**信号检测与估计**

**第三章作业**



学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1.设有下列两种假设：

：*x* = *n*

：*x* = *a*+ *n*

其中*a*>0为常数，。如果要求,试设计相应的最佳接收机，确定其检测概率，并画出的关系曲线。

解：此题，并不能预知每种假设的先验概率，也无法对各种判决结果给定代价因子，但是已知错误判决概率(即就是虚警概率)为一固定值，且两种假设似然函数均已知。在此约束条件下，为了设计相应的最佳接收机，使正确判决率(即就是检测概率)最大，即就是使用Neyman-Pearson criterion进行设计，简记为N-P准则，所设计的最佳接收机称为N-P接收机。

在为固定值的约束条件下为了使最大，即使(即就是漏警概率)最小，是一种条件极值问题，利用Largrange乘子法可以得到似然比检验(Likelihood ratio test)形式为：



可知，。

对于给定的，LRT门限可以由下式确定：



此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测值*x*的似然函数(Likelihood Function)分别为：





则LRT为：



两边取对数化简为：



根据上式，可得检验统计量，当约束条件时，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限)，进而可以求得LRT门限，则检测概率为：



可得最佳接收机为：



图1:最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：



图2:判决域及判决概率图

由图2可知，当*a*从0~+∞变化，*H*1假设下的观测值比*H*0假设下的观测值越来越大，说明有用(感兴趣)信号*a*在观测信号中的权重越来越大，*a*表征SNR的大小，此时检测概率*PD*从*PF*=10-3到1变化。

由于噪声，可认为噪声是一宽平稳随机过程，则其平均功率为：



故SNR为：



这与图2分析结果相同，*a*表征SNR的大小。

由此可得下图：



图3:检测概率*PD*随*SNR、a*及*a*2值变化曲线

由图3可知，随着SNR*、a*或者*a*2的增加，检测概率*PD*逐渐增加，并趋于1，与图2分析结果相同。

2. 针对上述两个假设，假定，试求：

1)设计时相应的最佳接收机；

2)a=9，时的值，并画出的曲线；

3)当a的值变化时，观察问题1)相应的的变化情况(画出相应的曲线)；

4)如果令=1，，重复第3)步，并观察曲线有无异常现象，解释其原因。

解：(1)此题已知各种判决结果的代价因子与两种假设的似然函数，每种假设的先验概率未知，故最佳接收机采用极小极大准则(minimax criterion)，是一种极小极大接收机。

该准则的含义是：当先验概率未知时，选择使最小平均代价函数达到最大值的先验概率作为估计值来设计*Bayes*检验，此时的平均代价不一定是最小的，但却是最保险的。

通过计算，可得最小平均代价的*Bayes*准则的LRT门限为：



其中。

由于未知，故*Bayes*最小平均代价是的函数，虚警概率与漏警概率也是的函数。此时最小平均代价为：



则：



其中为瞎猜的先验概率，为了求得最佳先验概率估计值，可将上式对求偏导，使结果等于0，可得：



从而可得极小极大方程：



解此方程可得到LRT门限与最佳先验概率估计值。

此时平均代价为：



此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测值*x*的似然函数(Likelihood Function)分别为：





则LRT为：



两边取对数化简为：



根据上式，可得检验统计量，故有：





其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

由于，可得极小极大方程为：



由于*a*未知，此积分方程无法给出其解的解析表达式，可假设求得判决门限，进而可以求得*LRT*门限，进而可求出最佳先验概率估计值，此时平均代价为：。

可得最佳接收机为：



图4: 最佳接收机框图

(2)由于*a*=9，可得极小极大方程为：



可解得判决门限，故LRT门限，所以最佳先验概率估计值。此时，平均代价为：



同时有：











可以计算理论平均代价为：



根据分析，当时，；当时，。可得到下图：



图5:最小平均代价随先验概率*P*(*H*0)的变化曲线

由图5可知，当时，最小平均代价取得极值0.01222，考虑到浮点运算的误差，可知，这与理论推导值相同。

(3)此时有：











根据分析，当时，；当时，。此取值与*a*无关。

当*a*=1,2,3,4,5,6,7时，可得下图：



图6:当*a*取1,2,3,4,5,6,7时最小平均代价随先验概率*P*(*H*0)的变化曲线

由图6可知，随着*a*的增大，即SNR的增大，那么检测门限，从而检测概率会增大，虚警概率会减小，对一固定值*a*，检测概率与虚警概率为一定值，故最小平均代价会近似为先验概率*P*(*H*0)的线性函数，不再是严格上凸函数，此时判决几乎不犯错，极小极大准则已不是最优的，可直接从观测值的大小进行判决，且对一固定先验概率*P*(*H*0)，最小平均代价逐渐减小。随着SNR的增大，含有用信号*a*的假设更容易发生，故最佳先验概率*P*(*H*0)的估计值减小。

(4) 此时有：











根据分析，当时，；当时，。此取值与*a*无关。

当*a*=1,2,3,4,5,6,7时，可得下图：



图7: 当*a*取1,2,3,4,5,6,7时最小平均代价随先验概率*P*(*H*0)的变化曲线

由图7可知，随着*a*的增大，即SNR的增大，那么检测门限，从而检测概率会增大，虚警概率会减小，对一固定值*a*，检测概率与虚警概率为一定值，故最小平均代价会近似为先验概率*P*(*H*0)的线性函数，不再是严格上凸函数，此时判决几乎不犯错，极小极大准则已不是最优的，可直接从观测值的大小进行判决，且对一固定先验概率*P*(*H*0)，最小平均代价逐渐减小。随着SNR的增大，含有用信号*a*的假设更容易发生，故最佳先验概率*P*(*H*0)的估计值减小。与图6对比，可得：对一固定先验概率*P*(*H*0)，增大漏警概率的权值因子，可以使最小平均代价增大。

3. 设有下列两种假设

*H*0:

*H*1:

其中=(*x*1,*x*2,…,*xN*)*T* 是*N*维观测矢量；=(*s*1,*s*2,…,*sN*)*T*是*N*维已知信号矢量；~ *N*(0,*R*),即*N*维高斯随机矢量。为方便起见，假定 =1。若给定虚警概率*PF*=，试分别设计下列三种情况下的最优或次最优接收机，确定其相应的检测概率，并给出ROC曲线(如果可以确定或给出的话)。

(1)*a*为不等于1的已知常数；

(2)*a*为不等于1的未知参量；

(3)*a*为大于1的未知参量。

(4)*a*为小于1的未知参量。

解：(1)此题，并不能预知每种假设的先验概率，也无法对各种判决结果给定代价因子，但是已知错误判决概率(即就是虚警概率)为一固定值，且两种假设似然函数均已知。在此约束条件下，为了设计相应的最佳接收机，使正确判决率(即就是检测概率)最大，即就是使用Neyman-Pearson criterion进行设计，简记为N-P准则，所设计的最佳接收机称为N-P接收机。

在为固定值的约束条件下为了使最大，即使(即就是漏警概率)最小，是一种条件极值问题，利用Largrange乘子法可以得到似然比检验(Likelihood ratio test)形式：



可知，。

对于给定的，LRT门限可以由下式确定：



此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量的似然函数(Likelihood Function)分别为：





则LRT为：



两边取对数化简为：





根据上式，可得检验统计量，也服从高斯分布，可得：









故有：





当约束条件且*a*>1时，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)，进而可以求得LRT门限，则检测概率为：



可得最佳接收机为：



图8:*a*>1时最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：



图9:判决域及判决概率图

由图9可知，当时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么也为0；当时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么为1；当*a*=1时(临界情况)，两种假设下的检验统计量似然函数相同，此时无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当为定值，即判决门限为定值，随着*a*(SNR)的增大，逐渐增大为1；当为定值，随着*a*-1(SNR)的增大，即判决门限增大，故逐渐减小为0；当*a*从1~+∞变化，*H*1假设下的检验统计值的绝对值比*H*0假设下的检验统计值的绝对值越来越大，说明有用(感兴趣)信号的权重越来越大，*a*-1表征SNR的大小。

此时ROC曲线为：



图10:*a*>1时接收机特性曲线

由图10可知，当时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么也为0；当时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么为1；当*a*=1时(临界情况)，，无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当为定值，即判决门限为定值，随着*a*-1(SNR)的增大，逐渐增大为1；当为定值，随着*a*-1(SNR)的增大，即判决门限增大，故逐渐减小为0，与图9分析结果相同。

当*a*<1时，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)，进而可以求得LRT门限，则检测概率为：



可得最佳接收机为：



图11:*a*<1时最佳接收机框图

可得判决域及判决概率图如下：



图12:判决域及判决概率图

由图12可知，当时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么也为0；当时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么为1；当*a*=1时(临界情况)，两种假设下的检验统计量似然函数相同，此时无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当为定值，即判决门限为定值，随着1-*a*(SNR)的增大，逐渐增大为1；当为定值，随着1-*a*(SNR)的增大，即判决门限减小，故逐渐减小为0；当*a*从-∞~1变化，*H*1假设下的检验统计值的绝对值比*H*0假设下的检验统计值的绝对值越来越大，说明有用(感兴趣)信号的权重越来越大，1-*a*表征SNR的大小。

此时ROC曲线为：



图13:*a*<1时接收机特性曲线

由图13可知，当时，此时意味着判决门限为负无穷大，那么也为0；当时，此时意味着判决门限为正无穷大，那么为1；当*a*=1时(临界情况)，无法区分两种假设，可通过掷硬币判决；当为定值，即判决门限为定值，随着1-*a*(SNR)的增大，逐渐增大为1；当为定值，随着1-*a*(SNR)的增大，即判决门限减小，故逐渐减小为0，与图12分析结果相同。

(2)*a*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*a*，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量的含参似然函数(Likelihood Function)分别为：





则LRT为：



两边取对数化简为：



此判决规则与未知参量*a*有关，*a*-1正负值改变，判决规则也会相应改变。故此时不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

则GLRT为：



则令，可  
得未知参量*a*的最大似然估计值为：



带入GLRT中可得：



可知，。

两边取对数化简为：



根据上式，可得检验统计量，由于在*H*0假设下服从高斯分布，可得：





令，故有：



当约束条件时，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)，进而可以求得GLRT门限。

在*H*1假设下的观测矢量，其中为已知矢量，为高斯分布矢量。由于*a*为未知概率分布的随机参量，所以无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式。

可得最佳接收机为：



图14:最佳接收机框图

(3) *a*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*a*，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与*a*无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量的似然函数(Likelihood Function)分别为：





,UMPT为：



两边取对数化简为：



根据上式，可得检验统计量，在*H*0假设下服从高斯分布，可得：





故有：



当约束条件，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限)，进而可以得UMPT门限。

在*H*1假设下的观测矢量，其中为已知矢量，为高斯分布矢量。由于*a*为未知概率分布的随机参量，所以无法给出*H*1假设下观测矢量的概率分布，故无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式。

可得最佳接收机为：



图15:最佳接收机框图

(4) *a*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*a*，故属于随机参量信号统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与*a*无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

此题是一种二元数字通信系统模型，在两种假设下，观测矢量的似然函数(Likelihood Function)分别为：





,UMPT为：



两边取对数化简为：



根据上式，可得检验统计量，在*H*0假设下服从高斯分布，可得：





故有：



当约束条件，有：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限)，进而可以得UMPT门限。

在*H*1假设下的观测矢量，其中为已知矢量，为高斯分布矢量。由于*a*为未知概率分布的随机参量，所以无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式。

可得最佳接收机为：



图16:最佳接收机框图

# 参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.