Пример билета.

Билет № 1

1. Ограниченность и замкнутость компактного множества. Лемма Гейне-Бореля о компактности в R^m.

2. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость, а также найти частные производные функции

$$f(x,y) = x \sin \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0, \qquad f(0,y) = 0$$

1. Теорема о неявной функции, заданной системой уравнений.

2. Найти точки условного экстремума

$$f(x,y,t) = xyt, \quad x^2 + y^2 + t^2 = 1, \quad x + y + t = 0.$$

Теоремы.

1*. Метрические пространства. Открытые и замкнутые шары и множества.

2*. Предел последовательности. Теорема о покоординатной сходимости и эквивалентности метрик в R^m.

3. Принцип Кантора о вложенных стягивающихся прямоугольниках и теорема Больцано-Вейерштрасса в R^m.

4. Ограниченность и замкнутость компактного множества. Лемма Гейне-Бореля о компактности в R^m.

5*. Предел функции нескольких переменных. Эквивалентность определений. Критерий Коши. Теорема о связи двойного предела и повторных. Связь предела с пределами по направлениям.

6. Непрерывность сложной функции. Теорема Коши о промежуточных значениях.

7. Свойства непрерывных функций на компакте. Теорема Вейерштрасса о компактности образа и теорема Кантора о равномерной непрерывности.

8. Дифференцируемость. Необходимые условия дифференцируемости функции в точке. Достаточные условия дифференцируемости функции в точке.

9*. Дифференциал. Геометрический смысл дифференцируемости: касательная плоскость.

10. Дифференцируемость сложной функции. Производные по направлению и геометрический смысл градиента. Инвариантность первого дифференциала.

11. Равенство смешанных производных. Дифференциалы второго и высших порядков. Формула Тейлора.

12. Необходимые и достаточные условия локального экстремума.

13. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

14. Теорема о неявной функции, заданной системой уравнений.

15. Необходимые и достаточные условия условного экстремума (Метод Лагранжа).

Примеры задач.

1. Найти значения a, α, β при которых функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

1) непрерывна по прямой $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2\neq 0$;
2) непрерывна по кривой $y=ax^2$;
3) непрерывна.

2. Доказать, что если функция $f(x,y)$ в некоторой окрестности непрерывна по переменной x и равномерно (относительно x) непрерывна по переменной y, то она равномерно непрерывна.

3. Исследовать на непрерывность и дифференцируемость функцию

$$f(x,y)=\frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0,\qquad f(0,0)=A$$

4. Найти дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

$$w=f(u,v),\quad u(x,y)=x^2y^3,\quad v(x,y)=y^2-x^3$$

5. Найти дифференциал второго порядка функции $u(x,y)$, заданной неявно

$$u=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{u-x}.$$

6. Исследовать на экстремум функцию

$$a)\ \ f(x,y)=x^2y^3(6-x-y);\qquad\qquad b)\ f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}.$$

7. Исследовать на экстремум функцию $u(x,y)$, заданную неявно

$$x^2+y^2+u^2-xu-yu+2x+2y+2u-2=0.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x,y,t)=x+y+t,\quad x^2+y^2\le t\le 1.$$

9.Для кота изготавливают коробку в форме прямоугольного параллелепипеда объема V без верхнего основания. При каких длине, ширине и высоте, у этой коробки будет наименьшая площадь поверхности?

10. В прямой круговой конус, высота которого равна 4, а радиус основания 3, вписан параллелепипед наибольшего объема. Найти этот объем.