信号检测与估计
第五章作业

学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1. 设有下列两个假设：

H_0： $x(t)=n(t)$， $0\le t\le T$

H_1： $x(t)=As(t)+n(t)$， $0\le t\le T$

其中$n(t)\sim N[0,\frac{N_0}{2}\delta(\tau)]$， $s(t)$为已知信号，且为了处理方便起见，假定$\int_0^T s(t)^2dt=1$。

如果要求$P_F=\alpha$，试求：

(1) A 为已知常数时的最佳接收机和相应的检测概率P_D，并画出相应的 ROC 曲线；

(2) A 为不等于零的未知参量时的接收机；

(3) A 为大于零的未知参量时的接收机；

(4) A 为小于零的未知参量时的接收机。

解：(1)此题为高斯白噪声背景下的确知信号波形检测问题。

由题意可知，两种假设下观测信号$x(t)$的似然函数为：

$$p\left[x(t)|H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right]$$

$$\begin{aligned}p\left[x(t)|H_1\right]&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-As(t)\right]^2dt\right\}\\&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)s(t)\right]dt-\frac{A^2}{N_0}\right\}\end{aligned}$$

其中F为已知常数，则 LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)|H_1\right]}{p\left[x(t)|H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)dt-\frac{A^2}{N_0}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

两边取对数化简得：

$$A\int_0^T x(t)s(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{N_0}{2}\ln\lambda_0+\frac{A^2}{2}\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量$l\left[x(t)\right]=A\int_0^T x(t)s(t)\,dt$。

在H_1假设下，$x(t)=As(t)+n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[As(t)+n(t)\right]s(t)\,dt\right\}=A^2$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)s(t)\,dt\right]^2=\frac{A^2N_0}{2}$$

令$\sigma^2=\dfrac{A^2N_0}{2}$，故有：

$$p\left(l\middle|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l-A^2\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

在H_0假设下，$x(t)=n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)s(t)\,dt\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)s(t)\,dt\right]^2=\frac{A^2N_0}{2}$$

故有：

$$p\left(l\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$

在N-P准则下，虚警概率为：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\int_{V_T}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)dl=1-\Phi\left(\frac{V_T}{\sigma}\right)=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)$l=V_T=\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)=|A|\sqrt{\dfrac{N_0}{2}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$。

故最佳接收机为：

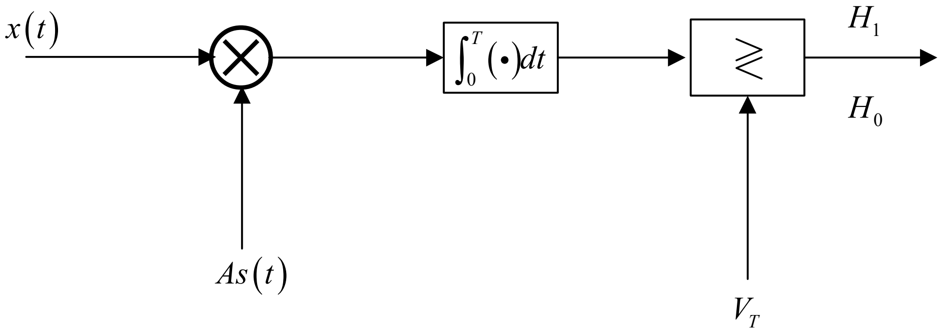

图 1.A 为已知常数时的最佳接收机框图

检测概率为：

$$P_D = P(H_1|H_1) = \int_{V_T}^{+\infty} p(l|H_1)dl = \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(l-A^2)^2}{2\sigma^2}\right]dl = 1-\Phi\left(\frac{V_T - A^2}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left[\Phi^{-1}(1-\alpha)-|A|\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right]$$

观测信号 $x(t)$ 中感兴趣信号(有用信号)的能量为 $E=\int_0^T A^2 s^2(t)dt=A^2$，则:

$$\mathrm{SNR} = 10\lg\left(\frac{2E}{N_0}\right) = 10\lg\left(\frac{2A^2}{N_0}\right)$$

则相应的 ROC 曲线为：

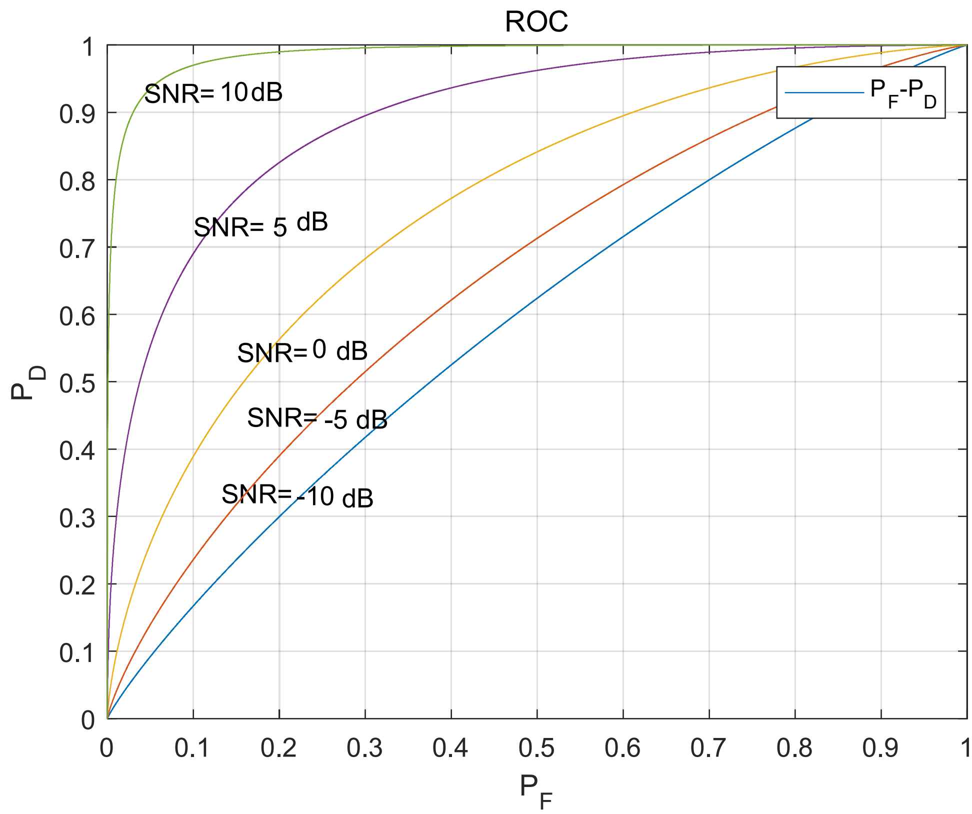

图 2. A 为已知常数时的 ROC 曲线

由图 2 可知，当虚警概率 P_F 固定时，随着 SNR 的增大，检测概率 P_D 逐渐增大；当 SNR 固定时，随着虚警概率 P_F 的增大，检测概率 P_D 逐渐增大；固定检测概率 P_D，对虚警概率 P_F 大的 SNR 要求低，对虚警概率 P_F 小的 SNR 要求高。

(2)A 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 A，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。

由题意可知，两种假设下观测信号 $x(t)$ 的条件似然函数为：

$$p\left[x(t);H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right]$$

$$p\left[x(t)\middle|A;H_1\right]=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-As(t)\right]^2dt\right\}$$

$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)s(t)\right]dt-\frac{A^2}{N_0}\right\}$$

其中 F 为已知常数，则 LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)\middle|A;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)dt-\frac{A^2}{N_0}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

两边取对数化简得：

$$A\int_0^T x(t)s(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{N_0}{2}\ln\lambda_0+\frac{A^2}{2}$$

此判决规则与未知参量 A 有关，A 正负值改变，判决规则也会相应改变。故此时不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

则 GLRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{\max\limits_A p\left[x(t)\middle|A;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

令：

$$\frac{\partial p\left[x(t)\middle|A;H_1\right]}{\partial A}$$
$$=\frac{2}{N_0}F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)s(t)\right]dt-\frac{A^2}{N_0}\right\}\left[\int_0^T x(t)s(t)dt-A\right]=0$$

可得随机参量 A 的最大似然估计值为：

$$\hat{A}_{ml}=\int_0^T x(t)s(t)dt$$

带入 GLRT 中可得：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{\max\limits_{A} p\left[x(t)|A;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)\,dt-\frac{A^2}{N_0}\right]\Bigg|_{A=\int_0^T x(t)s(t)dt}$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{N_0}\left[\int_0^T x(t)s(t)\,dt\right]^2\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

两边取对数化简得：

$$\left[\int_0^T x(t)s(t)\,dt\right]^2\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}N_0\ln\lambda_0\overset{def}{=}V_T$$

根据上式，可得检验统计量$l\left[x(t)\right]=\left[\int_0^T x(t)s(t)\,dt\right]^2$。

在 H_0 假设下，$x(t)=n(t)$ $(0\le t\le T)$是高斯随机过程，故$\int_0^T x(t)s(t)\,dt$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T x(t)s(t)\,dt|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)\,dt\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T x(t)s(t)\,dt|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)\,dt-\mathrm{E}\left(\int_0^T n(t)s(t)\,dt\right)\right]^2=\frac{N_0}{2}$$

令 $y=\int_0^T x(t)s(t)\,dt$，$\sigma^2=\frac{N_0}{2}$ 故有：

$$p\left(y|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

在 N-P 准则下，虚警概率为：

$$P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\int_{\sqrt{V_T}}^{+\infty}p\left(y|H_0\right)dy+\int_{-\infty}^{-\sqrt{V_T}}p\left(y|H_0\right)dy=2\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{V_T}}{\sigma}\right)\right]=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面（检测门限）$l=V_T=\left[\sigma\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2=\frac{N_0}{2}\left[\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$。

则最佳接收机为：

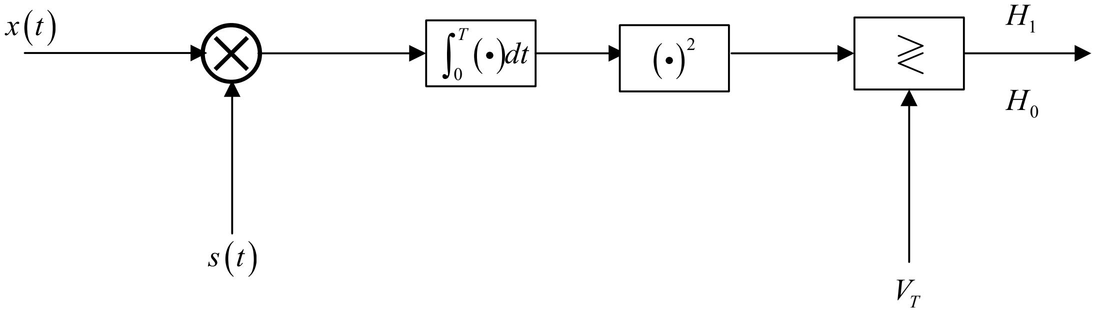

图 3.A 为非零未知参量时的最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=As(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 为已知信号，$n(t)$ 为高斯随机过程。由于 A 为未知概率分布的随机参量，故无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式，故无法给出 ROC 曲线。

(3) A 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 A，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与 A 无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

由题意可知，两种假设下观测信号 $x(t)$ 的条件似然函数为：

$$p\left[x(t);H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right]$$

$$\begin{aligned}p\left[x(t)|A;H_1\right]&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-As(t)\right]^2dt\right\}\\&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)s(t)\right]dt-\frac{A^2}{N_0}\right\}\end{aligned}$$

其中 F 为已知常数。

对 $\forall A>0$，UMPT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)|A;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)dt-\frac{A^2}{N_0}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

两边取对数化简得：

$$\int_0^T x(t)s(t)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{N_0}{2A}\ln\lambda_0+\frac{A}{2}\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量$l\left[x(t)\right]=\int_0^T x(t)s(t)dt$。

在 H_0 假设下，$x(t)=n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)dt\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)dt-\mathrm{E}\left(\int_0^T n(t)s(t)dt\right)\right]^2=\frac{N_0}{2}$$

令$\sigma^2=\frac{N_0}{2}$，故有：

$$p\left(l|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$

在 N-P 准则下，虚警概率为：

$$P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l|H_0\right)dl=1-\Phi\left(\frac{V_T}{\sigma}\right)=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)$l=V_T=\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)=\sqrt{\frac{N_0}{2}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$，则最佳接收机为：

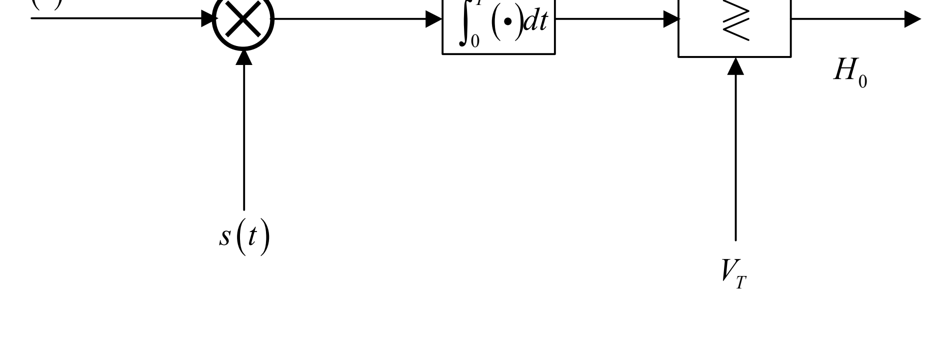

图 4.A 为大于 0 的未知参数时的最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=As(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 为已知信号，$n(t)$ 为高斯随机过程。由于 A 为未知概率分布的随机参量，故无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式，故无法给出 ROC 曲线。

(4) A 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 A，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与 A 无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

由题意可知，两种假设下观测信号 $x(t)$ 的条件似然函数为：

$$p\left[x(t);H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right]$$

$$\begin{aligned}p\left[x(t)|A;H_1\right]&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-As(t)\right]^2dt\right\}\\&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)s(t)\right]dt-\frac{A^2}{N_0}\right\}\end{aligned}$$

其中 F 为已知常数。

对 $\forall A<0$，UMPT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)|A;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)s(t)\,dt-\frac{A^2}{N_0}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\lambda_0$$

两边取对数化简得：

$$\int_0^T x(t)s(t)\,dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}}\frac{N_0}{2A}\ln\lambda_0+\frac{A}{2}\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量 $l\left[x(t)\right]=\int_0^T x(t)s(t)\,dt$。

在 H_0 假设下，$x(t)=n(t)\,(0\le t\le T)$ 是高斯随机过程，故检验统计量 $l\left[x(t)\right]$ 是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)dt\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)s(t)dt-\mathrm{E}\left(\int_0^T n(t)s(t)dt\right)\right]^2=\frac{N_0}{2}$$

令 $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$，故有：

$$p\left(l\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$

在 N-P 准则下，虚警概率为：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{-\infty}^{V_T}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\Phi\left(\frac{V_T}{\sigma}\right)=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限) $l=V_T=\sigma\Phi^{-1}(\alpha)=\sqrt{\frac{N_0}{2}}\Phi^{-1}(\alpha)$，则最佳接收机为：

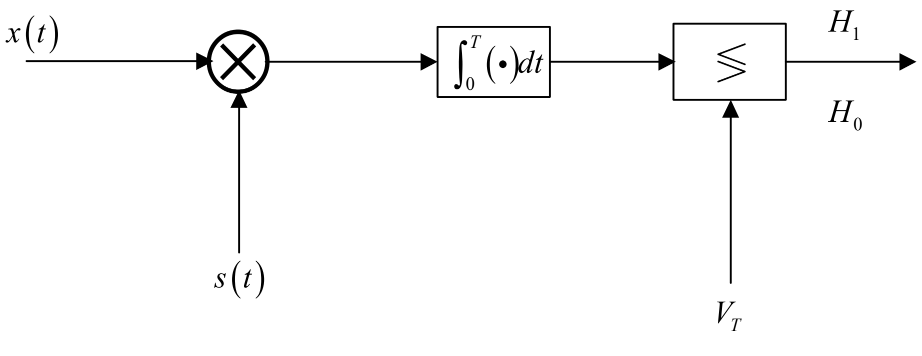

图 5.A 为小于 0 的未知参数时的最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=As(t)+n(t)$，其中 $s(t)$ 为已知信号，$n(t)$ 为高斯随机过程。由于 A 为未知概率分布的随机参量，故无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式，故无法给出 ROC 曲线。

2. 考虑白高斯噪声背景中下列三种情况时的二元数字通信信号检测问题：

(1) PSK 情况

H_0：$x(t) = -A\sin\omega_0 t + n(t)$， $0 \le t \le T$

H_1：$x(t) = A\sin\omega_0 t + n(t)$， $0 \le t \le T$

(2) FSK 情况

H_0：$x(t) = A\sin\omega_0 t + n(t)$， $0 \le t \le T$

H_1：$x(t) = A\sin\omega_1 t + n(t)$， $0 \le t \le T$

(3) ASK 情况

H_0：$x(t) = n(t)$ ， $0 \le t \le T$

H_1：$x(t) = A\sin\omega_0 t + n(t)$， $0 \le t \le T$

其中 $\omega_1 - \omega_0 = n\pi/T$，$\omega_1 + \omega_0 = m\pi/T, \omega_0 T = 2\pi l, l, m, n$ 均为整数，A, T, ω_1, ω_0 均为已知常数，假定 $P(H_0) = \frac{1}{2}$，试分别设计三种情况相应的最佳接收机，画出其相应的接收机统计特性曲线，即 $P_E \sim SNR$ 曲线，并对三者进行比较。

解：(1)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种相干相移键控系统(CPSK)。设 $n(t)$ 为均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，即 $n(t) \sim N\left[0, \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]$。观测信号 $x(t)$ 中感兴趣信号(有用信号)的能量为 $E = \int_0^T A^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{A^2 T}{2}$。由题意可知，两种假设下观测信号 $x(t)$ 的似然函数为：

$$p\left[x(t)\middle|H_0\right]=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)+A\sin\omega_0 t\right]^2dt\right\}$$

$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)+2Ax(t)\sin\omega_0 t\right]dt-\frac{A^2T}{2N_0}\right\}$$

$$p\left[x(t)\middle|H_1\right]=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\sin\omega_0 t\right]^2dt\right\}$$

$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)\sin\omega_0 t\right]dt-\frac{A^2T}{2N_0}\right\}$$

其中F为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)\middle|H_1\right]}{p\left[x(t)\middle|H_0\right]}=\exp\left[\frac{4A}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

两边取对数化简得：

$$A\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量$l\left[x(t)\right]=A\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt$，则最佳接收机为：

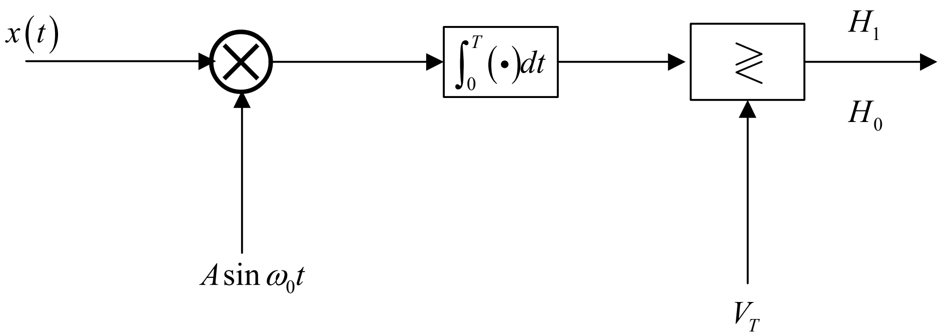

图 6.PSK 系统最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=A\sin\omega_0 t+n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[A\sin\omega_0 t+n(t)\right]\sin\omega_0 tdt\right\}=\frac{A^2T}{2}$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2=\frac{A^2N_0T}{4}$$

令$\sigma^2=\dfrac{A^2N_0T}{4}$，故有：

$$p\left(l\middle|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

在H_0假设下，$x(t)=-A\sin\omega_0 t+n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[-A\sin\omega_0 t+n(t)\right]\sin\omega_0 t dt\right\}=-\frac{A^2T}{2}$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t dt\right]^2=\frac{A^2N_0T}{4}$$

故有：

$$p\left(l\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l+\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

因此有：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l+\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]dl=1-\Phi\left(\frac{\frac{A^2T}{2}}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left(|A|\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

$$P_M = P\left(H_0 \middle| H_1\right) = \int_{-\infty}^{V_T} p\left(l \middle| H_1\right) dl = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right] dl = \Phi\left(\frac{-\frac{A^2T}{2}}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(-|A|\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

故最小平均错误率为：

$$\begin{aligned} P_E &= P\left(H_0\right) P\left(H_1 \middle| H_0\right) + P\left(H_1\right) P\left(H_0 \middle| H_1\right) \\ &= P\left(H_0\right) P_F + P\left(H_1\right) P_M = \frac{1}{2}\left(P_F + P_M\right) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

(2)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种相干频移键控系统(CFSK)。设$n(t)$为均值为 0，功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声，即$n(t) \sim N\left[0, \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]$。观测信号$x(t)$中感兴趣信号(有用信号)的能量为$E = \int_0^T A^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \int_0^T A^2 \sin^2 \omega_1 t dt = \frac{A^2T}{2}$。由题意可知，两种假设下观测信号$x(t)$的似然函数为：

$$\begin{aligned} p\left[x(t) \middle| H_0\right] &= F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left[x(t) - A\sin\omega_0 t\right]^2 dt\right\} \\ &= F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left[x^2(t) - 2Ax(t)\sin\omega_0 t\right] dt - \frac{A^2T}{2N_0}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\left[x(t) \middle| H_1\right] &= F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left[x(t) - A\sin\omega_1 t\right]^2 dt\right\} \\ &= F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left[x^2(t) - 2Ax(t)\sin\omega_1 t\right] dt - \frac{A^2T}{2N_0}\right\} \end{aligned}$$

其中F为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)\middle|H_1\right]}{p\left[x(t)\middle|H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

两边取对数化简得：

$$A\int_0^T x(t)\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}0\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量$l\left[x(t)\right]=A\int_0^T x(t)\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt$，则最佳接收机为：

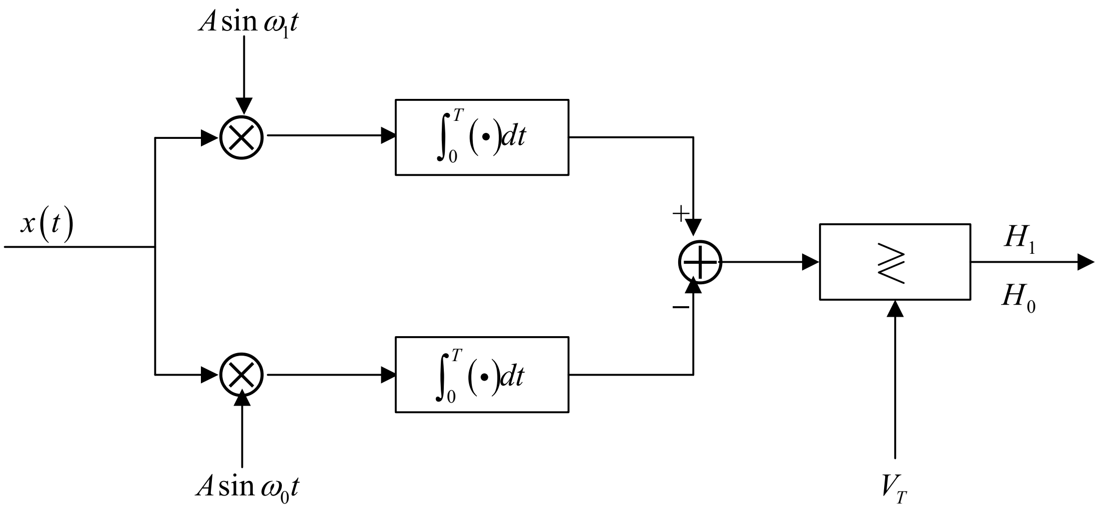

图 7.FSK 系统最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=A\sin\omega_1 t+n(t)$ ($0\le t\le T$)是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[A\sin\omega_1 t+n(t)\right]\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\right\}=\frac{A^2T}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}&=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\right]^2\\&=\frac{A^2N_0T}{2}\end{aligned}$$

令$\sigma^2=\frac{A^2N_0T}{2}$，故有：

$$p\left(l\middle|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

在 H_0 假设下，$x(t)=A\sin\omega_0 t+n(t)$（$0\le t\le T$）是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[A\sin\omega_0 t+n(t)\right]\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\right\}=-\frac{A^2T}{2}$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\left(\sin\omega_1 t-\sin\omega_0 t\right)dt\right]^2$$
$$=\frac{A^2N_0T}{2}$$

故有：

$$p\left(l\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l+\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

因此有：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l+\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]dl=1-\Phi\left(\frac{\frac{A^2T}{2}}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left(|A|\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

$$P_M=P\left(H_0\middle|H_1\right)=\int_{-\infty}^{V_T}p\left(l\middle|H_1\right)dl=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]dl=\Phi\left(\frac{-\frac{A^2T}{2}}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(-|A|\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

故最小平均错误率为：

$$P_E=P\left(H_0\right)P\left(H_1\middle|H_0\right)+P\left(H_1\right)P\left(H_0\middle|H_1\right)$$
$$=P\left(H_0\right)P_F+P\left(H_1\right)P_M=\frac{1}{2}\left(P_F+P_M\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

(3)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种启闭键控系统(OOK)。设$n(t)$为均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，即$n(t)\sim N\left[0,\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]$。观测信号$x(t)$中感兴趣信号(有用信号)的能量为$E=\int_0^T A^2\sin^2\omega_0 tdt=\dfrac{A^2T}{2}$。由题意可知，两种假设下观测信号$x(t)$的似然函数为：

$$p\left[x(t)|H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right]$$

$$\begin{aligned}p\left[x(t)|H_1\right]&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A\sin\omega_0 t\right]^2dt\right\}\\&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Ax(t)\sin\omega_0 t\right]dt-\frac{A^2T}{2N_0}\right\}\end{aligned}$$

其中F为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{p\left[x(t)|H_1\right]}{p\left[x(t)|H_0\right]}=\exp\left[\frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt-\frac{A^2T}{2N_0}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

两边取对数化简得：

$$A\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{A^2T}{4}\overset{def}{=}V_T$$

故检验统计量$l\left[x(t)\right]=A\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt$，则最佳接收机为：

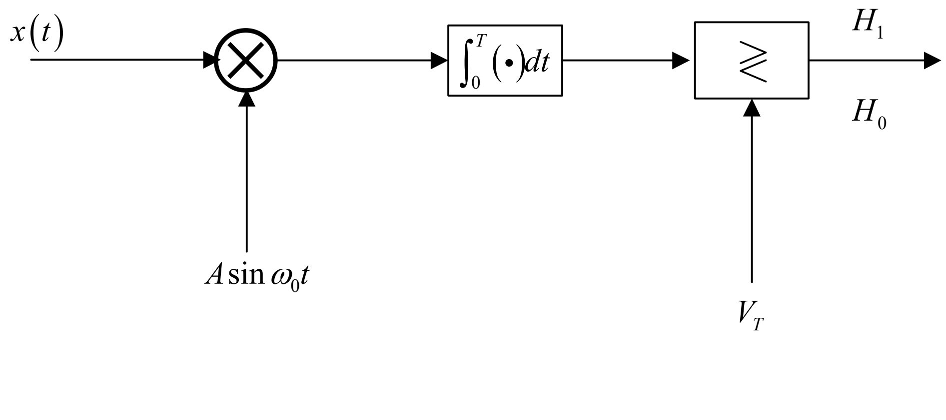

图 8.ASK 系统最佳接收机框图

在 H_1 假设下，$x(t)=A\sin\omega_0 t+n(t)$ $(0\le t\le T)$是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{A\int_0^T\left[A\sin\omega_0 t+n(t)\right]\sin\omega_0 tdt\right\}=\frac{A^2T}{2}$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_1\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\sin\omega_0 tdt\right]^2=\frac{A^2N_0T}{4}$$

令$\sigma^2=\dfrac{A^2N_0T}{4}$，故有：

$$p\left(l\middle|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

在 H_0 假设下，$x(t)=n(t)$ $(0\le t\le T)$是高斯随机过程，故检验统计量$l\left[x(t)\right]$是高斯随机变量，因此有：

$$\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\sin\omega_0 tdt\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}=\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0-\mathrm{E}\left\{l\left[x(t)\right]\middle|H_0\right\}\right\}^2=\mathrm{E}\left[A\int_0^T n(t)\sin\omega_0 tdt\right]^2=\frac{A^2N_0T}{4}$$

故有：

$$p\left(l\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)$$

因此有：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\int_{V_T}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{l^2}{2\sigma^2}\right)dl=1-\Phi\left(\frac{V_T}{\sigma}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{|A|}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)=\Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

$$P_M = P\left(H_0 \middle| H_1\right) = \int_{-\infty}^{V_T} p\left(l \middle| H_1\right) dl = \int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{\left(l-\frac{A^2T}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right] dl = \Phi\left(\frac{V_T-\frac{A^2T}{2}}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi\left(-\frac{|A|}{2}\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

故最小平均错误率为：

$$P_E = P\left(H_0\right)P\left(H_1 \middle| H_0\right) + P\left(H_1\right)P\left(H_0 \middle| H_1\right)$$
$$= P\left(H_0\right)P_F + P\left(H_1\right)P_M = \frac{1}{2}\left(P_F + P_M\right) = \Phi\left(-\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

因为三种情况下的假设不同，因此三种情况下的 SNR 表达式有所不同，但是都可以用$\frac{E}{N_0}$表征。将三种情况下的 ROC 曲线画在一起作对比，如图 9：

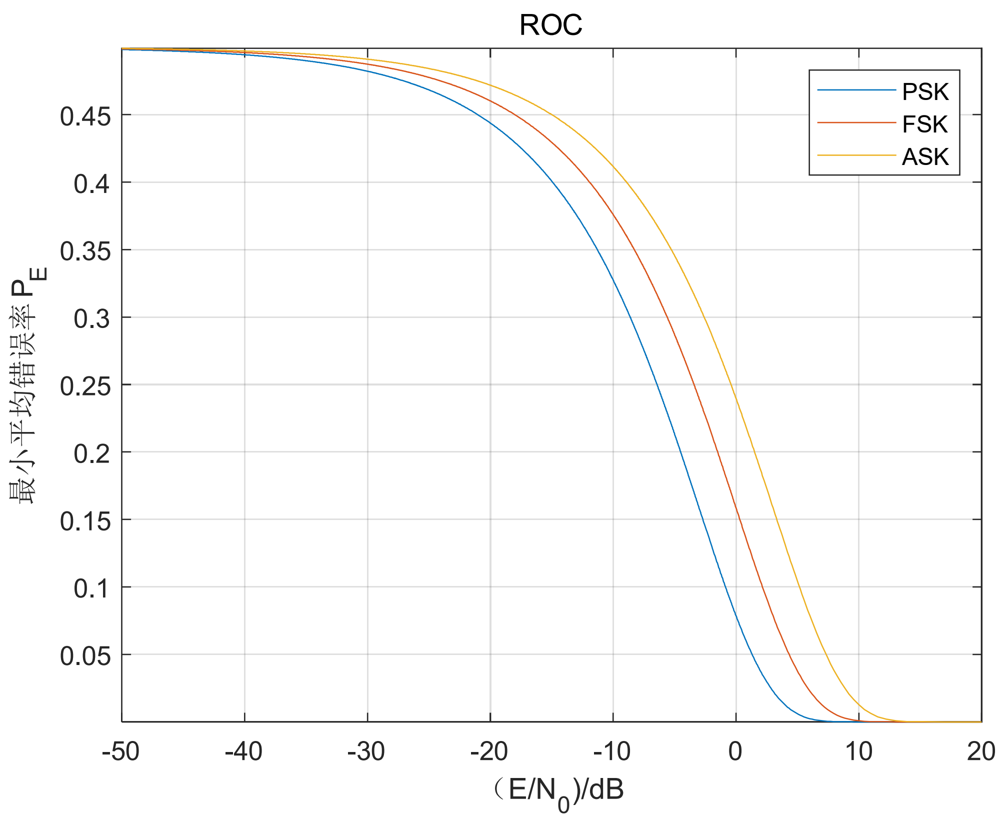

图 9.PSK、FSK 与 ASK 系统的 ROC 曲线

由图 9 显然可以得到，相同 SNR 下，PSK 调制系统的误码率最

低，ASK 调制系统的误码率最高。达到相同的误码率，对 ASK 调制系统要求的 SNR 最大，对 PSK 调制系统要求的 SNR 最小。

3. 考虑白高斯噪声背景中随机相位信号的检测问题：

H_0：$x(t)=n(t)$ ， $0\le t\le T$

H_1：$x(t)=B\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t)$， $0\le t\le T$

假定 $P(H_0)=\dfrac{1}{2}$， B,T,ω_0 均为已知常数，且 $\omega_0 T=2\pi l, l$ 为正整数。试分别设计下列两种情况下相应的最佳接收机或次最佳接收机，画出相应的 $P_E\sim SNR$ 曲线（若能够给出的话），并与上面第 2(3)题的结果加以比较。

(1) θ是$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量；

(2) θ是未知参量。

解：(1)本题为高斯白噪声背景中简单二元随机相位信号波形的检测问题。由于存在初相θ，故 H_1 假设下有用信号的幅度 B 可认为大于 0 的常数。设$n(t)$为均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，即$n(t)\sim N\left[0,\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]$。

因为θ是$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量，故θ的先验 pdf 为：

$$p(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<\theta<2\pi\\ 0, & else\end{cases}$$

由题意可知，两种假设下观测信号$x(t)$的条件似然函数为：

$$p\left[x(t);H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right]$$

$$p\left[x(t)|\theta;H_1\right]=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-B\sin(\omega_0 t+\theta)\right]^2 dt\right\}$$
$$=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Bx(t)\sin(\omega_0 t+\theta)\right]dt-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}$$

其中F为已知常数。

在最小错误率准则下，以随机相位θ为条件的似然比函数为：

$$\Lambda\left[x(t)|\theta\right]=\frac{p\left[x(t)|\theta;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left\{\frac{2B}{N_0}\left[\int_0^T x(t)\sin(\omega_0 t)dt\cos\theta+\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t)dt\sin\theta\right]-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}$$

可令：

$$\begin{cases}u=\int_0^T x(t)\sin(\omega_0 t)dt=q\cos\theta_0\\ v=\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t)dt=q\sin\theta_0\end{cases}$$

其中$\theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$，$q=\sqrt{u^2+v^2}\geq 0$，则有：

$$\Lambda\left[x(t)|\theta\right]=\exp\left[\frac{2Bq}{N_0}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{B^2T}{2N_0}\right]$$

故：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\int_\theta\Lambda\left[x(t)|\theta\right]p(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[\frac{2Bq}{N_0}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{B^2T}{2N_0}\right]d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[\frac{2Bq}{N_0}\cos(\theta-\theta_0)\right]d\theta\exp\left(-\frac{B^2T}{2N_0}\right)$$

可令：

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[x\cos(\theta-\theta_0)\right]d\theta\quad\forall\theta_0$$

故 LRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=I_0\left(\frac{2Bq}{N_0}\right)\exp\left(-\frac{B^2T}{2N_0}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

化简得：

$$q \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{N_0}{2B} I_0^{-1}\left[\exp\left(\frac{B^2T}{2N_0}\right)\right] \overset{def}{=} V_T$$

则检验统计量$l\left[x(t)\right]=q=\sqrt{u^2+v^2}$，故最佳接收机框图如下：

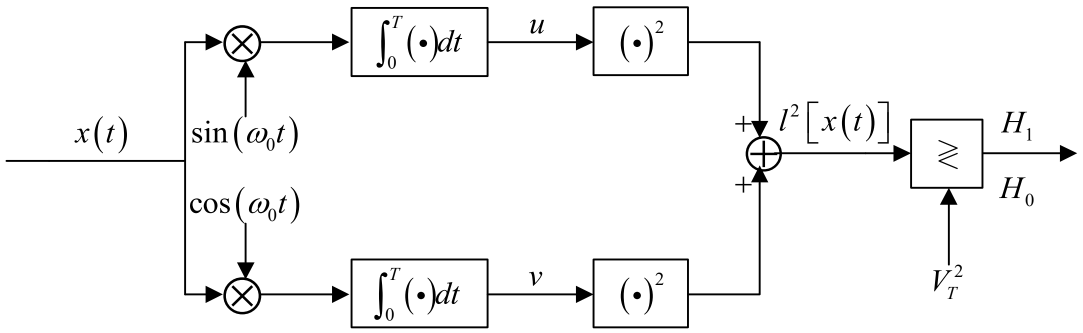

图 10.正交双通道相关器检测系统最佳接收机框图

在假设 H_1 下，随机参数θ给定的条件下，$x(t)=B\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t)$ $(0\le t\le T)$是高斯随机过程，故u和v都是高斯随机变量。因此，有：

$$\mathrm{E}\left(u|\theta;H_1\right)=\mathrm{E}\left\{\int_0^T\left[B\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t)\right]\sin\omega_0 tdt\right\}=\frac{BT}{2}\cos\theta$$

$$\mathrm{Var}\left(u|\theta;H_1\right)=\mathrm{E}\left[\left(u|\theta;H_1\right)-\mathrm{E}\left(u|\theta;H_1\right)\right]^2=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)\sin\omega_0 tdt\right]^2=\frac{N_0T}{4}$$

$$\mathrm{E}\left(v|\theta;H_1\right)=\mathrm{E}\left\{\int_0^T\left[B\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t)\right]\cos\omega_0 tdt\right\}=\frac{BT}{2}\sin\theta$$

$$\mathrm{Var}\left(v|\theta;H_1\right)=\mathrm{E}\left[\left(v|\theta;H_1\right)-\mathrm{E}\left(v|\theta;H_1\right)\right]^2=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(t)\cos\omega_0 tdt\right]^2=\frac{N_0T}{4}$$

令$\sigma^2=\frac{N_0T}{4}$，故有：

$$p\left(u|\theta;H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(u-\frac{BT}{2}\cos\theta\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$p\left(v|\theta;H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(u-\frac{BT}{2}\sin\theta\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

又因为 u 和 v 的条件协方差函数为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(u,v|\theta;H_1\right)&=\mathrm{E}\left[\left(u|\theta;H_1\right)-\mathrm{E}\left(u|\theta;H_1\right)\right]\left[\left(v|\theta;H_1\right)-\mathrm{E}\left(v|\theta;H_1\right)\right]\\&=\mathrm{E}\left[\int_0^T n(x)\sin\omega_0 xdx\int_0^T n(y)\cos\omega_0 ydy\right]=0\end{aligned}$$

所以，u 和 v 为不相关的高斯随机变量，故两者统计独立。因此，u 和 v 的二维联合条件 pdf 为：

$$p\left(u,v|\theta;H_1\right)=p\left(u|\theta;H_1\right)p\left(v|\theta;H_1\right)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\left(u-\frac{BT}{2}\cos\theta\right)^2+\left(v-\frac{BT}{2}\sin\theta\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2-qBT\cos\left(\theta-\theta_0\right)+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

由二维雅克比变换可得出 q 和 θ_0 的二维联合条件 pdf 为：

$$p\left(q,\theta_0|\theta;H_1\right)=\frac{q}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]\exp\left[\frac{qBT\cos\left(\theta-\theta_0\right)}{2\sigma^2}\right]$$

则 q 的条件 pdf 为：

$$p\left(q|\theta;H_1\right)=\int_0^{2\pi}p\left(q,\theta_0|\theta;H_1\right)d\theta_0=\int_0^{2\pi}\frac{q}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]\exp\left[\frac{qBT\cos\left(\theta-\theta_0\right)}{2\sigma^2}\right]d\theta_0$$

$$=\frac{q}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{qBT}{2\sigma^2}\right)$$

因为上式是与 θ 无关的常数，且 θ 在$(0,2\pi)$上均匀分布，故 q 在 H_1 假设下的似然函数为：

$$p\left(q|H_1\right)=\frac{q}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{qBT}{2\sigma^2}\right)$$

可见，这是一种广义瑞利分布(莱斯分布)。

在 H_0 假设下，q 的似然函数为：

$$p\left(q\middle|H_0\right)=\frac{q}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)$$

可见，这是一种瑞利分布。

故有：

$$\begin{aligned}P_F&=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(l\middle|H_0\right)dl=\int_{V_T}^{+\infty}p\left(q\middle|H_0\right)dq=\int_{V_T}^{+\infty}\frac{q}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)dq\\&=\exp\left(-\frac{V_T^2}{2\sigma^2}\right)=\exp\left(-\frac{2V_T^2}{N_0T}\right)\end{aligned}$$

$$P_M=P\left(H_0\middle|H_1\right)=\int_{-\infty}^{V_T}p\left(l\middle|H_1\right)dl=\int_{-\infty}^{V_T}p\left(q\middle|H_1\right)dq=\int_{-\infty}^{V_T}\frac{q}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{qBT}{2\sigma^2}\right)dq$$

观测信号 $x(t)$ 中感兴趣信号（有用信号）的能量为 $E=\int_0^T B^2\sin^2\left(\omega_0t+\theta\right)dt=\frac{B^2T}{2}$，则:

$$\mathrm{SNR}=10\lg\left(\frac{2E}{N_0}\right)=10\lg\left(\frac{B^2T}{N_0}\right)$$

令 $z=\frac{q}{\sigma}$，$d^2=\frac{2E}{N_0}=\frac{B^2T}{N_0}$，可得：

$$P_M=P\left(H_0\middle|H_1\right)=\int_{-\infty}^{V_T}\frac{q}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{q^2+\left(\frac{BT}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\frac{qBT}{2\sigma^2}\right)dq=\int_{-\infty}^{\frac{V_T}{\sigma}}z\exp\left(-\frac{z^2+d^2}{2}\right)I_0\left(zd\right)dz$$

故最小平均错误率为：

$$\begin{aligned}P_E&=P\left(H_0\right)P\left(H_1\middle|H_0\right)+P\left(H_1\right)P\left(H_0\middle|H_1\right)\\&=P\left(H_0\right)P_F+P\left(H_1\right)P_M=\frac{1}{2}\left(P_F+P_M\right)=\frac{1}{2}\left[\exp\left(-\frac{2V_T^2}{N_0T}\right)+\int_{-\infty}^{\frac{V_T}{\sigma}}z\exp\left(-\frac{z^2+d^2}{2}\right)I_0\left(zd\right)dz\right]\end{aligned}$$

由于 P_M 含有较复杂的积分，可利用第一类零阶修正贝塞尔函数的级数展开式进行积分运算并使用递推算法，可以获得任意精度的

P_M，因此可以得到最小平均错误率，故可得 ROC 曲线，与第 2(3)ASK 调制系统的 ROC 曲线相差不大。限于篇幅，不详述，感兴趣可查阅参考文献[1]P221、附录 4A 和习题 4.23。

(2) θ 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 θ，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围未知。此时判决条件与 θ 有关，故不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

本题为高斯白噪声背景中简单二元随机相位信号波形的检测问题。由于存在初相 θ，故 H_1 假设下有用信号的幅度 B 可认为大于 0 的常数。设 $n(t)$ 为均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，即 $n(t)\sim N\left[0,\frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]$。

由题意可知，两种假设下观测信号 $x(t)$ 的条件似然函数为：

$$p\left[x(t);H_0\right]=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right]$$

$$\begin{aligned}p\left[x(t)|\theta;H_1\right]&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-B\sin(\omega_0 t+\theta)\right]^2 dt\right\}\\&=F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Bx(t)\sin(\omega_0 t+\theta)\right]dt-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}\end{aligned}$$

其中 F 为已知常数。

在最小错误率准则下，则 GLRT 为：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{\max\limits_{\theta} p\left[x(t)|\theta;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

则令：

$$\frac{\partial p\left[x(t)|\theta;H_1\right]}{\partial\theta}$$

$$=\frac{2B}{N_0}F\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[x^2(t)-2Bx(t)\sin(\omega_0 t+\theta)\right]dt-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}\left[\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t+\theta)dt\right]=0$$

可得随机参量θ的最大似然估计值为：

$$\hat{\theta}_{ml}=\tan^{-1}\left[\frac{\int_0^T x(t)\cos\omega_0 tdt}{\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt}\right]$$

令$\theta_0=\tan^{-1}\left[\frac{\int_0^T x(t)\cos\omega_0 tdt}{\int_0^T x(t)\sin\omega_0 tdt}\right]$，带入 GLRT 中可得：

$$\Lambda\left[x(t)\right]=\frac{\max\limits_{\theta} p\left[x(t)|\theta;H_1\right]}{p\left[x(t);H_0\right]}=\exp\left\{\frac{2B}{N_0}\left[\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_0 t+\theta\right)dt\right]-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}\Big|_{\theta=\theta_0}$$

$$=\exp\left\{\frac{2B}{N_0}\left[\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_0 t+\theta_0\right)dt\right]-\frac{B^2T}{2N_0}\right\}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}1$$

两边取对数化简得：

$$\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_0 t+\theta_0\right)dt\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{BT}{4}\overset{def}{=}V_T$$

根据上式，可得检验统计量$l\left[x(t)\right]=\int_0^T x(t)\sin\left(\omega_0 t+\theta_0\right)dt$，则最佳接收机为：

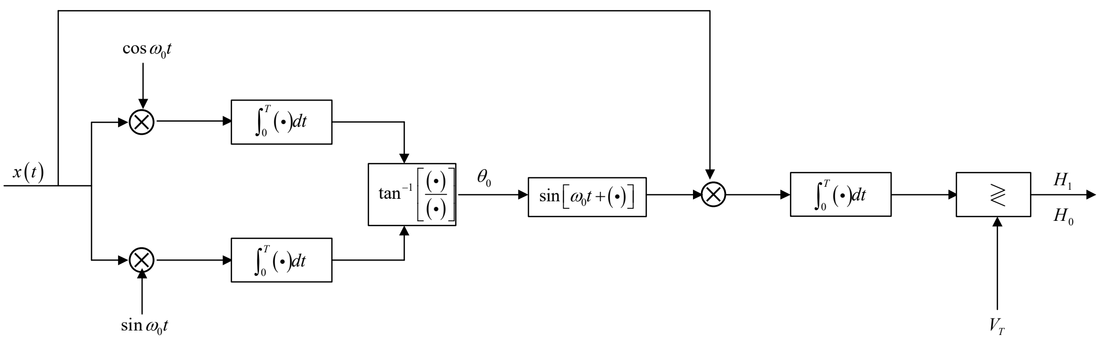

图 11.θ未知参量时的最佳接收机框图

在 H_0 假设下，$x(t)=n(t)$ $(0\le t\le T)$是高斯随机过程，由于θ_0的概率分布较复杂，所以检验统计量$l\left[x(t)\right]$的概率分布难以确定，故较难给

出虚警概率 P_F 的确定表达式。

在 H_1 假设下，$x(t)=B\sin(\omega_0 t+\theta)+n(t)$，其中 B，ω_0 为已知常数，$n(t)$ 为高斯随机过程。由于 θ 为未知概率分布的随机参量，且 θ_0 的概率分布较复杂，故无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式，所以无法得到最小平均错误率，故无法给出 ROC 曲线。

参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.