

Versuch 243 - Thermisches Rauschen

Felix Fleischle

17.3.2022



Abbildung 1: Bild des Versuchsaufbaus aus der Praktikumsanleitung.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Einleitung | 3 |
| 1.1 Grundlagen | 3 |
| 1.1.1 Thermisches Rauschen | 3 |
| 1.1.2 Messtechnik | 4 |
| 1.2 Durchführung | 5 |
| 1.2.1 Vorversuch | 5 |
| 1.2.2 Messung der Rauschspannung als Funktion des Widerstandes | 5 |
| 1.2.3 Messung des Frequenzgangs der Messelektronik | 6 |
| 2 Messprotokoll | 6 |
| 3 Auswertung | 11 |
| 3.1 Auswertung des Frequenzganges | 11 |
| 3.2 Bestimmung der Boltzmannkonstante | 12 |
| 4 Zusammenfassung und Diskussion | 16 |

1 Einleitung

Das Ziel dieses Versuches ist es, die Boltzmann-Konstante über das thermische Rauschen eines Widerstandes zu bestimmen. Dabei messen wir außerdem den Frequenzgang der Messelektronik.

1.1 Grundlagen

1.1.1 Thermisches Rauschen

Bei allen elektrischen Leitern tritt ein thermisches Rauschen auf, welches durch die brownssche Bewegung der Ladungsträger verursacht wird. Diese ist eine zufällige "Zick-Zack-Bewegung", welche zu kleinen elektrischen Potentialen führt. Diese kann man mit einem sehr empfindlichen Oszilloskop messen. Da die Brownsche Bewegung keine präferierte Richtung hat, ist der zeitliche Mittelwert der gemessenen Spannung am Oszilloskop stets 0:

$$\langle U_r \rangle = 0 \quad (1.1)$$

Wenn wir aber den Effektivwert der Spannung betrachten, können wir quantitative Aussagen treffen. Für den Effektivwert gilt nach der Nyquist-Beziehung

$$\sqrt{\langle U_r^2 \rangle} = 4kTR\Delta f \quad (1.2)$$

wobei k die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur, R der Widerstand und Δf die Bandbreite der Messelektronik ist. Obwohl das thermische Rauschen an sich alle Frequenzen beinhaltet, ist es durch die Bandbreite der Messelektronik begrenzt. Dieser kommt durch die endliche Bandbreite von Verstärker und Voltmeter zu stande.

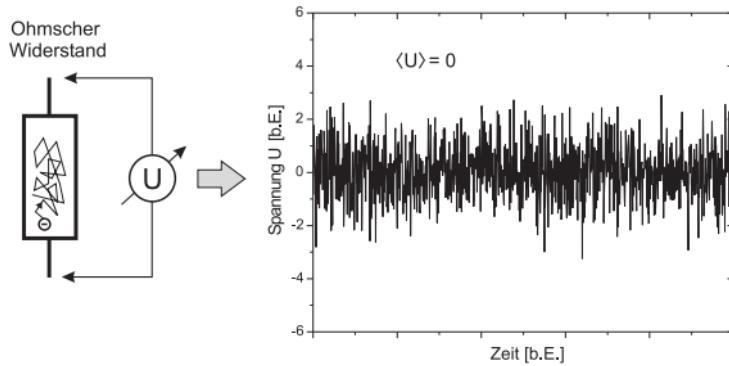


Abbildung 2: Thermisches Rauschen eines Ohmschen Widerstands¹.

1.1.2 Messtechnik

Wir bestimmen also die Boltzmann-Konstante, indem wir den Effektivwert der Spannung in Abhängigkeit des Widerstandes messen, und zusätzlich die Temperatur und die Bandbreite der Messelektronik bestimmen. Wir nutzen zur Bestimmung des Effektivwertes der Spannung in Abhängigkeit des Widerstandes den Aufbau wie er in Abbildung 3 zu sehen ist. Wir verstärken

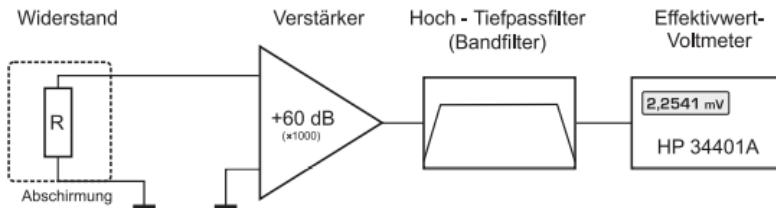


Abbildung 3: Schaltplan zur Bestimmung des Effektivwertes der Spannung².

dabei das Rauschen mit dem Verstärker um den Faktor 1000, und schließen einen Bandpassfilter an, um zum einen den Frequenzgang scharf abzugrenzen, aber auch um Störsignale bei niedrigen Frequenzen, wie das 50-Hz-Brummen herauszufiltern.

Wir müssen allerdings noch beachten, dass der Verstärker selbst auch eine Rauschquelle darstellt. Insgesamt gilt somit

$$\langle (U_r + U_V)^2 \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle + 2 \langle U_r \rangle \langle U_V \rangle = \langle U_r^2 \rangle + \langle U_V^2 \rangle \quad (1.3)$$

Wir müssen also noch das Rauschen mit einem Widerstand von 0Ω , also kurzgeschlossen, messen, und es von unseren Messwerten abziehen. Um den Frequenzgang zu messen bauen wir eine Schaltung gemäß Abbildung 4 auf. Dabei schalten wir zwischen den Frequenzgenerator und die Messelektronik noch ein Dämpfungsglied, welches genau die Verstärkung des Verstärkers ausgleicht. Wir müssen den Verstärker jedoch in der Schaltung lassen, da dieser ja einen Einfluss auf den Frequenzgang hat. Der Computer stellt automatisch die Frequenzen ein und misst die Ausgangsspannungen nach dem Bandfilter. Der dabei entstehende Verlauf wird graphisch dargestellt, und die Messdaten abgespeichert. Wir berechnen dann die Fläche unter der Kurve

$$B = \int_0^\infty g(f) df \quad (1.4)$$

mit dem Frequenzgang $g(f) = \frac{U_{aus}}{U_{in}}(f)$.

Mit der Berücksichtigung des Rauschens des Verstärkers, sowie der Berechnung des Frequenz-

²Quelle: [Praktikumsanleitung](#)

²Quelle: [Praktikumsanleitung](#)

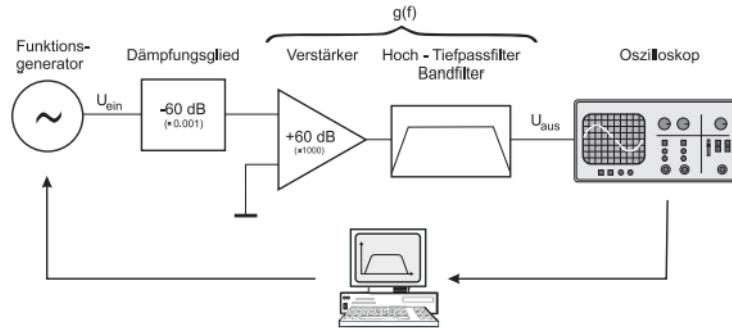


Abbildung 4: Messaufbau zur Messung des Frequenzgangs.

Abbildung 4: Schaltplan zur Bestimmung des Frequenzgangs³.

ganges, folgt für die Boltzmannkonstante bei unserer Messung

$$k = \frac{\langle U_r^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB} \quad (1.5)$$

1.2 Durchführung

1.2.1 Vorversuch

Wir schließen zunächst das Gehäuse mit den Widerständen direkt an den Verstärker, und den Ausgang des Verstärkers an das Oszilloskop. Wir beobachten, wie sich das Rauschen am Oszilloskop verändert, wenn man den Widerstand erhöht.

Danach betrachten wir die Frequenzzusammensetzung des Rauschens, welches eine gerade Linie ergeben sollte. Lediglich bei sehr hohen Frequenzen sollte die Bandbreite des Verstärkers die Frequenzanteile verringern.

Zum Schluss des Vorversuches schalten wir noch einen Bandpassfilter dazwischen, und beobachten wie sich das Frequenzspektrum ändert. Wir drucken das Spektrum aus.

1.2.2 Messung der Rauschspannung als Funktion des Widerstandes

Wir verbinden nun den Ausgang des Bandfilters mit dem Voltmeter, und starten das Messprogramm. Dieses stellt den Effektivwert der Spannung als Funktion der Zeit dar, und berechnet den Mittelwert und die Standardabweichung über mehrere Messungen. Wir messen die Rauschspannung für 6 Widerstände im Bereich von $5\text{k}\Omega$ bis $30\text{k}\Omega$. Dabei warten wir jeweils etwa 100 Einzelmessungen ab.

³Quelle: [Praktikumsanleitung](#)

Danach messen wir noch das Rauschen des Verstärkers, indem wir den Verstärkereingang kurzschließen und erneut Mittelwert und Standardabweichung notieren.

1.2.3 Messung des Frequenzgangs der Messelektronik

Wir schalten nun den Funktionsgenerator an das Dämpfungsglied, und das Dämpfungsglied an den Verstärkereingang. An den Ausgang des Bandpasses schließen wir das Oszilloskop an. Wir stellen am Funktionsgenerator ein Sinussignal von 100Hz und $0,2V_{rms}$ ein, und starten den Circuit Analyzer. Dort stellen wir 5dV/div, V-Range 0,3V, Frequency Range 1MHz, Frequency Start 100Hz, und Frequenzschritte von 20% ein. Wir starten die Messung und speichern am Ende die Messdaten ab.

2 Messprotokoll

Versuch 243 Messung der Boltzmannkonstante - Messprotokoll

Felix Fleischle, Daniel Schub

17.9.2022

- Messaufbau

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmische Widerstände in einem geschlossenen Gehäuse montiert
- Rauschreduzierer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung und zuschaltbaren Bandpassfiltern
- Dämpfungsglied $\frac{1}{1000}$ - Fach
- Heizbarer Widerstand 4k Ω bei 0°C (Pt4000)
- Heizungsnetzteil mit integrierbarer Regelelektronik für den heizbaren Widerstand
- Oszillationsring mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC mit Drucker

- Durchführung

1. Versuch: Quantitative Untersuchung des Rauschspektrums eines ohmischen Widerstands

Wir stecken das Objekt mit den Widerständen direkt an den Verstärkerausgang und wählen den kleinen Widerstand. Dann schließen wir den Verstärkerausgang an das Oszilloskop an. Wir beobachten, dass die Rauschspannung für unterschiedliche Widerstandswerte

Beobachtung:

Das mittlere Verschiebungssquare wird größer, je größer der Widerstand.

Der Mittelwert bleibt 0.

Beobachtung im Spektrumanalysator:

Wir ziehen einen unverzerrten Verlauf. Wenn wir den Widerstand erhöhen, erhöht sich der rms-Average.

Bei hohen Frequenzen fällt die Amplitude ab, da der Verstärker eine endliche Bandbreite hat.

Beobachtung mit Filter: (Bandpass)

Der Frequenzgang fällt schneller ab als ohne Filter.

wir drucken das Spektrum aus.

2. Messung der Rauschspannung als Funktion des ohmschen Widerstands

Wir bauen Widerstände, Verstärker, Bandpass und Voltmeter auf und starten das Messprogramm

Wir messen für 6 Widerstände im Bereich von $5\text{ k}\Omega$ bis $30\text{ k}\Omega$ in $5\text{ k}\Omega$ -Schritten, mit jeweils 100 Einzelmessungen

Tabelle 1: Rauschspannung als Fkt. des Widerstands

| $R [\text{k}\Omega]$ | $U_r [\text{mV}]$ | $\sigma_{U_r} [\text{mV}]$ | Messungen |
|----------------------|-------------------|----------------------------|-----------|
| 5 | 2,3856 | 0,0088 | 105 |
| 10 | 3,1014 | 0,0139 | 104 |
| 15 | 3,6879 | 0,0156 | 103 |
| 20 | 4,1579 | 0,015 | 102 |
| 25 | 4,6483 | 0,0177 | 103 |
| 30 | 5,0699 | 0,0199 | 104 |

$$\frac{\Delta R}{R} = 0,8\% \quad \frac{\Delta U_r}{U_r} = 0,3\% \quad T = (22,80 \pm 0,10)\%$$

Bestimmung des Eigenrausches:

Wir schließen den Verstärkererhöhungskreis und führen eine erneute Messung durch.

$$U_r = 1,3769 \text{ mV}$$

$$\sigma_{U_r} = 0,00549 \text{ mV}$$

$$n = 103$$

3. Messung des Frequenzgangs des Verstärkers und des Bandfilters

Wir bauen die Schaltung zur Messung des Frequenzgangs auf und nutzen den CIRCH2-Analyser

Vertical Scale: 5dB/div

Freq. Scale: 100Hz

V-Range: 0,2V

Freq.-Steps: 20%

Freq.-Range: 1MHz

~~Max. Scale~~

$$D = U_{U_2} \pm 0,2\%$$

Die Messdaten sind digital gespeichert.

4. Messung der Raumspannung als Funktion der Temperatur

$$R = 4816,6 \Omega \quad T = 52,65^\circ C$$

Effektoranwahl:

$$U_r = 2,4691mV \quad \xi_{ur} = 0,0125mV \quad n = 115$$

Nochmal:

$$R = 4820,6 \Omega \quad T = 52,901^\circ C$$

PL. 3.22

7.2. Xew

Tabelle 2: R und Ur für die unterschiedlichen T

| $T_{Heiz} [^\circ C]$ | $R_1 [\Omega]$ | $T_1 [^\circ C]$ | $U_r [mV]$ | $\xi_{ur} [mV]$ | $R_2 [\Omega]$ | $T_2 [^\circ C]$ |
|-----------------------|----------------|------------------|------------|-----------------|----------------|------------------|
| 100 | 5556,2 | 101,15 | 2,7255 | 0,00946 | 5558,1 | 101,18 |
| 150 | 6323,1 | 152,02 | 3,0031 | 0,0110 | 6324,9 | 152,14 |
| 200 | 7059,5 | 201,72 | 3,2816 | 0,0109 | 7060,4 | 201,78 |
| 250 | 8134,6 | 276,92 | 3,7028 | 0,0139 | 8134,4 | 277,06 |

3 Auswertung

Die Auswertung wurde in Python durchgeführt. Das Skript ist am Ende des Dokuments zu finden.

3.1 Auswertung des Frequenzganges

Wir beginnen mit der Auswertung unserer digitalen Messdaten zum Frequenzgang. Wir importieren unsere Messdaten, welche die Frequenz und die zugehörige Ausgangsspannung beinhalten, in Python. Wir wollen den Frequenzgang darstellen, welcher definiert ist als

$$g(f) = \frac{1}{D} \frac{U_{aus}}{U_{ein}} \quad (3.1)$$

In unserem Fall gilt $D = 0,001$ und unsere eingestellte Effektiveingangsspannung von 0,2V. Wir tragen $g(f)$ in einem Diagramm auf und erhalten das folgende Diagramm:

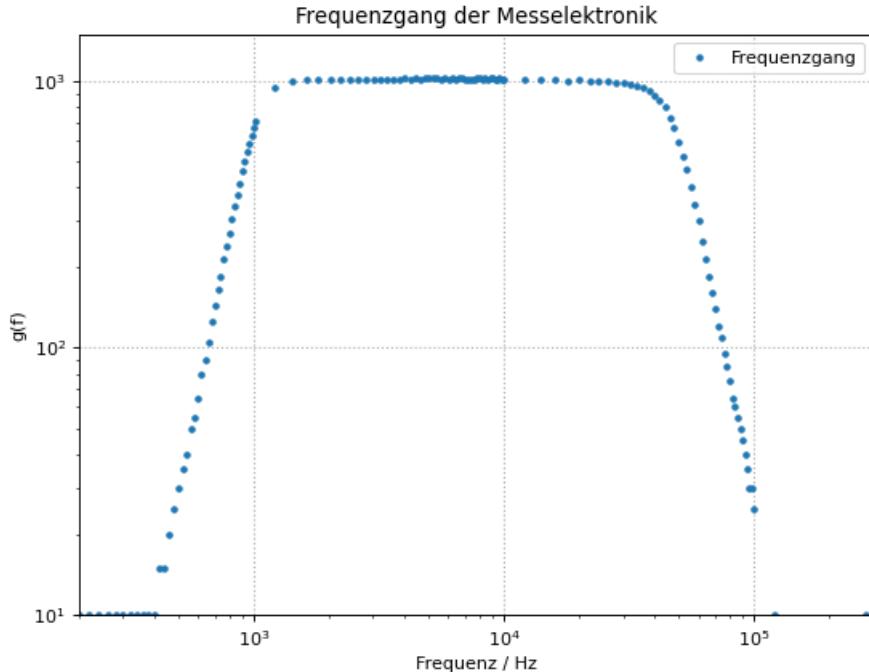


Abbildung 5: Frequenzgang der Messelektronik.

Wir wollen nun einen fit durchführen, um die Fläche unter dem Graphen zu berechnen. Dazu ignorieren wir zuerst alle Werte, die im "Untergrund" liegen. Dies entspricht bei uns den ersten 17 Werten, und den letzten 44 Werten. Wir erhalten ohne diese Messewerte das Diagramm in Abbildung 6. Wir definieren nun die Fitfunktion

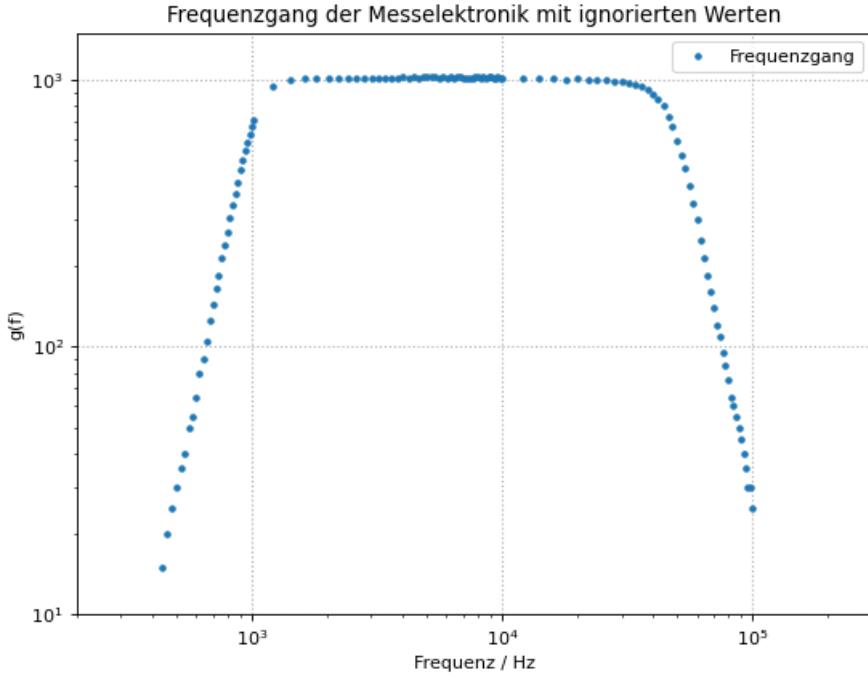


Abbildung 6: Frequenzgang der Messelektronik ohne Untergrund.

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}} \sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \quad (3.2)$$

Mit der Verstärkung V , der Grenzfrequenz Ω_1 des Hochpassfilters, der Grenzfrequenz Ω_2 des Tiefpassfilters, und n_1 und n_2 die jeweiligen Filterordnungen. Wir führen den fit durch und erhalten das Diagramm in Abbildung 7.

Wir führen nun mit Python eine numerische Integration durch. Dabei erhalten wir für den Wert des Integrals

$$B = (4,74 \pm 0,09) \cdot 10^{11} \frac{1}{s} \quad (3.3)$$

Wobei der Fehler von B rein systematisch ist, und 2% von B beträgt.

3.2 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Wir wollen nun aus unserer Messreihe zum effektiven Spannungswert in Abhängigkeit des Widerstandes die Boltzmann-Konstante bestimmen. Dazu übernehmen wir unsere Messwerte von R , U_r , σ_{U_r} und n in Python. Der Fehler der effektiven Ausgangsspannung ergibt sich dabei aus dem Fehler des Voltmeters von 0,3%, sowie der Standardabweichung:

$$\Delta U_r = \sqrt{(0,003U_r)^2 + \left(\frac{\sigma_{U_r}}{\sqrt{n}}\right)^2} \quad (3.4)$$

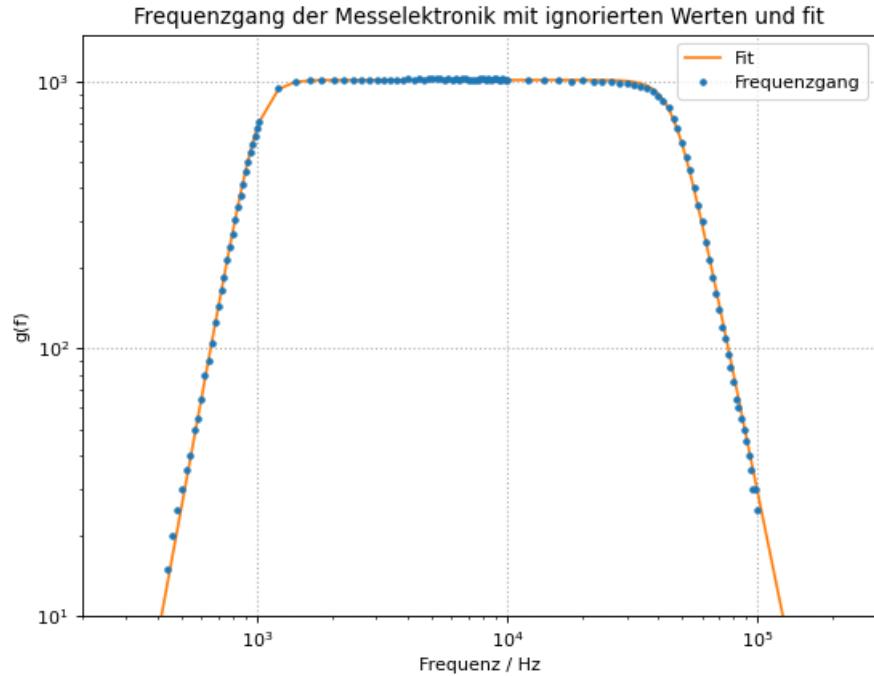


Abbildung 7: Frequenzgang der Messelektronik mit fit.

Der Fehler der Widerstände beträgt 0,5% des Widerstandes, allerdings ist dieser Fehler für den fit, welchen wir später durchführen werden, irrelevant.

Wir wollen nun von der quadratischen effektiven Spannung die gemessene quadratische effektive Spannung des Verstärkers abziehen, gemäß

$$D = \langle U_r^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle \quad (3.5)$$

Für den Fehler von $\langle U_V^2 \rangle$ gelten dabei dieselben Überlegungen wie für $\langle U_r^2 \rangle$.

Für den Fehler von D erhalten wir

$$\Delta D = \sqrt{(2U_V \Delta U_V)^2 + (2U_r \Delta U_r)^2} \quad (3.6)$$

Wir tragen nun diese Differenz D gegen den Widerstand auf und erhalten das Diagramm in Abbildung 8.

Wir führen einen fit mit einer Geraden $D(R) = cR$ durch, und erhalten das Diagramm in Abbildung 9.

Als Steigung erhalten wir

$$c = (7,82 \pm 0,05) \cdot 10^{-10} \frac{V^2}{\Omega} \quad (3.7)$$

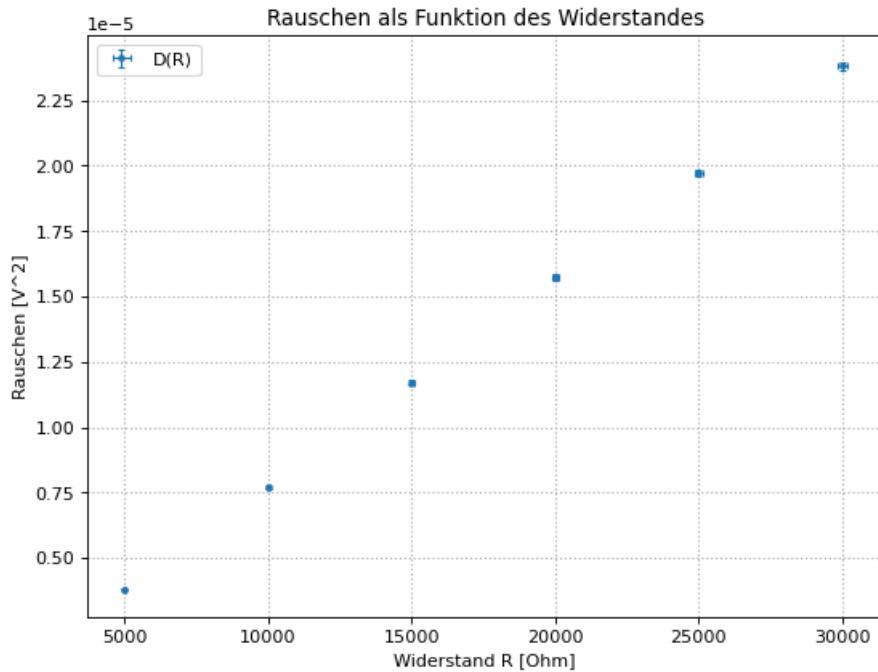


Abbildung 8: Thermisches Rauschen als Funktion des Widerstandes.

Wir bewerten nun die Güte des fits, indem wir die χ^2 -Summe, sowie den $\chi^2_{red} = \chi^2/f$ -Wert berechnen. Wir erhalten

$$\chi^2 = 19,91 \quad (3.8)$$

$$\chi^2_{red} = 3,98 \quad (3.9)$$

Idealerweise sollte der χ^2_{red} -Wert bei 1 liegen, er ist also hier zu hoch. Wenn wir die Fitwahrscheinlichkeit berechnen, erhalten wir

$$P = 0,0\% \quad (3.10)$$

was alles andere als gut ist. Ideal ist eine Fitwahrscheinlichkeit von 50%, was eigentlich daraus hindeutet, dass beim fit etwas schiefgelaufen ist. Der fit passt allerdings gut zu den Messwerten, wie im Diagramm zu sehen ist, und da, wie wir nachher sehen werden, unsere Steigung auch eine realistische Boltzmann-Konstante liefert, können wir uns diese schlechte Fitwahrscheinlichkeit nicht erklären.

Wir bestimmen also nun aus der Steigung die Boltzmann-Konstante. Dazu benötigen wir unsere gemessene Raumtemperatur $T = (22,8 + 273,15 \pm 0,1)K$, sowie den Wert B unseres Integrals. Damit erhalten wir für die Boltzmann-Konstante

$$k = \frac{c}{4TB} = 1,394 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (3.11)$$

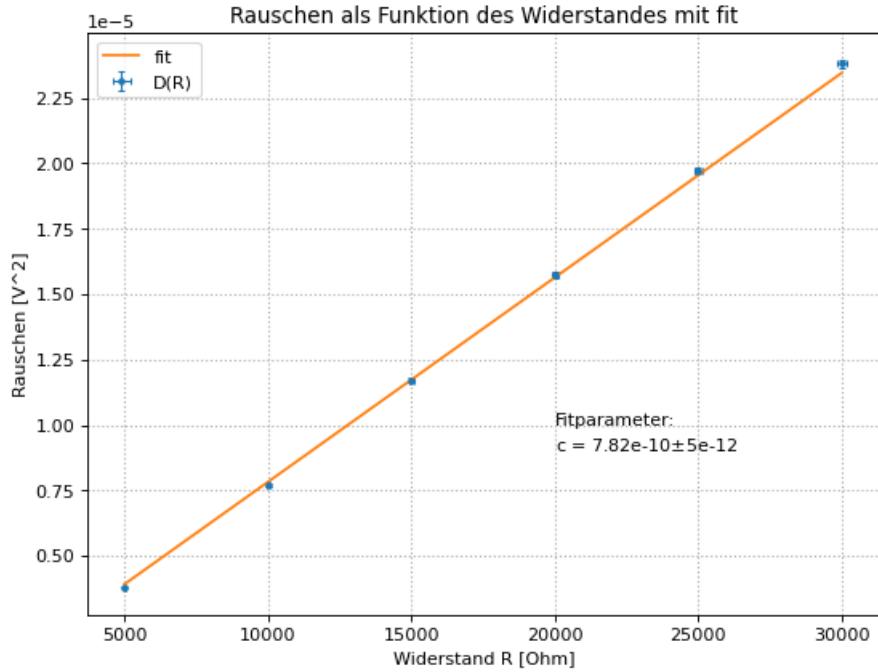


Abbildung 9: Thermisches Rauschen als Funktion des Widerstandes mit fit.

Für den statistischen Fehler, welcher sich aus dem Fehler der Steigung aus dem Fit ergibt, erhalten wir

$$(\Delta k)_{std} = \frac{\Delta c}{c} k = 0,008 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (3.12)$$

Der systematische Fehler ergibt sich aus den Fehlern von T und B :

$$(\Delta k)_{sys} = \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2} k = 0,028 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (3.13)$$

Damit ist unser Gesamtergebnis

$$k = (1,394 \pm 0,028 \text{ syst.} \pm 0,008 \text{ stat.}) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (3.14)$$

Mit dem Literaturwert⁴ von $k_{lit} = 1,380649 \cdot 10^{-23} J/K$ erhalten wir eine σ -Abweichung von

$$\sigma = \frac{k - k_{lit}}{\sqrt{(\Delta k)_{std}^2 + (\Delta k)_{sys}^2}} = 0,47 \quad (3.15)$$

⁴vgl. Wikipedia. (2022). Boltzmann-Konstante. <https://de.wikipedia.org/wiki/Boltzmann-Konstante>

4 Zusammenfassung und Diskussion

Die Ziele dieses Versuches waren es, die Boltzmann-Konstante über das thermische Rauschen eines Widerstandes zu bestimmen. Dabei haben wir außerdem den Frequenzgang der Messelektronik gemessen.

Wir haben mit der Auswertung des Frequenzganges begonnen. Dabei haben wir in der Durchführung mit einem Funktionsgenerator, einem Dämpfglied und einem Oszilloskop den Frequenzgang von Verstärker und Bandpass gemessen. Die digitalen Messergebnisse haben wir in Python importiert, und den Frequenzgang berechnet und geplottet. Wir haben an die relevanten Messpunkte eine Bandpassfunktion gefittet, und durch numerische Integration das Integral unter der Kurve bestimmt. Dabei war unser Ergebnis

$$B = (4,74 \pm 0,09) \cdot 10^{11} \frac{1}{s} \quad (4.1)$$

Danach haben wir unsere Messung der Effektivspannung als Funktion des Widerstandes ausgewertet, sowie unsere Messung der Effektivspannung des Verstärkers. Dabei haben wir den quadratischen Effektivwert der Spannung berechnet, sowie dessen Fehler, und davon den quadratischen Effektivwert des Verstärkers abgezogen. Durch den fit einer Gerade haben wir eine Steigung von

$$c = (7,82 \pm 0,05) \cdot 10^{-10} \frac{V^2}{\Omega} \quad (4.2)$$

erhalten. Wir haben daraufhin die Güte des fits untersucht, und $\chi^2 = 19,91$, $\chi^2_{red} = 3,98$ und $P = 0,0\%$ erhalten. Diese Werte sind offensichtlich nicht gut, was eigentlich darauf hindeutet, dass beim fit etwas schiefgelaufen ist. Allerdings können wir sehen, wie auch schon in der Auswertung erwähnt, dass der fit eigentlich gut zu den Messwerten passt. Außerdem ist unser Ergebnis für die Boltzmann-Konstante, welche wir aus der Steigung berechnet haben, sehr genau. Daher können wir uns nicht erklären, wie es zu dieser Fitwahrscheinlichkeit gekommen ist.

Aus der Steigung haben wir dann die Boltzmann-Konstante berechnet, sowie deren statistischen und systematischen Fehler. Wir haben folgendes Ergebnis erhalten:

$$k = (1,394 \pm 0,028 \text{ syst.} \pm 0,008 \text{ stat.}) \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad (4.3)$$

Dies entspricht einer Abweichung zum Literaturwert von

$$\sigma = 0,47 \quad (4.4)$$

Die Werte stimmen also gut überein.

Versuch 243 Thermisches Rauschen - Messprotokoll

Felix Fleischle - 17.3.2022

```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.integrate as integrate

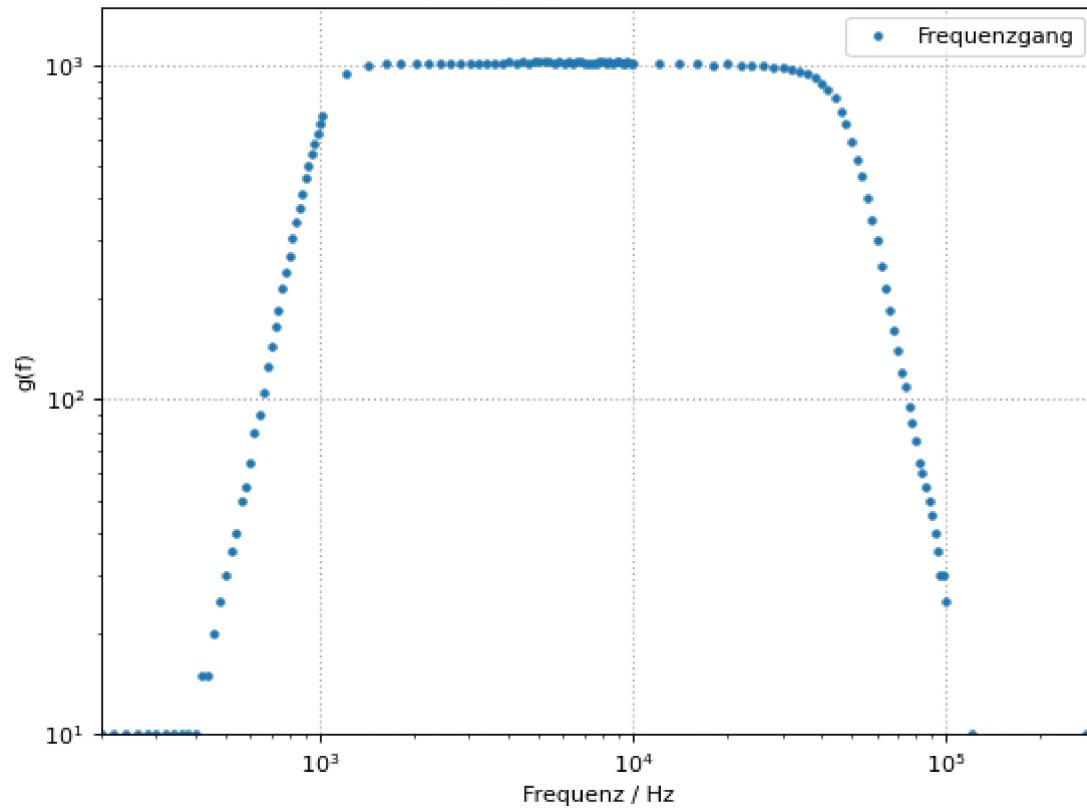
#%matplotlib qt5
```

```
In [2]: f, U_aus =np.loadtxt("C:/Users/fexf1/Documents/GitHub/PAP2/PAP2 Messdaten/PAP2.243 Frequenzgang.txt", skiprows=1, usecols=(0,1), u
```

```
In [3]: D=1e-3
U_ein=0.2
g=U_aus/(U_ein * D)
```

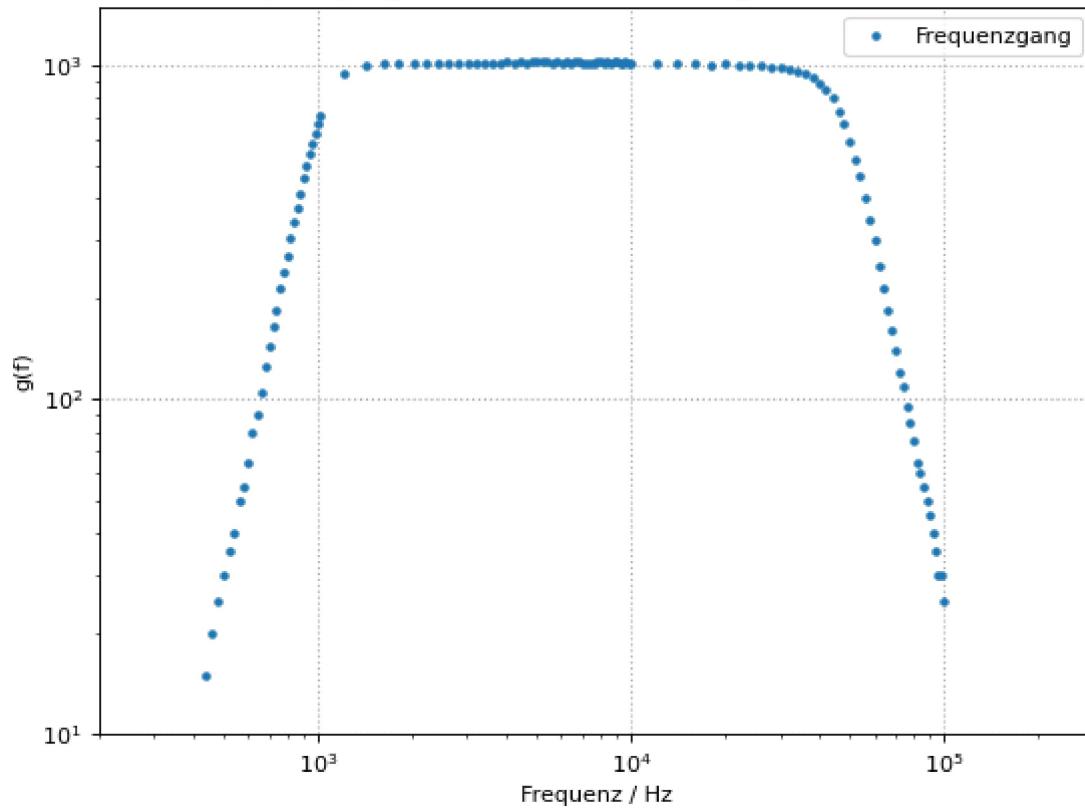
```
In [4]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(f,g, linestyle="None", marker=".", capsize = 2, elinewidth = 1, label="Frequenzgang")
plt.axis([2E2, 3e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.title("Frequenzgang der Messelektronik")
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```

Frequenzgang der Messelektronik



```
In [5]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(f[17:-44],g[17:-44], linestyle="None", marker=".", capsize = 2, elinewidth = 1, label="Frequenzgang")
plt.axis([2E2, 3e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.title("Frequenzgang der Messelektronik mit ignorierten Werten")
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```

Frequenzgang der Messelektronik mit ignorierten Werten

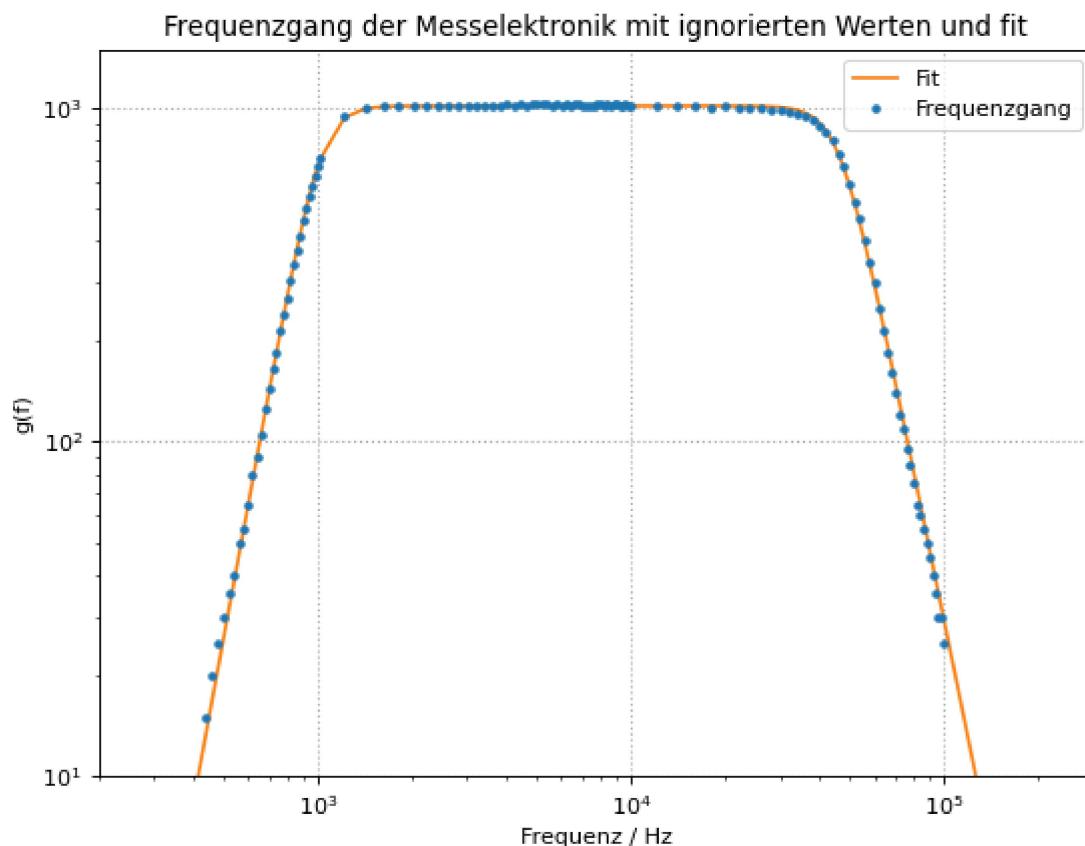


```
In [6]: def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))

p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5]
popt, pcov = curve_fit(fit_func, f[17:-44], g[17:-44] ,p0)
```

```
In [7]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(f[17:-44],g[17:-44], linestyle="None", marker=".", capsize = 2, elinewidth = 1, label="Frequenzgang")
plt.loglog(f, fit_func(f, *popt), label="Fit")
plt.axis([2E2, 3e5, 10, 1.5E3])
plt.xlabel("Frequenz / Hz")
plt.ylabel("g(f)")
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.title("Frequenzgang der Messelektronik mit ignorierten Werten und fit")
```

```
plt.legend()  
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```



```
In [8]: def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):  
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2  
  
B=integrate.quad(fit_func_square, f[17], f[-44], args=tuple(po))  
#print("Das Integral betraegt: {value:.4e}".format(value=B[0]))  
print("Wert des Integrals:",B[0])  
B_err = 0.02 * B[0]  
print("Fehler von B:", B_err)
```

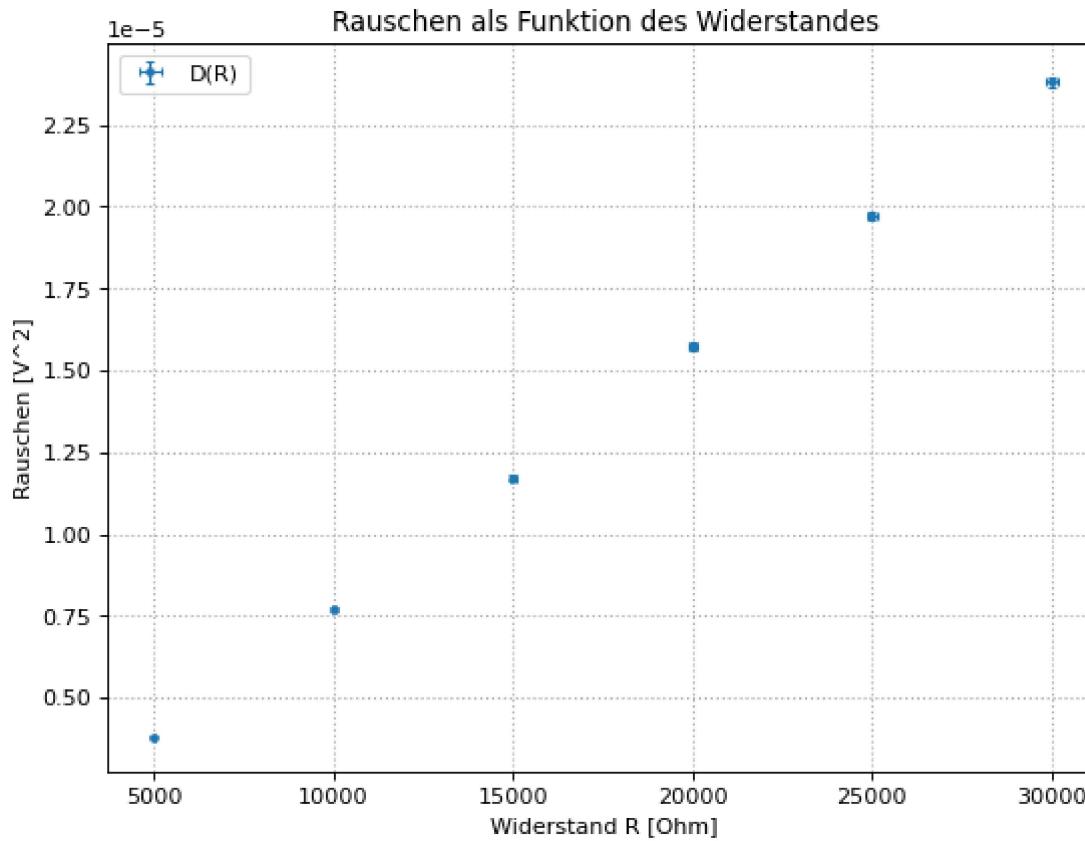
Wert des Integrals: 47391070165.28931

Fehler von B: 947821403.3057861

```
In [11]: R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3])  
R_err = 0.005 * R
```

```
U_aus=np.array([2.3856, 3.1014, 3.6879, 4.1979, 4.6483, 5.0699]) /1000
n_array=np.array([105, 104, 103, 102, 103, 104])
fehler_U_aus=np.array([0.0088, 0.0139, 0.0156, 0.015, 0.0177, 0.0199])/np.sqrt(n_array) /1000
fehler_U_aus_sys = 0.003 * U_aus
U_aus_err = np.sqrt(fehler_U_aus_sys**2 + fehler_U_aus**2)
U_V=1.3769 /1000
U_V_err = np.sqrt( (0.00549/np.sqrt(103) /1000)**2 + (0.003 * U_V)**2 )
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=np.sqrt((2*U_V*U_V_err)**2 + (2*U_aus*U_aus_err)**2)
```

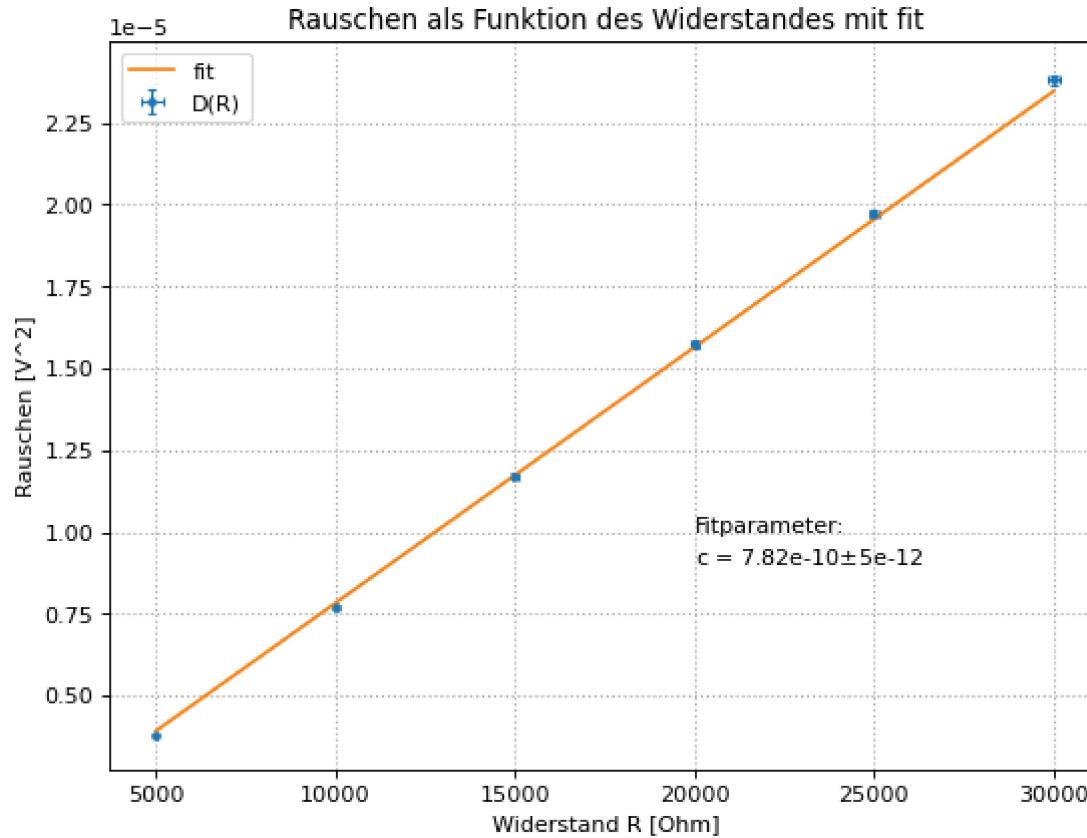
```
In [12]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(R,D, yerr = fehler_D, xerr = R_err, linestyle='None', marker = ".", label="D(R)", capsize = 2, elinewidth=1)
plt.xlabel('Widerstand R [Ohm]')
plt.ylabel('Rauschen [V^2]')
plt.title('Rauschen als Funktion des Widerstandes')
#plt.yscale('log')
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```



```
In [13]: def linear(x,c):
    return c*x

popt_lin, pcov_lin = curve_fit(linear, R, D, sigma=fehler_D)
```

```
In [14]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(R,D, yerr = fehler_D, xerr = R_err, linestyle='None', marker = ".", label="D(R)", capsize = 2, elinewidth=1)
plt.plot(R,linear(R,*popt_lin), label="fit")
plt.xlabel('Widerstand R [Ohm]')
plt.ylabel('Rauschen [V^2]')
plt.title('Rauschen als Funktion des Widerstandes mit fit')
#plt.yscale('Log')
plt.legend()
plt.text(20000, 0.00001, 'Fitparameter:')
plt.text(20000, 0.000009, 'c = ' + str(np.round(popt_lin[0],12)) + ' $\pm$' + str(np.round(np.sqrt(pcov_lin[0,0]),12)))
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```



```
In [17]: chisquare=np.sum(((linear(R,*popt_lin)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom, Freiheitsgrad
chisquare_red=chisquare/dof
print(chisquare)
print(chisquare_red)
```

```
19.9124271127124
3.982485422542484
```

```
In [18]: from scipy.stats import chi2
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%")
```

```
Wahrscheinlichkeit=0.0%
```

```
In [19]: T = 22.8 + 273.15 #K
```

```
T_err = 0.1
k = popt_lin[0]/(4*T*B[0])
k_err_sys = np.sqrt((T_err / T)**2 + (B_err / B[0])**2) * k
k_err_std = np.sqrt(pcov_lin[0,0]) / popt_lin[0] *k
print("Boltzmann:", k, "+-", k_err_sys, "+-", k_err_std)

k_err_ges = np.sqrt(k_err_sys**2 + k_err_std**2)
```

Boltzmann: 1.3943548031787863e-23 +- 2.7891075720460406e-25 +- 8.202222206511647e-26

```
In [20]: k_lit = 1.380649e-23
sigma_k = (k - k_lit)/k_err_ges
print("Abweichung:", sigma_k)
```

Abweichung: 0.47144136701844097

In []: