Пример билета.

Билет 1.

1. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения, Даламбера, Коши.

2. а) Исследовать ряд на абсолютную сходимость при $p = 1$.
Найти все значения $p > 0$, при которых ряд
б) сходится абсолютно;
в) сходится условно.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$$

3. Пусть $f'(x) \in C[a,b]$, $f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$. Доказать, что

$$f_n(x) \rightrightarrows^{[\alpha,\beta]} f'(x), \quad a < \alpha < \beta < b.$$

Список теорем.

1. Числовые ряды. Критерий Коши, необходимое условие сходимости. Простейшие свойства: линейность, группировка.

2. Знакопостоянные ряды. Признаки сравнения, Даламбера, Коши.

3. Интегральный признак сходимости. Сходимость рядов $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n \ln\ln^\gamma n \ldots}$

4. Знакопеременные ряды. Условная сходимость. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле.

5. Теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

6. Теорема об абсолютной сходимости. Перестановки абсолютно сходящихся рядов. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов.

7. Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость. Критерий равномерной сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

8*(только формулировки). Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Линейность, признак сравнения. Признаки Абеля и Дирихле.

9. Теоремы о предельном переходе и непрерывности функциональных последовательностей и рядов.

10. Теоремы об интегрировании функциональных последовательностей и рядов.

11. Теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей и рядов.

12. Алгебраическая теорема Вейерштрасса.

13. Степенные ряды. Теорема Абеля о сходимости степенных рядов. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши-Адамара.

14. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость степенных рядов внутри интервала сходимости. Вторая теорема Абеля и суммирование рядов методом Абеля.

15. Ряды Тейлора основных элементарных функций. Их сходимость. Единственность степенных рядов.

16. Задача о наилучшем приближении. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.

17. Ряд Фурье по тригонометрической системе. Лемма Римана (необходимое условие сходимости ряда Фурье).

18. Принцип локализации Римана и поточечная сходимость рядов Фурье (признак Дини).

19. Эффект Гиббса.

Примеры задач

1. Доказать, что если верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $q > 1$ ряд расходится.

2. Найти предел
$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\frac{x^n}{x^n+1}.$$

3. Сходится ли последовательность
$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\,?$$

4. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и $a_n \le c_n \le b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ тоже сходится.

   Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, если исходные ряды расходятся?

5. Пусть функция $f(x),\ x \in [1;+\infty)$ убывает и положительна, а $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ расходится. Верно ли, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{\int_1^n f(t)\,dt} = 1?$$

6. Для функции $f(x)$
   а) найти область определения;
   б) исследовать на непрерывность;
   в) исследовать на дифференцируемость.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x + \frac{1}{n}\right)^n.$$

7. Для функциональной последовательности
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} + x, \quad x \in [0,1],$$
   а) доказать поточечную сходимость на $[0,1]$;
   б) исследовать ее на равномерную сходимость на $[0,1]$;
   в) выяснить, справедливо или нет равенство
$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right),$$
   если $x_0 = 0$, $x_0 = 1/2$.

8. Разложить функцию $y = 1$ в ряд Фурье по синусам на $(0,\pi)$. Пользуясь этим разложением, найти сумму ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$