Mecânica Clássica, Segundo Contato

Natã Hora

August 16, 2025

1 Formulação Newtoniana

1.1 Cinemática

Dado um referencial, a posição de um ponto pode ser especificado dado pelo vetor posição

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

Isso é justamente uma combinação linear dos vetores da base que assumimos aqui sejam ortogonais e normalizados e também estamos utilizando a convenção da Einstein. Os pontos podem ser parametrizados por um parâmetro t que será o nosso tempo,que será assumido monotonicamente crescente deixando evidente a noção de passado e futuro.

Uma quantidade importante que possuimos na física é a distância. No ponto de vista matemático a distância é conhecida como a métrica do espaço que sendo estudado. Por exemplo, a métrica euclidiana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Essa definição funciona muito bem no espaço físico que por enquanto estamos lidando.Também temos interesse buscar propriedades do vetor posição, como a sua derivada temporal,

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$$

Seja s um parametro que varia suavemente e monotonicamente ao longo da trajetória e seja $\mathbf{x}(s_0), \mathbf{x}(s_1)$ pontos nesse trajeto. Assim podemos definir a distancia ao longo do trajeto entre esses dois pontos por

$$l(s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} (\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s})^{1/2})ds$$

Como l foi tomado como parametro a velocidade será dada pela regra da cadeia.

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

A primeira derivada é apenas o vetor $\boldsymbol{\tau}$ tangente à trajetória no tempo t. Então $\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} v$. E assim podemos definir agora a aceleração derivando novamente no tempo, e realizando o processo semelhantmente obtemos que

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} v + \boldsymbol{\tau} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Esse vetor está relacionado pela curvatura da trajetória. É fácil de mostrar que $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ é perpendicular a curva podemos então definir um novo vetor nessa direção unitário $\mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\tau}}/|\dot{\boldsymbol{\tau}}|$ E definindo, $\kappa = |\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}l}|$ Temos que a aceleração será dada por

$$\mathbf{a} = \kappa v^2 \mathbf{n} + \ddot{l} \boldsymbol{\tau}$$

E podemos ainda definir o vetor perpendicular a esses dois vetores unitários que é dito vetor binormal $\mathbf{B}$ definido pelo produto vetorial que sua derivada em relação ao comprimento do arco mede e define a torsão.

1.2 Principios da dinamica

Principio 1: Existe um referencial, chamado de inercial que possui as seguintes propriedades: Toda particula isolada se move em uma linha reta nesse referencial (segue a geodesica em um espaço plano), e A noção de tempo é quantificada de tal forma que a particula isolada se move em uma velocidade constante. Principio 2: Conservação do momentum,

1.2.1 Consequencias das Equações de Newton

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) = m \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

A solução dessa equação diferencial existe e é única,em exceção de casos especiais, dada as condições iniciais. Agora considere outro referencial que o vetor posição é $\mathbf{y}$. Deve existe uma transformação que relacione esses dois referenciais (uma transformação afim).

$$y_i = f_i(x, t), \quad x_i = g_i(y, t)$$

Derivando no tempo temos que

$$\dot{y}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} x_j + \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_j + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial t} \dot{x}_j + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}$$

Não podemos dizer nada sobre os dois sistemas de coordenada, pórem se forem cartesianos, as transformações tem de ser lineares i.e

$$y_i = f_{ik}(t) x_k + b_i(t)$$

Se os referenciais são inerciais eles estao se movendo em velocidade relativa constante isto nos leva (não tão trivialmente) que $f_{ik}(t) = \phi_{ik}, b_i = \beta_i t$ Então a aceleração é dada por:

$$\ddot{y}_i = \phi_{ik}\ddot{x}_k$$

Assim temos as relações entre os referenciais inerciais

Temos agora as seguintes definições: O momento de uma partícula é definido por:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Momento Angular:

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{N}$$

1.2.2 Energia e Trabalho

Se a força for uma função apenas do tempo a vetor posição pode ser escrito como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0) + t(t_0)\mathbf{v}(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} \mathbf{F}(t'')dt''$$

Se a força for apenas função de $\mathbf{x}$ temos que a integral de linha da força será

$$\int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}m\Delta v^2$$

Se a força for conservativa temos a existencia de uma função potencial V que seu o negativo do seu gradiente é a força que não é unica que difere por uma constante

Assim podemos definir a energia mecânica do sistema físico,

Sistema de N particulas

Seja $\mathbf{F}_i j$,esse elemento é antissimetrico, a força total sobre a partícula é dada por

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_i j$$

Pośem se somarmos em para todas as particulas temos que

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}} = \sum_i \mathbf{F_i} = F$$

E agora podemos redefinir essa equação da seguinte maneira

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{X}}$$

O momento é definido de forma similar, e assim obtemos as variaveis dinamicas do centro de massa do sistema.

2 Formulação Lagrangiana

Os sistemas físicos agora que iremos estudar são aqueles que estão restritos a uma região espaço esses sistemas são ditos sistemas vinculados, o espaço em que ocorre o movimento essa restrição é dito a variedade de configuração $\mathbb{Q}$. Onde as nossas coordenadas serão chamadas de coordenadas generalizadas q^α e a quantidade delas sera o grau de liberdade do movimento que será também a dimensão de $\mathbb{Q}$.

Supondo que estamos lidando com N partículas e os vínculos são dados por K equações da forma:

$$f_i(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_N, t)) = 0, i = 1, \ldots K < 3N$$

As funções f são supostas diferenciáveis nos seus argumentos e o parametro t informa que ela varia independente do movimento das partículas. Os vinculos dados são ditos holonomos que significam integráveis. e Os não holonomos são do tipo

$$f_i(\mathbf{x} \ldots \mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_1, \ldots \dot{\mathbf{x}}_N, t) = 0, i = 1, \ldots K < 3N$$

Agora iremos analisar um caso de uma particula sujeita a um vinculo em 3 dimensões temos então que a equação de movimento é:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{C}$$

Onde C é uma força de vinculo a priori desconhecida, assim temos 4 equações (3 de movimento e 1 de superficie) sei que a força de vinculo é normal à superficie então podemos $\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}, t) \neq 0$ na superficie então podemos realizar os seguintes requerimentos

$$\boldsymbol{\nabla} f \neq 0 \quad \text{em} \quad f = 0 (\text{avaliado na superficie})$$

A matriz das suas derivadas tem que ser ao menos de rank K, a força de vinculo normal à superficie é chamada de força normal

$$C = \lambda(t) \boldsymbol{\nabla} f$$

Agora estamos prontos para formular melhor essa mecanica em sistemas vinculados, seja uma força consertativa e realizando o produto interno por $\dot{\mathbf{x}}$ temos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\Big) = -\boldsymbol{\nabla} V \cdot \dot{\mathbf{x}} + \lambda \boldsymbol{\nabla} f \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

Podemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}$$

2.0.1 Coordenadas Generalizadas

Temos então duas equações para N particulas restrita a uma variedade.

$$m \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F_i} + \sum_{i=1}^{K} \lambda_j(t) \boldsymbol{\nabla}_i f_j$$
$$f(\mathbf{x}, t) = 0$$

Se $\boldsymbol{\tau}$ for um vetor tangente que pertence a superficie claramente temos que

$$\sum_i (m_i) \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_i) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

Essas equações definem uma hypersuperficie de dimensão $3N - K$ que será chamada de variedade de configuração $\mathbb{Q}$. Agora podemos introduzir as coordenadas generalizadas $q^\alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ e a sua inversa existe e é continua e diferencialvel, então o jacobiano ($\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta}$) é não singular ao menos em alguma região. Podemos escolher-kas como.

$$q^{n+i} = R_i(f_1), \ldots, f_K)$$

onde $n = 3N - K$

2.0.2 Equações de Lagrange

Os vetors tangentes podem ser escritos como

$$\boldsymbol{\tau}_i = \epsilon^\alpha \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha}$$

E APOS MUITA CONTA POEMOS CHEGAR NAS EQUAÇÕES DE LAGRANGE DEPOIS EU FAÇOO

2.0.3 Fibrado Tangente T$\mathbb{Q}$

As velocidades não pertecem à variedade de configuração do sistema físico estudado. Como operar vetores que pertencem a espaços tangentes distintos diretamente não faz sentido (percetem a espaços vetoriais diferentes) é necessário que seja explicíto a ideia do que é a velocidade nesse contexto. Nesse contexto a o campo develocidade é um campo vetorial que possui um vetor em cada ponto da sua variedade, assim como usualmente fazemos temos a noção que existe diveross vetores tangentes, então podemos ver a velocidade aq como a imagem do campo vetorial em cada ponto $p \in \mathbb{Q}$. O lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$ depende tanto da varíavel que pertence a variedaade de configuração tanto da variável que pertence ao espaço tangente em um ponto, então temos que o lagrangiano depende de um espaço mais geral que será o $T\mathbb{Q} = \coprod_{p\in\mathbb{Q}} T_p\mathbb{Q}$, esse espaço não é um espaço vetorial e chamaremos de variedade do espaço de fase. Então a lagrangiana é uma função $L : T\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Agora vejamos como que as equações de lagrange são quando as trajetórias são escritas em $T\ \mathbb{Q}$, agora possuimos 2n equações diferenciais para resolver e encontrar as nossas curvas integrais. Pode-se também especificar uma trajetória por uma função $\Gamma(q, \dot{q}, t)$ dando as condições iniciais da função determina uma relaçao entre as condicções de inicias $(q_0^\alpha, \dot{q}_0^\alpha)$ e 2n-1 condições iniciais no fibrado tangente determina a condição 2n-esima. A função é dita variável dinâmica (uma generalização da definição usual). Suponha que $\Gamma(q, \dot{q})$ é independente do tempo, então a equação $\Gamma(q, \dot{q}) = C$ define uma variedade de dimensão 2n-1 (isso é um resultado de algebra linear isto é uma variedade afim) em $T\mathbb{Q}$ Se a função for dependente do tempo apenas muda que a variedade também mudará com o tempo. Concluindo as equações de lagrange são transformadas em 2n equaões diferenciais de primeira ordem no fibrado tangente

$$\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{q}^\alpha}{\mathrm{d}t} = W^\alpha(q, \dot{q}, t)$$

Ou definindo como coordenadas do espaço temos uma equação (que nos dará as curvas características)

$$\frac{\mathrm{d}\xi^j}{\mathrm{d}t} = f^j(\xi, t)$$