Feynman Liang
EE 290
Problem Set #1
10/01/2019

A: Perturbation bound analysis

1.

$$\|XY\|_F^2 = \sum_{i=1}^{k} \|Xy_i\|_2^2 \leq \|X\|_2 \sum_{i=1}^{k} \|y_i\|_2^2 = \|X\|_2 \|Y\|_F^2 \tag{1}$$

Apply this to $X = L^{-1}$ and $Y = A = LL^\top$ to find

$$\|L^{-1}LL^\top\|_F = \|L^\top\|_F = \|L\|_F \leq \|L^{-1}\|_2 \|A\|_F \tag{2}$$

$$\|L^{-1}\|_2^{-1} \|L\|_F \leq \|A\|_F \tag{3}$$

This is the first inequality we wanted to show. For the second, we use the previous identity on $\|A\|_F$ followed by the original identity on $\|A^{-1}\|_2 \|L\|_F$ to find

$$\|A\|_F \|A^{-1}\|_2 \geq \|L^{-1}\|_2^{-1} \|L\|_F \|A^{-1}\|_2 \tag{4}$$

$$\geq \|L^{-1}\|_2^{-1} \|A^{-1}L\|_F \tag{5}$$

$$= \|L^{-1}\|_2^{-1} \|(L^{-1})^\top L^{-1} L\|_F = \|L^{-1}\|_2^{-1} \|L^{-1}\|_F \tag{6}$$

2. Expanding the square, applying triange inequality, and using the original inequality

$$E = -A + (A + E) = LG^\top + GL^\top + GG^\top \tag{7}$$

$$\|E\|_F \leq 2\|LG^\top\|_F + \|GG^\top\|_F \leq 2\|L\|_2 \|G\|_F + \|G\|_F^2 \tag{8}$$

Applyin the quadratic formula to solve in terms of $\|G\|_F$ and selecting solution by non-negativity gives

$$\|G\|_F \geq -\|L\|_2 + \sqrt{\|L\|_2^2 + \|E\|_F} \tag{9}$$

$$\frac{\|G\|_F}{\|L\|_2} \geq \sqrt{1 + \|E\|_F / \|L\|_2^2} - 1 \tag{10}$$

Noting that $\|A\|_2 = \|LL^\top\|_2 \geq \|L\|_2^2$ by sub-multiplicativity of spectral norm, we have

$$\frac{\|G\|_F}{\|L\|_2} = \frac{\|E\|_F / \|A\|_2}{1 + \sqrt{1 + \|E\|_F / \|A\|_2}} \tag{11}$$

The second inequality with $\kappa(A)$ comes from applying sub-multiplicativity of Frobenius norm instead to get

$$\|E\|_F \leq 2\|L\|_F\|G\|_F + \|G\|_F^2 \tag{12}$$

$$\frac{\|G\|_F}{\|L\|_F} \geq \sqrt{1 + \|E\|_F/\|L\|_F^2} - 1 \tag{13}$$

and noting by the second inequality in problem (1) applied to $\kappa(A)$ and the first inequality in problem (1)

$$\kappa(A)\|A\|_F \geq \|L\|_F\|L^{-1}\|_2\|A\|_F \geq \|L\|_F^2 \tag{14}$$

■

B: Orthogonally invariant norms

■