**信号检测与估计**

**第四章作业**



学号：S18124011

姓名：王景博

老师：刘志文

中国航天科工集团第二研究院研究生院

1.设观测矢量，其中为未知参量，噪声矢量，为已知矢量，假定与n相互独立，如果在[1,5]上均匀分布，即



试求未知参量的最大后验概率估计()和最小均方误差估计()，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(**如果有可能的话**)。

解：由题意可知，观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量维数。

由Bayes公式可得：



对于观测矢量的微小变化，有：







从而得：



因此有：



对于未知参量*a*的微小变化*da*，有：







从而得:



因此，未知参量的最大后验概率估计为：



由于并没有提供任何待估计参数*a*的任何信息，故上式可变为：



又因为，，因此：



当时，是以为对称轴的钟型曲线，可得下图：



图1.取值图

其中虚线表示的值没法取到，其真实值为0。故未知参量*a*的最大后验估计为：



由于，可令：，，故有：



因此有：



其中为标准正态分布的cdf。

所以有：







可令：，则，故未知参量*a*的最大后验估计的均值与均方误差为：





最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：



可利用，，故有：



可令：，故可得：



未知参量*a*的最小均方误差估计的均值与均方误差为：





此题观测矢量与随机参量*a*的联合pdf并不连续，故克拉美-罗下限(CRB)并不存在。

2.如果的分布变为



其它条件同习题1，试求未知参量的最大后验概率估计()和最小均方误差估计()，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(**如果有可能的话**)。

解：由题意可知，观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量维数。

未知参量的最大后验概率估计为：



由于并没有提供任何待估计参数*a*的任何信息，故上式可变为：



又因为



根据冲激函数的取样性质可知，只在*a*=1，*a*=2，*a*=3时存在非零值。所以有：



由于取值存在冲激函数，所以不能直接比大小，可以认为在*a*的微小变化d*a*上的概率近似的大小，这也符合最大后验估计的定义。将在的微小变化d*a*上的概率、在的微小变化d*a*上的概率与在的微小变化d*a*上的概率相互作差，可得其相对大小的门限，故有：



由于，可令：，，故有：



因此有：



所以有：







其中为标准正态分布的cdf。

可令：，则，故未知参量*a*的最大后验估计的均值与均方误差为：





最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：



未知参量*a*的最小均方误差估计的均值与均方误差为：





此题观测矢量与随机参量*a*的联合pdf并不连续，故克拉美-罗下限(CRB)并不存在。

3.如果是均值为3，方差为9的高斯随机变量，即，其它条件同习题1，试求未知参量 的线性最小均方误差估计()，最大后验概率估计()和最小均方误差估计()，及其均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(**如果有可能的话**)。

解：由题意可得，未知参量*a*的pdf为：



观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量维数。

依此可求得：









根据线性最小均方误差估计可得：



未知参量的最大后验概率估计为：



由于并没有提供任何待估计参数*a*的任何信息，故上式可变为：



取对数，可得：



由于，令，可得：



所以。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：



可令：





故有：



未知参量*a*的线性最小均方误差估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最大后验估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最小均方误差估计的均值与均方误差为：





此题联合pdf满足正则条件，且对随机参量*a*的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合pdf的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：



随机参量*a*的线性最小均方误差估计、最大后验估计与最小均方误差估计的均方误差达到CRB，故、与为*a*的有效估计。

4.设观测矢量，其中为未知参量，噪声矢量，为已知矢量，求：

(1)未知参量的最小二乘估计()和最大似然估计()。

(2)如果还知道是均值为*m*，方差为的高斯随机变量，即，试求未知参量的最大后验概率估计()和最小均方误差估计()。

(3)分别给出上述不同估计量的均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(**如果有可能的话**)。

解：(1)最小二乘估计法，又称最小平方法，是一种数学优化技术。 它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘估计法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小。则未知参数*a*的最小二乘估计为：



其中为误差平方和函数。因此有：



故。

最大似然估计是利用已知的观测结果，反推最大概率导致这样的观测结果的参数值，则未知参数*a*的最大似然估计为：



令，由题意可知，观测矢量在未知参量*a*的条件下的条件pdf为：



其中*N*为观测矢量的维数。取对数可得对数条件pdf为：



因此有：



故。

(2)由题意可知，未知参量*a*的pdf为：



令，观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量的维数。则未知参量的最大后验概率估计为：



由于并没有提供任何待估计参数*a*的任何信息，故上式可变为：



取对数，可得：



由于，令，可得：



所以。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：



可令：





故有：



(3)未知参量*a*的最小二乘估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最大似然估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最大后验估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最小均方误差估计的均值与均方误差为：





当*a*为非随机参量时，此题对数似然函数满足正则条件，且对非随机参量*a*的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数似然函数的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：



非随机参量*a*的最小二乘估计与最大似然估计的均方误差达到CRB，故与为*a*的有效估计。

当*a*为随机参量时，此题联合pdf满足正则条件，且对随机参量*a*的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合pdf的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：



随机参量*a*的最大后验估计与最小均方误差估计的均方误差达到CRB，故与为*a*的有效估计。

5.设观测矢量，其中为未知参量，噪声矢量，为已知矢量，求：

(1)未知参量的最小二乘估计(), 最优加权矩阵相应的加权最小二乘估计()和最大似然估计()。

(2)如果还知道是均值为*m*，方差为的高斯随机变量，即，试求未知参量的最小均方误差估计()。

(3)分别给出上述不同估计量的均值与均方误差，并与克拉美-罗下限的值加以比较(**如果有可能的话**)。

解：(1)最小二乘估计法，又称最小平方法，是一种数学优化技术。 它通过最小化误差的平方和寻找数据的最佳函数匹配。利用最小二乘估计法可以简便地求得未知的数据，并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小，则未知参数*a*的最小二乘估计为：



其中为误差平方和函数。因此有：



故。

最小二乘估计将误差矢量中的各分量同等看待，认为各分量对观测矢量的影响相同，但事实上，误差分量越大，对观测矢量的影响越大。加权最小二乘估计对于误差越大的分量赋予更小权重，对于误差较小的分量赋予更大的权重，然后采用普通最小二乘法估计其参数的一种数学优化技术。假设为加权矩阵(是一正定阵)，则未知参数*a*的加权最小二乘估计为：



其中为加权误差平方和函数。因此有：



故。

根据最小均方误差准则，利用矩阵柯西施瓦兹不等式可得，当加权矩阵时，为最优加权最小二乘估计，此时有：



最大似然估计是利用已知的观测结果，反推最大概率导致这样的观测结果的参数值，则未知参数*a*的最大似然估计为：



由题意可知，观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量的维数。取对数可得对数似然函数为：



因此有：



故。

(2)由题意可知，未知参量*a*的pdf为：



观测矢量的似然函数为：



其中*N*为观测矢量的维数。

最小均方误差估计本质上属于一种加权最小二乘估计，加权系数为对应的概率，也称作后验均值估计，所以有：



可令：





故有：



(3)未知参量*a*的最小二乘估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最优加权最小二乘估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最大似然估计的均值与均方误差为：





未知参量*a*的最小均方误差估计的均值与均方误差为：





当*a*为非随机参量时，此题对数似然函数满足正则条件，且对非随机参量*a*的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数似然函数的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：



非随机参量*a*的最优加权最小二乘估计与最大似然估计的均方误差达到CRB，故与为*a*的有效估计。非随机参量*a*的最小二乘估计未达到CRB，故为*a*的无效估计。

当*a*为随机参量时，此题联合pdf满足正则条件，且对随机参量*a*的估计均为无偏估计，则克拉美-罗下限(对数联合pdf的二阶偏导的数学期望的负倒数)为：



随机参量*a*的最小均方误差估计的均方误差达到CRB，故为*a*的有效估计。

# 参考文献

[1] 赵树杰, 赵建勋. 信号检测与估计理论[M]. 清华大学出版社, 2005.