信号检测与估计
第三章作业

学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1.设有下列两种假设：

H_0： $x = n$

H_1： $x = a + n$

其中 a>0 为常数，$n \sim N(0,1)$。如果要求 $P_F = 10^{-3}$,试设计相应的最佳接收机，确定其检测概率 P_D，并画出 $P_D \sim SNR(a或a^2)$ 的关系曲线。

解：此题，并不能预知每种假设的先验概率 $P(H_j)(j=0,1)$，也无法对各种判决结果给定代价因子 $c_{ij}(i=0,1;j=0,1)$，但是已知错误判决概率 $P(H_1|H_0)$(即就是虚警概率 P_F)为一固定值，且两种假设似然函数均已知。在此约束条件下，为了设计相应的最佳接收机，使正确判决率 $P(H_1|H_1)$(即就是检测概率 P_D)最大，即就是使用 Neyman-Pearson criterion 进行设计，简记为 N-P 准则，所设计的最佳接收机称为 N-P 接收机。

在 $P(H_1|H_0)$ 为固定值的约束条件下为了使 $P(H_1|H_1)$ 最大，即使 $P(H_0|H_1)=1-P(H_1|H_1)$(即就是漏警概率 P_M)最小，是一种条件极值问题，利用 Largrange 乘子法可以得到似然比检验(Likelihood ratio test)形式为：

$$\lambda(x) = \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \eta$$

可知，$\eta \ge 0$。

对于给定的 $P(H_1|H_0)$，LRT 门限 λ_0 可以由下式确定：

$$P(H_1|H_0) = \int_{R_1} p(x|H_0)dx = \int_{\eta}^{+\infty} p(\lambda|H_0)d\lambda$$

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测值 x 的似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p(x|H_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$p(x|H_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x\text{-}a)^2}{2}\right]$$

则 LRT 为：

$$\lambda(x)=\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)}=\exp\left(ax-\frac{a^2}{2}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{a}\ln\eta+\frac{a}{2}\overset{def}{=}V_T(\eta)$$

根据上式，可得检验统计量 $t(x)=x$，当约束条件 $P(H_1|H_0)=P_F=10^{-3}$ 时，有：

$$P_F=P(H_1|H_0)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p(t|H_0)dt=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p(x|H_0)dx=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=1-\Phi\left[V_T(\eta)\right]=10^{-3}$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限) $x=V_T(\eta)=\Phi^{-1}\left(1-10^{-3}\right)=3.092$，进而可以求得 LRT 门限 $\lambda_0=\exp\left[V_T(\eta)a-\frac{a^2}{2}\right]=\exp\left(3.092a-\frac{a^2}{2}\right)$，则检测概率为：

$$\begin{aligned}P_D&=P(H_1|H_1)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p(t|H_1)dt=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p(x|H_1)dx\\&=\int_{3.092}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2}\right]dx=\int_{3.092\text{-}a}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\\&=1-\Phi(3.092-a)\end{aligned}$$

可得最佳接收机为：

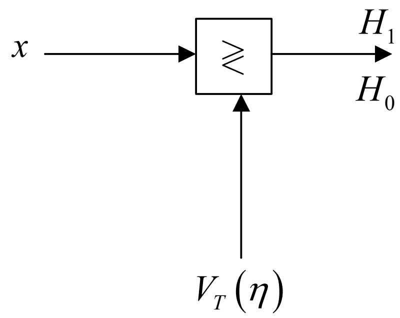

图 1:最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：

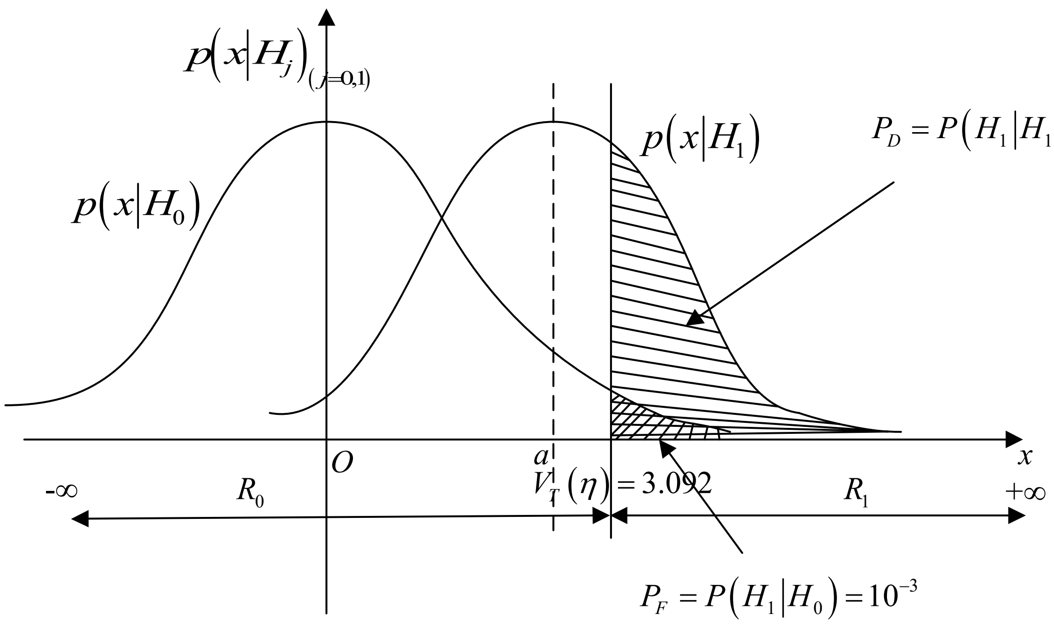

图 2:判决域及判决概率图

由图 2 可知，当 a 从 0~+∞变化，H_1 假设下的观测值比 H_0 假设下的观测值越来越大，说明有用(感兴趣)信号 a 在观测信号中的权重越来越大，a 表征 SNR 的大小，此时检测概率 P_D 从 P_F=10^{-3} 到 1 变化。

由于噪声 $n \sim N(0,1)$，可认为噪声是一宽平稳随机过程，则其平均功率为：

$$P_{n\_av} = \mathrm{E}\left[n^2(t)\right] = R_n(0) = \sigma_n^2 = 1$$

故 SNR 为：

$$\mathrm{SNR}=10\lg\left(\frac{P_s}{P_{n\_av}}\right)=10\lg\left(\frac{a^2}{1}\right)dB=20\lg a\ \mathrm{dB}$$

这与图 2 分析结果相同，a 表征 SNR 的大小。

由此可得下图：

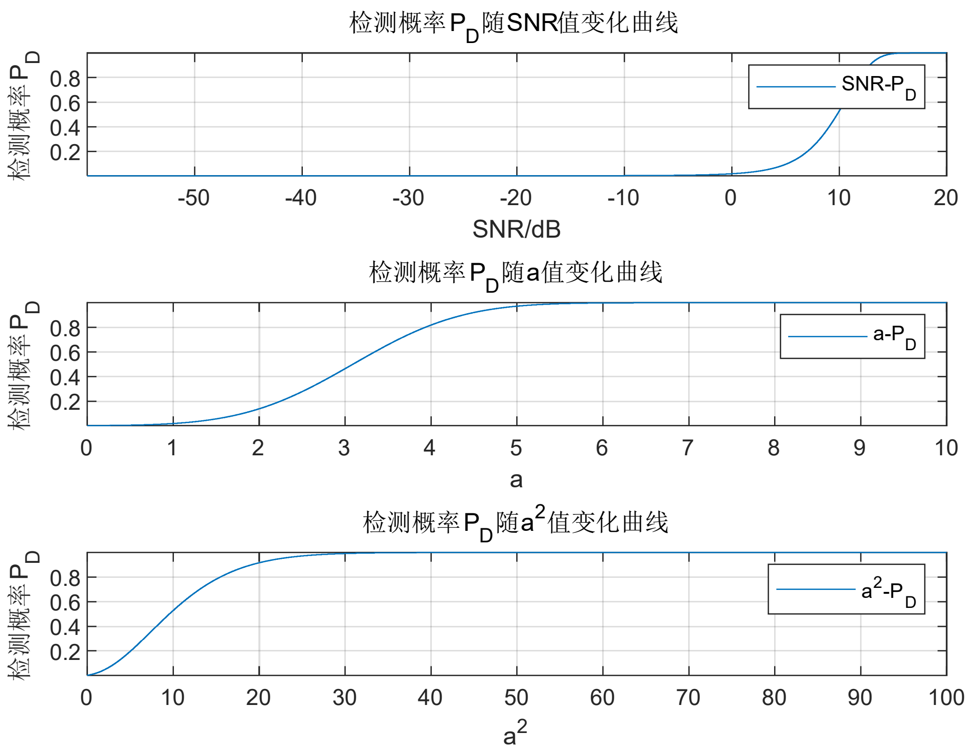

图 3:检测概率 P_D 随 SNR、a 及 a^2 值变化曲线

由图 3 可知，随着 SNR、a 或者 a^2 的增加，检测概率 P_D 逐渐增加，并趋于 1，与图 2 分析结果相同。

2. 针对上述两个假设，假定 $n \sim N(0,4)$，试求：

1)设计 $C_{00}=1, C_{11}=5, C_{10}=11, C_{01}=55$ 时相应的最佳接收机；

2)a=9，$C_{00}=C_{11}=0, C_{10}=C_{01}=1$ 时的 ζ_0 值，并画出 $\bar{C}_{\min}(\zeta)$ 的曲线；

3)当 a 的值变化时，观察问题 1)相应的 $\bar{C}_{\min}(\zeta)$ 的变化情况(画出相应的曲线)；

4)如果令 C_{00}=1，$C_{11}=5, C_{10}=11, C_{01}=105$，重复第 3)步，并观察曲线

$\overline{C}_{\min}(\zeta)$有无异常现象，解释其原因。

解：(1)此题已知各种判决结果的代价因子$c_{ij}\left(i=0,1;j=0,1\right)$与两种假设的似然函数，每种假设的先验概率$P\left(H_j\right)\left(j=0,1\right)$未知，故最佳接收机采用极小极大准则(minimax criterion)，是一种极小极大接收机。该准则的含义是：当先验概率未知时，选择使最小平均代价函数达到最大值的先验概率作为估计值来设计*Bayes*检验，此时的平均代价不一定是最小的，但却是最保险的。

通过计算，可得最小平均代价的*Bayes*准则的LRT门限为：

$$\eta=\frac{P\left(H_0\right)\left(c_{10}-c_{00}\right)}{P\left(H_1\right)\left(c_{01}-c_{11}\right)}=\frac{\varepsilon_0\left(c_{10}-c_{00}\right)}{\left(1-\varepsilon_0\right)\left(c_{01}-c_{11}\right)}$$

其中$\varepsilon_0=P\left(H_0\right)$。

由于ε_0未知，故*Bayes*最小平均代价是ε_0的函数，虚警概率P_F与漏警概率P_M也是ε_0的函数。此时最小平均代价为：

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\min}\left(\varepsilon_0\right)&=\varepsilon_0\left[c_{00}\left(1-P_F\left(\varepsilon_0\right)\right)+c_{10}P_F\left(\varepsilon_0\right)\right]+\left(1-\varepsilon_0\right)\left[c_{01}P_M\left(\varepsilon_0\right)+c_{11}\left(1-P_M\left(\varepsilon_0\right)\right)\right]\\&=\varepsilon_0\left[c_{00}+\left(c_{10}-c_{00}\right)P_F\left(\varepsilon_0\right)\right]+\left(1-\varepsilon_0\right)\left[c_{11}+\left(c_{01}-c_{11}\right)P_M\left(\varepsilon_0\right)\right]\end{aligned}$$

则：

$$\overline{C}\left(\varepsilon_0,\widetilde{\varepsilon_0}\right)=\varepsilon_0\left[c_{00}+\left(c_{10}-c_{00}\right)P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}\right)\right]+\left(1-\varepsilon_0\right)\left[c_{11}+\left(c_{01}-c_{11}\right)P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}\right)\right]$$

其中$\widetilde{\varepsilon_0}$为瞎猜的先验概率$P\left(H_0\right)$，为了求得最佳先验概率$P\left(H_0\right)$估计值$\widetilde{\varepsilon_0}^*$，可将上式对$\varepsilon_0$求偏导，使结果等于0，可得：

$$\left.\frac{\partial\overline{C}\left(\varepsilon_0,\widetilde{\varepsilon_0}\right)}{\partial\varepsilon_0}\right|_{\widetilde{\varepsilon_0}=\widetilde{\varepsilon_0}^*}=\left[c_{00}+\left(c_{10}-c_{00}\right)P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)\right]-\left[c_{11}+\left(c_{01}-c_{11}\right)P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)\right]=0$$

从而可得极小极大方程：

$$c_{11}-c_{00}+\left(c_{01}-c_{11}\right)P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)-\left(c_{10}-c_{00}\right)P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=0$$

解此方程可得到LRT门限η与最佳先验概率$P\left(H_0\right)$估计值$\widetilde{\varepsilon_0}^*$。

此时平均代价为：

$$\overline{C}_{\min}\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{00}+\left(c_{10}-c_{00}\right)P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{11}+\left(c_{01}-c_{11}\right)P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)$$

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测值 x 的似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p\left(x|H_0\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

$$p\left(x|H_1\right)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x\text{-}a)^2}{8}\right]$$

则 LRT 为：

$$\lambda(x)=\frac{p\left(x|H_1\right)}{p\left(x|H_0\right)}=\exp\left(\frac{a}{4}x-\frac{a^2}{8}\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$x\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{4}{a}\ln\eta+\frac{a}{2}\overset{def}{=}V_T(\eta)$$

根据上式，可得检验统计量 $t(x)=x$，故有：

$$P_F\left(\varepsilon_0\right)=P\left(H_1|H_0\right)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p\left(t|H_0\right)dt=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p\left(x|H_0\right)dx=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)dx=1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}P_M\left(\varepsilon_0\right)&=P\left(H_0|H_1\right)=\int_{-\infty}^{V_T(\eta)}p\left(t|H_1\right)dt=\int_{-\infty}^{V_T(\eta)}p\left(x|H_1\right)dx\\&=\int_{-\infty}^{V_T(\eta)}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{8}\right]dx=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]\end{aligned}$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。

由于 $c_{00}=1,c_{11}=5,c_{10}=11,c_{01}=55$，可得极小极大方程为：

$$\begin{aligned}4+50P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)-10P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)&=4+50\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]-10\left[1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]\right]\\&=50\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]+10\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]-6=0\end{aligned}$$

由于 a 未知，此积分方程无法给出其解的解析表达式，可假设求得判决门限 $V_T(\eta)=\zeta(a)$，进而可以求得 LRT 门限 $\eta=\exp\left\{\frac{a}{4}\left[V_T(\eta)-\frac{a}{2}\right]\right\}$，进而可求出最佳先验概率 $P(H_0)$ 估计值 $\widetilde{\varepsilon_0}^*=\frac{\eta(c_{01}-c_{11})}{\left[c_{10}-c_{00}+\eta(c_{01}-c_{11})\right]}$，此时平均代价为：$\overline{C}_{\min}\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{11}+(c_{01}-c_{11})P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)$。

可得最佳接收机为：

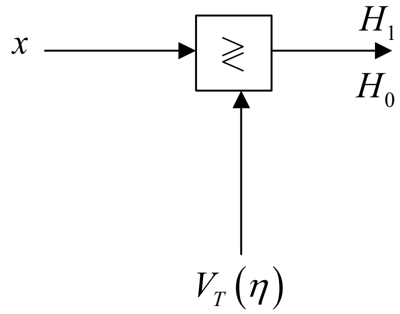

图 4：最佳接收机框图

(2)由于 a=9，$C_{00}=C_{11}=0, C_{10}=C_{01}=1$ 可得极小极大方程为：

$$P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)-P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]-\left\{1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]\right\}=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]+\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]-1$$
$$=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-9}{2}\right]+\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]-1=0$$

可解得判决门限 $V_T(\eta)=4.5$，故 LRT 门限 η=1，所以最佳先验概率估计值 $\widetilde{\varepsilon_0}^*=\frac{1}{2}$。此时，平均代价为：

$$\overline{C}_{min}\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=c_{11}+(c_{01}-c_{11})P_M\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=P_F\left(\frac{1}{2}\right)=P_M\left(\frac{1}{2}\right)$$

同时有：

$$\overline{C}_{min}(\varepsilon_0)=\varepsilon_0\left[c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F(\varepsilon_0)\right]+(1-\varepsilon_0)\left[c_{11}+(c_{01}-c_{11})P_M(\varepsilon_0)\right]$$
$$=\varepsilon_0 P_F(\varepsilon_0)+(1-\varepsilon_0)P_M(\varepsilon_0)$$

$$\eta=\frac{\varepsilon_0(c_{10}-c_{00})}{(1\text{-}\varepsilon_0)(c_{01}-c_{11})}=\frac{\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}$$

$$V_T(\eta)=\frac{4}{9}\ln\eta+\frac{9}{2}$$

$$P_F=1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]$$

$$P_M=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-9}{2}\right]$$

可以计算理论平均代价为：

$$\overline{C}_{min}\left(\widetilde{\varepsilon_0}^*\right)=1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]=1-\Phi(2.25)=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-9}{2}\right]=\Phi(-2.25)=0.0122$$

根据分析，当ε_0=0时，$\overline{C}_{min}(0)=0$；当ε_0=1时，$\overline{C}_{min}(0)=0$。可得到下图：

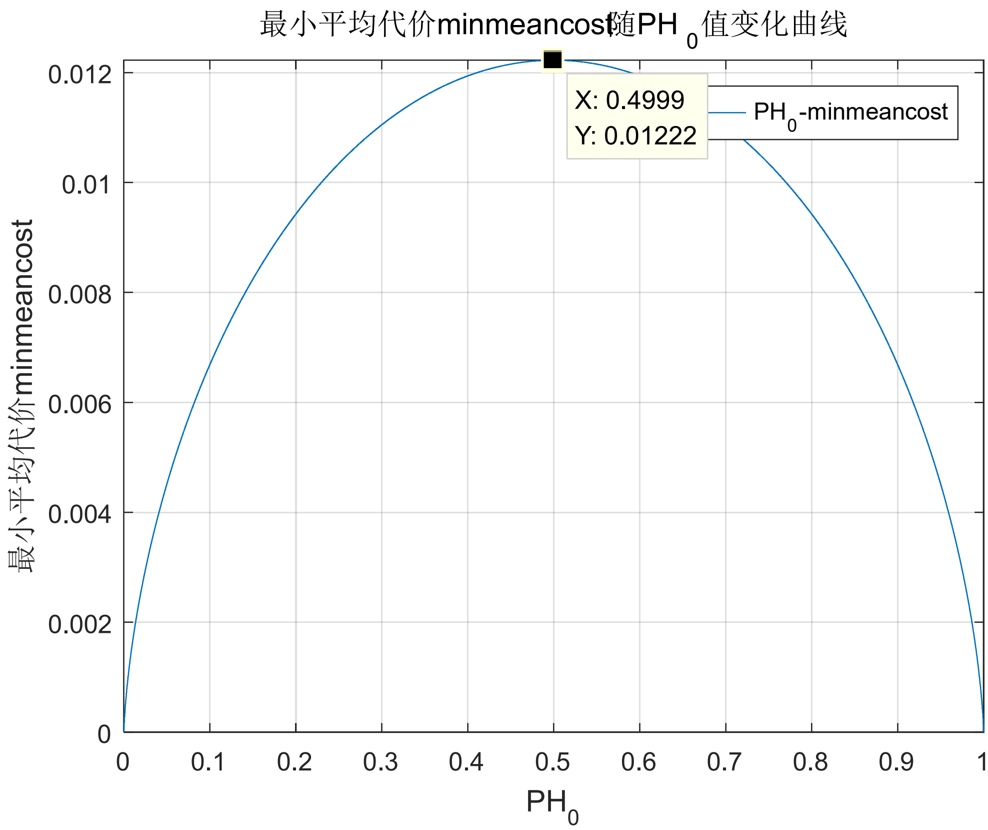

图 5:最小平均代价随先验概率 $P(H_0)$的变化曲线

由图 5 可知，当ε_0=0.4999时，最小平均代价取得极值 0.01222，考虑到浮点运算的误差，可知，这与理论推导值相同。

(3)此时有：

$$\overline{C}_{min}(\varepsilon_0)=\varepsilon_0\left[c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F(\varepsilon_0)\right]+(1-\varepsilon_0)\left[c_{11}+(c_{01}-c_{11})P_M(\varepsilon_0)\right]$$
$$=\varepsilon_0\left[1+10P_F(\varepsilon_0)\right]+(1-\varepsilon_0)\left[5+50P_M(\varepsilon_0)\right]$$

$$\eta=\frac{\varepsilon_0(c_{10}-c_{00})}{(1\text{-}\varepsilon_0)(c_{01}-c_{11})}=\frac{\varepsilon_0}{5(1-\varepsilon_0)}$$

$$V_T(\eta)=\frac{4}{a}\ln\eta+\frac{a}{2}$$

$$P_F=1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]$$

$$P_M=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]$$

根据分析，当ε_0=0时，$\overline{C}_{min}(0)=5$；当ε_0=1时，$\overline{C}_{min}(0)=1$。此取值与 *a* 无关。

当 *a*=1,2,3,4,5,6,7 时，可得下图：

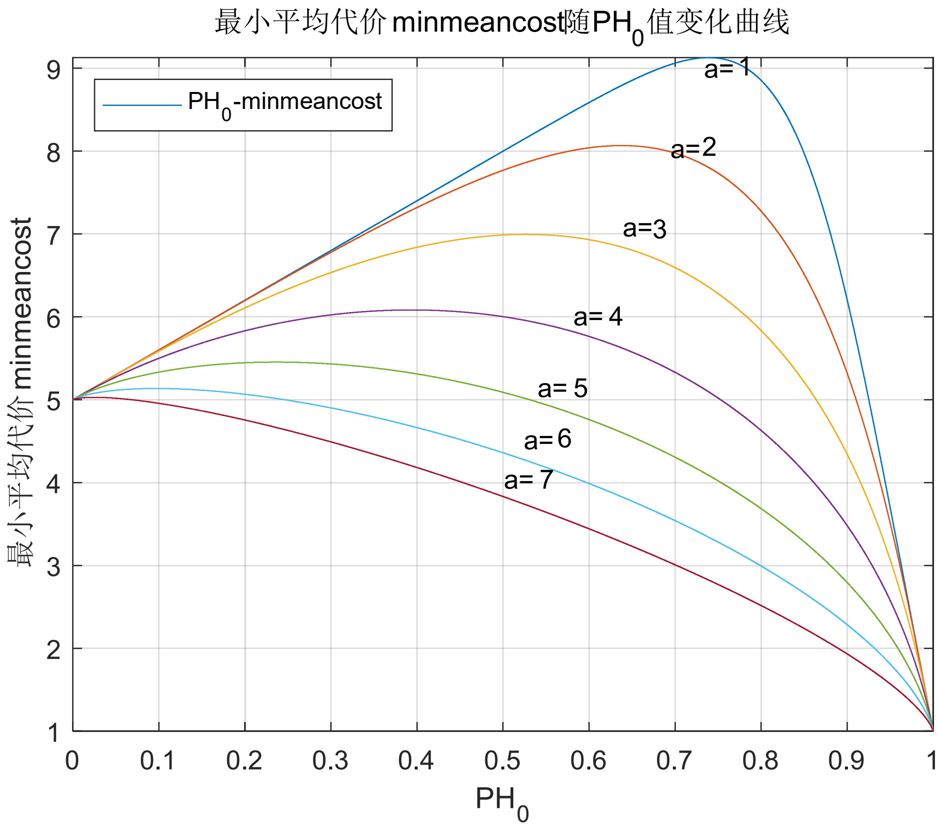

图 6:当 *a* 取 1,2,3,4,5,6,7 时最小平均代价随先验概率 $P(H_0)$的变化曲线

由图 6 可知，随着 *a* 的增大，即 SNR 的增大，那么检测门限

$V_T(\eta)\approx\frac{a}{2}$，从而检测概率会增大，虚警概率会减小，对一固定值 a，检测概率与虚警概率为一定值，故最小平均代价会近似为先验概率 $P(H_0)$的线性函数，不再是严格上凸函数，此时判决几乎不犯错，极小极大准则已不是最优的，可直接从观测值的大小进行判决，且对一固定先验概率 $P(H_0)$，最小平均代价逐渐减小。随着 SNR 的增大，含有用信号 a 的假设更容易发生，故最佳先验概率 $P(H_0)$的估计值减小。

(4) 此时有：

$$\begin{aligned}\overline{C}_{min}(\varepsilon_0)&=\varepsilon_0\left[c_{00}+(c_{10}-c_{00})P_F(\varepsilon_0)\right]+(1-\varepsilon_0)\left[c_{11}+(c_{01}-c_{11})P_M(\varepsilon_0)\right]\\&=\varepsilon_0\left[1+10P_F(\varepsilon_0)\right]+(1-\varepsilon_0)\left[5+100P_M(\varepsilon_0)\right]\end{aligned}$$

$$\eta=\frac{\varepsilon_0(c_{10}-c_{00})}{(1\text{-}\varepsilon_0)(c_{01}-c_{11})}=\frac{\varepsilon_0}{10(1-\varepsilon_0)}$$

$$V_T(\eta)=\frac{4}{a}\ln\eta+\frac{a}{2}$$

$$P_F=1-\Phi\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]$$

$$P_M=\Phi\left[\frac{V_T(\eta)-a}{2}\right]$$

根据分析，当 $\varepsilon_0=0$ 时，$\overline{C}_{min}(0)=5$；当 $\varepsilon_0=1$ 时，$\overline{C}_{min}(0)=1$。此取值与 a 无关。

当 a=1,2,3,4,5,6,7 时，可得下图：

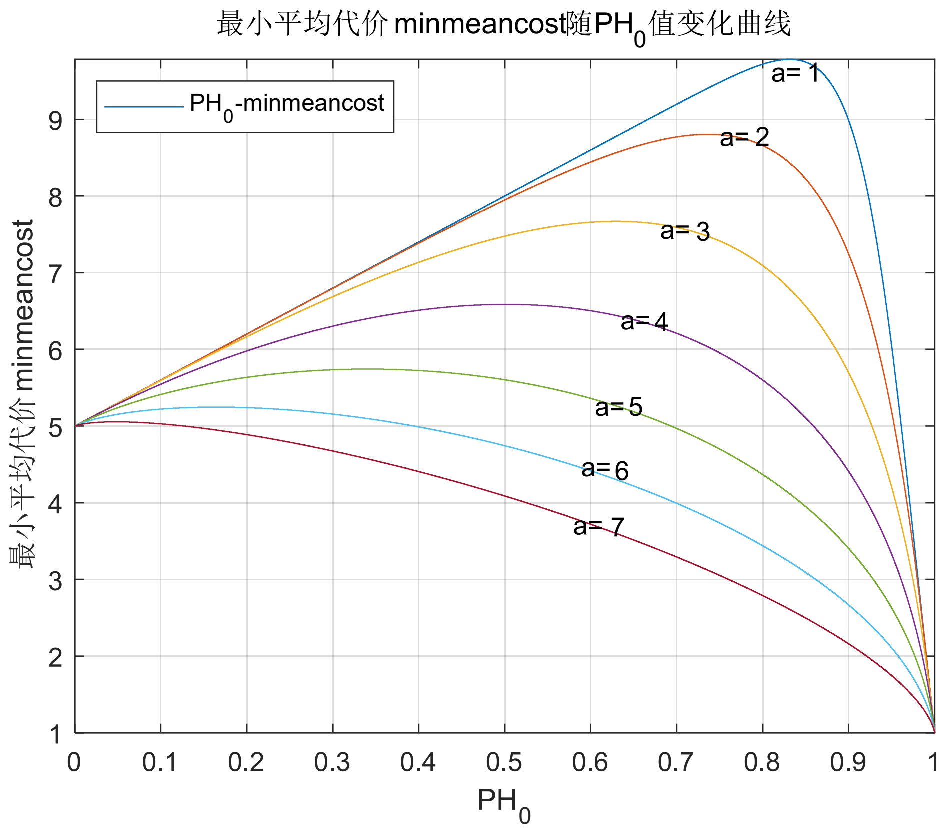

图 7: 当 a 取 1,2,3,4,5,6,7 时最小平均代价随先验概率 $P(H_0)$的变化曲线

由图 7 可知，随着 a 的增大，即 SNR 的增大，那么检测门限 $V_T(\eta)\approx\frac{a}{2}$，从而检测概率会增大，虚警概率会减小，对一固定值 a，检测概率与虚警概率为一定值，故最小平均代价会近似为先验概率 $P(H_0)$的线性函数，不再是严格上凸函数，此时判决几乎不犯错，极小极大准则已不是最优的，可直接从观测值的大小进行判决，且对一固定先验概率 $P(H_0)$，最小平均代价逐渐减小。随着 SNR 的增大，含有用信号 a 的假设更容易发生，故最佳先验概率 $P(H_0)$的估计值减小。与图 6 对比，可得：对一固定先验概率 $P(H_0)$，增大漏警概率的权值因子，可以使最小平均代价增大。

3. 设有下列两种假设

$$H_0: \underline{x} = \underline{s} + \underline{n}$$
$$H_1: \underline{x} = a\underline{s} + \underline{n}$$

其中 $\underline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_N)^T$ 是 N 维观测矢量；$\underline{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_N)^T$ 是 N 维已知信

号矢量；$\underline{n}\sim N(0,R)$,即 N 维高斯随机矢量。为方便起见，假定$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{s}$ =1。若给定虚警概率 $P_F=\alpha$，试分别设计下列三种情况下的最优或次最优接收机，确定其相应的检测概率P_D，并给出 ROC 曲线(如果可以确定或给出的话)。

(1)a 为不等于 1 的已知常数；

(2)a 为不等于 1 的未知参量；

(3)a 为大于 1 的未知参量。

(4)a 为小于 1 的未知参量。

解：(1)此题，并不能预知每种假设的先验概率$P\left(H_j\right)\left(j=0,1\right)$，也无法对各种判决结果给定代价因子$c_{ij}\left(i=0,1;j=0,1\right)$，但是已知错误判决概率$P\left(H_1|H_0\right)$(即就是虚警概率$P_F$)为一固定值，且两种假设似然函数均已知。在此约束条件下，为了设计相应的最佳接收机，使正确判决率$P\left(H_1|H_1\right)$(即就是检测概率P_D)最大，即就是使用 Neyman-Pearson criterion 进行设计，简记为 N-P 准则，所设计的最佳接收机称为 N-P 接收机。

在$P\left(H_1|H_0\right)$为固定值的约束条件下为了使$P\left(H_1|H_1\right)$最大，即使$P(H_0|H_1)=1-P(H_1|H_1)$(即就是漏警概率P_M)最小，是一种条件极值问题，利用 Largrange 乘子法可以得到似然比检验(Likelihood ratio test)形式：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}|H_1\right)}{p\left(\underline{x}|H_0\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

可知，$\eta\geq 0$。

对于给定的$P\left(H_1|H_0\right)$，LRT 门限η可以由下式确定：

$$P\left(H_1|H_0\right)=\int_{R_1}p\left(\underline{x}|H_0\right)d\underline{x}=\int_{\eta}^{+\infty}p\left(\lambda|H_0\right)d\lambda$$

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量$\underline{x}$

的似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]$$

$$p\left(\underline{x}\middle|H_1\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

则 LRT 为：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|H_1\right)}{p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)}=\exp\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{a-1}\ln\eta+\frac{a+1}{2}\overset{def}{=}V_T\left(\eta\right)\text{ ，}\ a>1$$

$$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}}\frac{1}{a-1}\ln\eta+\frac{a+1}{2}\overset{def}{=}V_T\left(\eta\right)\text{，}\ a<1$$

根据上式，可得检验统计量$t\left(\underline{x}\right)=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}$，也服从高斯分布，可得：

$$\mathrm{E}\left(t\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{s}+\underline{n}\right)\right]=1$$

$$\mathrm{Var}\left(t\middle|H_0\right)=\mathrm{Var}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2\middle|H_0\right]=1$$

$$\mathrm{E}\left(t\middle|H_1\right)=\mathrm{E}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\middle|H_1\right)=\mathrm{E}\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(a\underline{s}+\underline{n}\right)\right]=a$$

$$\mathrm{Var}\left(t\middle|H_1\right)=\mathrm{Var}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\middle|H_1\right)=\mathrm{E}\left[\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-a\right)^2\middle|H_1\right]=1$$

故有：

$$p\left(t\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]$$

$$p\left(t\middle|H_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-a\right)^2}{2}\right]$$

当约束条件$P\left(H_1\middle|H_0\right)=P_F=\alpha$且 $a>1$ 时，有：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p\left(t\middle|H_0\right)dt=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]dt=1-\Phi\left[V_T\left(\eta\right)-1\right]=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限)$t=V_T(\eta)=\Phi^{-1}(1-\alpha)+1$，进而可以求得 LRT 门限$\eta=\exp\left\{\left[V_T(\eta)-\frac{a+1}{2}\right](a-1)\right\}$，则检测概率为：

$$\begin{aligned}P_D&=P(H_1|H_1)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p(t|H_1)dt\\&=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2}\right]dt=\int_{V_T(\eta)\text{-}a}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\\&=1-\Phi\left[V_T(\eta)-a\right]\end{aligned}$$

可得最佳接收机为：

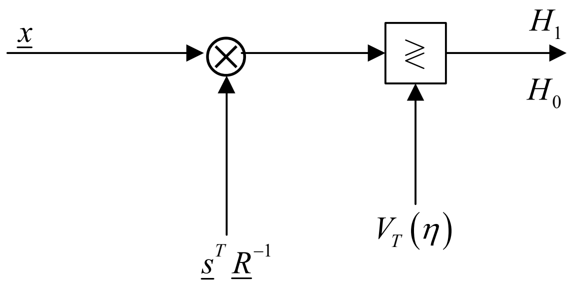

图 8:a>1 时最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：

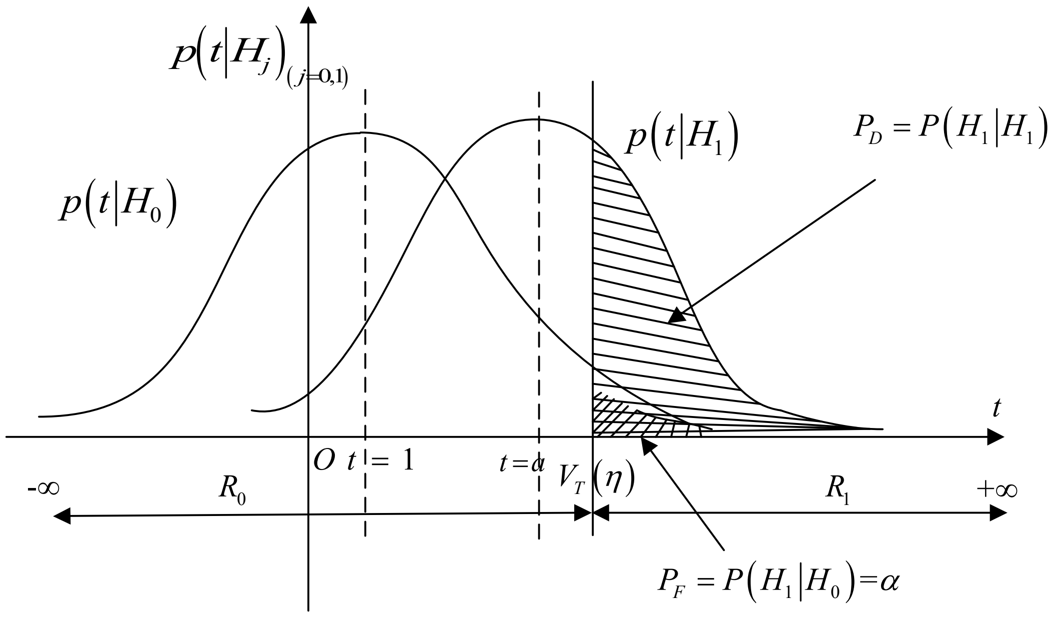

图 9:判决域及判决概率图

由图 9 可知，当 $P_F=0$ 时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么 P_D 也为 0；当 $P_F=1$ 时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么 P_D 为 1；当 a=1 时(临界情况)，两种假设下的检验统计量似然函数相同，此时无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当 P_F 为定值，即判决门限为定值，随着 a(SNR)的增大，P_D 逐渐增大为 1；当 P_D 为定值，随着 a-1(SNR)的增大，即判决门限增大，故 P_F 逐渐减小为 0；当 a 从 1~+∞ 变化，H_1 假设下的检验统计值的绝对值比 H_0 假设下的检验统计值的绝对值越来越大，说明有用(感兴趣)信号的权重越来越大，a-1 表征 SNR 的大小。

此时 ROC 曲线为：

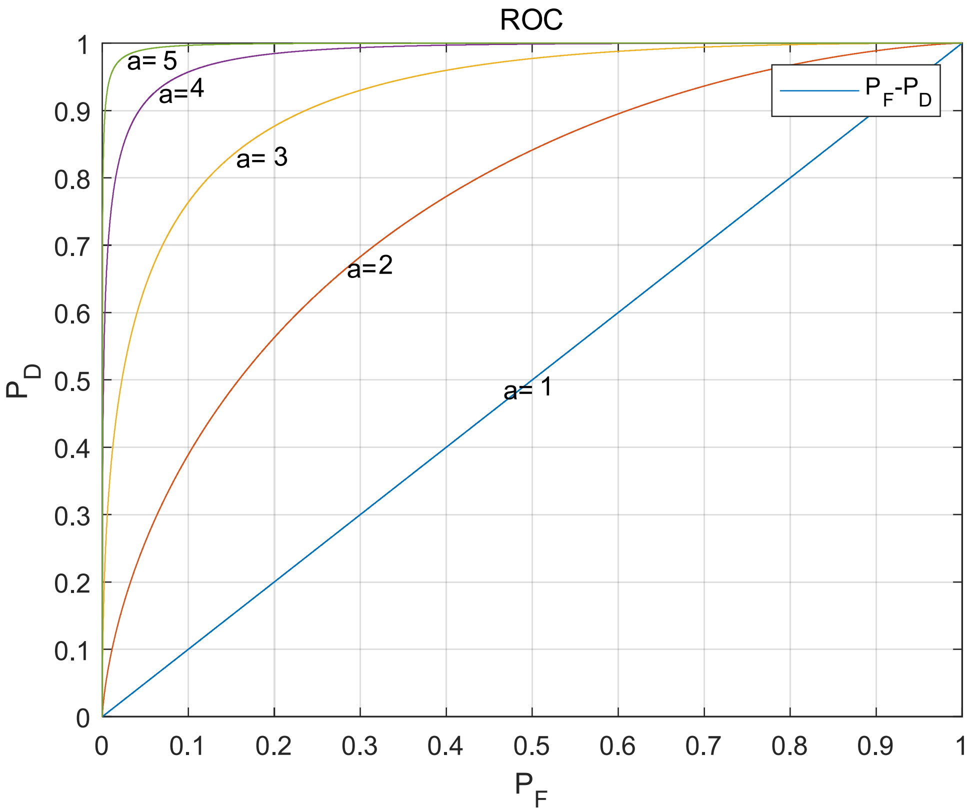

图 10:a>1 时接收机特性曲线

由图 10 可知，当 $P_F=0$ 时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么 P_D 也为 0；当 $P_F=1$ 时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么 P_D 为

1；当 a=1 时(临界情况)，$P_D = P_F$，无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当 P_F 为定值，即判决门限为定值，随着 a-1(SNR)的增大，P_D 逐渐增大为 1；当 P_D 为定值，随着 a-1(SNR)的增大，即判决门限增大，故 P_F 逐渐减小为 0，与图 9 分析结果相同。

当 a<1 时，有：

$$P_F = P\left(H_1 \middle| H_0\right) = \int_{-\infty}^{V_T(\eta)} p\left(t \middle| H_0\right) dt = \int_{-\infty}^{V_T(\eta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-1)^2}{2}\right] dt = \Phi\left[V_T(\eta)-1\right] = \alpha$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限) $t = V_T(\eta) = \Phi^{-1}(\alpha)+1$，进而可以求得 LRT 门限 $\eta = \exp\left\{\left[V_T(\eta)-\frac{a+1}{2}\right](a-1)\right\}$，则检测概率为：

$$\begin{aligned}P_D &= P\left(H_1 \middle| H_1\right) = \int_{-\infty}^{V_T(\eta)} p\left(t \middle| H_1\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{V_T(\eta)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2}\right] dt = \int_{-\infty}^{V_T(\eta)-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \Phi\left[V_T(\eta)-a\right]\end{aligned}$$

可得最佳接收机为：

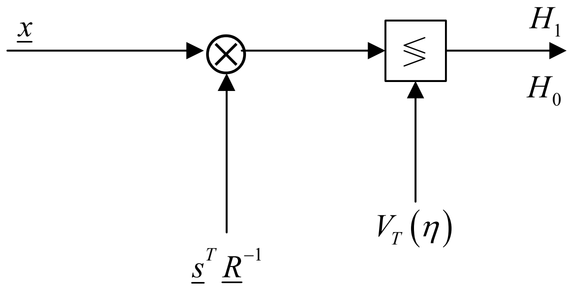

图 11:a<1 时最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：

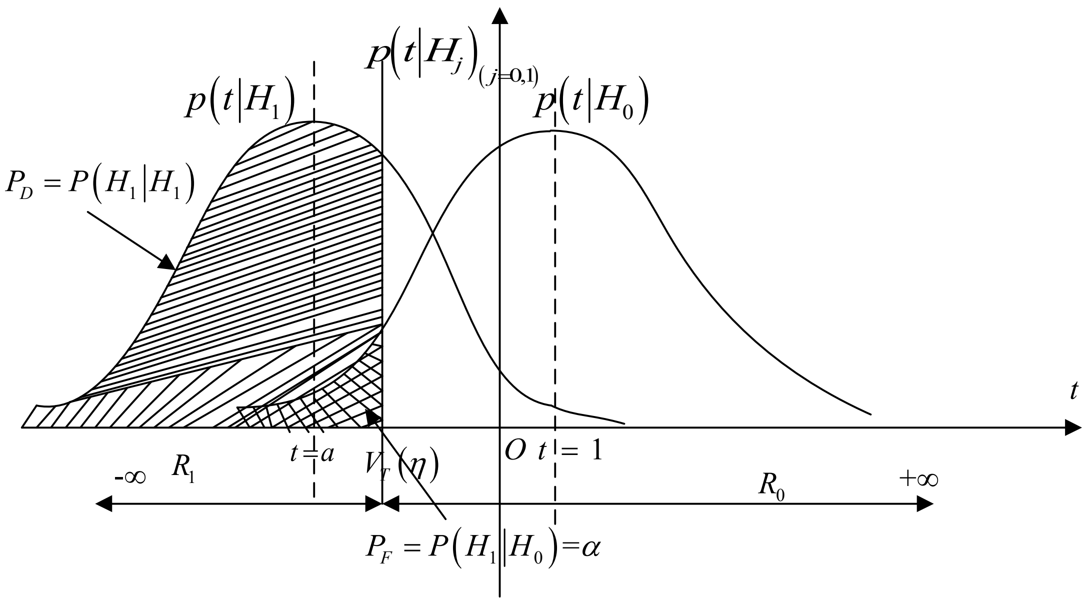

图 12:判决域及判决概率图

由图 12 可知，当 P_F=0时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么 P_D 也为 0；当 P_F=1时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么 P_D 为 1；当 a=1 时(临界情况)，两种假设下的检验统计量似然函数相同，此时无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当 P_F 为定值，即判决门限为定值，随着 1-a(SNR)的增大，P_D 逐渐增大为 1；当 P_D 为定值，随着 1-a(SNR)的增大，即判决门限减小，故 P_F 逐渐减小为 0；当 a 从-∞~1 变化，H_1 假设下的检验统计值的绝对值比 H_0 假设下的检验统计值的绝对值越来越大，说明有用(感兴趣)信号的权重越来越大，1-a 表征 SNR 的大小。

此时 ROC 曲线为：

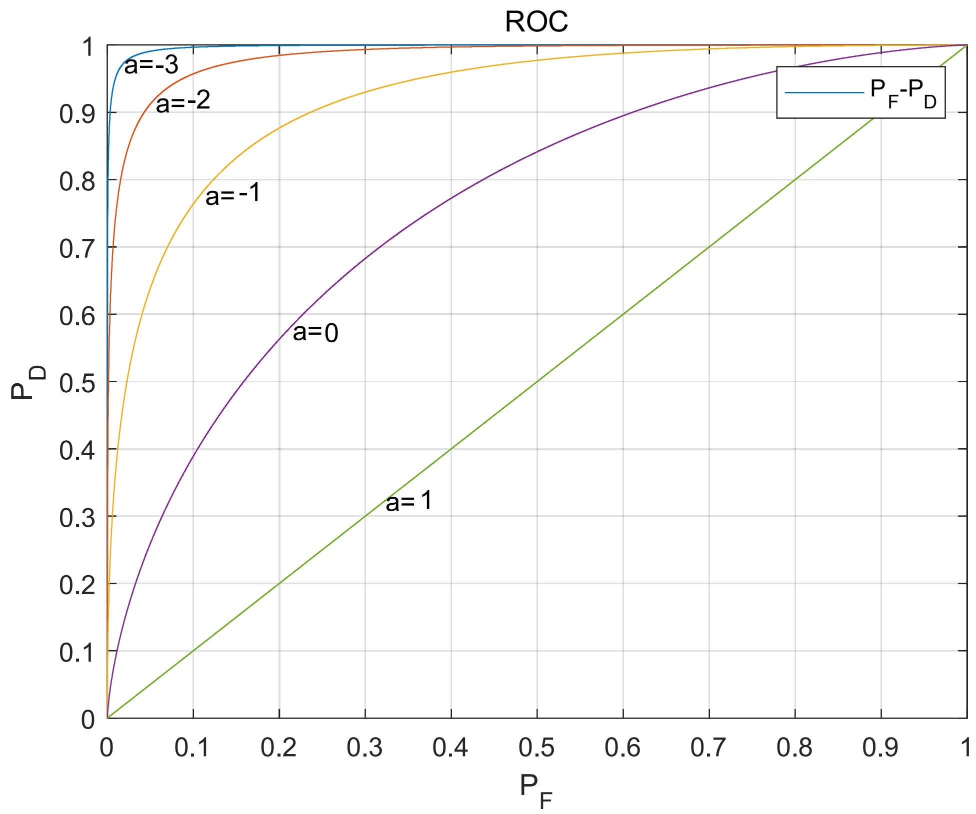

图 13:a<1 时接收机特性曲线

由图 13 可知，当 $P_F=0$ 时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么 P_D 也为 0；当 $P_F=1$ 时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么 P_D 为 1；当 a=1 时(临界情况)，无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当 P_F 为定值，即判决门限为定值，随着 1-a(SNR)的增大，P_D 逐渐增大为 1；当 P_D 为定值，随着 1-a(SNR)的增大，即判决门限减小，故 P_F 逐渐减小为 0，与图 12 分析结果相同。

(2)a 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 a，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量 $\underline{x}$ 的含参似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]$$

$$p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

则 LRT 为：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)}{p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)}=\exp\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ln\eta+\frac{\left(a+1\right)\left(a-1\right)}{2}$$

此判决规则与未知参量 a 有关，a-1 正负值改变，判决规则也会相应改变。故此时不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

则 GLRT 为：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{\max\limits_a p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)}{p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

则令 $\frac{\partial p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)}{\partial a}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)=0$，可得未知参量 a 的最大似然估计值为：

$$\hat{a}_{ml}=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}$$

带入 GLRT 中可得：

$$\begin{aligned}\lambda\left(\underline{x}\right)&=\frac{\max\limits_a p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)}{p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)}=\exp\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2\right]\Big|_{a=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}}\\&=\exp\left[\frac{1}{2}\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\text{-}2\right)+\frac{1}{2}\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta\end{aligned}$$

可知，$\eta\geq1$。

两边取对数化简为：

$$\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\ln\eta \overset{def}{=} V_T(\eta)$$

根据上式，可得检验统计量 $t(\underline{x})=\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2$，由于 $\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1$ 在 H_0 假设下服从高斯分布，可得：

$$\mathrm{E}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{s}+\underline{n}\right)-1\right]=0$$

$$\mathrm{Var}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2\middle|H_0\right]=1$$

令 $y=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1$，故有：

$$p\left(y\middle|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

当约束条件 $P\left(H_1\middle|H_0\right)=P_F=\alpha$ 时，有：

$$P_F=P\left(H_1\middle|H_0\right)=\int_{\sqrt{V_T(\eta)}}^{+\infty}p\left(y\middle|H_0\right)dy+\int_{-\infty}^{-\sqrt{V_T(\eta)}}p\left(y\middle|H_0\right)dy=2\Phi\left(-\sqrt{V_T(\eta)}\right)=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限) $t=V_T(\eta)=\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$，进而可以求得 GLRT 门限 $\eta=\exp\left[\frac{V_T(\eta)}{2}\right]$。

在 H_1 假设下的观测矢量 $\underline{x}=a\underline{s}+\underline{n}$，其中 $\underline{s}$ 为已知矢量，$\underline{n}$ 为高斯分布矢量。由于 a 为未知概率分布的随机参量，所以无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式。可得最佳接收机为：

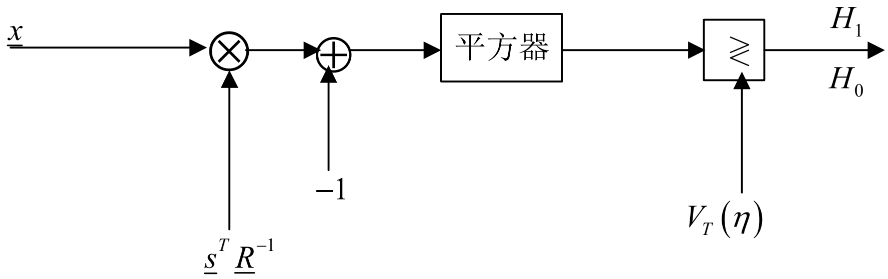

图 14:最佳接收机框图

(3) a 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 a，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与 a 无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量 $\underline{x}$ 的似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]$$

$$p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

$\forall a>1$,UMPT 为：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}\middle|H_1;a\right)}{p\left(\underline{x}\middle|H_0\right)}=\exp\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\frac{1}{a-1}\ln\eta+\frac{a+1}{2}\overset{def}{=}V_T\left(\eta\right)$$

根据上式，可得检验统计量 $t\left(\underline{x}\right)=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}$，在 H_0 假设下服从高斯分布，可得：

$$\mathrm{E}\left(t\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\middle|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{s}+\underline{n}\right)\right]=1$$

$$\mathrm{Var}\left(t|H_0\right)=\mathrm{Var}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2|H_0\right]=1$$

故有：

$$p\left(t|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]$$

当约束条件 $P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\alpha$，有：

$$P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}p\left(t|H_0\right)dt=\int_{V_T(\eta)}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]dt=1-\Phi\left[V_T\left(\eta\right)-1\right]=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限) $t=V_T\left(\eta\right)=\Phi^{-1}\left(1\text{-}\alpha\right)+1$，进而可以得 UMPT 门限 $\eta=\exp\left\{\left[V_T\left(\eta\right)-\frac{a+1}{2}\right]\left(a-1\right)\right\}$。

在 H_1 假设下的观测矢量 $\underline{x}=a\underline{s}+\underline{n}$，其中 $\underline{s}$ 为已知矢量，$\underline{n}$ 为高斯分布矢量。由于 a 为未知概率分布的随机参量，所以无法给出 H_1 假设下观测矢量 $\underline{x}$ 的概率分布，故无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式。

可得最佳接收机为：

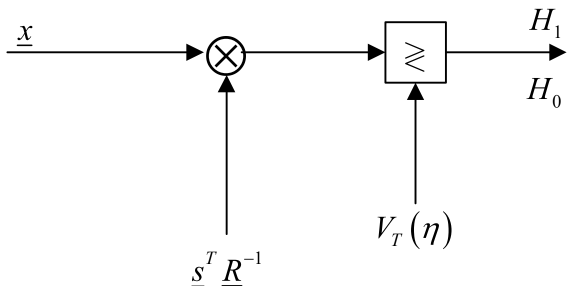

图 15:最佳接收机框图

(4) a 为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量 a，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验 pdf 未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与 a

无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量$\underline{x}$的似然函数(Likelihood Function)分别为：

$$p\left(\underline{x}|H_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{s}\right)\right]$$

$$p\left(\underline{x}|H_1;a\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left|\underline{R}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{x}-a\underline{s}\right)\right]$$

$\forall a<1$,UMPT 为：

$$\lambda\left(\underline{x}\right)=\frac{p\left(\underline{x}|H_1;a\right)}{p\left(\underline{x}|H_0\right)}=\exp\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\left(a-1\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a^2\right]\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta$$

两边取对数化简为：

$$\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}\underset{H_0}{\overset{H_1}{\lessgtr}}\frac{1}{a-1}\ln\eta+\frac{a+1}{2}\overset{def}{=}V_T\left(\eta\right)$$

根据上式，可得检验统计量$t\left(\underline{x}\right)=\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}$，在 H_0 假设下服从高斯分布，可得：

$$\mathrm{E}\left(t|H_0\right)=\mathrm{E}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\left(\underline{s}+\underline{n}\right)\right]=1$$

$$\mathrm{Var}\left(t|H_0\right)=\mathrm{Var}\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}|H_0\right)=\mathrm{E}\left[\left(\underline{s}^T\underline{R}^{-1}\underline{x}-1\right)^2|H_0\right]=1$$

故有：

$$p\left(t|H_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]$$

当约束条件$P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\alpha$，有：

$$P_F=P\left(H_1|H_0\right)=\int_{-\infty}^{V_T(\eta)}p\left(t|H_0\right)dt=\int_{-\infty}^{V_T(\eta)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-1\right)^2}{2}\right]dt=\Phi\left[V_T\left(\eta\right)-1\right]=\alpha$$

其中，$\Phi(x)$为标准正态分布的 CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限) $t = V_T(\eta) = \Phi^{-1}(\alpha) + 1$，进而可以得 UMPT 门限 $\eta = \exp\left\{\left[V_T(\eta) - \frac{a+1}{2}\right](a-1)\right\}$。

在 H_1 假设下的观测矢量 $\underline{x} = a\underline{s} + \underline{n}$，其中 $\underline{s}$ 为已知矢量，$\underline{n}$ 为高斯分布矢量。由于 a 为未知概率分布的随机参量，所以无法给出 H_1 假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率 P_D 无法给出确定表达式。可得最佳接收机为：

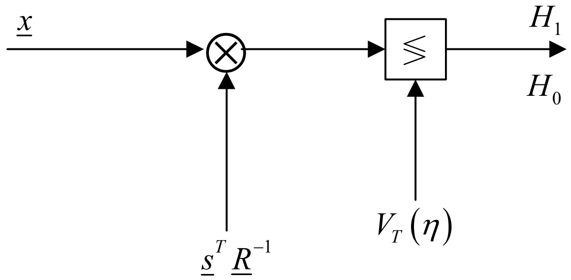

图 16:最佳接收机框图

参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.