

# 1. Бинарные отношения

1. Декартово произведение, его свойства. Бинарное отношение, его матрица. Операции над бинарными отношениями: дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, обращение, композиция, возведение в степень. Операции в матричном виде.

2. Мультимножества, операции над мультимножествами. Мультиотношения. Орграф бинарного отношения. Связь между свойствами бинарного отношения и его орграфа. Теорема о матрице орграфа и расстояния между вершинами в орграфе.

3. Оператор замыкания. Замыкания свойств отношений. Теорема о транзитивном замыкании.

4. Частичные порядки. ЧУМ. Сравнимость, несравнимость элементов. Экстремальные элементы. Отношения покрытия, диаграмма Хассе. Изоморфизм ЧУМ. Двойственные ЧУМ. Операции над ЧУМ (объединение, сумма, произведение). Линейный порядок. ЛУМ. Теорема о продолжении ЧУМ до ЛУМ.

5. Условия минимальности, индуктивности, обрыва убывающих цепей. Теорема об их эквивалентности (для посещавших очные лекции без док-ва).

6. Нижние и верхние границы в ЧУМ. Инфинум и супремум (их свойства). Полурешетки. Решетки. Тождество поглощения. Определение решеток через операции. Эквивалентность определений. Подрешетки.

7. Законы дистрибутивности в решетках. Дистрибутивные решетки. Критерий дистрибутивности решетки (доказательство только в одну сторону)

8. Дополнения в решетке. Теорема о дополнении в дистрибутивной решетке. Булевы алгебры. Теорема о булевой алгебре и булеане (без док-ва).

9. Равнomoщность множеств. Мощность множества, кардинальные числа. Парadox Рассела. Аксиоматика ZFC, аксиома выбора (только формулировки). Конечные, счетные множества. Теорема о бесконечном множестве.

10. Сравнение мощностей. Теорема Кантора-Бронштейна.

11. Вполне упорядоченное множество. Теорема о порядке на множестве кардинальных чисел (без док-ва).

12. Теорема Кантора о мощности булеана.

13. Теорема о равномощности  $\mathbb{R}$  и булеана счетного множества. Мощность континуума.

14. Теорема о бесконечном множестве наименьшей мощности. Теорема об объединении счетного или конечного числа счетных множеств.

15. Понятие о континуум-гипотезе.

# 2. Комбинаторика

16. Базовые комбинаторные понятия из ВВМ: размещения, перестановки, правило произведения (в курсе не было, но это фундамент, не надо много читать, только что это и как применяется). Биномиальные коэффициенты (их различные характеристизации: через количество подмножеств, через биномиальные коэффициенты, через

количество двоичных векторов, их эквивалентность). Рекуррентные соотношения (треугольник Паскаля). Свойства биномиальных коэффициентов (основная формула, симметричность, сумма четных/нечетных, сумма всех коэффициентов и пр.)

17. Пути в целочисленной решетке. Числа Каталана. Теорема о числах Каталана. Другие характеристики чисел Каталана (правильные расстановки скобок, полные бинарные деревья).

18. Перестановки. Граф перестановки. Циклическая запись (канонический вид). Симметрическая группа. Порядок элемента. Циклическая подгруппа. Наибольший порядок перестановки. Функция Ландау. Асимптотика функции Ландау (без доказательства).

19. Числа Стирлинга 1-го рода. Рекуррентная формула. Восходящий факториал. Теорема (о связи восходящих факториалов и степенных функций).

20. Перестановки с двумя циклами. Гармонические числа (весь пункт необязателен для посещавших очные лекции).

21. Теорема Кэли.

22. Транспозиции. Умножение перестановки на транспозицию слева и справа (объяснить, что и как переставляется). Порождающее множество группы. Теорема о том, что  $S_n$  порождается своими транспозициями. (весь пункт необязателен для посещавших очные лекции).

23. Действие перестановки на множестве. BWT (весь пункт необязателен для посещавших очные лекции)

24. Принцип включения-исключения. Теорема о ПВИ. Симметричный случай ПВИ.

25. Число сюръекций. Числа Стирлинга 2-го рода. Рекуррентная формула для чисел Стирлинга 2-го рода. Число Белла. Число разбиений на классы эквивалентности.

26. Функция Эйлера для количества меньших взаимно простых чисел. Теорема о формуле функции Эйлера.(весь пункт необязателен для посещавших очные лекции).

27. Беспорядки. Теорема о количестве беспорядков.

28. Рекуррентные соотношения. Линейные рекуррентные соотношения. Теорема о линейных рекуррентных соотношениях 1-го порядка.

29. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Частные и общее решения. Теорема о размерности пространства решений ЛОРСПК.

30. Характеристические многочлены ЛОРСПК. Теорема о решении ЛОРСПК и корнях характеристического уравнения. Теорема о ЛНЗ решении ЛОРСПК в случае различных корней. Теорема об решений в случае простых корней.

31. Теорема о решениях ЛОРСПК соответствующих кратному корню.

32. Теорема о виде общего решения (для посещавших очные лекции без доказательства и без соответствующих лемм). Для непосещавших лекции доказательство как в презентациях вместе с леммами и их доказательствами.

33. Определение различных  $O$ -символик (4 типа). Простейшие свойства. Формула Стирлинга и ее уточнение.

34. Асимптотика  $n$ -го простого числа.(весь пункт необязателен для посещавших очные лекции).

### 3. Графы

35. Понятие графа (орграфа). Петли, кратные ребра. Мультиграфы. Матрица смежности графа. Степени вершин. Обыкновенные графы. Маршруты, цепи, пути, циклы. Длина маршрута. Достижимость вершин. связность графа, компоненты связности. Лемма о простой цепи.

36. Подграфы. Суграфы. Порожденные подграфы. Операции удаления ребра и удаление вершины. Лемма об удалении ребра и связности.

37. Изоморфизм графов. Матрица перестановки. Изоморфизм графов и матрица перестановки.

38. Двудольные графы. Задача назначениях, задача о свадьбах. Критерий двудольности графа

39. Эйлеровы графы. Эйлеровы циклы и эйлеровы пути. Полуэйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Алгоритм Флери.

40. Критерий полуэйлерости графа. Критерий эйлеровости орграфа. Задача китайского почтальона: взвешенном графе найти реберный маршрут минимального веса.

41. Мосты и точки сочленения Лемма о мосте. Лемма о точке сочленения. Двусвязные графы. Блоки. Лемма о пересечении двух блоков. Дерево блоков т точек сочленения (с доказательством корректности).

42. Гамильтоновы цикл. Гамильтоновы пути. Гамильтоновы граф. Задача коммивояжера (TSP). Вариант со взвешенным графом. Евклидова TSP. Метрическая TSP Теорема Оре о гамильтоновых графах. Теорема о 2-связности гамильтонова графа

43. Обобщенная точкой сочленения  $k$ -го порядка. Теорема о негамильтоновости и обобщенной точке сочленения  $VC$ . (необязательно для посещавших очные лекции, хотя вопрос несложный)

44. Изображение графа. Правильное (плоское) изображение. Плоские графы. Планарные графы. Укладывается графа на сфере и планарность. Грани плоского графа и границы граней. Внешняя грань Лемма о числе граней для ребра. Следствие о суммарной длине всех границ граней.

45. Теорема Эйлера для связного плоского графа. Непланарность  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

46. Операция стягивания ребра. Миноры графа. Теорема Вагнера (док-во только в одну сторону).

47. Независимое множество вершин в графе. Типы задач связанных с независимыми множествами. Раскраски графов. Правильные раскраски.  $k$ -раскрашиваемые графы. Хроматическое число графа. Лемма о нижних оценках хроматического числа (через кликовое число и число независимости). Теорема о связи хроматического

число графа и хроматического числа его блоков. Лемма о жадной оценке (хроматическое число и максимальная степень вершины). Теорема Брукса (только формулировка)

48. Задача раскраски плоского графа. Теорема о четырех красках. Лемма о вершине степени  $\leq 5$ . Теорема Хивуда о 5 цветах.

## 4. Автоматы

49. Алфавит. Детерминированные конечные автоматы. Недетерминированные конечные автоматы. Теорема (Рабина-Скотта). Алгоритм построения ДКА по НКА.

50. Слово. Длина слова. Конкатенация слов. Языки. Теоретико-множественные операции над языками. Умножение языков, итерация. Свойства операций.

51. Элементарные регулярные языки. Регулярные языки. Теорема Клини о регулярных языках.

## 5. Математическая логика

52. Логические переменные. Булевы функции. Таблицы истинности. Фиктивные переменные. Композиция булевых функций. Основные булевые операции, их свойства. Литералы. Элементарные конъюнкции. ДНФ и СДНФ. Теорема о СДНФ. Следствие о ДНФ. Карты Карно. Элементарные дизъюнкции (клозы). КНФ и СКНФ. Теорема о СКНФ. Следствие о КНФ.

53. Полные системы булевых функций. Полиномы Жегалкина. Свойства операции "+". Теорема о полноте полиномов Жегалкина. Замкнутые классы. Основные пять замкнутых классов. Леммы о замкнутости этих классов.

54. Лемма о несамодвойственной функции. Лемма о немонотонной функции. Лемма о нелинейной функции. Теорема Поста.

55. Базисы класса булевых функций. Атомы и коатомы решетки. Теорема о том, что 5 классов — коатомы.

56. Логическое следствие. Правило резолюций. Теорема о полноте метода резолюций.

57. Задача SAT. Метод распространения переменной. Хорновская выполнимость. 2-SAT.