

# Notas de Física Matemática

Nata

20 de agosto de 2025



# Capítulo 1

## Quantização Canonica

A quantização canonica é dada diretamente assumindo a seguinte relação de comutação

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.1)$$

$$[x, x] = [p, p] = 0 \quad (1.2)$$

### 1.1 Formalismo Hamiltoniano

$$H = p_i \dot{q}_i - L \quad (1.3)$$

Sabemos que as equações de Hamilton são

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (1.5)$$

Agora irei mostrar que podemos ir dos parenteses de poisson ate os comutadores, a derivada temporal de uma variável dinâmica é

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.6)$$

Agora tendo a seguinte equação de autovalor  $A\psi = a\psi$  e tomando a derivada temporal e utilizando a equação de Schrödinger, teremos que a derivada temporal total de um operador que representar uma variavel dinamica é

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.7)$$

Onde foi definido que o operador  $\frac{dA}{dt}\psi = \frac{da}{dt}\psi$ . Assim, vemos que pela quantização canônica que

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[A, B] \quad (1.8)$$

Agora podemos generalizar, os parenteses fundamentais de poisson são

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (1.9)$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad (1.10)$$

A algebra dos comutadores é a mesma dos parenteses de poisson e também agora podemos fazer que as relações de comutação canonica seja

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.11)$$

## 1.2 Passagem para o contínuo

## Capítulo 2

# Integrais de Caminho

### 2.1 Propagador

Buscamos

$$\psi(x', t') = \int d^3x K(x', t'; x, t) \psi(x, t) \quad (2.1)$$

Podemos escrever K em termos das autofunções do operador hamiltoniano

$$K = \sum_n \phi_n(x') \phi_n^*(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t' - t)\right) \quad (2.2)$$

### 2.2 Propagador da particula Livre

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.3)$$

e os autoestados são

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (2.4)$$

Como é contínua temos que a relação  $\sum \rightarrow \int$ . E após algebrismos temos que

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x' - x)^2}{t' - t}\right] \times \quad (2.5)$$

$$\times \int dp \exp\left\{-\frac{i(t' - t)}{2m\hbar} \left[p - \frac{m(x' - x)}{t' - t}\right]^2\right\} \quad (2.6)$$

Observando que a integração pode ser feita completando o quadrado, e ou utilizando a integração gaussiana generica ( teorema de wick) temos que

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi m\hbar}{i(t' - t)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x' - x)^2}{t' - t}\right] \quad (2.7)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t' - t)}} \exp\left[\frac{im}{2\hbar} \frac{(x' - x)^2}{t' - t}\right] \quad (2.8)$$

## 2.3 Formula de Mehler

Tendo a formula de rodrigues para os polinomios de Hermite temos que

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad (2.9)$$

E usando

$$\int dx e^{-x^2 + 2izx} = e^{-z^2} \int dx e^{-x^2 + 2izx - z^2} \quad (2.10)$$

Temos que

$$e^{-z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{-x^2 + 2izx} \quad (2.11)$$

E substituindo na formula de rodrigues teremos que

$$\frac{(-2i)^n}{\sqrt{\pi}} \int dx x^n e^{-(x-iz)^2} \quad (2.12)$$

Agora podemos buscar resolver

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} H_n(z) H_n(z') \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} H_n(z) H_n(z') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{2^n n!} \left( \frac{-2i}{\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy x^n y^n e^{-(x-iz)^2} e^{-(y-iz')^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-iz)^2 - (y-iz')^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tau xy)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-iz)^2 - (y-iz')^2 - 2\tau xy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-iz)^2 - 2iz'\tau x + \tau^2 x^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-(y-iz')^2 + \tau x y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-iz)^2 - 2iz'\tau x + \tau^2 x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(1-\tau^2)x^2 + 2i(z-\tau z')x + z^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ z^2 - \frac{(z-\tau z')^2}{1-\tau^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[ -(1-\tau^2) \left( x + \frac{i(z-\tau z')}{1-\tau^2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp \left[ z^2 - \frac{(z-\tau z')^2}{1-\tau^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \exp \left[ \frac{2\tau z z' - \tau^2(z^2 + z'^2)}{1-\tau^2} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.4 Propagador para o Oscilador Harmonico

As autofunções são dadas por

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right). \quad (2.15)$$

Fazendo a substituição em (2.2), temos

$$\begin{aligned} K(x', t'; x, t) &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{m\omega(x'^2 + x^2)/2\hbar} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x' \right)}{2^n n!} e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} (x'^2 + x^2) - \frac{i}{2} \omega(t-t_0) \right] \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x' \right) H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)}{2^n n!} e^{-in\omega[(t'-t)]} \end{aligned} \quad (2.16)$$

O somatório acima pode ser calculado com o uso da fórmula de Mehler, equação (2.14)

Teremos então

e sabendo que  $1 - e^{2i\theta} = -2i \sin\theta e^{i\theta}$  Teremos que na formula de mehler nos da

$$K(x', t'; x, t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega(t' - t))}} \exp \left[ \frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega(t' - t))} ((x'^2 + x^2) \cos(\omega(t' - t)) - 2x'x) \right] \quad (2.17)$$