Notas de Física Matemática

Nata

24 de agosto de 2025

Capítulo 1

Quantização Canonica

A quantização canonica é dada diretamente assumindo a seguinte relação de comutação

$$[x, p] = i\hbar \tag{1.1}$$
$$[x, x] = [p, p] = 0 \tag{1.2}$$

1.1 Formalismo Hamiltoniano

$$H = p_i \dot{q}_i - L \tag{1.3}$$

Sabemos que as equações de Hamilton são

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \tag{1.4}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \tag{1.5}$$

Agora irei mostrar que podemos ir dos parenteses de poisson ate os comutadores, a derivada temporal de uma variável dinâmica é

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.6}$$

Agora tendo a seguinte equação de autovalor $A\psi = a\psi$ e tomando a derivada temporal e utilizando a equação de Schrödinger, teremos que a derivada temporal total de um operador que representar uma variavel dinamica é

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.7}$$

Onde foi definido que o operador $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\psi = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\psi$. Assim, vemos que pela quantização canônica que

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B] \tag{1.8}$$

Agora podemos generalizar, os parenteses fundamentais de poisson são

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{1.9}$$
$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{1.10}$$

A algebra dos comutadores é a mesma dos parenteses de poisson e também agora podemos fazer que as relações de comutação canonica seja

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.11}$$

1.2 Passagem para o contíno

Capítulo 2

Integrais de Caminho

2.1 Propagador

Buscamos

$$\psi(x',t') = \int \mathrm{d}^3x\, K(x',t';x,t)\psi(x,t) \tag{2.1}$$

Podemos escrever K em termos das autofunções do operador hamiltoniano

$$K = \sum_n \phi_n(x')\phi_n^*(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)\right) \tag{2.2}$$

2.2 Propagador da particula Livre

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \tag{2.3}$$

e os autoestados são

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}e^{ipx/\hbar}} \tag{2.4}$$

Como é contínua temos que a relação $\sum \to \int$. E após algebrismos temos que

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(x'-x)^2}{t'-t}\right]\times \tag{2.5}$$

$$\times\int dp \exp\left\{-\frac{i(t'-t)}{2m\hbar}[p-\frac{m(x'-x)}{t'-t}]^2\right\} \tag{2.6}$$

Observando que a integração pode ser feita completando o quadrado, e ou utilizando a integração gaussiana generica (teorema de wick) temos que

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{i(t'-t)}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(x'-x)^2}{t'-t}\right] \tag{2.7}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t'-t)}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(x'-x)^2}{t'-t}\right] \tag{2.8}$$

2.3 Formula de Mehler

Tendo a formula de rodrigues para os polinomios de Hermite temos que

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-z^2} \tag{2.9}$$

E usando

$$\int dxe - x^2 + 2izx = e^- z \int dxe^{-x^2+2izx-z^2} \tag{2.10}$$

Temos que

$$e^{-z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dxe^{-x^2+2izx} \tag{2.11}$$

E substituindo na formula de rodrigues teremos que

$$\frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} \int dxx^n e^{-(x-iz)^2} \tag{2.12}$$

Agora podemos buscar resolver

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} H_n(z) H_n(z') \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} H_n(z) H_n(z') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} \left(\frac{-2i}{\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; x^n y^n e^{-(x-iz)^2} e^{-(y-iz')^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-(x-iz)^2-(y-iz')^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tau xy)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-(x-iz)^2-(y-iz')^2-2\tau xy} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-(x-iz)^2-2iz'\tau x+\tau^2 x^2} \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} dye^{-(y-iz'+\tau x)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-(x-iz)^2-2iz'\tau x+\tau^2 x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-(1-\tau^2)x^2+2i(z-\tau z')x+z^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[z^2 - \frac{(z-\tau z')^2}{1-\tau^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-(1-\tau^2)\left(x + \frac{i(z-\tau z')}{1-\tau^2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp\left[z^2 - \frac{(z-\tau z')^2}{1-\tau^2} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp\left[\frac{2\tau zz' - \tau^2(z^2+z'^2)}{1-\tau^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

2.4 Propagador para o Oscilador Harmonico

As autofunções são dadas por

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}} e^{\frac{-m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right). \tag{2.15}$$

Fazendo a substituição em (2.2), temos

$$\begin{aligned} K(x', t'; x, t) &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{m\omega(x'^2+x^2)/2\hbar} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)}{2^n n!} e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x'^2+x^2) - \frac{i}{2}\omega(t-t_0)\right] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x'\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)}{2^n n!} e^{-in\omega[(t'-t)]} \end{aligned} \tag{2.16}$$

O somatório acima pode ser calculado com o uso da fórmula de Mehler, equação (2.14)
Teremos então
e sabendo que $1 - e^{2i\theta} = -2isin\theta e^{i\theta}$ Teremos que na formula de mehler nos da

$$K(x', t'; x, t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega(t'-t))}} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega(t'-t))}\left((x'^2+x^2)\cos(\omega(t'-t)) - 2x'x\right)\right] \tag{2.17}$$