

Versuch 251 - Statistik des radioaktiven Zerfalls

Felix Fleischle

23.2.2022



Abbildung 1: Versuchsaufbau aus der Praktikumsanleitung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1 Grundlagen . . . . .	3
1.1.1 Geiger-Müller Zählrohr . . . . .	3
1.1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	5
1.2 Durchführung . . . . .	8
1.2.1 Messung der Zählrohrcharakteristik . . . . .	8
1.2.2 Untersuchung des Plateauanstiegs . . . . .	8
1.2.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls . . . . .	8
1.2.4 Vergleich der Poisson- und Gaußverteilung bei sehr kleinen Zählraten . . . . .	9
<b>2 Messprotokoll</b>	<b>9</b>
<b>3 Auswertung</b>	<b>14</b>
3.1 Messung der Zählcharakteristik . . . . .	14
3.2 Untersuchung des Plateauanstiegs . . . . .	15
3.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls . . . . .	17
<b>4 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>22</b>

# 1 Einleitung

Das Ziel dieses Versuchs ist es, ausgehend von der Einsatzspannung die Zählrohrcharakteristik zu untersuchen, sowie den Anstieg der Zählrate im Plateaubereich zu untersuchen. Außerdem bestätigen wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls durch eine lange Messreihe für hohe und niedrige Zählrate.

## 1.1 Grundlagen

### 1.1.1 Geiger-Müller Zählrohr

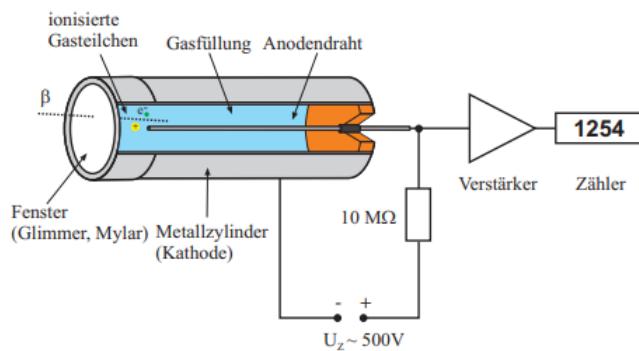


Abbildung 2: Aufbau des Zählrohrs

Wir messen den radioaktiven Zerfall mithilfe eines Geiger-Müller Zählrohres. Dieses besteht aus einem Metallzylinder und einem darin axial verlaufenden Anodendraht, und ist vollständig mit Gas gefüllt. Zwischen dem Zylinder und der Anode ist eine Hochspannung angelegt. Die radioaktive Strahlung wird gemessen, indem die Strahlung das Füllgas ionisiert, wodurch freie Elektronen und positiv geladene Ionen entstehen. Die Elektronen werden aufgrund der Spannung zum Anodendraht beschleunigt und können dabei durch Stöße weitere Gasmoleküle ionisieren. Es entsteht also eine Gasentladung, bei der für kurze Zeit ein Strom im Zählrohr fließt. Dieser lässt sich mit einer Zählerschaltung registrieren. Durch eine geeignete Wahl der Spannung hält diese Gasentladung etwa  $10^{-5}$  Sekunden an.

Wenn ionisierende Strahlung in das Zählrohr eintritt, ist die Anzahl der primär erzeugten Ladungsträger immer proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. Bei kleinen Spannungen erreicht nur ein kleiner Teil der Primärelektronen den Anodendraht.

Bei zunehmender Spannung gelangen nahezu alle Primärelektronen zur Anode, wobei der Strom durch das Zählrohr proportional zur Energie der Strahlung ist. In diesem Bereich arbeitet zum Beispiel eine Ionisationskammer.

Wenn man die Spannung noch weiter erhöht, werden die Primärelektronen so stark beschleunigt, dass sie durch Stöße weitere Gasmoleküle ionisieren können. Es entstehen Sekundärelektronen,

dessen Anzahl immernoch proportional zur Strahlungsenergie ist.

Bei noch höheren Spannungen werden auch die Sekundärelektronen so stark beschleunigt, dass sie ionisationsfähig sind. Dabei entsteht eine Elektronenlawine, sodass jedes einfallende Teilchen unabhängig von seiner Energie ein gleich großes Entladungssignal erzeugt. Dieser Bereich wird Plateaubereich genannt. Die Gasentladung stoppt durch ein Löschgas nach ca.  $10^{-5}$  Sekunden. Wenn man nun die Spannung noch weiter erhöht, kommt irgendwann der Bereich, in dem eine Dauerentladung stattfindet, was in der Regel zur Zerstörung des Zählrohrs führt.

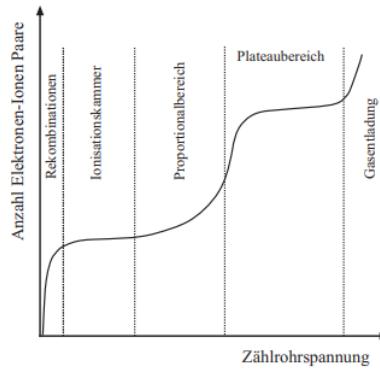


Abbildung 3: Charakteristik des Zählrohrs

Wir führen unsere Messungen also im Plateaubereich durch, da uns nur die Zahl zerfallenen Atome interessiert. Trägt man die Zahl der gemessenen Zählrate eines radioaktiven Präparats gegen die Zählrohrspannung auf, erhält man einen Verlauf wie im folgenden Diagramm:

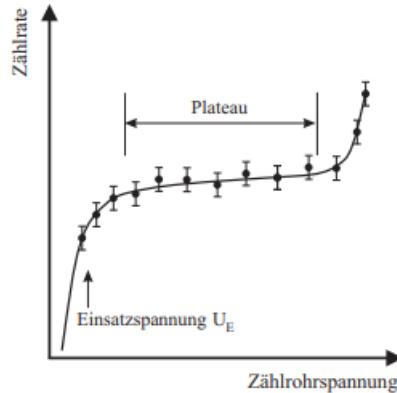


Abbildung 4: Plateaubereich

Wir werden im ersten Versuchsteil genau dies tun, um den Plateaubereich des Geiger-Müller Zählers zu bestimmen.

### 1.1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wenn man mit einem Zählrohr die von einem radioaktiven Präparat emittierten Teilchen unter unveränderten Versuchsbedingungen misst, erhält man in der Regel bei jeder Messung eine andere Teilchenzahl. Dies liegt daran, dass nur ein kleiner Teil der Atome während der Messzeit zerfällt, und die Zerfallsprozesse unabhängig voneinander stattfinden. Es ist also unmöglich, den Zerfallszeitpunkt eines einzelnen Atoms vorherzusagen. Über eine ganze Messreihe lassen sich jedoch Vorhersagen treffen. Wenn man die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit in ein Histogramm einträgt, so wird sich nach unendlich langer Messung immer das gleiche Histogramm ergeben. Der radioaktive Zerfall lässt sich als Binomialverteilung beschreiben. Dabei handelt es sich um ein Ereignis mit genau 2 verschiedenen Ausgängen: Entweder ein Atomkern zerfällt innerhalb der Messzeit, oder nicht. Für die Zerfallswahrscheinlichkeit gilt

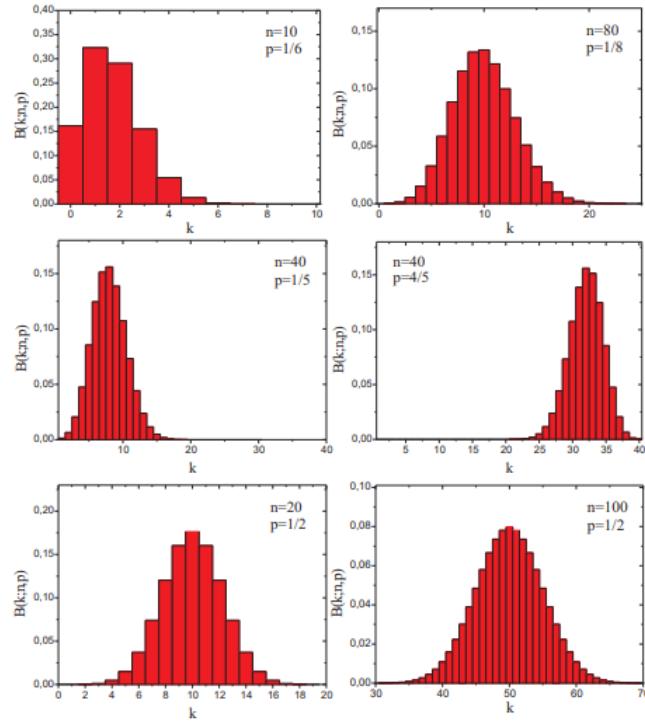
$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.1)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Zerfallskonstante. Bei der Binomialverteilung gilt

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.2)$$

wobei  $k$  die Anzahl der Treffer, und  $n$  die Anzahl der Versuche, und  $p$  die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer. Der Erwartungswert der Binomialverteilung liegt bei

$$\langle k \rangle = np \quad (1.3)$$

Abbildung 5: Binomialverteilung für unterschiedliche Werte von  $n$  und  $p$ 

Da es schwierig ist, bei großen  $n$  mit einer Binomialverteilung zu rechnen, nähert man die Binomialverteilung für große  $n$  und kleine  $p$  durch die Poisson-Verteilung. Diese ist durch

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} \quad (1.4)$$

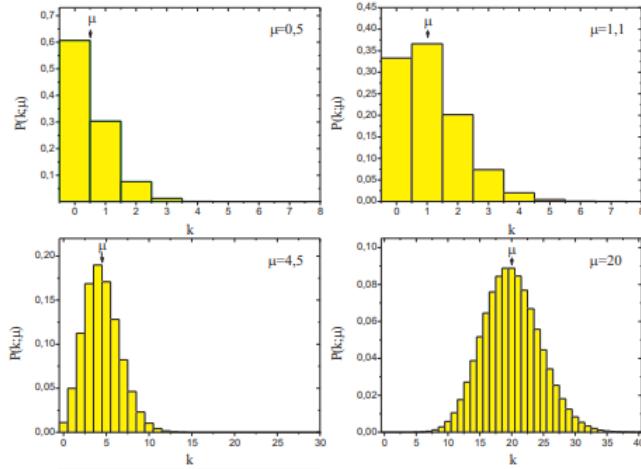
gegeben, und genau wie die Binomialverteilung eine diskrete Verteilung. Sie wird vollständig durch den Mittelwert

$$\mu = np \quad (1.5)$$

beschrieben, wobei für die Varianz und Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{VAR} = \sqrt{\mu} \quad (1.6)$$

gilt.

Abbildung 6: Poissonverteilung für unterschiedliche  $\mu$ 

Man sieht hier bereits, dass die Poissonverteilung für große  $\mu$  symmetrisch wird. Für große Mittelwerte kann die Poissonverteilung also durch eine Gaußverteilung approximiert werden. Für diese gilt

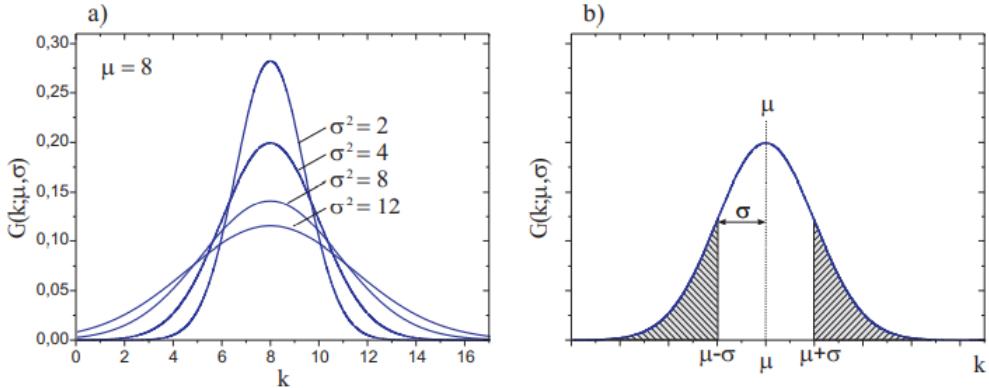
$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \quad (1.7)$$

was ein Spezialfall der allgemeinen Gaußverteilung ist:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.8)$$

mit der Varianz  $\sigma^2$  und der Standardabweichung  $\sigma$ . Für den oberen Spezialfall gilt damit

$$\sigma = \sqrt{\mu} \quad (1.9)$$

Abbildung 7: Gaußverteilung für  $\mu = 0$  und verschiedene Standardabweichungen

Die Gaußverteilung ist im Gegensatz zur Poisson- und Binomialverteilung kontinuierlich. Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert mehr als um den Bereich von  $\pm 2\sigma$  etc. abweicht, gilt

Eine Abweichung von $\mu$ um mehr als	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
hat die Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

Abbildung 8: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von  $\sigma$ 

## 1.2 Durchführung

### 1.2.1 Messung der Zählrohrcharakteristik

Wir nehmen zunächst das Zählgerät in Betrieb. Dabei stellen wir zunächst die Hochspannung auf 400V, und erhöhen dann langsam die Spannung, bis aus dem Lautsprecher ein akustisches Signal zu hören ist. Diese Spannung notieren wir als Einsatzspannung  $V_E$ .

Danach untersuchen wir die Zählrohrcharakteristik, indem wir die Spannung in 25V Schritten erhöhen und bis  $V_E + 150V$  die Ereignisse pro 30 Sekunden messen. Wir stellen dann zum Schluss die Spannung auf einen Wert  $U_0$ , der etwa in der Mitte des Plateaus liegt.

### 1.2.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Wir bringen das Präparat möglichst dicht an das Zählrohr und messen jeweils 1 Minute und 3 Minuten lang die Zählrate bei Spannungen  $U_0$  und  $U_0 + 100V$ .

### 1.2.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Wir stellen die Spannung wieder auf  $U_0$  ein und nähern das Präparat dem Zählrohr, bis etwa 140-150 Zerfälle pro Sekunde gezählt werden. Wir starten das Messprogramm auf dem Computer und stellen die Torzeit auf 500ms. Nach dem Starten der Messung werden die gemessenen

Zerfälle pro Torzeit in einem Histogramm dargestellt. Zusätzlich werden aus den Messdaten Mittelwert und Standardabweichung berechnet, sowie der theoretisch zu erwartende Wert der Standardabweichung  $\sigma_{theo} = \sqrt{\mu}$ . Wir schalten außerdem die Option Gaußkurve ein, bei der die dazugehörige Gaußverteilung berechnet und angezeigt wird. Wir führen insgesamt 2000 Messungen durch.

#### 1.2.4 Vugleich der Poisson- und Gaußverteilung bei sehr kleinen Zählraten

Wir platzieren das Präparat so, dass etwa 40-50 Teilchen pro Sekunde gezählt werden und stellen eine Torzeit von 100ms ein, und wiederholen den obigen Ablauf für 5000 Messungen.

## 2 Messprotokoll

# Versuch 251 Statistik - Messprotokoll

Felix Fleischle

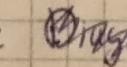
## - Messaufbau

- Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsspannung
- externer Impulszähler
- PC mit Drucker
- Präparatehalterung mit Blattabstimmung
- Radioaktives Präparat ( $^{60}\text{Co}$  oder  $^{137}\text{Cs}$ )

## Durchführung

### 2. Messung der Zählrohrcharakteristik

Wir nehmen das Zählgerät in Betrieb und messen das Zählrohr plateau aus.

siehe  Diagramm. Tabelle 1

$$U_0 = 550 \text{ V} \pm 5 \text{ V}$$

### 3 Untersuchung des Plattenwandsregels

Wir messen 1 min lang bzw. 3 min lang die Zählrate bei  $U_0$  und  $U_0 + 100V$

Tabelle 2: Messdaten zu 3.

Spannung $U [V]$	Zeit $t [min]$	n	Zählrate [ $\frac{1}{s}$ ]
$550 \pm 5$	1	12658	210,97
$550 \pm 5$	3	37394	207,74
$650 \pm 5$	1	12750	212,50
$650 \pm 5$	3	37752	209,73

### 4 und 5.

$$\Delta N = 0,04$$

wegen Runden

Wir messen die Zählrate in einem bestimmten Zeitraum und zeichnen das Ergebnis in einem Histogramm dar, einmal für einen großen und einmal für kleinen Meßlohn.

siehe digitale Ergebnisse.

$$4: n = 2000 \quad \bar{n} = 71,802 \quad \sigma_{exp} = 8,304$$

$$\sigma_{theor} = 8,474$$

$$5: n = 5002 \quad \bar{n} = 4,3627 \quad \sigma_{exp} = 2,1066$$
$$\sigma_{theor} = 2,0887$$

Tabelle 1:

Messdaten zu Aufgabe 2:

Präparat: Co-60

$$t = 200 \text{ s}$$

Spannung U [V]	n	N [ $\frac{1}{s}$ ]
$V_F = 450 \pm 10$	2496	83,20
$475 \pm 5$	<del>2614</del> <sup>***</sup>	85,30
$500 \pm 5$	<del>2564</del> <sup>**</sup>	83,27
$525 \pm 5$	<del>2488</del> <sup>*</sup>	88,03
$U_0 = 550 \pm 5$	2501	83,37
$575 \pm 5$	2619	87,30
$600 \pm 5$	2630	87,67

$$\text{Fehler } \Delta N = 0,01$$

wegen Runden

Hier erneute Messungen, da wir zu früh nach dem Resel wieder stark gedrückt haben

\* 2641

\*\* 2498

\*\*\* 2559

23.2.22

M. H.

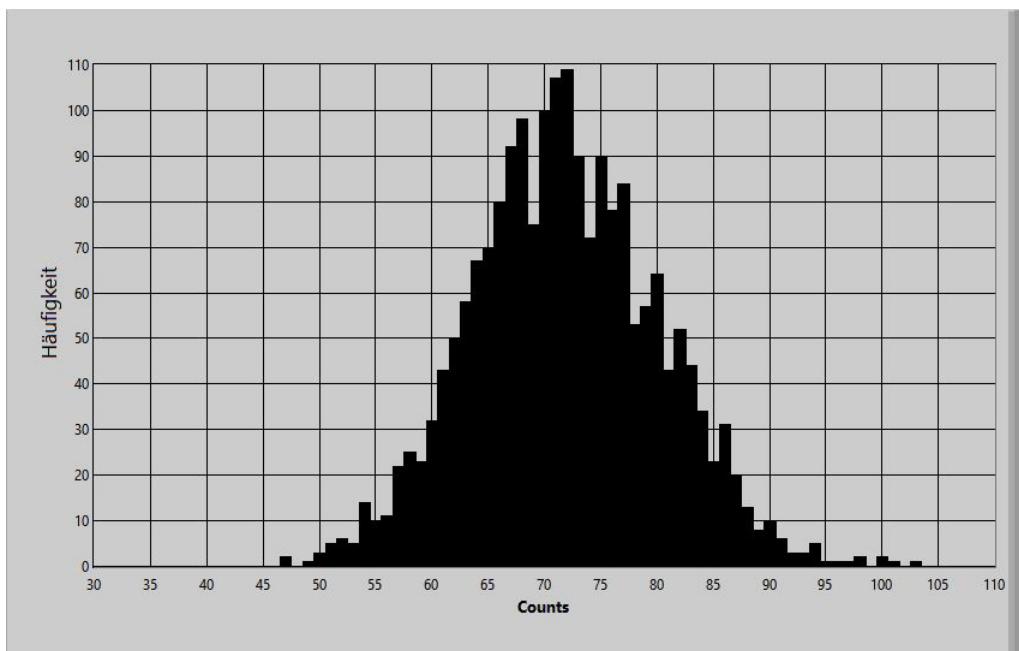


Abbildung 9: Histogramm zur Messung mit hohem Mittelwert

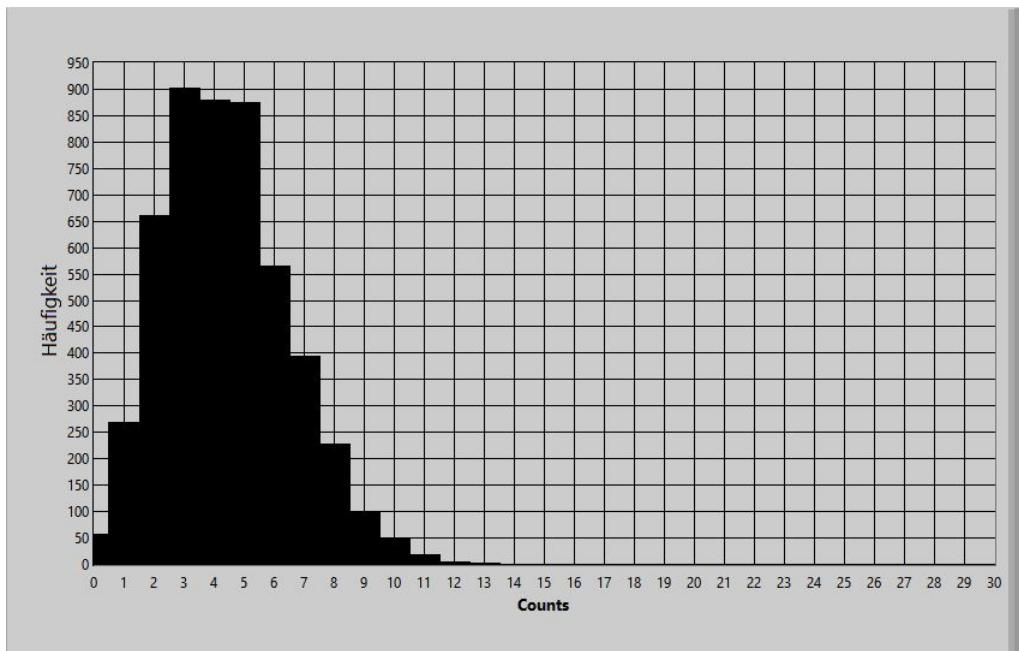


Abbildung 10: Histogramm zur Messung mit niedrigem Mittelwert

### 3 Auswertung

Die Auswertung wurde in Python durchgeführt. Der Code ist am Ende des Dokuments zu finden.

#### 3.1 Messung der Zählcharakteristik

Wir tragen zunächst unsere gemessenen Ereignisse bei der Inbetriebnahme des Zählgeräts gegen die Betriebsspannung auf, mit der Standardabweichung  $\sqrt{N}$  der gezählten Ereignisse. Wir erhalten das folgende Diagramm:

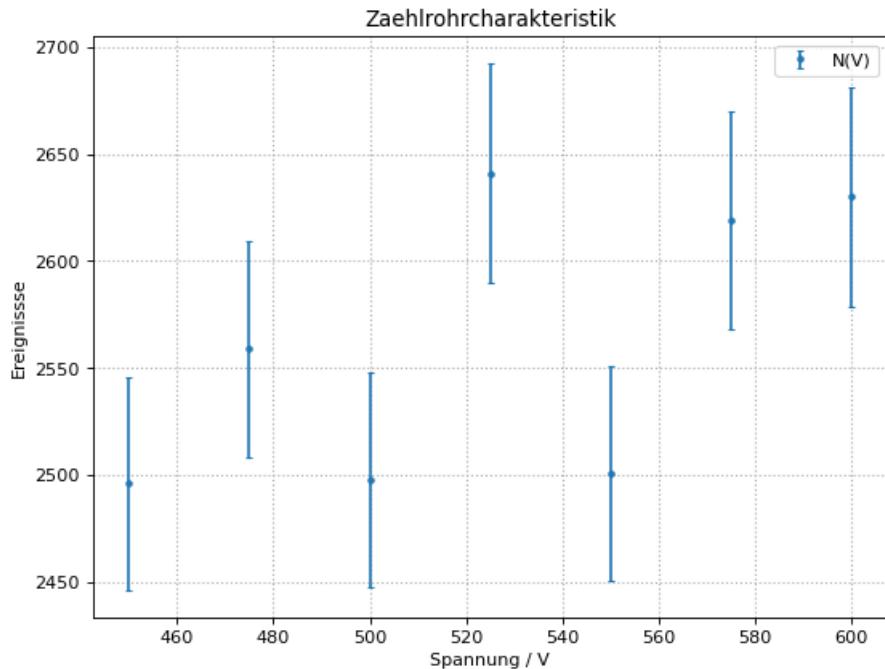


Abbildung 11: Gezählte Ereignisse als Funktion der Spannung

Wir führen einen fit mit einer linearen Funktion durch und erhalten das folgende Diagramm:

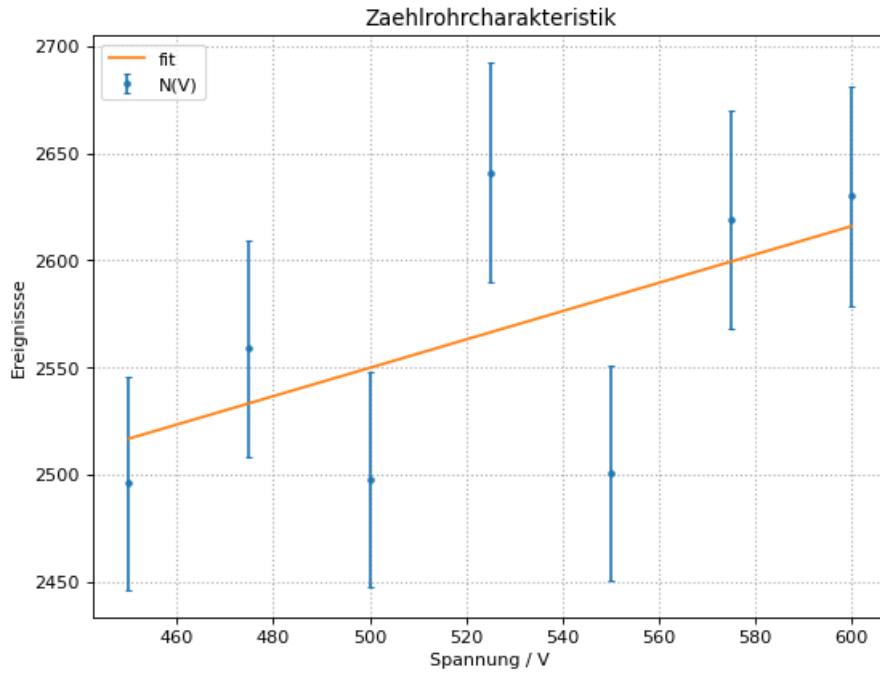


Abbildung 12: Gezählte Ereignisse als Funktion der Spannung mit fit

Wir können sehen, dass der Plateaubereich nicht ganz so perfekt gerade aussieht wie erwartet. Unsere Messwerte haben eine relativ starke Schwankung, auch wenn die Steigung der Gerade insgesamt relativ klein ist. Außerdem haben wir keinen Messwert "vor" dem Plateau mit einer deutlich geringeren Ereigniszahl, wie es eigentlich zu erwarten war. Dies könnte daran liegen, dass wir die Einsatzspannung zu hoch abgeschätzt haben, und daher bei einer etwas zu hohen Spannung angefangen haben zu messen.

### 3.2 Untersuchung des Plateauanstiegs

Wir berechnen zunächst aus unseren Messwerten für die Ereignisse  $N$  die Zählrate  $n$  mit

$$n = \frac{N}{t} \pm \frac{\sqrt{N}}{t} \quad (3.1)$$

und erhalten

Spannung [V]	Messzeit [s]	Ereignisse $N$	Zählrate $n$ [1/s]
550	60	$12660 \pm 110$	$211,0 \pm 1,9$
550	180	$37390 \pm 190$	$207,7 \pm 1,1$
650	60	$12750 \pm 110$	$212,5 \pm 1,9$
650	180	$37750 \pm 190$	$209,7 \pm 1,1$

Tabelle 1: Zählrate beim Plateauanstieg

Nun berechnen wir für beide Messzeiten den Plateauanstieg

$$a = n(650V) - n(550V) \pm \sqrt{\Delta n(650V)^2 + \Delta n(550V)^2} \quad (3.2)$$

und den prozentualen Anstieg

$$a_p = \frac{n(650V) - n(550V)}{n(550V)} = \frac{a}{n(550V)} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{n(550V)}\right)^2 + \left(\frac{a \Delta n(550V)}{(n(550V))^2}\right)^2} \quad (3.3)$$

Zusätzlich berechnen wir die sigma-Abweichungen aus

$$\sigma_a = \frac{n(650V) - n(550V)}{\sqrt{\Delta n(650V)^2 + \Delta n(550V)^2}} = \frac{a}{\Delta a} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{a_p} = \frac{a_p}{\Delta a_p} \quad (3.5)$$

Wir erhalten folgende Ergebnisse

Messzeit t [s]	Plateauanstieg a [1/s]	Prozentualer Plateauanstieg a <sub>p</sub>	$\sigma_a$
60	$1,5 \pm 2,7$	$0,007 \pm 0,013$	0,58
180	$2,0 \pm 1,5$	$0,010 \pm 0,007$	1,31

Tabelle 2: Plateauanstieg und Abweichungen

Die Abweichungen innerhalb des Plateaubereichs sind also nicht signifikant und rein statistischer Natur.

Wir berechnen als nächstes die benötigte Messzeit, um den Plateauanstieg bis auf 1% genau zu kennen. Dabei gilt, mit  $n(650V) = n_2$  und  $n(550V) = n_1$  zu Übersichtlichkeit:

$$\frac{\Delta a}{a} \stackrel{!}{=} 0,01 \quad (3.6)$$

und mit  $\Delta n = \frac{\Delta N}{t} = \frac{\sqrt{N}}{t} = \frac{\sqrt{nt}}{t} = \sqrt{\frac{n}{t}}$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sqrt{(\Delta n_2)^2 + (\Delta n_1)^2}}{n_2 - n_1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\frac{n_2}{t}})^2 + (\sqrt{\frac{n_1}{t}})^2}}{n_2 - n_1} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{n_2 + n_1}}{n_2 - n_1} \stackrel{!}{=} 0,01 \quad (3.7)$$

$$\sqrt{t} = \frac{1}{0,01} \frac{\sqrt{n_2 + n_1}}{n_2 - n_1} \Rightarrow t = \frac{1}{0,01^2} \frac{n_2 + n_1}{(n_2 - n_1)^2} \quad (3.8)$$

Somit haben wir eine Formel für t erhalten. Wir setzen nun jeweils die Zährlaten, welche wir bei den Messungen mit einer und drei Minuten erhalten haben, und erhalten

$$t_{1min} = 1801134s \approx 30018min \approx 500h \approx 20,85 Tage \quad (3.9)$$

$$t_{3min} = 1055388s \approx 17590\text{min} \approx 293h \approx 12,22\text{ Tage} \quad (3.10)$$

Die Werte sind leider sehr unterschiedlich, was sie eigentlich nicht sein sollten. Den Grund dafür werden wir in der Diskussion erörtern.

Wir nehmen nun von beiden Werten den Mittelwert, und schätzen den Fehler aus der Standardabweichung ab. Wir erhalten so

$$t = (1420000 \pm 260000)s = (16 \pm 3)\text{Tage} \quad (3.11)$$

Nun berechnen wir noch die prozentuale Variation der Zählrate, die bei einer Spannungserhöhung von 100V möglich ist, bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% und ca. 95%.

Für ein Vertrauensniveau von 68% gilt

$$a_{p,max} = a_p + \Delta a_p \quad (3.12)$$

Was uns für die Werte bei einer Messzeit von einer Minute das folgende Ergebnis liefert:

$$a_{p,max,1min} = 1,99\% \quad (3.13)$$

und für 3 Minuten:

$$a_{p,max,3min} = 1,69\% \quad (3.14)$$

Wenn wir ein Vertrauensniveau von ca. 95% haben, gilt

$$a_{p,max} = a_p + 2\Delta a_p \quad (3.15)$$

Womit wir folgende Ergebnisse erhalten:

$$a_{p,max,1min} = 3,25\% \quad (3.16)$$

und für 3 Minuten:

$$a_{p,max,3min} = 2,42\% \quad (3.17)$$

### 3.3 Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

Wir importieren unsere Messdaten von den 2000 Messungen von Ereignissen pro 500ms in Python und stellen sie in einem Diagramm dar:

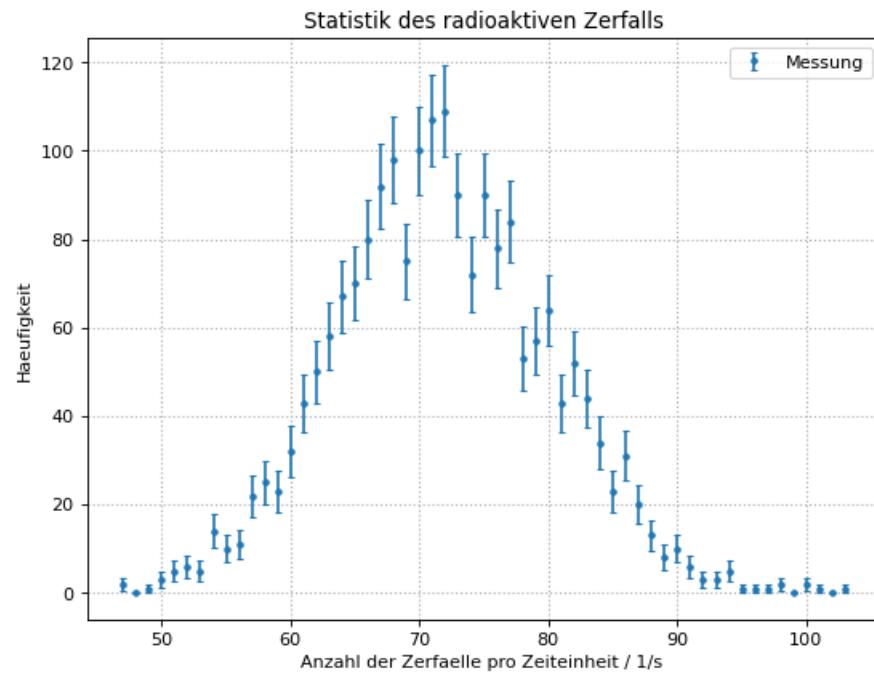


Abbildung 13: Messwerte der ersten Messreihe mit hohem Mittelwert

Wir führen nun sowohl einen Gaußfit und einen Poissonfit durch. Dabei wählen wir von den Messdaten nur die Werte, bei denen die Häufigkeit größer als 10 ist, um Fehler beim späteren  $\chi^2$ -fit zu vermeiden. Wir erhalten das folgende Diagramm mit fit:

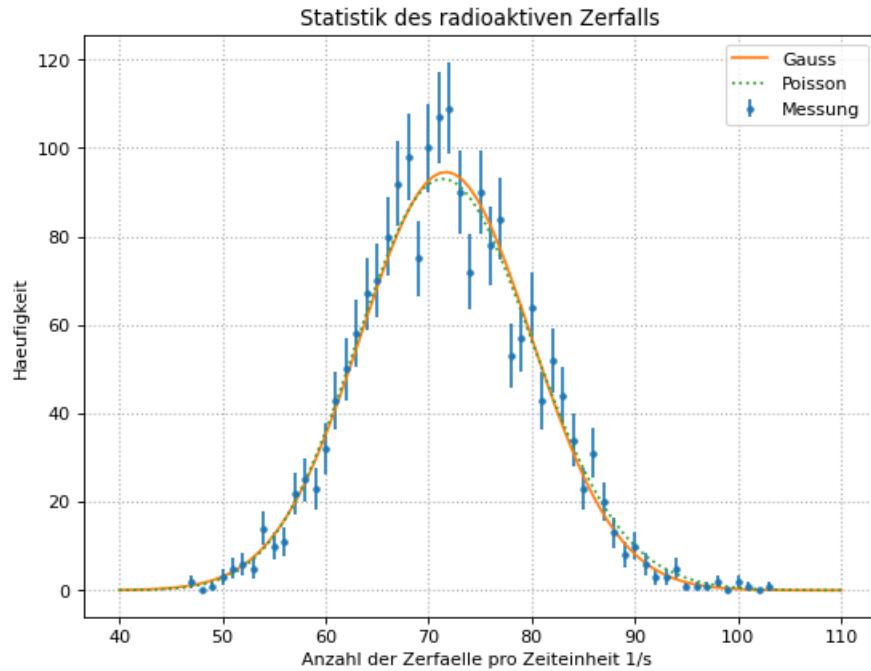


Abbildung 14: Messwerte der ersten Messreihe mit hohem Mittelwert mit fit

Wir können hier bereits sehen, dass beide Verteilungen die Messwerte gut annähern. Für die Fitparameter erhalten wir

Funktion	Fläche unter dem Graph A	Mittelwert $\mu$ [1/s]	Standardabweichung $\sigma$ [1/s]
Gauß	$2060 \pm 70$	$71,2 \pm 0,4$	$8,8 \pm 0,4$
Poisson	$2010 \pm 50$	$71,6 \pm 0,3$	-

Tabelle 3: Fitparameter für Gauß und Poisson - hoher Mittelwert

Wir berechnen außerdem die  $\chi^2$ -Summe und  $\chi^2_{red} = \chi^2/n$  mit der Anzahl der Freiheitsgrade n, sowie die Fitwahrscheinlichkeit, dass bei einer erneuten Messung ein  $\chi^2$ -Wert größer oder gleich dem erhaltenen Wert herauskommt:

Funktion	$\chi^2$	$\chi^2_{red}$	Fitwahrscheinlichkeit
Gauß	38,65	1,21	19,0%
Poisson	36,38	1,10	31,0%

Tabelle 4:  $\chi^2$ -fit und Fitwahrscheinlichkeit - hoher Mittelwert

Wir können sehen, dass die Gauß- und die Poissonverteilung beide ähnliche  $\chi^2$ -Werte haben, und die Messwerte ähnlich gut beschreiben, mit einem guten  $\chi^2_{red}$ -Wert nah an 1.

Wir führen die selben Rechnungen nochmal für unsere zweite Messreihe von 5000 Messungen

mit kleinem Mittelwert und 100ms Torzeit aus. Wir erhalten das folgende Diagramm mit logarithmischer Skala:

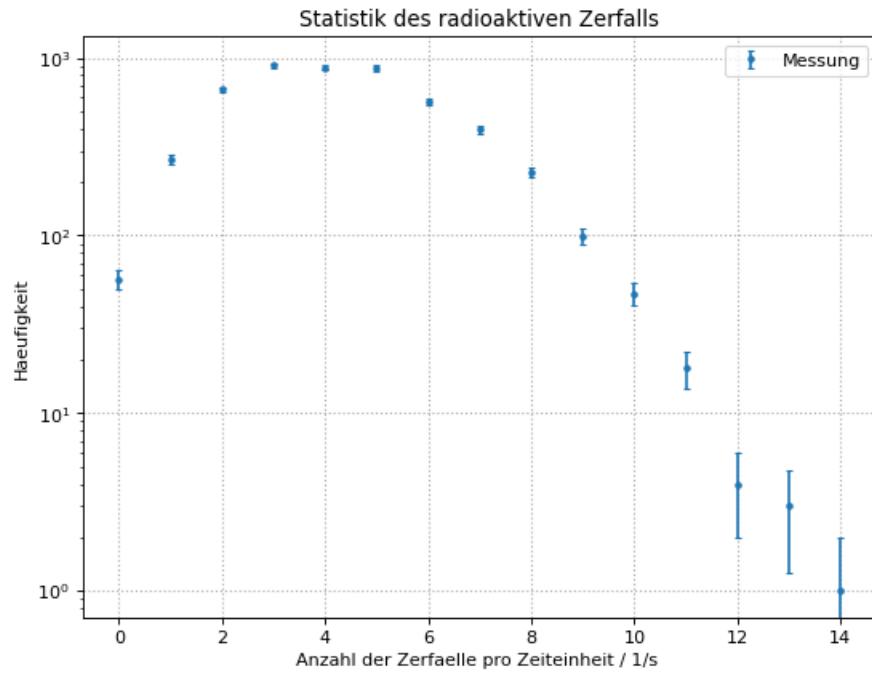


Abbildung 15: Messwerte der zweiten Messreihe mit kleinem Mittelwert

und mit Gauß- und Poissonfit:

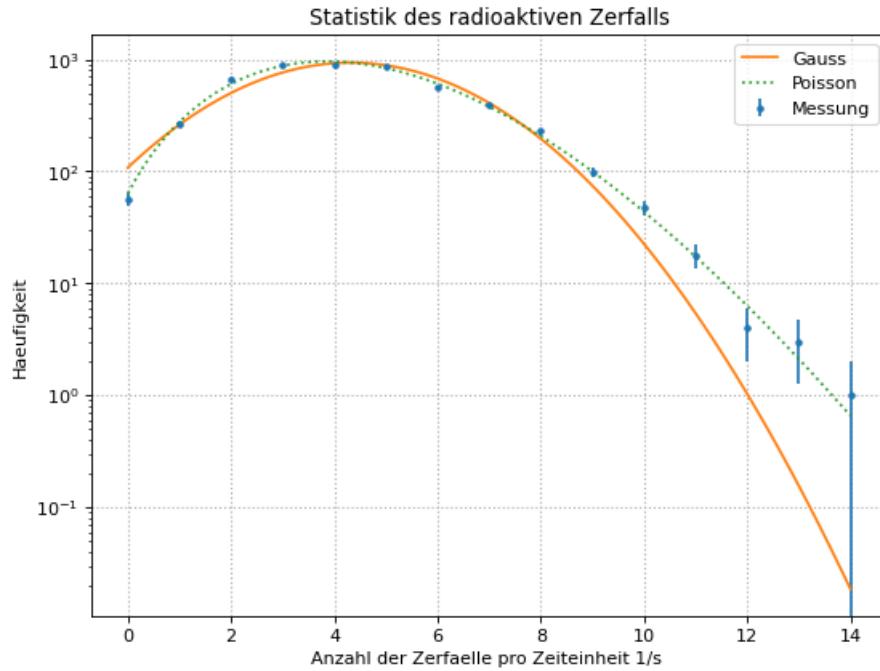


Abbildung 16: Messwerte der zweiten Messreihe mit kleinem Mittelwert mit fit

Wir sehen auch hier bereits, dass die Gaußverteilung die Messwerte nicht gut annähert im Vergleich zur Poissonverteilung. Die Fitparameter sind

Funktion	Fläche unter dem Graph A	Mittelwert $\mu$ [1/s]	Standardabweichung $\sigma$ [1/s]
Gauß	$4880 \pm 260$	$4,32 \pm 0,12$	$2,08 \pm 0,09$
Poisson	$4980 \pm 90$	$4,36 \pm 0,04$	-

Tabelle 5: Fitparameter für Gauß und Poisson - hoher Mittelwert

Wir berechnen außerdem wieder die  $\chi^2$ -Summe und  $\chi^2_{red}$ , sowie die Fitwahrscheinlichkeit:

Funktion	$\chi^2$	$\chi^2_{red}$	Fitwahrscheinlichkeit
Gauß	168,43	14,04	0,0%
Poisson	23,24	1,79	4,0%

Tabelle 6:  $\chi^2$ -fit und Fitwahrscheinlichkeit - hoher Mittelwert

Hier können wir gut sehen, dass die Gaußverteilung die Messwerte nicht gut beschreibt im Vergleich zur Poissonverteilung. Der  $\chi^2_{red}$ -Wert für die Gaußverteilung ist schrecklich, mit 14,04. Der  $\chi^2_{red}$ -Wert der Poissonverteilung ist wieder relativ nah an 1, auch wenn er nicht so gut passt wie zuvor.

## 4 Zusammenfassung und Diskussion

Die Ziele des Versuches waren es, ausgehend von der Einsatzspannung die Zählrohrcharakteristik zu untersuchen, sowie den Anstieg der Zählrate im Plateaubereich zu untersuchen. Außerdem haben wir die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls durch eine lange Messreihe für hohe und niedrige Zählrate untersucht.

Zu Beginn des Versuchs haben wir das Zählgerät in Betrieb genommen und dabei die Zählrohrcharakteristik untersucht, indem wir von der Einsatzspannung aus in 25V Schritten die gezählten Zerfälle gemessen haben. Wir haben dabei ein Plateau erkennen können, auch wenn wir die Einsatzspannung wahrscheinlich etwas zu hoch bestimmt haben, da wir keine Messwerte haben, die nicht im Plateau liegen.

Wir haben daraufhin das Plateau weiter untersucht, indem wir für Messzeiten von 1min und 3min jeweils bei 550V und 650V die Zerfallrate gemessen haben. Wir haben daraus die Zählrate berechnet, sowie den Plateauanstieg und den prozentualen Anstieg. Unser Ergebnis war

Messzeit $t$ [s]	Plateauanstieg $a$ [1/s]	Prozentualer Plateauanstieg $a_p$	$\sigma_a$	$\sigma_{a_p}$
60	$1,5 \pm 2,7$	$0,007 \pm 0,013$	0,58	0,58
180	$2,0 \pm 1,5$	$0,010 \pm 0,007$	1,31	1,31

Tabelle 7: Plateauanstieg und Abweichungen

wobei wir gesehen haben dass der Anstieg im Plateau wie erwartet nicht signifikant ist. Danach haben wir noch die benötigte Messzeit für eine Bestimmung mit Genauigkeit bis auf 1% des Plateauanstiegs berechnet. Unser Ergebnis war

$$t_{1\text{min}} = 1801134s \approx 30018\text{min} \approx 500h \approx 20,85\text{Tagen} \quad (4.1)$$

$$t_{3\text{min}} = 1055388s \approx 17590\text{min} \approx 293h \approx 12,22\text{Tagen} \quad (4.2)$$

mit dem Mittelwert und Fehler des Mittelwertes

$$t = (1420000 \pm 260000)s = (16 \pm 3)\text{Tagen} \quad (4.3)$$

Wie wir gesehen haben, sind die beiden Werte hier deutlich unterschiedlich. Der Grund dafür könnte eine falsche Berechnung sein, denn wir sind uns alles andere als sicher, ob das was wir gerechnet haben überhaupt Sinn ergibt. Die Aufgabenstellung war leider nicht besonders klar, und wenn man sich bei anderen Gruppen erkundigt hat, hatten die meisten dort auch unterschiedliche Lösungsansätze.

Danach haben wir noch die prozentuale Variation der Zählrate berechnet, die bei einer Spannungserhöhung von 100V möglich ist, bei einem Vertrauensniveau von ca. 68% und ca. 95%.

Für ein Vertrauensniveau von 68% haben wir folgende Werte erhalten:

$$a_{p,max,1min} = 1,99\% \quad (4.4)$$

$$a_{p,max,3min} = 1,69\% \quad (4.5)$$

Mit einem Vertrauensniveau von ca. 95% haben wir die folgenden Werte erhalten: Womit wir folgende Ergebnisse erhalten:

$$a_{p,max,1min} = 3,25\% \quad (4.6)$$

$$a_{p,max,3min} = 2,42\% \quad (4.7)$$

Zum Schluss haben wir zwei lange Messreihen durchgeführt, bei denen wir die Zerfälle pro Torzeit gemessen haben, einmal für hohe Zählrate und einmal für eine niedrige Zählrate. Wir haben bei beiden Messreihen einen Gauß- und Poissonfit durchgeführt, um zu vergleichen, wie gut die Funktionen die Messergebnisse beschreiben. Für die hohe Zählrate haben wir dabei die folgenden Ergebnisse erhalten.

Funktion	Fläche unter dem Graph $A$	Mittelwert $\mu$ [1/s]	Standardabweichung $\sigma$ [1/s]
Gauß	$2060 \pm 70$	$71,2 \pm 0,4$	$8,8 \pm 0,4$
Poisson	$2010 \pm 50$	$71,6 \pm 0,3$	-

Tabelle 8: Fitparameter für Gauß und Poisson - hoher Mittelwert

Funktion	$\chi^2$	$\chi^2_{red}$	Fitwahrscheinlichkeit
Gauß	38,65	1,21	19,0%
Poisson	36,38	1,10	31,0%

Tabelle 9:  $\chi^2$ -fit und Fitwahrscheinlichkeit - hoher Mittelwert

Dies hat gezeigt, dass sowohl die Gaußfunktion als auch die Poissonverteilung die Messwerte gut beschreiben. Dies war auch zu erwarten, da die Poissonverteilung für große Mittelwerte ja durch eine Gaußverteilung genähert werden kann.

Für die zweite Messreihe mit kleinem Mittelwert haben wir folgende Ergebnisse erhalten:

Funktion	Fläche unter dem Graph $A$	Mittelwert $\mu$ [1/s]	Standardabweichung $\sigma$ [1/s]
Gauß	$4880 \pm 260$	$4,32 \pm 0,12$	$2,08 \pm 0,09$
Poisson	$4980 \pm 90$	$4,36 \pm 0,04$	-

Tabelle 10: Fitparameter für Gauß und Poisson - hoher Mittelwert

Funktion	$\chi^2$	$\chi^2_{red}$	Fitwahrscheinlichkeit
Gauß	168,43	14,04	0,0%
Poisson	23,24	1,79	4,0%

Tabelle 11:  $\chi^2$ -fit und Fitwahrscheinlichkeit - hoher Mittelwert

Wir haben dabei gesehen, dass für kleine Mittelwerte wie erwartet die Messwerte nur durch eine Poissonverteilung gut beschrieben werden. Bei der Gaußverteilung herrschen große Abweichungen.

# Versuch 251 Statistik - Auswertung

Felix Fleischle - 23.2.2022

```
In [1]: import numpy as np
```

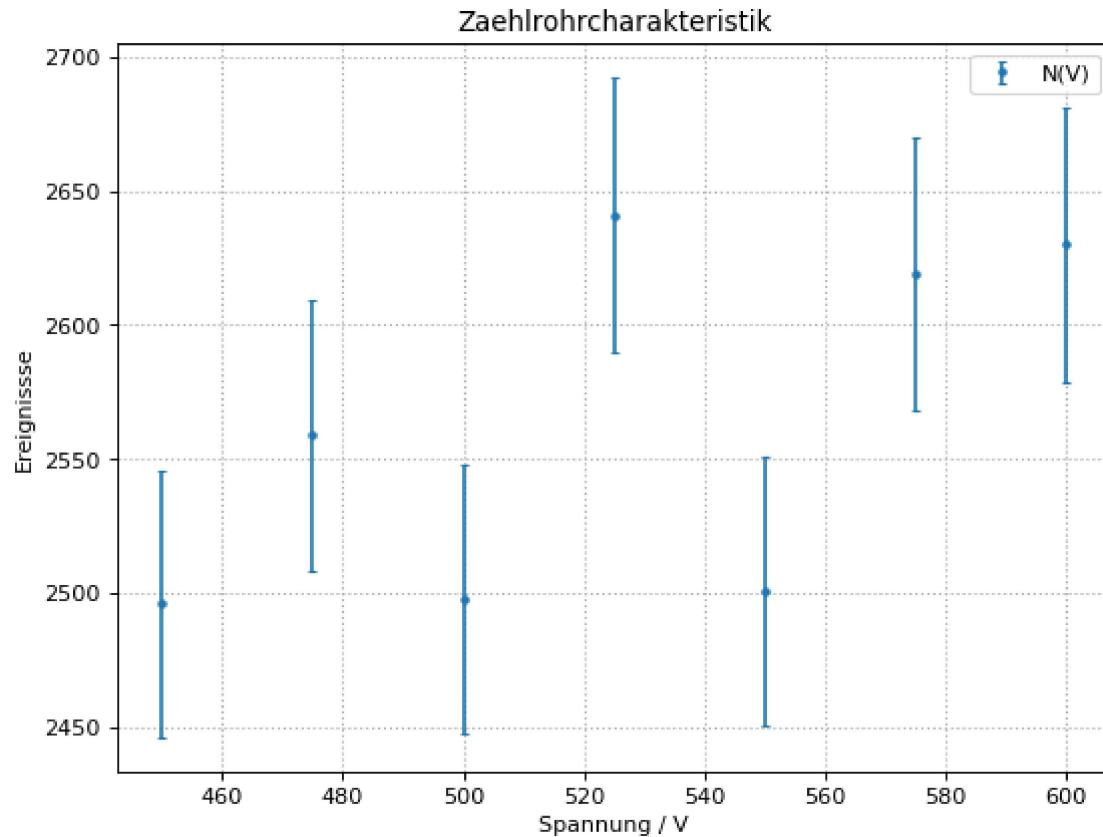
```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
```

```
In [2]: #Zaehlrohrspannung:
```

```
U=np.array([450,475,500,525,550,575,600])
#U_err = np.array([10, 5, 5, 5, 5, 5, 5])
#gezaehlte Ereignisse
N=np.array([2496,2559,2498,2641,2501,2619,2630])
Fehler_N=np.sqrt(N)
```

```
In [3]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
```

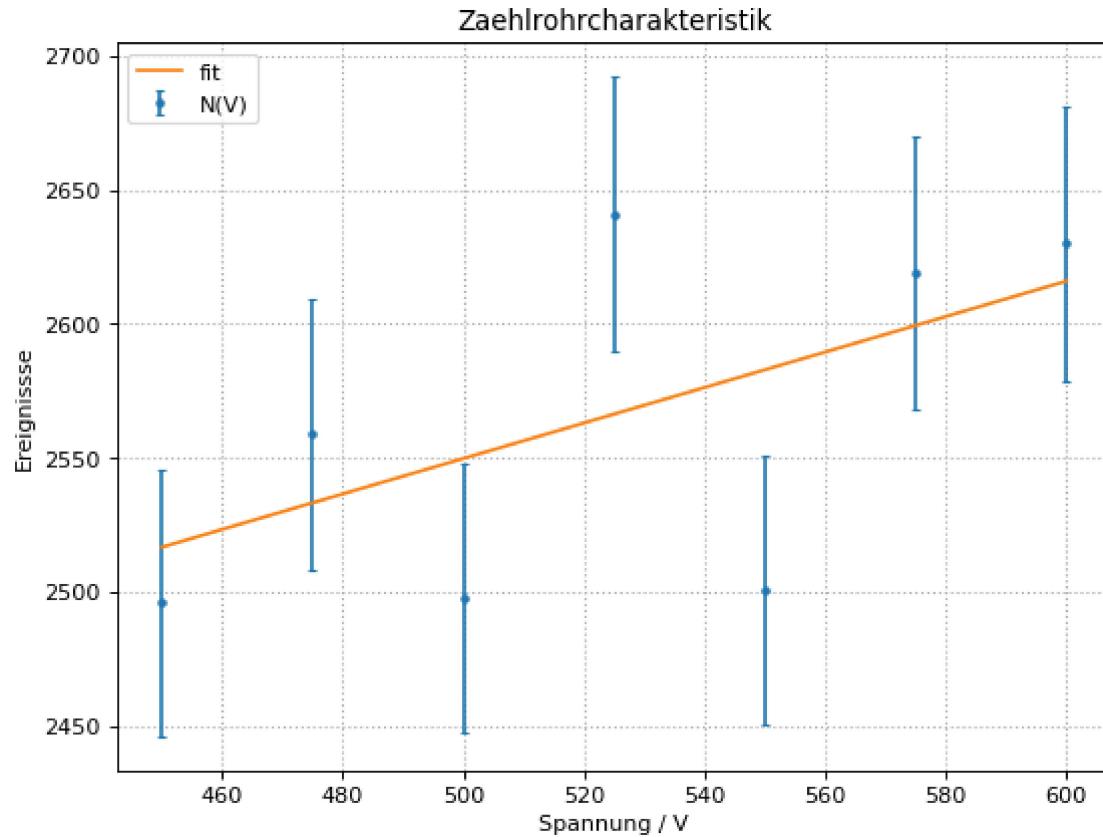
```
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=". ", label="N(V)", linestyle="none", capsize = 2)
plt.xlabel("Spannung / V")
plt.ylabel("Ereignisse")
plt.title("Zaehlrohrcharakteristik")
plt.legend()
plt.grid(linestyle":", linewidth=1)
```



```
In [4]: def linear(x,a,b):
    return a*x+b

popt, pcov=curve_fit(linear, U[1:], N[1:])
```

```
In [5]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(U, N, Fehler_N, fmt=". ", label="N(V)", linestyle="none", capsize = 2)
plt.xlabel("Spannung / V")
plt.ylabel("Ereignisse")
plt.title("Zaehlrohrcharakteristik")
plt.plot(U, linear(U,*popt), label="fit")
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
# error wegen zu hoher anfangsspannung, weniger messpunkte
```



```
In [6]: # 2. Plateaubereich
N_array_p = np.array([12658, 37394, 12750, 37752])
N_array_p_err = np.sqrt(N_array_p)
print(N_array_p_err)

t_array_p = np.array([60, 180, 60, 180])

n_array_p = N_array_p / t_array_p
n_array_p_err = N_array_p_err / t_array_p

print("Zählraten:", n_array_p, "+-", n_array_p_err)

[112.50777751 193.37528281 112.91589791 194.29873906]
Zählraten: [210.96666667 207.74444444 212.5          209.73333333] +- [1.87512963 1.07430713 1.88193163 1.07943744]
```

```
In [7]: # Plateauanstiege:
```

```

a_1m = n_array_p[2]-n_array_p[0]
a_1m_err = np.sqrt(n_array_p_err[2]**2 + n_array_p_err[0]**2)

a_3m = n_array_p[3]-n_array_p[1]
a_3m_err = np.sqrt(n_array_p_err[3]**2 + n_array_p_err[1]**2)

print("Plateauanstieg 1m:", a_1m, "+-", a_1m_err, "[1/s]")
print("Plateauanstieg 3m:", a_3m, "+-", a_3m_err, "[1/s]")

```

Plateauanstieg 1m: 1.533333333333314 +- 2.6566478460228367 [1/s]  
 Plateauanstieg 3m: 1.988888888888888 +- 1.5229317081387206 [1/s]

In [8]: # Prozentuale Anstiege:

```

a_proz_1m = a_1m / n_array_p[0]
a_proz_1m_err = np.sqrt((a_1m_err / n_array_p[0])**2 + (a_1m * n_array_p_err[0] / (n_array_p[0])**2)**2)

a_proz_3m = a_3m / n_array_p[1]
a_proz_3m_err = np.sqrt((a_3m_err / n_array_p[1])**2 + (a_3m * n_array_p_err[1] / (n_array_p[1])**2)**2)

print("Prozentualer Anstieg 1m:", a_proz_1m, "+-", a_proz_1m_err)
print("Prozentualer Anstieg 3m:", a_proz_3m, "+-", a_proz_3m_err)

```

Prozentualer Anstieg 1m: 0.007268130826354865 +- 0.012592903161280705  
 Prozentualer Anstieg 3m: 0.009573728405626529 +- 0.007330961086002894

In [9]: # Prüfe Signifikanz

```

sigma_1m = a_1m / a_1m_err
sigma_3m = a_3m / a_3m_err

#sigma_proz_1m = a_proz_1m / a_proz_1m_err
#sigma_proz_3m = a_proz_3m / a_proz_3m_err

print("Abweichungen:", sigma_1m, sigma_3m)

```

Abweichungen: 0.5771684552127693 1.3059606535605184

In [10]: # Zeit für 99% Genauigkeit

```

t_001 = (n_array_p[2]+n_array_p[0])/((0.01**2 *(n_array_p[2]-n_array_p[0]))**2)
print("Zeit mit Messwerten bei 1min:", t_001)
t_003 = (n_array_p[3]+n_array_p[1])/((0.01**2 *(n_array_p[3]-n_array_p[1]))**2)
print("Zeit mit Messwerten bei 3min:", t_003)

t_00mean = np.mean([t_001, t_003])
t_00mean_err = np.std([t_001, t_003])/np.sqrt(2)
print("Mittelwert:", t_00mean, "+-", t_00mean_err)

```

```
Zeit mit Messwerten bei 1min: 1801134.2155009499  
Zeit mit Messwerten bei 3min: 1055388.4086014887  
Mittelwert: 1428261.3120512194 +- 263660.9585500213
```

```
In [11]: # Prozentuale Variation für Vertrauensniveau:
```

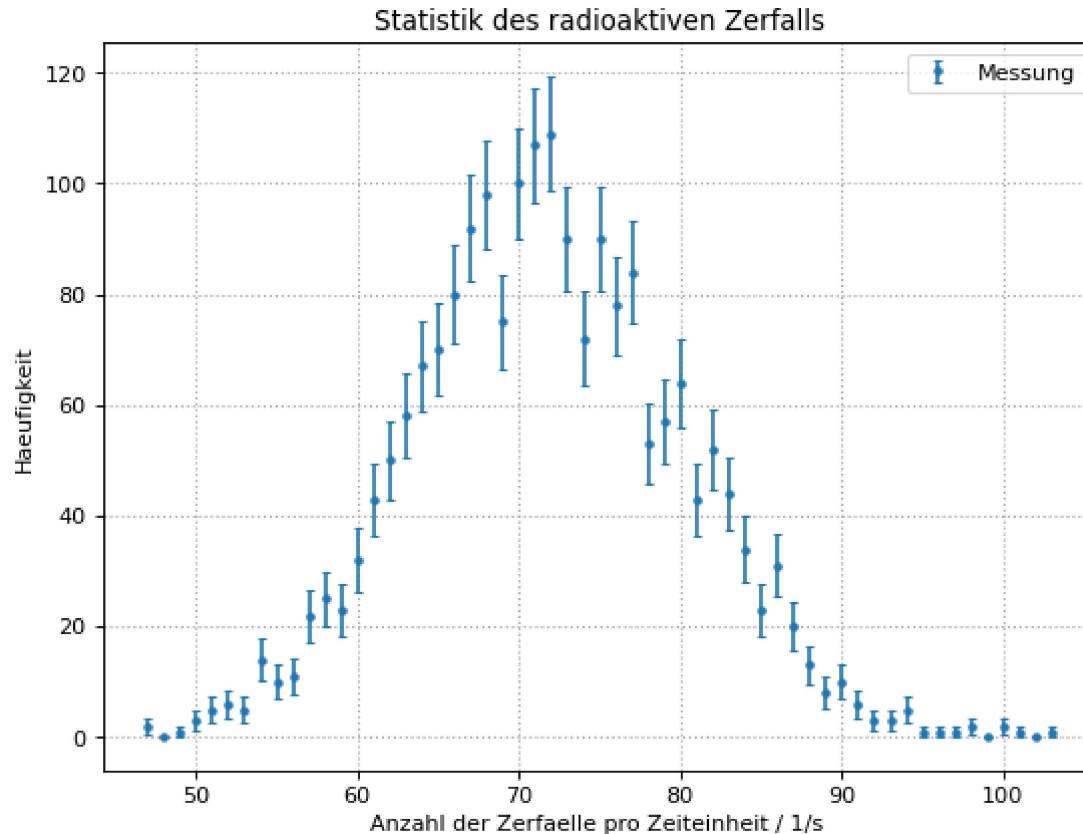
```
#68%  
a_proz_max_68_1m = a_proz_1m + a_proz_1m_err  
a_proz_max_68_3m = a_proz_3m + a_proz_3m_err  
print("Prozentuale Variation für 68%", a_proz_max_68_1m, a_proz_max_68_3m)  
  
#95%  
a_proz_max_95_1m = a_proz_1m + 2*a_proz_1m_err  
a_proz_max_95_3m = a_proz_3m + 2*a_proz_3m_err  
print("Prozentuale Variation für 95%", a_proz_max_95_1m, a_proz_max_95_3m)
```

```
Prozentuale Variation für 68%: 0.01986103398763557 0.01690468949162942
```

```
Prozentuale Variation für 95%: 0.03245393714891628 0.024235650577632314
```

```
In [12]: anzahl, haeufigkeit=np.loadtxt("C:/Users/fexfl/Documents/.Keine Programme Docs/Studium/PAP2/251/ff251.dat", unpack=True)  
fehler=np.sqrt(haeufigkeit)
```

```
In [13]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)  
plt.errorbar(anzahl, haeufigkeit, fehler, fmt=". ", label="Messung", linestyle="none", capsize = 2)  
plt.xlabel("Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ")  
plt.ylabel("Haeufigkeit")  
plt.title("Statistik des radioaktiven Zerfalls")  
plt.legend()  
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
```



```
In [14]: from numpy import exp, pi, sqrt
def gaussian(x, A, mu, sig): #A: Flaeche der Gaussfunktion
    return A/(sqrt(2*pi)*sig)*exp(-(x-mu)**2/2/sig**2)
```

```
In [15]: popt, pcov=curve_fit(gaussian,anzahl[7:-15], haeufigkeit[7:-15], p0=[2000,71.802,8.304],sigma=fehler[7:-15])
```

```
In [16]: from scipy.special import gamma
def poisson(x, A_p, mu_p):
    return A_p*exp(-mu_p)*mu_p**x/gamma(x+1)

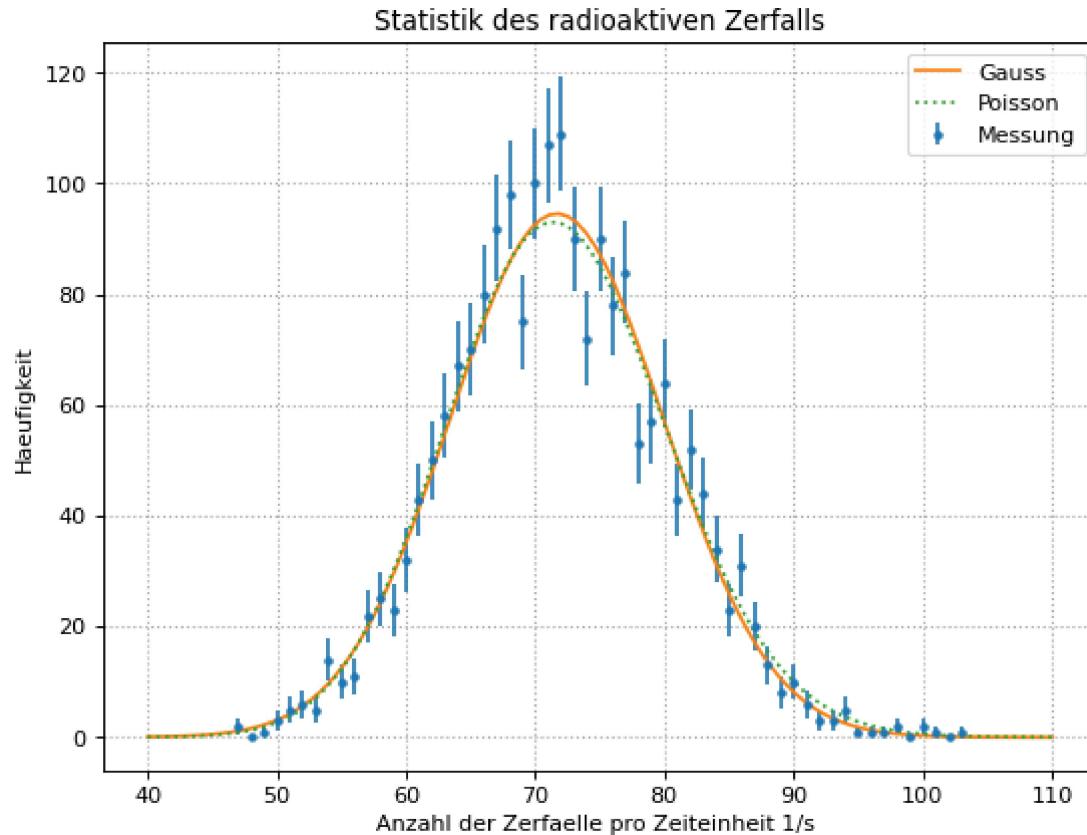
popt_p, pcov_p = curve_fit(poisson, anzahl[7:-15], haeufigkeit[7:-15], p0=[2000, 71.802], sigma=fehler[7:-15])
```

```
In [17]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(anzahl,haeufigkeit,fehler, fmt=".",label="Messung")
plt.xlabel("Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s")
```

```

plt.ylabel("Haeufigkeit")
plt.title("Statistik des radioaktiven Zerfalls")
x=np.linspace(40,110, 100)
plt.plot(x, gaussian(x,*popt), label="Gauss")
plt.plot(x, poisson(x,*popt_p), label="Poisson",linestyle=":")
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)

```



```

In [18]: print("Gaussfit:")
print("A=",popt[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[0][0]))
print("mu=",popt[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[1][1]))
print("sig=",popt[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov[2][2]))
print("Poissonfit:")
print("A_p=",popt_p[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[0][0]))
print("mu_p=",popt_p[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p[1][1]))

```

Gaussfit:

```
A= 1964.3686977559137 , Standardfehler= 50.55061142830489  
mu= 71.66907121619252 , Standardfehler= 0.23389912776028998  
sig= 8.284460195559186 , Standardfehler= 0.21696365491788755  
Poissonfit:  
A_p= 1977.1615500473965 , Standardfehler= 47.69489350889111  
mu_p= 71.8773960358099 , Standardfehler= 0.22725248864535455
```

In [19]:

```
#Gauss:  
chi2_g=np.sum((gaussian(anzahl[7:-15],*popt)  
-haeufigkeit[7:-15])**2/fehler[7:-15]**2)  
dof_g=len(anzahl[7:-15])-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad  
chi2_red_g=chi2_g/dof_g  
print("chi2_g=", chi2_g)  
print("chi2_red_g=",chi2_red_g)  
#Poisson:  
chi2_p=np.sum((poisson(anzahl[7:-15],*popt_p)  
-haeufigkeit[7:-15])**2/fehler[7:-15]**2)  
dof_p=len(anzahl[7:-15])-2 #poisson hat nur 2 Parameter  
chi2_red_p=chi2_p/dof_p  
print("chi2_p=", chi2_p)  
print("chi2_red_p=",chi2_red_p)  
  
chi2_g= 38.646714538610645  
chi2_red_g= 1.2077098293315827  
chi2_p= 36.37555224795676  
chi2_red_p= 1.1022894620592958
```

In [20]:

```
from scipy.stats import chi2  
#Gauss:  
prob_g=round(1-chi2.cdf(chi2_g,dof_g),2)*100  
#Poisson:  
prob_p=round(1-chi2.cdf(chi2_p,dof_p),2)*100  
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g,"%")  
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p,"%")
```

```
Wahrscheinlichkeit Gauss= 19.0 %  
Wahrscheinlichkeit Poisson= 31.0 %
```

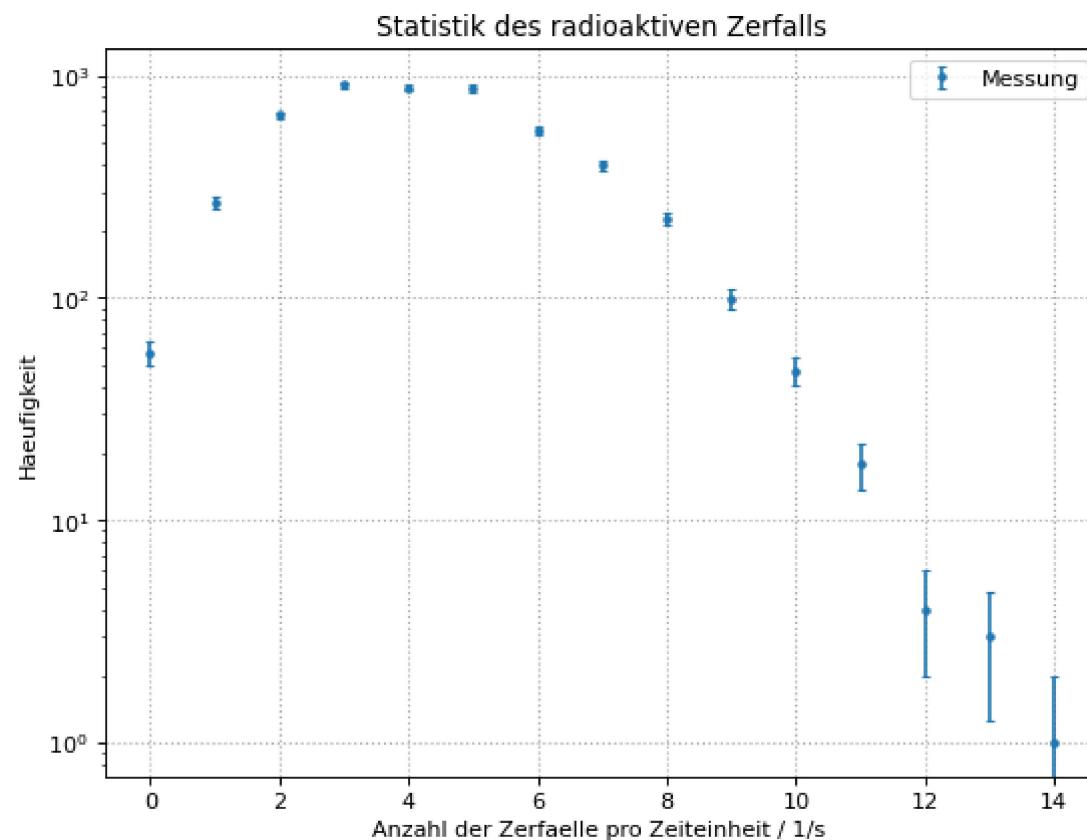
In [21]:

```
anzahl2, haeufigkeit2=np.loadtxt("C:/Users/fexfl/Documents/.Keine Programme Docs/Studium/PAP2/251/ff251p.dat", unpack=True)  
fehler2=np.sqrt(haeufigkeit2)
```

In [22]:

```
plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)  
plt.errorbar(anzahl2, haeufigkeit2, fehler2, fmt=". ", label="Messung", linestyle="none", capsize = 2)  
plt.xlabel("Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit / 1/s ")  
plt.ylabel("Haeufigkeit")
```

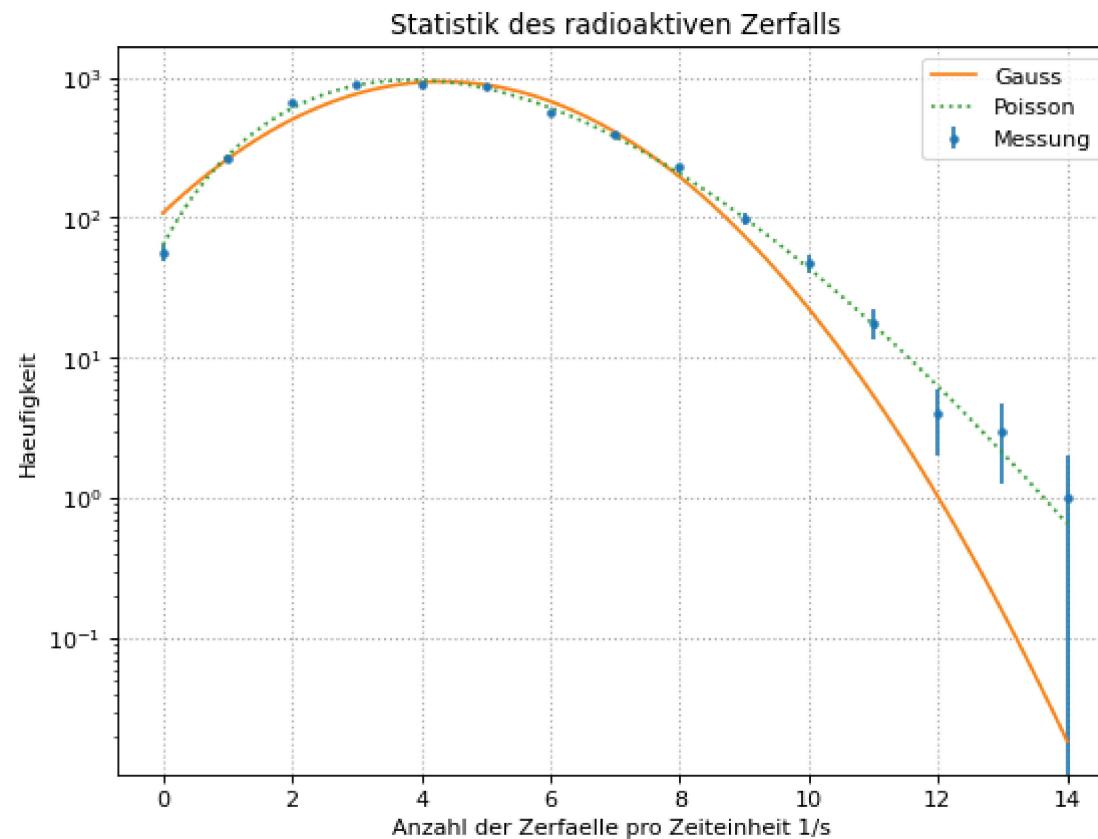
```
plt.title("Statistik des radioaktiven Zerfalls")
plt.legend()
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)
plt.yscale("log")
```



```
In [23]: popt2, pcov2=curve_fit(gaussian,anzahl2, haeufigkeit2, p0=[2000,4.3627,2.1066],sigma=fehler2)
popt_p2, pcov_p2 = curve_fit(poisson, anzahl2, haeufigkeit2, p0=[2000, 4.3627], sigma=fehler2)
```

```
In [24]: plt.figure(figsize=(8, 6), dpi=80)
plt.errorbar(anzahl2, haeufigkeit2, fehler2, fmt=".", label="Messung")
plt.xlabel("Anzahl der Zerfaelle pro Zeiteinheit 1/s ")
plt.ylabel("Haeufigkeit")
plt.title("Statistik des radioaktiven Zerfalls")
x2=np.linspace(0,14, 100)
plt.plot(x2, gaussian(x2,*popt2), label="Gauss")
plt.plot(x2, poisson(x2,*popt_p2), label="Poisson", linestyle=":")
```

```
plt.legend()  
plt.grid(linestyle=":", linewidth=1)  
plt.yscale("log")
```



```
In [25]: print("Gaussfit:")  
print("A=",popt2[0], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[0][0]))  
print("mu=",popt2[1], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[1][1]))  
print("sig=",popt2[2], ", Standardfehler=", np.sqrt(pcov2[2][2]))  
print("Poissonfit:")  
print("A_p=",popt_p2[0], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p2[0][0]))  
print("mu_p=",popt_p2[1], ", Standardfehler=", sqrt(pcov_p2[1][1]))
```

Gaussfit:  
A= 4880.618364919234 , Standardfehler= 263.4052645424769  
mu= 4.319947479207991 , Standardfehler= 0.1161854876427094  
sig= 2.0797512672049177 , Standardfehler= 0.09118277576423389  
Poissonfit:

```
A_p= 4979.022650036269 , Standardfehler= 94.34235603634134  
mu_p= 4.3608713967481885 , Standardfehler= 0.03988023721359042
```

```
In [26]: #Gauss:  
chi2_g2=np.sum((gaussian(anzahl12,*popt2)  
-haeufigkeit2)**2/fehler2**2)  
dof_g2=len(anzahl12)-3 #dof:degrees of freedom, Freiheitsgrad  
chi2_red_g2=chi2_g2/dof_g2  
print("chi2_g=", chi2_g2)  
print("chi2_red_g=",chi2_red_g2)  
#Poisson:  
chi2_p2=np.sum((poisson(anzahl12,*popt_p2)  
-haeufigkeit2)**2/fehler2**2)  
dof_p2=len(anzahl12)-2 #poisson hat nur 2 Parameter  
chi2_red_p2=chi2_p2/dof_p2  
print("chi2_p=", chi2_p2)  
print("chi2_red_p=",chi2_red_p2)
```

```
chi2_g= 168.42931720606194  
chi2_red_g= 14.035776433838494  
chi2_p= 23.23752963789556  
chi2_red_p= 1.78750227983812
```

```
In [27]: #Gauss:  
prob_g2=round(1-chi2.cdf(chi2_g2,dof_g2),2)*100  
#Poisson:  
prob_p2=round(1-chi2.cdf(chi2_p2,dof_p2),2)*100  
print("Wahrscheinlichkeit Gauss=", prob_g2, "%")  
print("Wahrscheinlichkeit Poisson=", prob_p2, "%")
```

```
Wahrscheinlichkeit Gauss= 0.0 %  
Wahrscheinlichkeit Poisson= 4.0 %
```

```
In [ ]:
```