Übungsaufgaben Lineare Codes

Lösungen

1. Etwas Algebra: Galois-Felder

1. Bestimmen Sie die inversen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation für GF(2) und GF(3)!

2. Bestimmen Sie das neutrale Element bezüglich Addition und Multiplikation für GF(2) und GF(3)!

3. Bestimmen Sie in GF(3): $2+2$, $2-1$, $2 \cdot 2$ und $1/2$!

Ergebnis:

1. Inverse Elemente: Addition: $a+(-a)=0$ und Multiplikation: $a \cdot a^{-1}=1$
   GF(2): Addition $1+(-1)=0 \to -1=1$ Multiplikation $1 \cdot 1^{-1}=1 \to 1^{-1}=1$
   GF(3): Addition $1+(-1)=0 \to -1=2$ Multiplikation $1 \cdot 1^{-1}=1 \to 1^{-1}=1$
   GF(3): Addition $2+(-2)=0 \to -2=1$ Multiplikation $2 \cdot 2^{-1}=1 \to 2^{-1}=2$

2. Neutrales Element: Addition: $a+n_{\oplus}=a$ und Multiplikation: $a \cdot n_{\odot}=a$
   $n_{\oplus}=0$ und $n_{\odot}=1$

3. GF(3) $2+2=1$, $2-1=2+(-1)=2+2=1$, $2 \cdot 2=1$
   $1/2=1 \cdot 2^{-1}=1 \cdot 2=2$

2. Linearer Binärcode

Für lineare Codes gilt $c_i \oplus c_j \in C$

1. Bilden die folgenden Codeworte einen linearen Code?

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 100101\\
v_2 &= 110011\\
v_3 &= 111100\\
v_4 &= 101010\\
v_5 &= 001111\\
v_6 &= 011001\\
v_7 &= 010110\\
v_8 &= 000000
\end{aligned}
$$

2. Geben Sie die Parameter (n,k) und die Minimal-Distanz des Codes an!

3. Können folgende Codeworte als Basisvektoren des Codes dienen (lineare Unabhängigkeit)?

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 100101\\
v_2 &= 110011\\
v_3 &= 111100
\end{aligned}
$$

4. Geben Sie die Gewichtsverteilung des Codes an!
5. Erzeugen Sie aus den Basisvektoren die Generatormatrix eines systematischen Codes!

Ergebnis:

1. Falls sie Elemente einer Gruppe sind, ist zu ihrer Beschreibung eine Untermenge von Basisvektoren ausreichend.

$$v_1 \oplus v_2 = v_7 \tag{1}$$
$$v_1 \oplus v_3 = v_6 \tag{2}$$
$$v_1 \oplus v_4 = v_5 \tag{3}$$
$$v_1 \oplus v_5 = v_4 \tag{4}$$
$$v_1 \oplus v_6 = v_3 \tag{5}$$
$$v_1 \oplus v_7 = v_2 \tag{6}$$

2. $n = 6, k = 3$ und $d_{min} = w_{min} = 3$
3. ja, da gilt:

$$v_1 \oplus v_2 = v_7 \tag{7}$$
$$v_1 \oplus v_3 = v_6 \tag{8}$$
$$v_2 \oplus v_3 = v_5 \tag{9}$$
$$v_1 \oplus v_2 \oplus v_3 = v_4 \tag{10}$$

4. Gewichte zum Nullwort auflisten (1x0, 4x3 , 3x4)
5. $v_1 + v_2$ und $v_2 + v_3$

3. Syndromdecodierung eines linearen Codes

Gegeben ist ein linearer Code mit der Generatormatrix:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

1. Listen Sie alle Codeworte auf und geben Sie die Codeparameter an!
2. Geben Sie die Prüfmatrix H an!
3. Führen Sie eine Nebenklassenzerlegung des Codes durch und wählen Sie geeignete Nebenklassenanführer!
4. Stellen Sie die Syndromtabelle für eine Syndromdecodierung auf!
5. Decodieren Sie die Empfangsworte $y = (10000)$,$y = (11101)$ und $y = (01011)$

Ergebnis:

1. 00000, 10011, 01110, 11101 ($n = 5, k = 2$)

2.

$$H = (-P^T I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

3. Nebenklassenzerlegung

Tabelle 1: Nebenklassen-Zerlegung des (5,2)-Codes

i	$\mathbf{e}_i$	Nebenklassen M_i			
0	00000	00000	10011	01110	11101
1	00001	00001	10010	01111	11100
2	00010	00010	10001	01100	11111
3	00100	00100	10111	01010	11001
4	01000	01000	11011	00110	10101
5	10000	10000	00011	11110	01101
6	11000	11000	01011	10110	00101
7	10100	10100	00111	11010	01001

4.

$$s = yH^T = (01011) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (101) \tag{13}$$

$s = 0 \rightarrow y$ ist gültiges Codewort

5. Syndromtabelle:

Syndrom	Fehlervektor
000	00000
011	10000
110	01000
100	00100
010	00010
001	00001
101	11000
111	10100

4. Mehrvalenter Code

Gegeben ist ein linearer Code über $\mathbb{F}_3$ durch seine Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

1. Welche Dimension und wieviele Codeworte hat der Code?
2. Wie groß ist seine minimale (Hamming-) Distanz?
3. Charakterisieren Sie die Fehler die erkannt bzw. korrigiert werden können!
4. Geben Sie eine Prüfmatrix an!
5. Testen Sie, ob die Worte [0112], [2212], [1202] gültige Codeworte sind!

Ergebnis:

1. Dimension: k = 2, q=3, Anzahl der Codeworte: $M = q^k = 9$.
2. Auflisten der Codeworte ergibt ein Minimalgewicht von 3.

   00 0000 10 1011 01 0112 11 1120 20 2022 02 0221 12 1202 21 2101 22 2210
3. Es können Fehler mit Gewicht $(3-1)/2 = 1$ korrigiert werden und Fehler vom Gewicht $3-1 = 2$ erkannt werden.
4. Sei $G = [I_2|P]$ Dann gilt: $H = [-P^T|I_2]$.

   $$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

   $-1 = 2$ und $-2 = 1$
5. Es gilt $s = yH^T$ bzw. $s = Hy^T$
   $H[0112]^T = 00$
   $H[2212]^T = 02$
   $H[1202]^T = 00$

6. Eine Generatormatrix ist H. Addition und Subtraktion der Zeilen liefert
   $v_1 + v_2$
   $v_1 - v_2$

   $$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{16}$$
7. k = 2, wie in (b) $d_{\min} = 2$.