，故无法给出其具体的表达式。

可得下图：

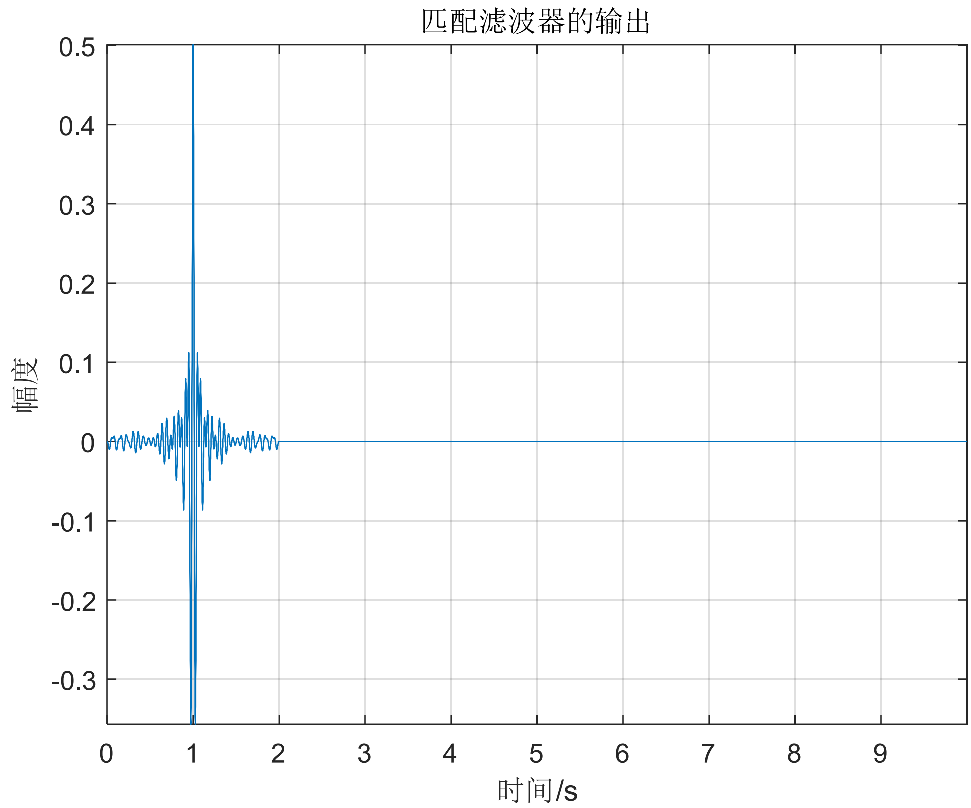

图 29.未加噪声的 MF 的输出信号

通过改变 *chirp* 信号的时宽 T，令 T=2,3 变化，可以从匹配滤波器输出看到输出的最大峰值随 *chirp* 信号时宽 T 正比例增大，且最大值取值对应于 $t_d=T$ 处，分析方法同(1)，这里不赘述。

通过改变 *chirp* 信号的频率 f_0，令 $f_0 = 20,30HZ$ 变化，可以从匹配滤波器看到输出信号只是频率发生了改变，最大峰值的位置及最大值并没有改变，分析方法同(2)，这里不赘述。

通过改变 *chirp* 信号的调频率 k，令 $k = 200,300\,rad/s$ 变化，可得到下图：

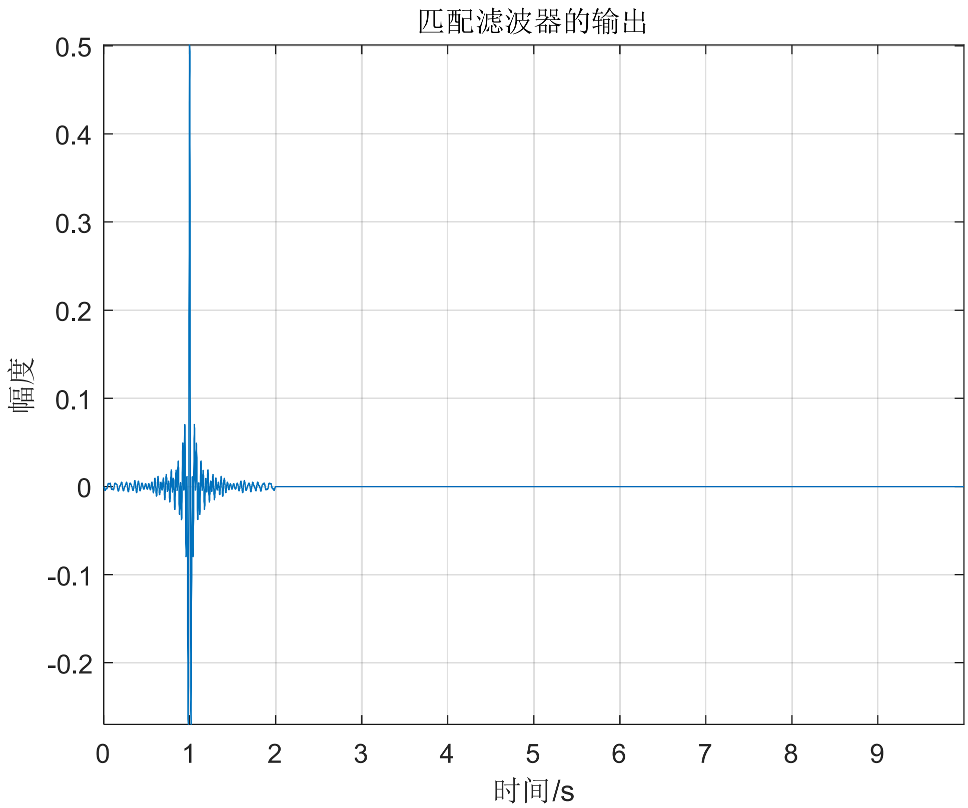

图 30.T=1s,f_0=10Hz,k=200rad/s 时的 MF 输出

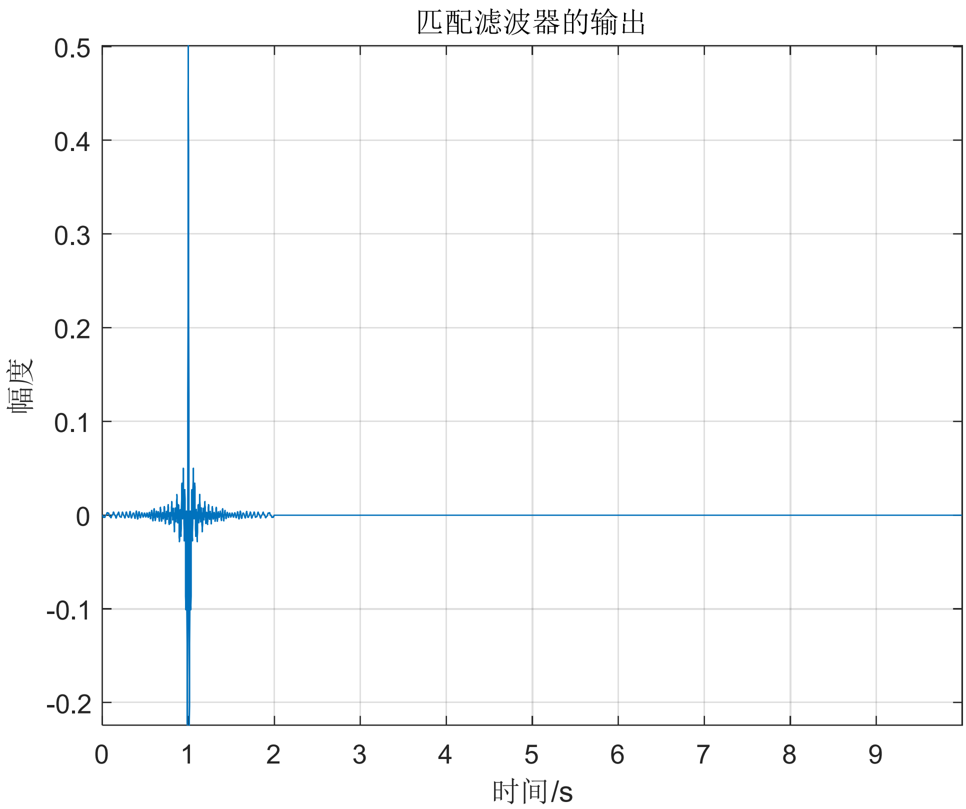

图 31.T=1s,f_0=10Hz,k=300rad/s 时的 MF 输出

由图 30,31 可知，改变调频率 k，输出信号只是频率发生变化，

最大值的位置及最大值并没有改变，输出信号包络也没改变,信号能量更集中于$t_d = T$处。

考虑输入有高斯白噪声，令 SNR=0,10,20dB 变化，可得输出：

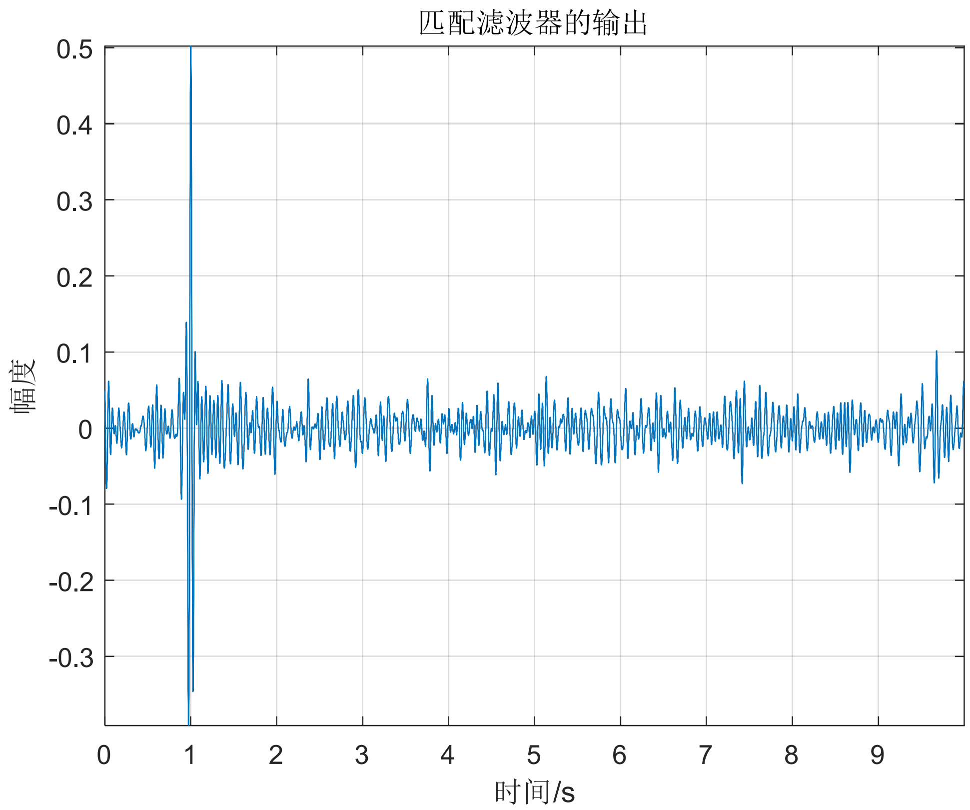

图 32.T=1*s*,f_0=10*HZ*, *k*=100*rad*/*s*,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

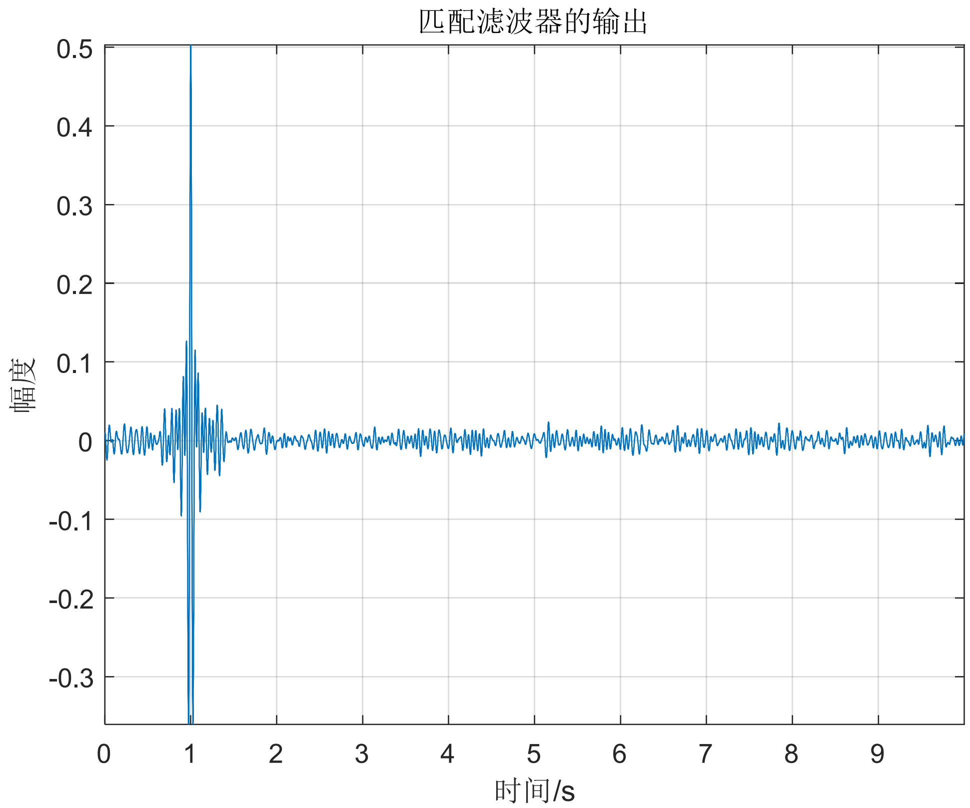

图 33.T=1s,f_0=10HZ, k=100rad/s,SNR 为 10dB 时的 MF 输出

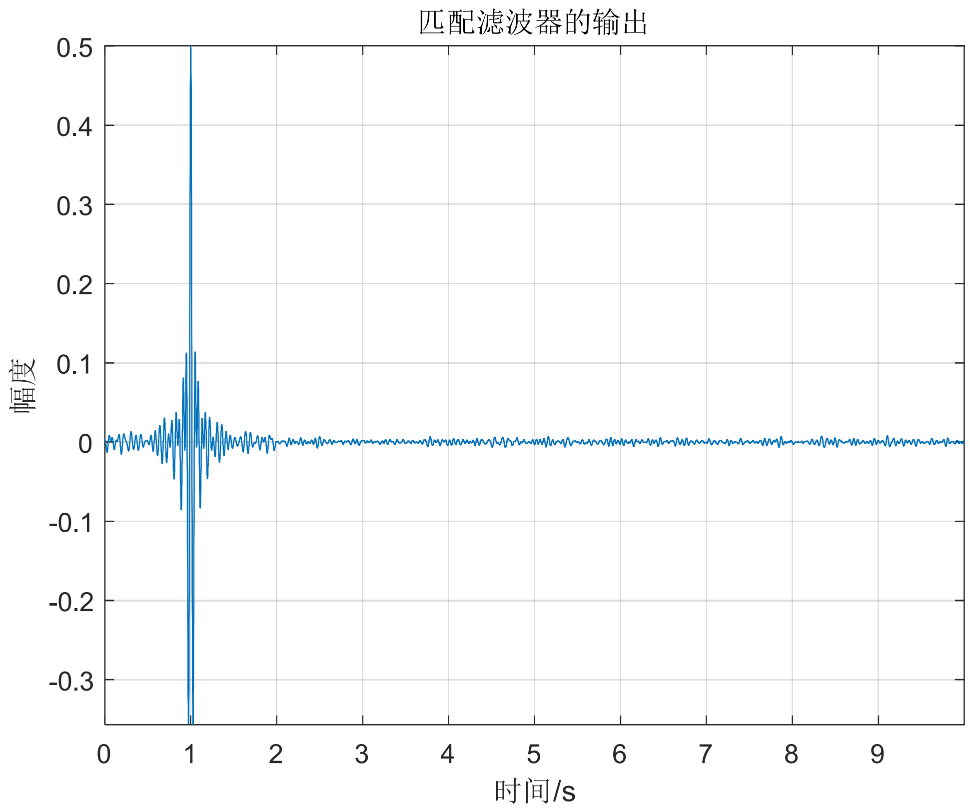

图 34.T=1s,f_0=10HZ, k=100Hz/s,SNR 为 20dB 时的 MF 输出

由图 32 至 34 可知，SNR 越大，噪声对输出波形的影响越小，

但不影响取最大值的位置 $t_d=T$。改变 T,f_0,k 的效果同以上分析，这里不再赘述。

考虑延迟信号，很明显当 $\tau_0 \geq 2T$ 时，延迟信号与原信号输出响应互不干扰，没有叠加部分。这里只讨论 $\tau_0 < 2T$ 的情况。令 $\tau_0=0.8T$，可得输出：

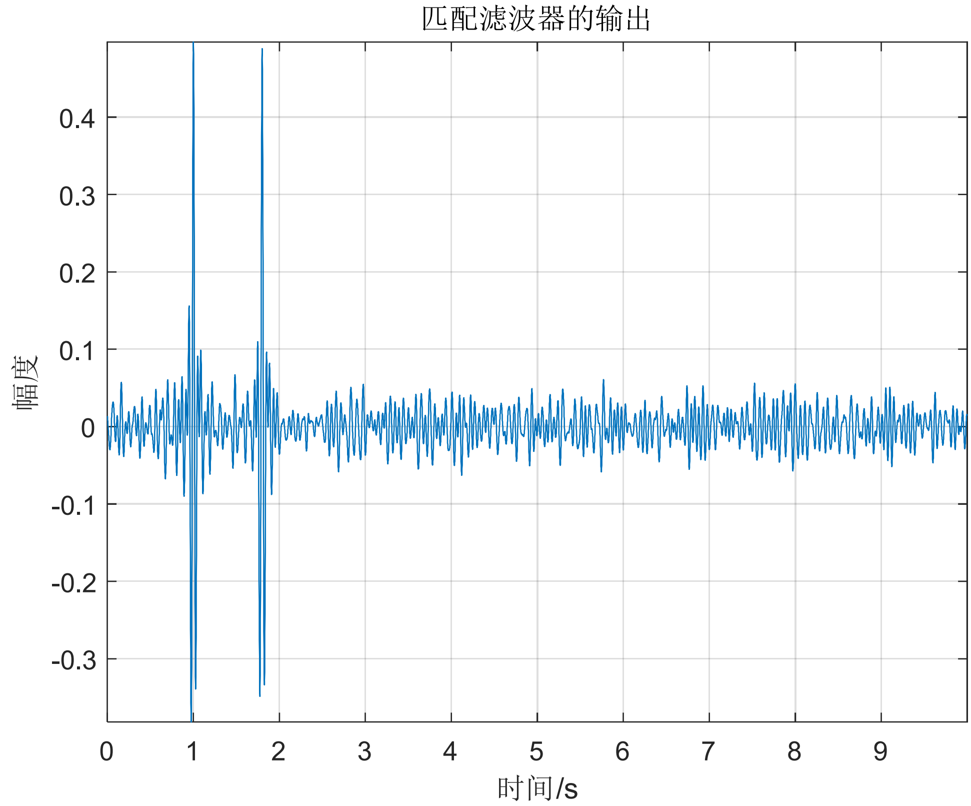

图 35.T=1s,f_0=10HZ, k=100rad/s,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

令 $\tau_0=T$，可得输出：

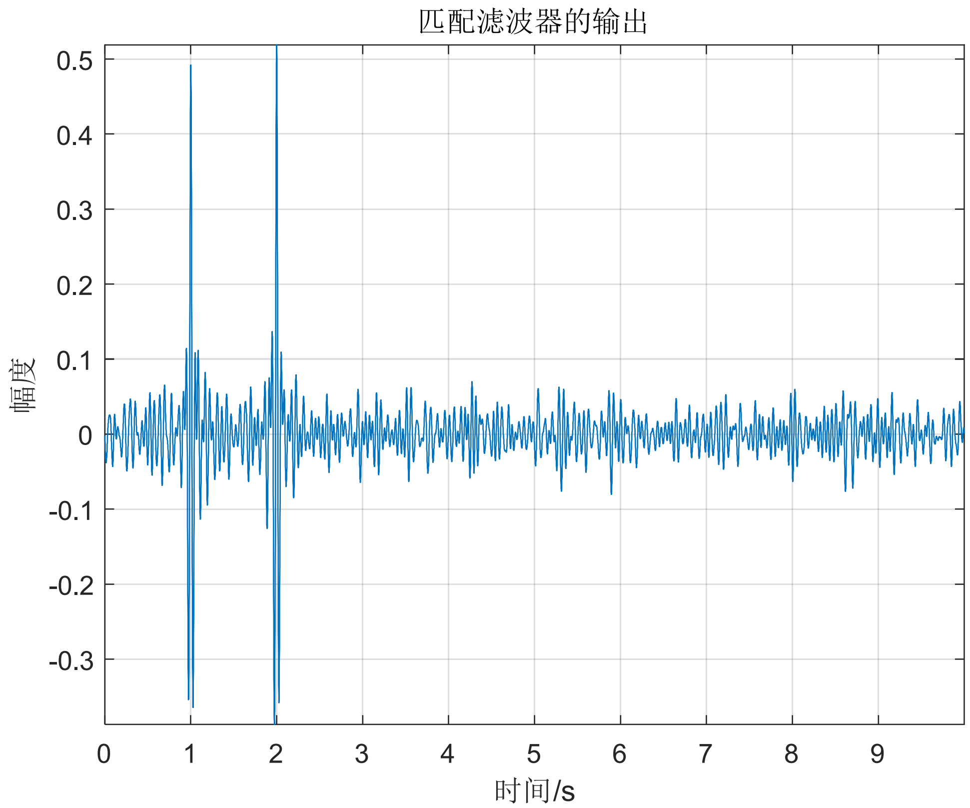

图 36.T=1s,f_0=10HZ, k=100rad/s,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

令 τ_0=1.2T ,可得输出：

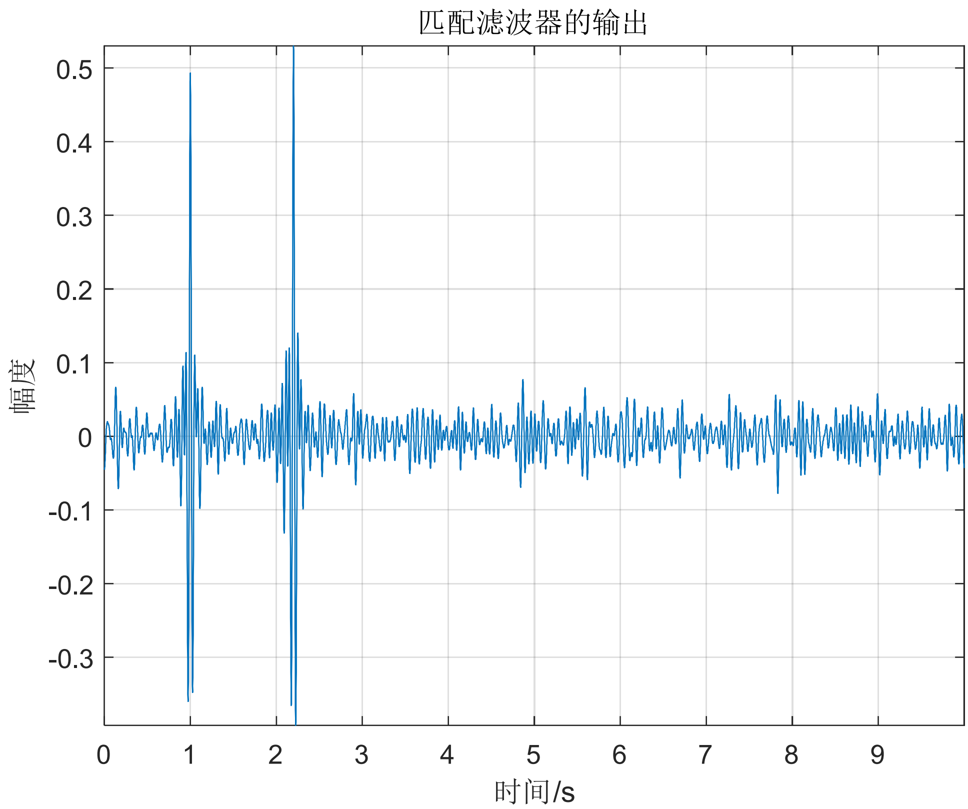

图 37. T=1s,f_0=10HZ, k=100rad/s,SNR 为 0dB 时的 MF 输出

加入延迟信号，相当于对原信号及其延迟信号做 MF，此时输出有部分混叠产生，但可以分辨原信号及其延迟信号的峰值，这就是线性调频信号为什么在雷达信号处理里面广泛应用的原因，因为其匹配滤波特性特别好。改变其他参数的结果同上分析，不再赘述。

(4) 第四种信号

根据 MF 理论可知：

MF 的冲激响应$h(t)$为输入感兴趣信号(此题为二进制相移键控信号)$s_4(t)$的翻转共轭，即有以下形式：

$$h(t)=Ks_4^*(t_d-t)$$

其中 K 是一个常数，可取 1，t_d为时延，为保证 MF 的冲激响应函数为因果信号。对于本题二进制相移键控信号来说，t_d可取大于等于其时宽的数，但是由于数字系统可以利用系统中数据的存储性能，所以非因果系统可以实现，但是不能做到实时性，即有延时，故t_d取值并不是很重要，可以取 0。对于模拟系统，非因果系统的确无法实现，此题，取$t_d=T$，从而保证系统的因果性，又因为输入感兴趣信号$s_4(t)$为实信号，故可得：

$$h(t)=s_4(T-t)=\sum_{k=0}^{N-1}Ac_{N-1-k}R_\tau(t-k\tau)\sin\left[\omega_0(T-t)\right]$$

此题取 $A=1,T=1,\tau=0.1$，$\omega_0=2\pi f_0=20\pi\ rad/s$。

可得下图：

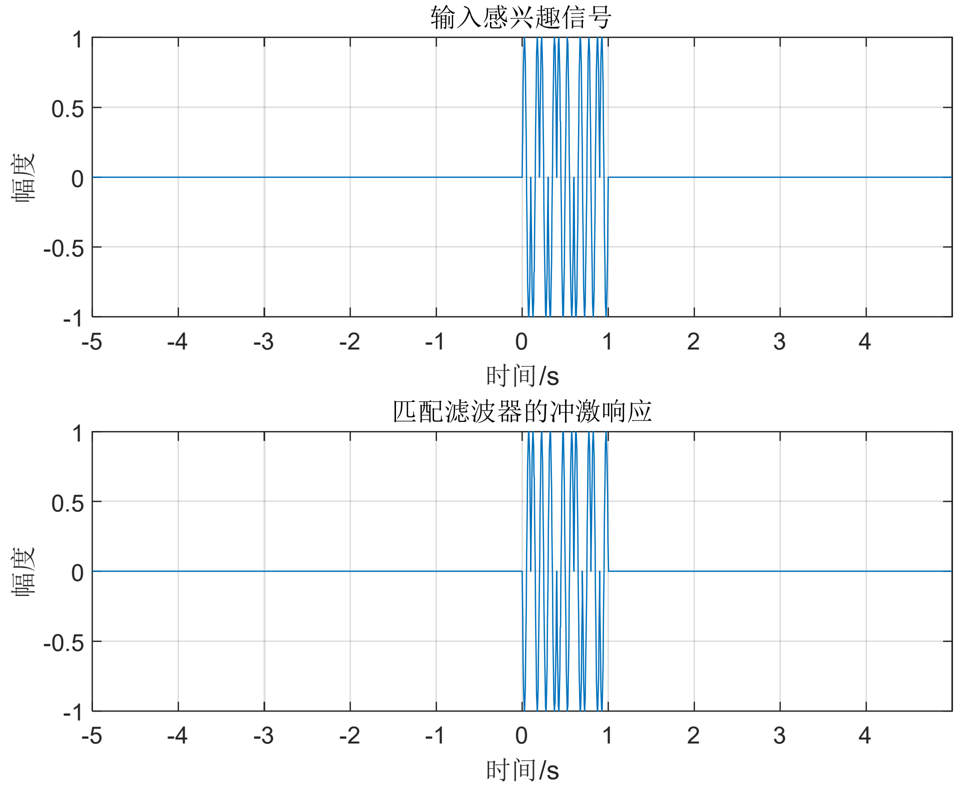

图 38.输入感兴趣信号与 *MF* 的冲激响应

无噪声时的输出信号为：

$$s_o(t) = s_4(t) * h(t) = F^{-1}\left[s(j\omega) \cdot H(j\omega)\right]$$

有噪声时的输出信号为：

$$x_o(t) = x_i(t) * h(t) = F^{-1}\left[x(j\omega) \cdot H(j\omega)\right]$$

其中 $x_i(t) = s_4(t) + n_i(t)$（$n_i(t)$ 为输入白噪声信号)。由于输出信号含有噪声信号，故无法给出其具体的表达式。

可得下图：

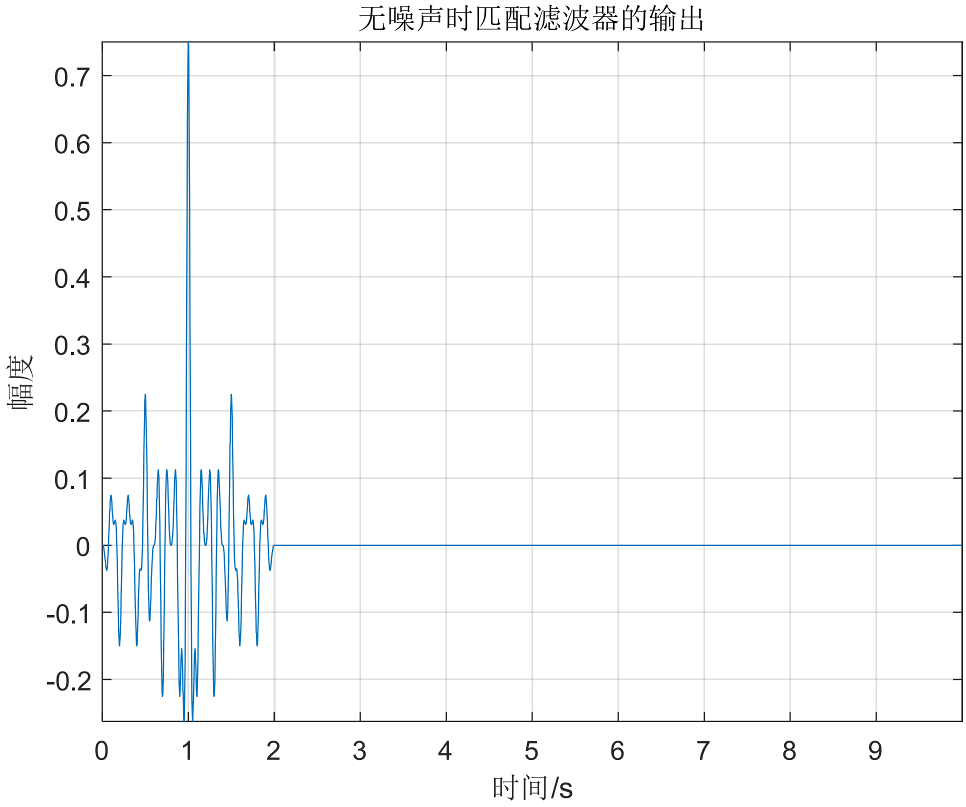

图 39.T=1,N=10,f_0=10HZ 时的 MF 输出

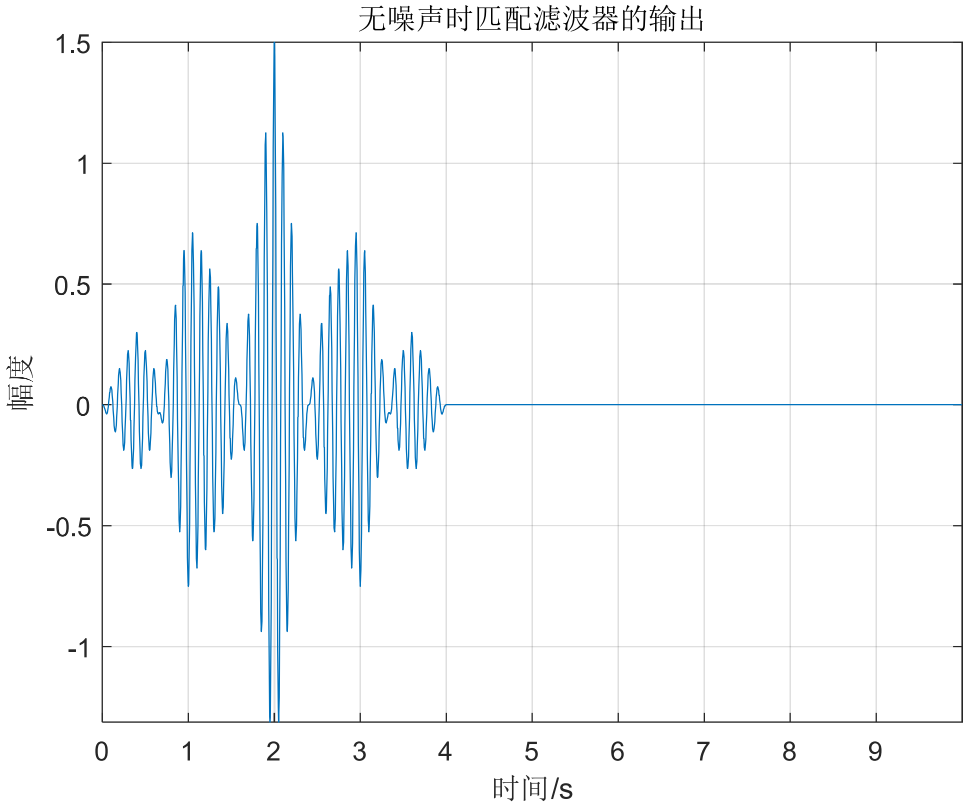

图 40.T=2,N=10, f_0=10HZ 时的 MF 输出

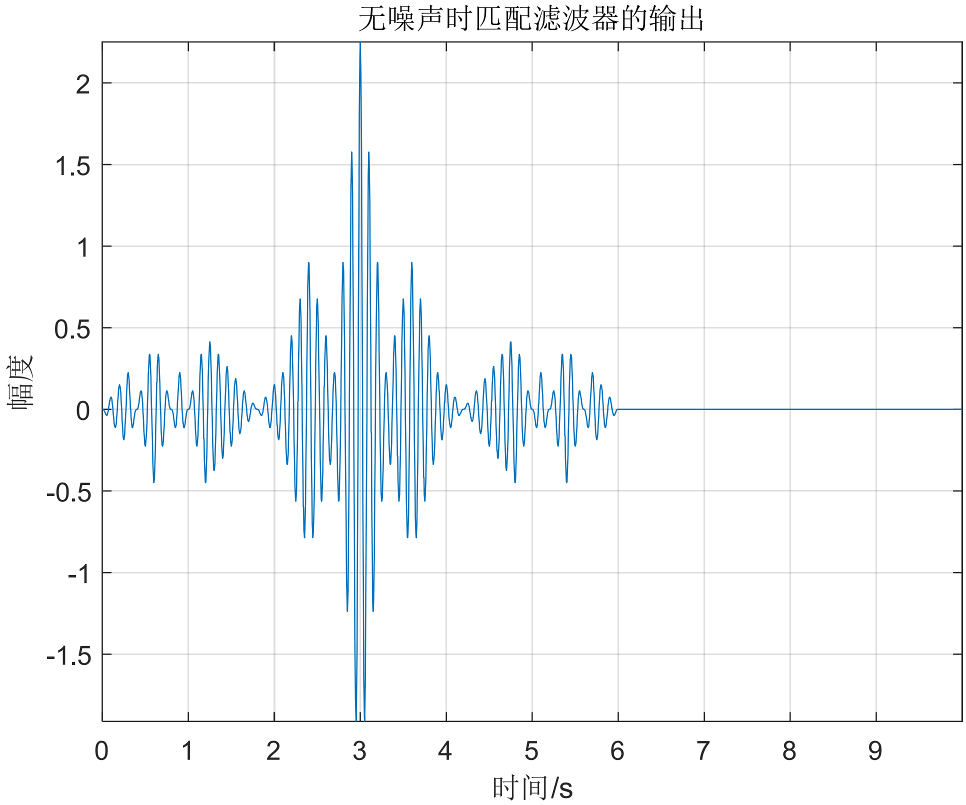

图 41.T=3,N=10, f_0=10HZ 时的 MF 输出

由图 39 到图 41 可知，改变时间长度 T 只会影响输出信号的最大峰值的大小，且最大峰值随 T 线性增大；输出最大峰值取值位置由 t_d 决定，即为 T。

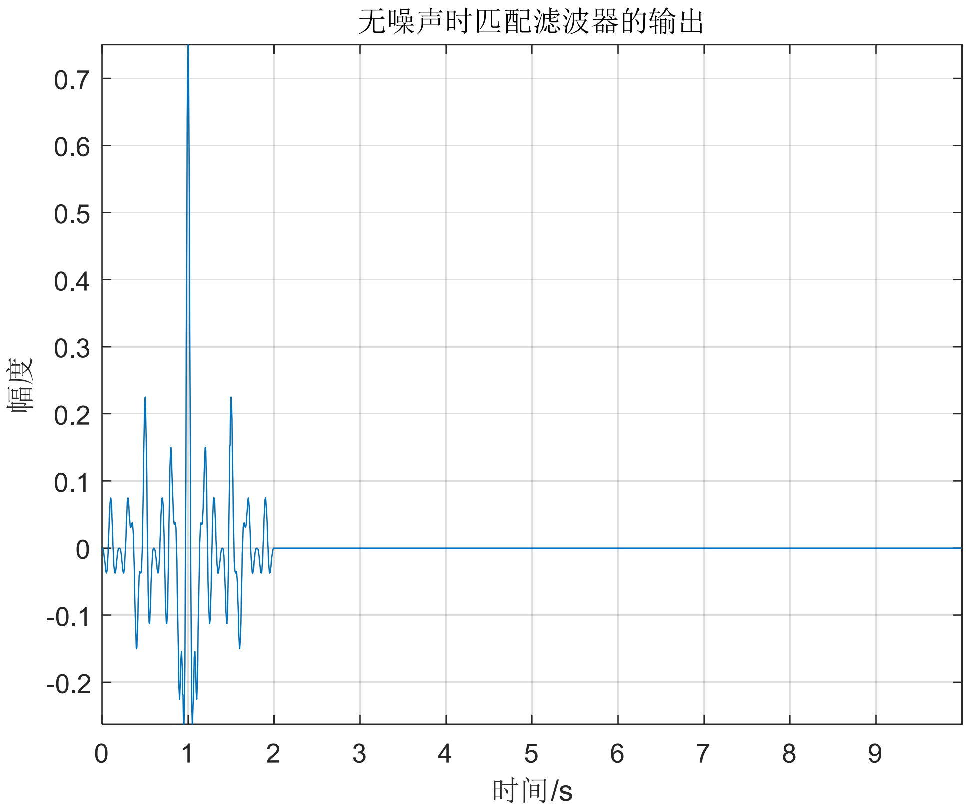

图 42.T=1,N=10, f_0=10HZ 时的 MF 输出

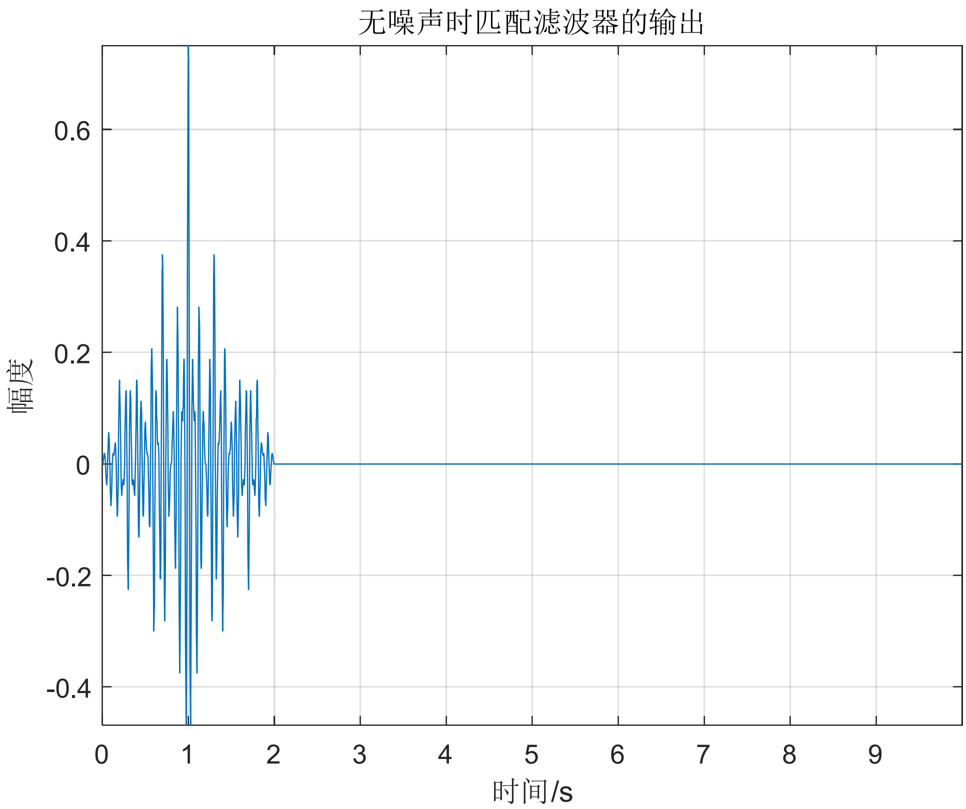

图 43.T=1,N=10, f_0=20HZ 时的 MF 输出

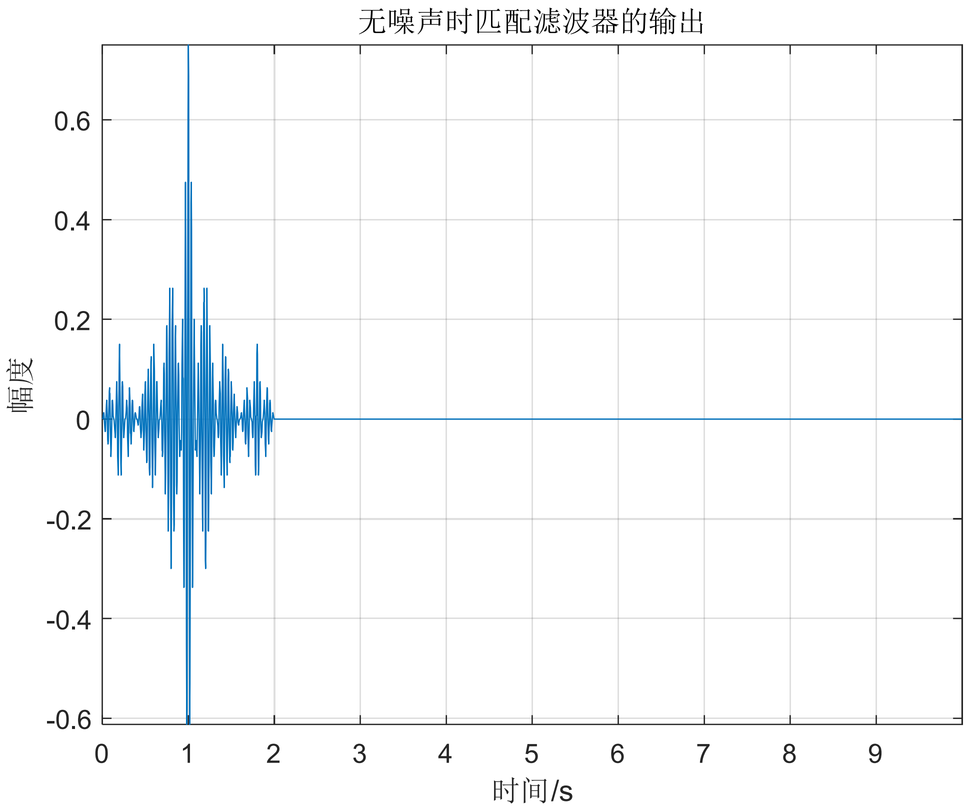

图 44.T=1,N=10, f_0=30HZ 时的 MF 输出

由图 42 到图 44 可知，改变频率 f_0 只会影响输出信号的频率，对其他没影响。

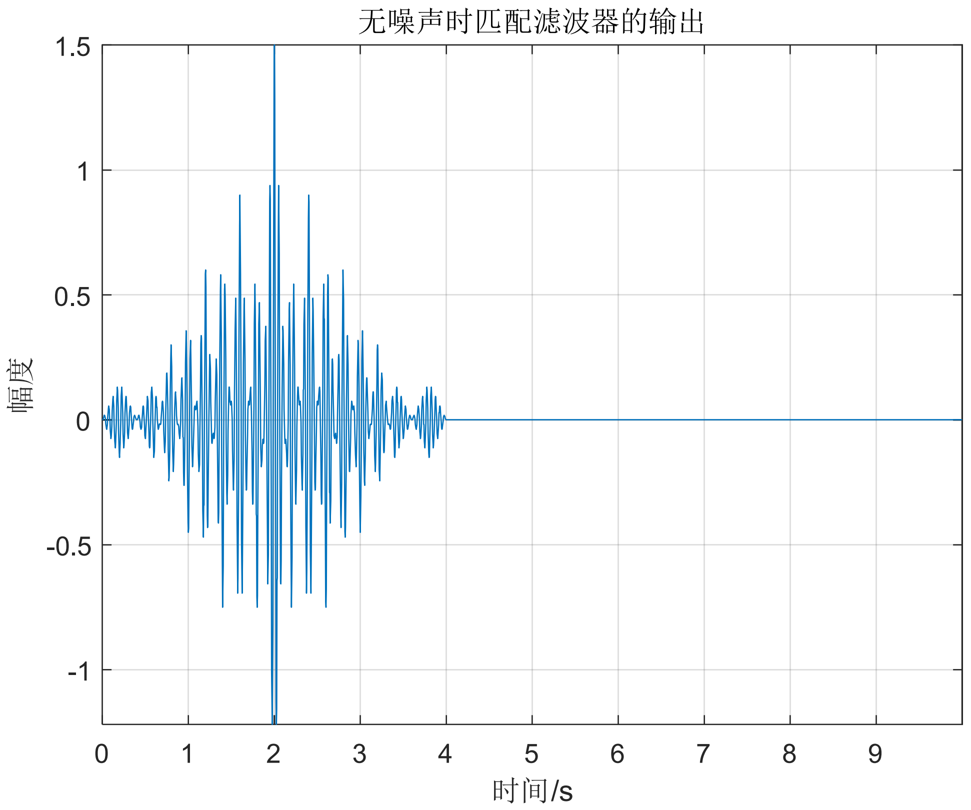

图 45.T=2,N=10, f_0=20HZ 时的 MF 输出

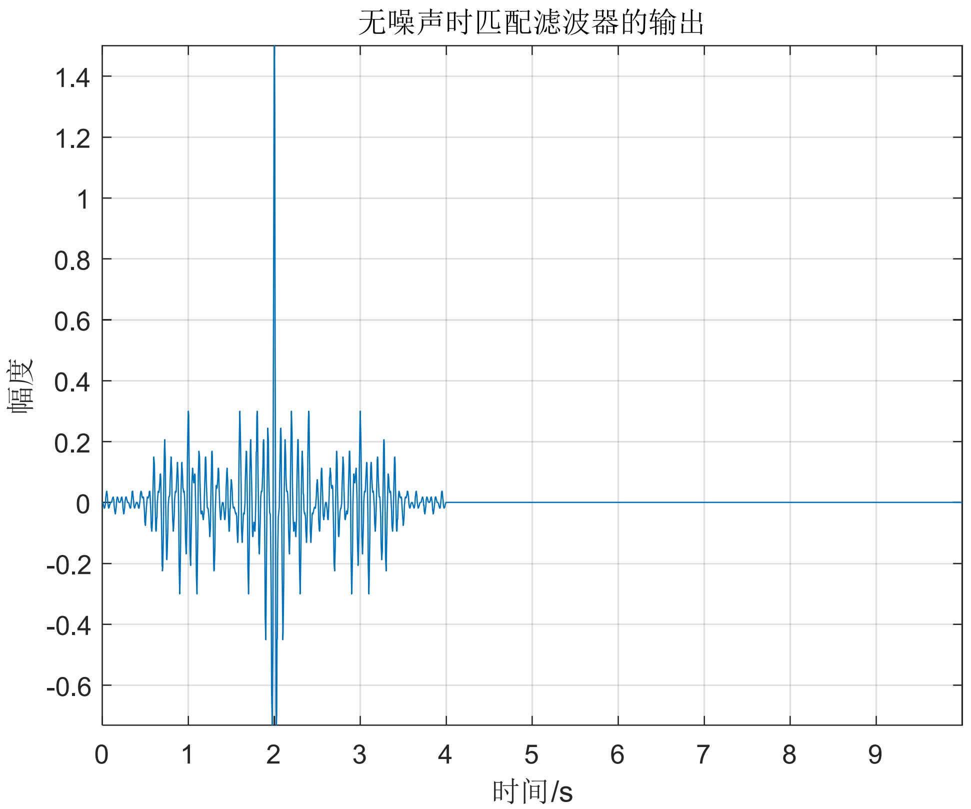

图 46.T=2,N=40, f_0=20HZ 时的 MF 输出

由图 45 到图 46 可知，当 T 不变时，改变 N，相当于改变码元

长度τ。当 N 增大时，旁峰会减少。

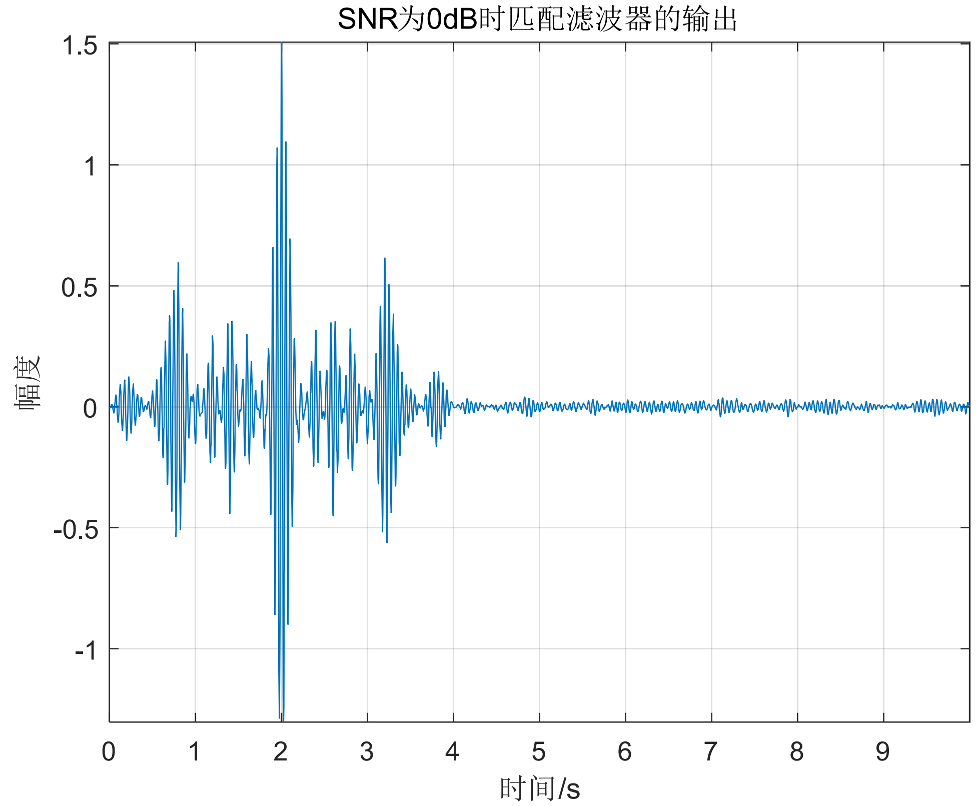

图 47.T=2, N=10, f_0=20HZ 时的 MF 输出

由图 47 可知，噪声对 MF 输出结果影响不大。

考虑延迟信号，很明显当$\tau_0 \geq 2T$时，延迟信号与原信号输出响应互不干扰，没有叠加部分。这里只讨论$\tau_0 < 2T$的情况。令τ_0=0.8T,可得输出：

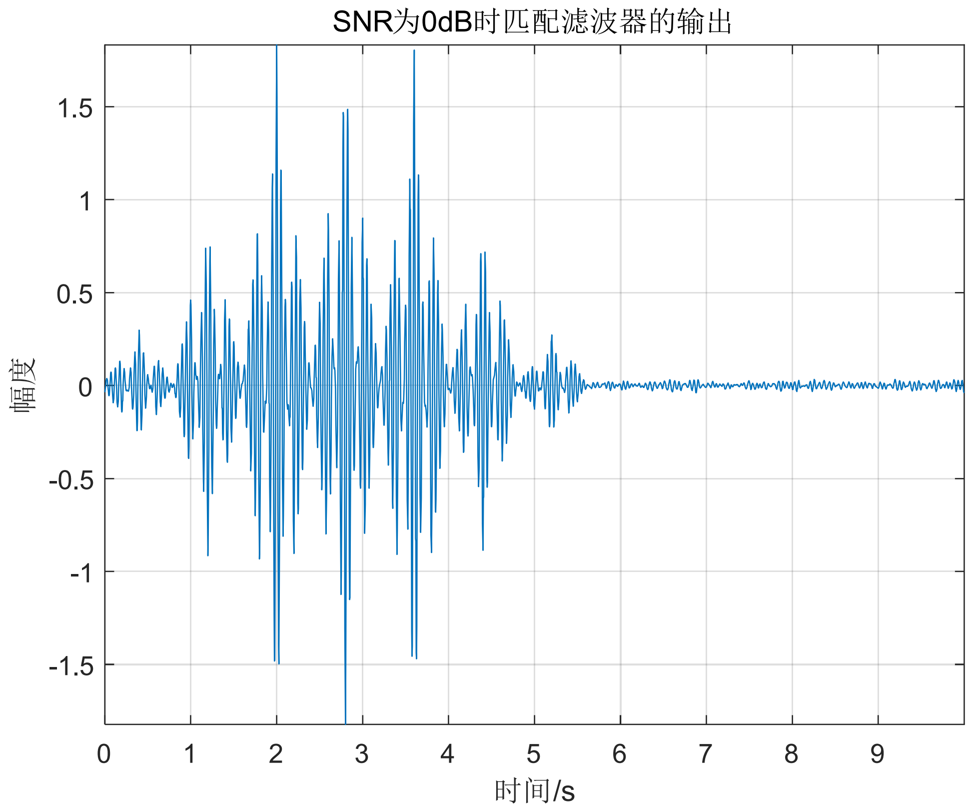

图 48. 感兴趣信号及其延迟信号 MF 后输出

令 $\tau_0=T$,可得输出：

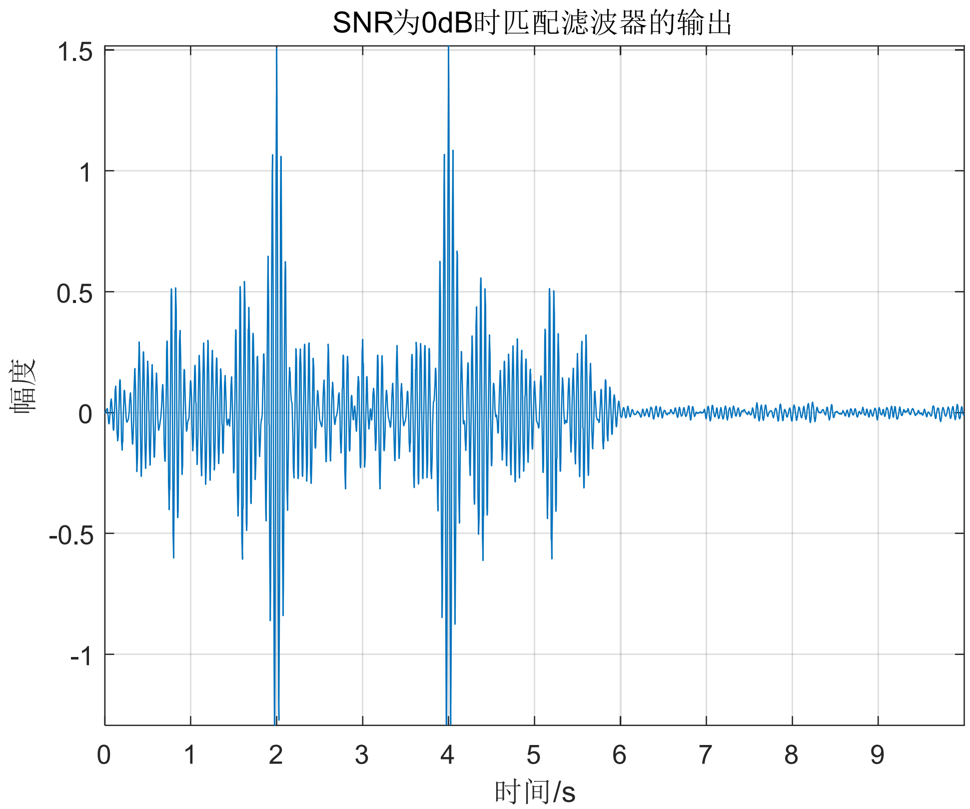

图 49. 感兴趣信号及其延迟信号 MF 后输出

令 τ_0=1.2T ,可得输出：

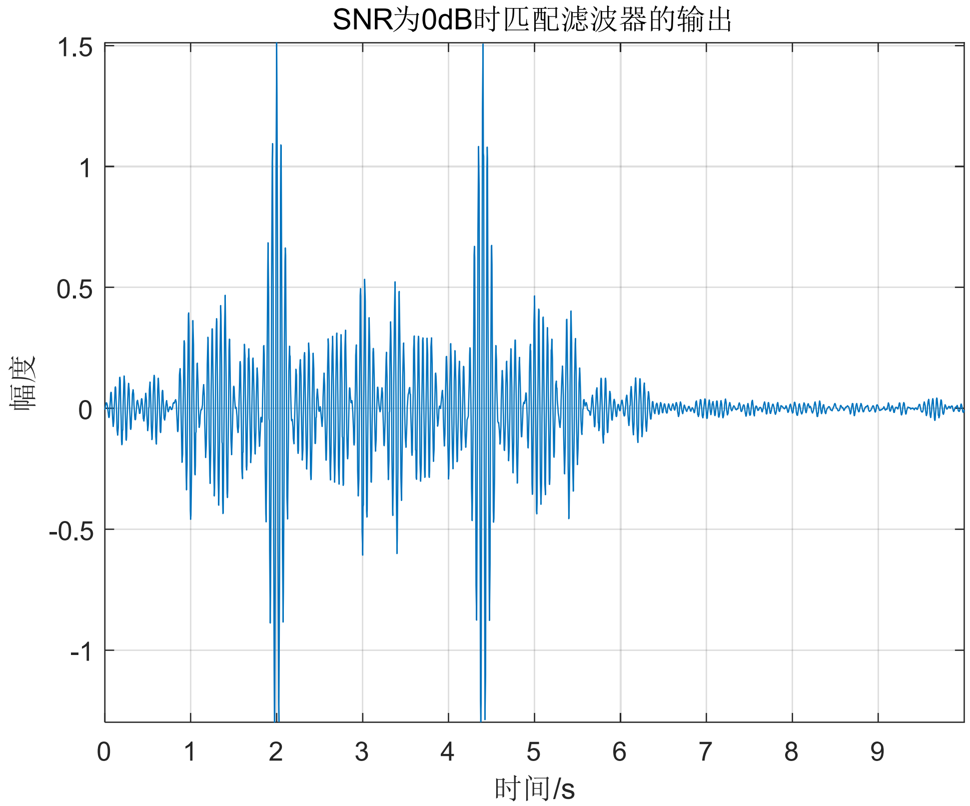

图 50. 感兴趣信号及其延迟信号 MF 后输出

加入延迟信号，相当于对原信号及其延迟信号做 MF，当 τ_0 大于 T 时，两个旁峰不会较大程度混叠，可明显分辨出来；当 τ_0 小于 T 时，两个旁峰会较大程度混叠，不可明显分辨出来，但仍可分辨，这也是相位编码信号在雷达信号处理广泛应用的原因。改变其他参数分析同上，不再赘述。

综和(1)(2)(3)(4)可得，脉冲宽度 T 影响输出信号的最大幅值；τ 与 N 会影响输出的旁峰个数；t_d 决定输出信号最大值位置；噪声会引起输出信号的起伏，过大会淹没输出信号；调制载波频率 f_0 只会引起输出信号频率的变化；*chirp* 信号调频率也只会引起输出信号频率的变化；应当注意改变载波频率与调频率时应避免产生混叠；MF 对延

迟信号具有适应性，τ_0 大于脉冲宽度 T 时，可明显分辨两个旁峰。

参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.