**信号检测与估计**

**第五章作业**



学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

**1.** 设有下列两个假设：

：，

：=，

其中，为已知信号，且为了处理方便起见，假定。

如果要求，试求：

1. A为已知常数时的最佳接收机和相应的检测概率，并画出相应的ROC曲线；
2. A为不等于零的未知参量时的接收机；
3. A为大于零的未知参量时的接收机；
4. A为小于零的未知参量时的接收机。

解：(1)此题为高斯白噪声背景下的确知信号波形检测问题。

由题意可知，两种假设下观测信号的似然函数为：





其中为已知常数，则LRT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量。

在*H*1假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：



故有：



在N-P准则下，虚警概率为：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)。

故最佳接收机为：



图1.*A*为已知常数时的最佳接收机框图

检测概率为：



观测信号中感兴趣信号(有用信号)的能量为，则:



则相应的ROC曲线为：



图2. *A*为已知常数时的ROC曲线

由图2可知，当虚警概率*PF*固定时，随着SNR的增大，检测概率*PD*逐渐增大；当SNR固定时，随着虚警概率*PF*的增大，检测概率*PD*逐渐增大；固定检测概率*PD*，对虚警概率*PF*大的SNR要求低，对虚警概率*PF*小的SNR要求高。

(2)*A*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*A*，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。

由题意可知，两种假设下观测信号的条件似然函数为：





其中为已知常数，则LRT为：



两边取对数化简得：



此判决规则与未知参量*A*有关，*A*正负值改变，判决规则也会相应改变。故此时不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

则GLRT为：



令：



可得随机参量*A*的最大似然估计值为：



带入GLRT中可得：



两边取对数化简得：



根据上式，可得检验统计量。

在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在N-P准则下，虚警概率为：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。可解得判别界面(检测门限)。

则最佳接收机为：



图3.*A*为非零未知参量时的最佳接收机框图

在*H*1假设下，=，其中为已知信号，为高斯随机过程。由于*A*为未知概率分布的随机参量，故无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式，故无法给出ROC曲线。

(3) *A*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*A*，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与*A*无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

由题意可知，两种假设下观测信号的条件似然函数为：





其中为已知常数。

对，UMPT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量。

在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在N-P准则下，虚警概率为：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)，则最佳接收机为：



图4.*A*为大于0的未知参数时的最佳接收机框图

在*H*1假设下，=，其中为已知信号，为高斯随机过程。由于*A*为未知概率分布的随机参量，故无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式，故无法给出ROC曲线。

(4) *A*为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量*A*，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围已知。由(2)可知，此时判决规则与*A*无关，故可使用一致最优势检验法(UMPT)进行统计判决，所设计的最佳接收机为一致最优势接收机。

由题意可知，两种假设下观测信号的条件似然函数为：





其中为已知常数。

对，UMPT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量。

在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在N-P准则下，虚警概率为：



其中，为标准正态分布的CDF(Cumulative Distribution Function)。

可解得判别界面(检测门限)，则最佳接收机为：



图5.*A*为小于0的未知参数时的最佳接收机框图

在*H*1假设下，=，其中为已知信号，为高斯随机过程。由于*A*为未知概率分布的随机参量，故无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式，故无法给出ROC曲线。

**2.** 考虑白高斯噪声背景中下列三种情况时的二元数字通信信号检测问题：

(1) PSK情况

：， 

：，

(2) FSK情况

：， 

：， 

(3) ASK情况

： , 

：， 

其中 ，均为整数，均为已知常数，假定，试分别设计三种情况相应的最佳接收机，画出其相应的接收机统计特性曲线，即曲线，并对三者进行比较。

解：(1)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种相干相移键控系统(CPSK)。设为均值为0，功率谱密度为*N*0/2的高斯白噪声，即。观测信号中感兴趣信号(有用信号)的能量为。由题意可知，两种假设下观测信号的似然函数为：





其中为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量，则最佳接收机为：



图6.PSK系统最佳接收机框图

在*H*1假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：



故有：



因此有：





故最小平均错误率为：



(2)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种相干频移键控系统(CFSK)。设为均值为0，功率谱密度为*N*0/2的高斯白噪声，即。观测信号中感兴趣信号(有用信号)的能量为。由题意可知，两种假设下观测信号的似然函数为：





其中为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量，则最佳接收机为：



图7.FSK系统最佳接收机框图

在*H*1假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：



故有：



因此有：





故最小平均错误率为：



(3)本题为高斯白噪声背景中简单二元信号波形的检测问题，是一种启闭键控系统(OOK)。设为均值为0，功率谱密度为*N*0/2的高斯白噪声，即。观测信号中感兴趣信号(有用信号)的能量为。由题意可知，两种假设下观测信号的似然函数为：





其中为已知常数。

在最小错误率准则下，LRT为：



两边取对数化简得：



故检验统计量，则最佳接收机为：



图8.ASK系统最佳接收机框图

在*H*1假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：





令，故有：



在*H*0假设下，()是高斯随机过程，故检验统计量是高斯随机变量，因此有：



故有：



因此有：





故最小平均错误率为：



因为三种情况下的假设不同，因此三种情况下的SNR表达式有所不同，但是都可以用表征。将三种情况下的ROC曲线画在一起作对比，如图9：



图9.PSK、FSK与ASK系统的ROC曲线

由图9显然可以得到，相同SNR下，PSK调制系统的误码率最低，ASK调制系统的误码率最高。达到相同的误码率，对ASK调制系统要求的SNR最大，对PSK调制系统要求的SNR最小。

**3.** 考虑白高斯噪声背景中随机相位信号的检测问题：

： , 

：， 

假定，均为已知常数，且为正整数。试分别设计下列两种情况下相应的最佳接收机或次最佳接收机，画出相应的曲线（**若能够给出的话**），并与上面第2(3)题的结果加以比较。

(1) 是上均匀分布的随机变量；

(2) 是未知参量。

解：(1)本题为高斯白噪声背景中简单二元随机相位信号波形的检测问题。由于存在初相，故*H*1假设下有用信号的幅度*B*可认为大于0的常数。设为均值为0，功率谱密度为*N*0/2的高斯白噪声，即。

因为是上均匀分布的随机变量，故的先验pdf为：



由题意可知，两种假设下观测信号的条件似然函数为：





其中为已知常数。

在最小错误率准则下，以随机相位为条件的似然比函数为：



可令：



其中，，则有：



故：



可令：



故LRT为：



化简得：



则检验统计量，故最佳接收机框图如下：



图10.正交双通道相关器检测系统最佳接收机框图

在假设*H*1下，随机参数给定的条件下，()是高斯随机过程，故和都是高斯随机变量。因此，有：









令，故有：





又因为*u*和*v*的条件协方差函数为：



所以，*u*和*v*为不相关的高斯随机变量，故两者统计独立。因此，*u*和*v*的二维联合条件pdf为：



由二维雅克比变换可得出*q*和*θ*0的二维联合条件pdf为：



则*q*的条件pdf为：



因为上式是与*θ*无关的常数，且*θ*在上均匀分布，故*q*在*H*1假设下的似然函数为：



可见，这是一种广义瑞利分布(莱斯分布)。

在*H*0假设下，*q*的似然函数为：



可见，这是一种瑞利分布。

故有：





观测信号中感兴趣信号(有用信号)的能量为，则:



令，，可得：



故最小平均错误率为：



由于*PM*含有较复杂的积分，可利用第一类零阶修正贝塞尔函数的级数展开式进行积分运算并使用递推算法，可以获得任意精度的*PM*，因此可以得到最小平均错误率，故可得ROC曲线，与第2(3)ASK调制系统的ROC曲线相差不大。限于篇幅，不详述，感兴趣可查阅参考文献[1]P221、附录4A和习题4.23。

(2)为未知参量，所以影响统计判决结果的不只是噪声，还有未知参量，故属于随机参量信号波形统计判决问题(复合假设检验问题)，其先验pdf未知，且其取值范围未知。此时判决条件与有关，故不存在一致最优势检验法(UMPT)，故可使用广义似然比检验(GLRT)法进行统计判决，所设计的最佳接收机为广义似然比接收机。

本题为高斯白噪声背景中简单二元随机相位信号波形的检测问题。由于存在初相，故*H*1假设下有用信号的幅度*B*可认为大于0的常数。设为均值为0，功率谱密度为*N*0/2的高斯白噪声，即。

由题意可知，两种假设下观测信号的条件似然函数为：





其中*F*为已知常数。

在最小错误率准则下，则GLRT为：



则令：



可得随机参量的最大似然估计值为：



令，带入GLRT中可得：



两边取对数化简得：



根据上式，可得检验统计量，则最佳接收机为：



图11.未知参量时的最佳接收机框图

在*H*0假设下，()是高斯随机过程，由于的概率分布较复杂，所以检验统计量的概率分布难以确定，故较难给出虚警概率*PF*的确定表达式。

在*H*1假设下，=，其中*B*，为已知常数，为高斯随机过程。由于为未知概率分布的随机参量，且的概率分布较复杂，故无法给出*H*1假设下检验统计量的似然函数，因此检测概率无法给出确定表达式，所以无法得到最小平均错误率，故无法给出ROC曲线。

# 参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.