信号检测与估计
第四章作业

学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1.设观测矢量$\underline{x}=a\underline{s}+\underline{n}$，其中$a$为未知参量，噪声矢量$\underline{n}\sim N(0,\underline{I})$，$\underline{s}$为已知矢量，假定$a$与 $\underline{\mathrm{n}}$ 相互独立，如果a在[1,5]上均匀分布，即

$$p(a)=\frac{1}{4}, a\in[1,5]$$

试求未知参量a的最大后验概率估计($\hat{a}_{map}$)和最小均方误差估计($\hat{a}_{ms}$)，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(如果有可能的话)。

解：由题意可知，观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p(\underline{x}|a)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-a\underline{s})^T(\underline{x}-a\underline{s})\right]$$

其中N为观测矢量维数。

由 Bayes 公式可得：

$$P\left[a\middle|\left(\underline{x}\le\underline{X}\le\underline{x}+d\underline{x}\right)\right]=\frac{P\left[\left(\underline{x}\le\underline{X}\le\underline{x}+d\underline{x}\right)\middle|a\right]P(a)}{P\left(\underline{x}\le\underline{X}\le\underline{x}+d\underline{x}\right)}$$

对于观测矢量$\underline{x}$的微小变化$d\underline{x}$，有：

$$P\left(\underline{x}<\underline{X}<\underline{x}+d\underline{x}\middle|a\right)=p(\underline{x}|a)d\underline{x}$$

$$P\left(\underline{x}<\underline{X}<\underline{x}+d\underline{x}\right)=p(\underline{x})d\underline{x}$$

$$P\left[a\middle|\left(\underline{x}\le\underline{X}\le\underline{x}+d\underline{x}\right)\right]=P\left(a\middle|\underline{x}\right)$$

从而得：

$$P\left(a\middle|\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|a\right)P\left(a\right)}{p(\underline{x})}$$

因此有：

$$P\left(a\le A\le a+da\middle|\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|a\le A\le a+da\right)P\left(a\le A\le a+da\right)}{p(\underline{x})}$$

对于未知参量 a 的微小变化 da，有：

$$p\left(\underline{x}\middle|a\le A\le a+da\right)=p\left(\underline{x}\middle|a\right)$$

$$P\left(a\le A\le a+da\right)=p\left(a\right)da$$

$$P\left(a\le A\le a+da\middle|\underline{x}\right)=p\left(a\middle|\underline{x}\right)da$$

从而得:

$$p\left(a\middle|\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}$$

因此，未知参量a的最大后验概率估计为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}\ p\left(a\middle|\underline{x}\right)=\arg\max_{a}\ \frac{p\left(\underline{x}\middle|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}$$

由于$p\left(\underline{x}\right)$并没有提供任何待估计参数$a$的任何信息，故上式可变为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}\ p\left(\underline{x}\middle|a\right)p\left(a\right)$$

又因为$p\left(\underline{x}\middle|a\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$，　$p(a)=\frac{1}{4}\ \ a\in[1,5]$，因此：

$$p\left(\underline{x}\middle|a\right)p\left(a\right)=\begin{cases}\frac{1}{4\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right], & a\in\left[1,5\right]\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

当$a\in\left[1,5\right]$时，$p\left(\underline{x}\middle|a\right)p\left(a\right)$是以$\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}$为对称轴的钟型曲线,可得下图：

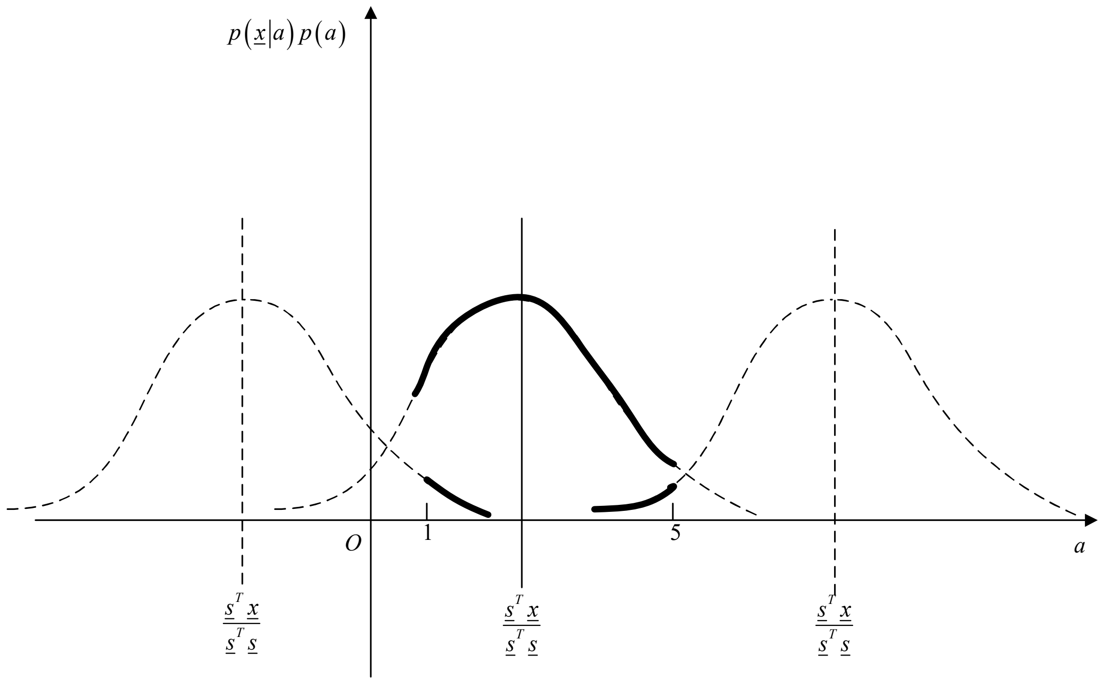

图 1. $p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$ 取值图

其中虚线表示 $p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$ 的值没法取到，其真实值为 0。故未知参量 a 的最大后验估计 $\hat{a}_{map}$ 为：

$$\hat{a}_{map}=\begin{cases} 1\ , & \frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}<1 \\ \frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}, & 1\le\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}\le 5 \\ 5\ , & \frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}>5 \end{cases}$$

由于 $\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}|a\sim N\left(a,\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}}\right)$，可令：$\mu=\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}$，$\sigma^2=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}}$，故有：

$$p\left(\mu|a\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\mu-a\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

因此有：

$$p\left(\mu\right)=\int_a p\left(\mu|a\right)p\left(a\right)da=\frac{1}{4}\int_1^5\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\mu-a\right)^2}{2\sigma^2}\right]da=\frac{1}{4}\int_{\frac{1-\mu}{\sigma}}^{\frac{5-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

其中$\Phi(x)$为标准正态分布的 cdf。

所以有：

$$P(\mu<1)=\int_{-\infty}^{1}p(\mu)d\mu=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu$$

$$P(1\le\mu\le5)=\int_{1}^{5}p(\mu)d\mu=\frac{1}{4}\int_{1}^{5}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu$$

$$P(\mu>5)=\frac{1}{4}\int_{5}^{+\infty}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu$$

可令：$\frac{1}{4}\int_{5}^{+\infty}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu=\mathrm{c}$，

则$\frac{1}{4}\int_{1}^{5}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu=1-2\mathrm{c}$，故未知参量 a 的最大后验估计的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{map}\right)=\mathrm{c}+\mathrm{E}(\mu)(1-2\mathrm{c})+5\mathrm{c}=6\mathrm{c}+\mathrm{E}(a)(1-2\mathrm{c})=3=\mathrm{E}(a)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{T}\right]&=\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{2}\right]=\mathrm{E}\left[(1-a)^{2}\mathrm{c}+(\mu-a)^{2}(1-2\mathrm{c})+(5-a)^{2}\mathrm{c}\right]\\&=\frac{32}{3}\mathrm{c}+\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}(1-2\mathrm{c})=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}+\left(\frac{32}{3}-2\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)\mathrm{c}\\&=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}+\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)\int_{-\infty}^{1}\left[\Phi\left(\frac{5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)\right]d\mu\end{aligned}$$

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{1}^{5}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}da$$

$$=\int_{1}^{5}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{\int_{1}^{5}p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)da}da=\int_{1}^{5}a\frac{\frac{1}{4\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]}{\int_{1}^{5}\frac{1}{4\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]da}da$$

$$=\int_{1}^{5}\frac{a\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^{2}\underline{s}^{T}\underline{s}-2a\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}\underline{x}^{T}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)\right]}{\int_{1}^{5}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^{2}\underline{s}^{T}\underline{s}-2a\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}\underline{x}^{T}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)\right]da}da$$

可利用$\mu=\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}$，$\sigma^{2}=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}}$，故有：

$$\hat{a}_{ms}=E\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{1}^{5}\frac{a\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(a-\mu\right)^{2}\right]}{\int_{1}^{5}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(a-\mu\right)^{2}\right]da}da$$

$$=\int_{1}^{5}\frac{a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(a-\mu\right)^{2}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{1}^{5}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(a-\mu\right)^{2}\right]da}da$$

可令：$m=\frac{1-\mu}{\sigma}$，$n=\frac{5-\mu}{\sigma}$故可得：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{m}^{n}\frac{\left(\sigma y+\mu\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^{2}}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{m}^{n}\exp\left(-\frac{y^{2}}{2}\right)dy}dy$$

$$=\mu+\sigma\int_{m}^{n}\frac{y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^{2}}{2}\right)}{\Phi\left(n\right)-\Phi\left(m\right)}dy=\mu-\sigma\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{n^{2}}{2}\right)-\exp\left(-\frac{m^{2}}{2}\right)\right]}{\Phi\left(n\right)-\Phi\left(m\right)}$$

未知参量a的最小均方误差估计的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ms}\right)=\mathrm{E}\left\{\mu-\sigma\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{n^{2}}{2}\right)-\exp\left(-\frac{m^{2}}{2}\right)\right]}{\Phi\left(n\right)-\Phi\left(m\right)}\right\}=3=\mathrm{E}\left(a\right)$$

$$E\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^T\right]=E\left\{\mu-a-\sigma\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{n^2}{2}\right)-\exp\left(-\frac{m^2}{2}\right)\right]}{\Phi(n)-\Phi(m)}\right\}^2=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}}$$

此题观测矢量$\underline{x}$与随机参量a的联合pdf并不连续，故克拉美-罗下限(CRB)并不存在。

2.如果a的分布变为

$$p(a)=\frac{1}{3}\delta(a-1)+\frac{1}{3}\delta(a-2)+\frac{1}{3}\delta(a-3)$$

其它条件同习题1，试求未知参量a的最大后验概率估计($\hat{a}_{map}$)和最小均方误差估计($\hat{a}_{ms}$)，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(如果有可能的话)。

解：由题意可知，观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p\left(\underline{x}|a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中N为观测矢量维数。

未知参量a的最大后验概率估计为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_a p\left(a|\underline{x}\right)=\arg\max_a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p(a)}{p\left(\underline{x}\right)}$$

由于$p\left(\underline{x}\right)$并没有提供任何待估计参数$a$的任何信息，故上式可变为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_a p\left(\underline{x}|a\right)p(a)$$

又因为

$$
p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]\left[\frac{1}{3}\delta(a-1)+\frac{1}{3}\delta(a-2)+\frac{1}{3}\delta(a-3)\right]
$$

$$
=\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]\delta(a-1)+\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]\delta(a-2)
$$

$$
+\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]\delta(a-3)
$$

根据冲激函数的取样性质可知，$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$只在 a=1，a=2，a=3 时存在非零值。所以有：

$$
p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]\delta\left(a-1\right), & a=1\\ \dfrac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]\delta\left(a-2\right), & a=2\\ \dfrac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]\delta\left(a-3\right), & a=3\\ 0, & \text{else}\end{cases}
$$

由于$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$取值存在冲激函数，所以不能直接比大小，可以认为$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$在 a 的微小变化 da 上的概率近似$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$的大小，这也符合最大后验估计的定义。将$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$在$a=1$的微小变化 d$a$ 上的概率$\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]$、$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$在$a=2$的微小变化 d$a$ 上的概率$\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]$与$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$在$a=3$的微小变化 d$a$ 上的概率$\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]$相互作差，可得其相对大小的门限，故有：

$$\hat{a}_{map}=\begin{cases}1 & ,\ \frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}<\frac{3}{2}\\ 2 & ,\ \frac{3}{2}\le\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}\le\frac{5}{2}\\ 3 & ,\ \frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}>\frac{5}{2}\end{cases}$$

由于$\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}\Big|a\sim N\left(a,\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}}\right)$，可令：$\mu=\frac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}$，$\sigma^2=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}}$，故有：

$$p(\mu|a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(\mu-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

因此有：

$$p(\mu)=\int_a p(\mu|a)p(a)\,da=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\exp\left[-\frac{(\mu-1)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-2)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-3)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}$$

所以有：

$$P\left(\mu<\frac{3}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{3}{2}}p(\mu)d\mu=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{3}{2}}\left\{\exp\left[-\frac{(\mu-1)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-2)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-3)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}d\mu$$
$$=\frac{1}{3}\left[2-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\right]$$

$$P\left(\frac{3}{2}\le\mu\le\frac{5}{2}\right)=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}p(\mu)d\mu=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}\left\{\exp\left[-\frac{(\mu-1)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-2)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-3)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}d\mu$$
$$=\frac{1}{3}\left[2\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)-1\right]$$

$$P\left(\mu>\frac{5}{2}\right)=\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}p(\mu)d\mu=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(\mu-1)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-2)^2}{2\sigma^2}\right]+\exp\left[-\frac{(\mu-3)^2}{2\sigma^2}\right]\right\}d\mu$$
$$=\frac{1}{3}\left[2-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\right]$$

其中$\Phi(x)$为标准正态分布的 cdf。

可令：$\frac{1}{3}\left[2-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\right]$=c，则$\frac{1}{3}\left[2\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)-1\right]$=$1-2$c，故未知参量 a 的

最大后验估计的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{map}\right)=\mathrm{c}+2\left(1-2\mathrm{c}\right)+3\mathrm{c}=2=\mathrm{E}\left(a\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{T}\right]&=\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{2}\right]=\mathrm{E}\left[\left(1-a\right)^{2}\mathrm{c}+\left(2-a\right)^{2}\left(1-2\mathrm{c}\right)+\left(3-a\right)^{2}\mathrm{c}\right]\\&=2\mathrm{c}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left[2-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\right]+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left[3-\Phi\left(\frac{3}{2\sigma}\right)\right]\end{aligned}$$

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：

$$\begin{aligned}\hat{a}_{ms}&=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{a}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{a}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}da\\&=\int_{a}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{\int_{a}p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)da}da\\&=\frac{\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]+2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]+3\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]\right\}}{\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]+\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]+\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]\right\}}\\&=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]+2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]+3\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]+\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-2\underline{s}\right)\right]+\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)\right]}\\&=\frac{1+2\exp\left(\underline{s}^{T}\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^{T}\underline{s}\right)+3\exp\left(2\underline{s}^{T}\underline{x}-4\underline{s}^{T}\underline{s}\right)}{1+\exp\left(\underline{s}^{T}\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^{T}\underline{s}\right)+\exp\left(2\underline{s}^{T}\underline{x}-4\underline{s}^{T}\underline{s}\right)}\end{aligned}$$

未知参量 a 的最小均方误差估计的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ms}\right)=\mathrm{E}\left[\frac{1+2\exp\left(\underline{s}^T\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+3\exp\left(2\underline{s}^T\underline{x}-4\underline{s}^T\underline{s}\right)}{1+\exp\left(\underline{s}^T\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+\exp\left(2\underline{s}^T\underline{x}-4\underline{s}^T\underline{s}\right)}\right]$$

$$=\frac{1+2\exp\left[\mathrm{E}(a)\underline{s}^T\underline{s}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right]+3\exp\left[2\mathrm{E}(a)\underline{s}^T\underline{s}-4\underline{s}^T\underline{s}\right]}{1+\exp\left[\mathrm{E}(a)\underline{s}^T\underline{s}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right]+\exp\left[2\mathrm{E}(a)\underline{s}^T\underline{s}-4\underline{s}^T\underline{s}\right]}$$

$$=\frac{1+2\exp\left(\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+3}{2+\exp\left(\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)}=2=\mathrm{E}(a)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^T\right]=\mathrm{E}\left\{\left[\frac{1-a+(2-a)\exp\left(\underline{s}^T\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+(3-a)\exp\left(2\underline{s}^T\underline{x}-4\underline{s}^T\underline{s}\right)}{1+\exp\left(\underline{s}^T\underline{x}-\frac{3}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+\exp\left(2\underline{s}^T\underline{x}-4\underline{s}^T\underline{s}\right)}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\exp\left(\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+\frac{2}{3}\exp\left(\underline{s}^T\underline{s}\right)}{4+4\exp\left(\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{s}\right)+\exp\left(\underline{s}^T\underline{s}\right)}=\frac{2}{3}$$

此题观测矢量$\underline{x}$与随机参量a的联合pdf并不连续，故克拉美-罗下限(CRB)并不存在。

3.如果a是均值为3，方差为9的高斯随机变量，即$a\sim N(3,9)$，其它条件同习题1，试求未知参量a 的线性最小均方误差估计($\hat{a}_{lms}$)，最大后验概率估计($\hat{a}_{map}$)和最小均方误差估计($\hat{a}_{ms}$)，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(如果有可能的话)。

解：由题意可得，未知参量a的pdf为：

$$p(a)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(a-3)^2}{18}\right]$$

观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p\left(\underline{x}|a\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中N为观测矢量维数。

依此可求得：

$$\mathrm{E}\left(a\right)=3$$

$$\mathrm{E}\left(\underline{x}\right)=\mathrm{E}\left(a\right)\underline{s}=3\underline{s}$$

$$\mathrm{Cov}\left(a,\underline{x}\right)=\mathrm{Cov}\left(a,a\underline{s}+\underline{n}\right)=\mathrm{Cov}\left(a,a\underline{s}\right)=\mathrm{Var}\left(a\right)\underline{s}^{T}=9\underline{s}^{T}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\underline{x}\right)&=\mathrm{E}\left\{\left[\underline{x}-\mathrm{E}\left(\underline{x}\right)\right]\left[\underline{x}-\mathrm{E}\left(\underline{x}\right)\right]^{T}\right\}=\mathrm{E}\left\{\left[\underline{x}-\mathrm{E}\left(a\right)\underline{s}\right]\left[\underline{x}-\mathrm{E}\left(a\right)\underline{s}\right]^{T}\right\}\\&=\mathrm{Var}\left(a\right)\underline{s}\underline{s}^{T}+\underline{I}=9\underline{s}\underline{s}^{T}+\underline{I}\end{aligned}$$

根据线性最小均方误差估计$\hat{a}_{lms}=\mathrm{E}\left(a\right)+\mathrm{Cov}\left(a,\underline{x}\right)\mathrm{Var}^{-1}\left(\underline{x}\right)\left[\underline{x}-\mathrm{E}\left(\underline{x}\right)\right]$可得：

$$\hat{a}_{lms}=3+9\underline{s}^{T}\left(9\underline{s}\underline{s}^{T}+\underline{I}\right)^{-1}\left(\underline{x}-3\underline{s}\right)=\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

未知参量a的最大后验概率估计为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}p\left(a|\underline{x}\right)=\arg\max_{a}\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}$$

由于$p\left(\underline{x}\right)$并没有提供任何待估计参数$a$的任何信息，故上式可变为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$$

取对数，可得：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}\ln\left[p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)\right]$$

由于$p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)=\frac{1}{3\left(2\pi\right)^{\frac{N+1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{\left(a-3\right)^{2}}{18}\right]$，令

$\frac{\partial \ln p(\underline{x}|a)p(a)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{map}}=0$，可得：

$$\left[\underline{s}^T(\underline{x}-a\underline{s})-\frac{a-3}{9}\right]\Big|_{\hat{a}_{map}}=0$$

所以$\hat{a}_{map}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}}$。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：

$$\begin{aligned}\hat{a}_{ms}&=\mathrm{E}(a|\underline{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}ap(a|\underline{x})da=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p(\underline{x}|a)p(a)}{p(\underline{x})}da\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p(\underline{x}|a)p(a)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p(\underline{x}|a)p(a)da}da\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{\frac{1}{3(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-a\underline{s})^T(\underline{x}-a\underline{s})-\frac{(a-3)^2}{18}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{3(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x}-a\underline{s})^T(\underline{x}-a\underline{s})-\frac{(a-3)^2}{18}\right]da}da\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}\right)a^2-2\left(\underline{s}^T\underline{x}+\frac{1}{3}\right)a\right]\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}\right)a^2-2\left(\underline{s}^T\underline{x}+\frac{1}{3}\right)a\right]\right\}da}da\end{aligned}$$

可令：

$$\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^T\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

$$\sigma_{a|\underline{x}}^2=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

故有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a\middle|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a\middle|\underline{x}\right)da=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{a|\underline{x}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]=\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

未知参量 a 的线性最小均方误差估计 $\hat{a}_{lms}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{lms}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)=3=E\left(a\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{n}-\frac{a-3}{9}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)^{2}=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

未知参量 a 的最大后验估计的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{map}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)=\frac{\mathrm{E}\left(a\right)\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}=3=\mathrm{E}\left(a\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{n}-\frac{a-3}{9}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)^{2}=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

未知参量 a 的最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ms}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{1}{3}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)=3=\mathrm{E}\left(a\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{n}-\frac{a-3}{9}}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}\right)^{2}\right]=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

此题联合 pdf 满足正则条件 $\mathrm{E}\left[\frac{\partial \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}+\frac{\partial \ln p\left(a\right)}{\partial a}\right]=0$，且对随机参量 a 的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合 pdf 的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 \ln p\left(a\right)}{\partial a^2}\right]}=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{9}}$$

随机参量 a 的线性最小均方误差估计 $\hat{a}_{lms}$、最大后验估计 $\hat{a}_{map}$ 与最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均方误差达到 CRB，故 $\hat{a}_{lms}$、$\hat{a}_{map}$ 与 $\hat{a}_{ms}$ 为 a 的有效估计。

4.设观测矢量 $\underline{x}=a\underline{s}+\underline{n}$，其中 a 为未知参量，噪声矢量 $\underline{n}\sim N(0,\sigma_n^2\underline{I})$，$\underline{s}$ 为已知矢量，求：

(1)未知参量 a 的最小二乘估计($\hat{a}_{LS}$)和最大似然估计($\hat{a}_{ml}$)。

(2)如果还知道 a 是均值为 m，方差为 σ^2 的高斯随机变量，即 $a\sim N(m,\sigma^2)$，试求未知参量 a 的最大后验概率估计($\hat{a}_{map}$)和最小均方误差估计($\hat{a}_{ms}$)。

(3)分别给出上述不同估计量的均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(如果有可能的话)。

解：(1)最小二乘估计法，又称最小平方法，是一种数学优化技术。它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘估计法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。则未知参数 a 的最小二乘估计为：

$$\hat{a}_{LS}=\arg\min_{a} J\left(a\right)$$

其中 $J\left(a\right)=\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)$ 为误差平方和函数。因此有：

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{LS}}=\frac{\partial\left(a^2\underline{s}^T\underline{s}-2a\underline{s}^T\underline{x}+\underline{x}^T x\right)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{LS}}=\left(2a\underline{s}^T\underline{s}-2\underline{s}^T\underline{x}\right)\Big|_{\hat{a}_{LS}}=0$$

故$\hat{a}_{LS}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}$。

最大似然估计是利用已知的观测结果，反推最大概率导致这样的观测结果的参数值，则未知参数 a 的最大似然估计为：

$$\hat{a}_{ml}=\arg\max_a p\left(\underline{x}|a\right)$$

令 $\underline{R}=\sigma_n^2\underline{I}$，由题意可知，观测矢量$\underline{x}$在未知参量 a 的条件下的条件 pdf 为：

$$p\left(\underline{x}|a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中 N 为观测矢量$\underline{x}$的维数。取对数可得对数条件 pdf 为：

$$\ln p\left(\underline{x}|a\right)=-\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\underline{R}\right|-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)$$

因此有：

$$\frac{\partial\ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{ml}}=\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]\Big|_{\hat{a}_{ml}}=0$$

故$\hat{a}_{ml}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}$。

(2)由题意可知，未知参量 a 的 pdf 为：

$$p\left(a\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(a-m\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

令 $\underline{R}=\sigma_n^2\underline{I}$，观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p\left(\underline{x}|a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中 N 为观测矢量$\underline{x}$的维数。则未知参量a的最大后验概率估计为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a} p\left(a|\underline{x}\right)=\arg\max_{a}\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}$$

由于 $p(\underline{x})$ 并没有提供任何待估计参数 a 的任何信息，故上式可变为：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a} p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)$$

取对数，可得：

$$\hat{a}_{map}=\arg\max_{a}\ln\left[p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)\right]$$

由于 $p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N+1}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{\left(a-m\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]$，

令 $\frac{\partial\ln\left[p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)\right]}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{map}}=0$，可得：

$$\left[\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{a-m}{\sigma^{2}}\right]\Big|_{\hat{a}_{map}}=0$$

所以 $\hat{a}_{map}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}=\frac{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{(a-m)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{(a-m)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}\right)a^{2}-2\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}\right)a\right]\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}\right)a^{2}-2\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}\right)a\right]\right\}da}da$$

可令：

$$\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

$$\sigma_{a|\underline{x}}^{2}=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

故有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{a|\underline{x}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]=\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}=\frac{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

(3)未知参量 a 的最小二乘估计 $\hat{a}_{LS}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{LS}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)=a$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{LS}-a\right)\left(\hat{a}_{LS}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{n}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\frac{\underline{n}^{T}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}\underline{s}^{T}\underline{s}}=\frac{\sigma_{n}^{2}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}$$

未知参量 a 的最大似然估计 $\hat{a}_{ml}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ml}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)=a$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{n}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\frac{\underline{n}^{T}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}\underline{s}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}=\frac{\sigma_{n}^{2}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}$$

未知参量 a 的最大后验估计 $\hat{a}_{map}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{map}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}\right)=\frac{\mathrm{E}(a)\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}=m=\mathrm{E}(a)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{map}-a\right)\left(\hat{a}_{map}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{n}-\frac{a-m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}\right)^{2}\right]=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

未知参量 a 的最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ms}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}\right)=m=\mathrm{E}(a)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^{T}\right]=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{n}-\frac{a-m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}\right)^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{n}^{2}}\underline{s}^{T}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

当 a 为非随机参量时，此题对数似然函数满足正则条件 $\mathrm{E}\left[\frac{\partial\ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}\right]=0$，且对非随机参量 a 的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数似然函数的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a^2}\right]}=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}=\frac{\sigma_n^2}{\underline{s}^T\underline{s}}$$

非随机参量 a 的最小二乘估计 $\hat{a}_{LS}$ 与最大似然估计 $\hat{a}_{ml}$ 的均方误差达到 CRB，故 $\hat{a}_{LS}$ 与 $\hat{a}_{ml}$ 为 a 的有效估计。

当 a 为随机参量时，此题联合 pdf 满足正则条件 $\mathrm{E}\left[\frac{\partial \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}+\frac{\partial \ln p\left(a\right)}{\partial a}\right]=0$，且对随机参量 a 的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合 pdf 的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 \ln p\left(a\right)}{\partial a^2}\right]}=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_n^2}\underline{s}^T\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

随机参量 a 的最大后验估计 $\hat{a}_{map}$ 与最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均方误差达到 CRB，故 $\hat{a}_{map}$ 与 $\hat{a}_{ms}$ 为 a 的有效估计。

5.设观测矢量 $\underline{x}=a\underline{s}+\underline{n}$，其中 a 为未知参量，噪声矢量 $\underline{n}\sim N(0,\underline{R})$，$\underline{s}$ 为已知矢量，求：

(1)未知参量 a 的最小二乘估计($\hat{a}_{LS}$)，最优加权矩阵相应的加权最小二乘估计($\hat{a}_{WLS}$)和最大似然估计($\hat{a}_{ml}$)。

(2)如果还知道 a 是均值为 m，方差为 σ^2 的高斯随机变量，即 $a\sim N(m,\sigma^2)$，试求未知参量 a 的最小均方误差估计($\hat{a}_{ms}$)。

(3)分别给出上述不同估计量的均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(如果有可能的话)。

解：(1)最小二乘估计法，又称最小平方法，是一种数学优化技术。它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘估计法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数

据之间误差的平方和为最小，则未知参数 a 的最小二乘估计为：

$$\hat{a}_{LS}=\arg\min_{a} J(a)$$

其中 $J(a)=(\underline{x}-a\underline{s})^T(\underline{x}-a\underline{s})$ 为误差平方和函数。因此有：

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{LS}}=\frac{\partial\left(a^2\underline{s}^T\underline{s}-2a\underline{s}^T\underline{x}+\underline{x}^T\underline{x}\right)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{LS}}=\left(2a\underline{s}^T\underline{s}-2\underline{s}^T\underline{x}\right)\Big|_{\hat{a}_{LS}}=0$$

故 $\hat{a}_{LS}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{s}}$。

最小二乘估计将误差矢量中的各分量同等看待，认为各分量对观测矢量的影响相同，但事实上，误差分量越大，对观测矢量的影响越大。加权最小二乘估计对于误差越大的分量赋予更小权重，对于误差较小的分量赋予更大的权重，然后采用普通最小二乘法估计其参数的一种数学优化技术。假设 $\underline{W}$ 为加权矩阵(是一正定阵)，则未知参数 a 的加权最小二乘估计为：

$$\hat{a}_{WLS}=\arg\min_{a} J(a)$$

其中 $J(a)=(\underline{x}-a\underline{s})^T\underline{W}(\underline{x}-a\underline{s})$ 为加权误差平方和函数。因此有：

$$\frac{\partial J(a)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{WLS}}=\frac{\partial\left(a^2\underline{s}^T\underline{W}\underline{s}-2a\underline{s}^T\underline{W}\underline{x}+\underline{x}^T\underline{W}\underline{x}\right)}{\partial a}\Big|_{\hat{a}_{WLS}}=\left(2a\underline{s}^T\underline{W}\underline{s}-2\underline{s}^T\underline{W}\underline{x}\right)\Big|_{\hat{a}_{WLS}}=0$$

故 $\hat{a}_{WLS}=\dfrac{\underline{s}^T\underline{W}\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{W}\underline{s}}$。

根据最小均方误差准则，利用矩阵柯西施瓦兹不等式可得，当加权矩阵 $\underline{W}=\underline{R}^{-1}$ 时，为最优加权最小二乘估计，此时有：

$$\hat{a}_{WLS}=\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}$$

最大似然估计是利用已知的观测结果，反推最大概率导致这样的观测结果的参数值，则未知参数 a 的最大似然估计为：

$$\hat{a}_{ml} = \arg\max_{a} p\left(\underline{x}|a\right)$$

由题意可知，观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p\left(\underline{x}|a\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中 N 为观测矢量$\underline{x}$的维数。取对数可得对数似然函数为：

$$\ln p\left(\underline{x}|a\right) = -\frac{N}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\underline{R}\right| - \frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)$$

因此有：

$$\frac{\partial \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}\bigg|_{\hat{a}_{ml}} = \left[\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]\bigg|_{\hat{a}_{ml}} = 0$$

故 $\hat{a}_{ml} = \dfrac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}}$。

(2)由题意可知，未知参量 a 的 pdf 为：

$$p\left(a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(a-m\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]$$

观测矢量$\underline{x}$的似然函数为：

$$p\left(\underline{x}|a\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

其中 N 为观测矢量$\underline{x}$的维数。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{p\left(\underline{x}\right)}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(\underline{x}|a\right)p\left(a\right)da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{\left(a-m\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^{T}\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)-\frac{\left(a-m\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right]da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}\right)a^{2}-2\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}\right)a\right]\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}\right)a^{2}-2\left(\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}\right)a\right]\right\}da}da$$

可令：

$$\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

$$\sigma_{a|\underline{x}}^{2}=\frac{1}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

故有：

$$\hat{a}_{ms}=\mathrm{E}\left(a|\underline{x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}ap\left(a|\underline{x}\right)da=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]da}da$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}a\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{a|\underline{x}}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{a|\underline{x}}^{2}}\left(a-\mu_{a|\underline{x}}\right)^{2}\right]=\mu_{a|\underline{x}}=\frac{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^{2}}}{\underline{s}^{T}\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^{2}}}$$

(3)未知参量 a 的最小二乘估计 $\hat{a}_{LS}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{LS}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^{T}\underline{x}}{\underline{s}^{T}\underline{s}}\right)=a$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{LS}-a\right)\left(\hat{a}_{LS}-a\right)^T\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{n}}{\underline{s}^T\underline{s}}\frac{\underline{n}^T\underline{s}}{\underline{s}^T\underline{s}}\right)=\frac{\underline{s}^T\underline{R}\underline{s}}{\underline{s}^T\underline{s}\underline{s}^T\underline{s}}$$

未知参量 a 的最优加权最小二乘估计 $\hat{a}_{WLS}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{WLS}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\right)=a$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{WLS}-a\right)\left(\hat{a}_{WLS}-a\right)^T\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{n}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\frac{\underline{n}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\right)=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}$$

未知参量 a 的最大似然估计 $\hat{a}_{ml}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ml}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\right)=a$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ml}-a\right)\left(\hat{a}_{ml}-a\right)^T\right]=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{n}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\frac{\underline{n}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}\right)=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}$$

未知参量 a 的最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均值与均方误差为：

$$\mathrm{E}\left(\hat{a}_{ms}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}+\frac{m}{\sigma^2}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}\right)=m=\mathrm{E}(a)$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{a}_{ms}-a\right)\left(\hat{a}_{ms}-a\right)^T\right]=\mathrm{E}\left[\left(\frac{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{n}-\frac{a-m}{\sigma^2}}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

当 a 为非随机参量时，此题对数似然函数满足正则条件 $\mathrm{E}\left[\frac{\partial\ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}\right]=0$，且对非随机参量 a 的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数似然函数的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2\ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a^2}\right]}=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}}$$

非随机参量 a 的最优加权最小二乘估计 $\hat{a}_{WLS}$ 与最大似然估计 $\hat{a}_{ml}$ 的均方误差达到 CRB，故 $\hat{a}_{WLS}$ 与 $\hat{a}_{ml}$ 为 a 的有效估计。非随机参量 a 的最小二乘估计 $\hat{a}_{LS}$ 未达到 CRB，故 $\hat{a}_{LS}$ 为 a 的无效估计。

当 a 为随机参量时，此题联合 pdf 满足正则条件 $\mathrm{E}\left[\frac{\partial \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a}+\frac{\partial \ln p\left(a\right)}{\partial a}\right]=0$，且对随机参量 a 的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合 pdf 的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p\left(\underline{x}|a\right)}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 \ln p\left(a\right)}{\partial a^2}\right]}=\frac{1}{\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}+\frac{1}{\sigma^2}}$$

随机参量 a 的最小均方误差估计 $\hat{a}_{ms}$ 的均方误差达到 CRB，故 $\hat{a}_{ms}$ 为 a 的有效估计。

参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.