KARCI VE SHANNON ENTROPİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Ali KARCI, Feyza BİLGİÇ

İnönü Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

ÖZET : Entropi, fiziksel sistemlerin düzensizliğini, dijital sistemler de ise, anlam verilememiş bilgi miktarını vermektedir. Bu amaçla Shannon tarafından dijital veriler için entropi tanımı yapılmıştır. Kesir dereceli türev kavramı kullanılarak entropi tanımı ise Karcı tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Karcı ve Shannon entropi tanımlarının farklı olasılık ortamlarında vermiş oldukları sonuçların karşılaştırmaları yapılmıştır.

COMPARISON OF KARCI AND SHANNON ENTROPIES

ABSTRACT : Entropy gives the irregularity of physical systems and also gives the amount of information that cannot be understood in digital systems. For this purpose, the definition of entropy was made by Shannon for digital data. The definition of entropy using the concept of fractional order derivative was made by Karcı. In this study, the results of Karcı and Shannon entropy definitions in different probability environments were compared.

1.GİRİŞ

Entropi, fizikte bir sistemin mekanik işe çevrilemeyecek termal enerjisini temsil eden termodinamik terimi olarak kabul edilmektedir. Çoğunlukla bir sistemdeki rastgelelik ve düzensizlik olarak tanımlanır. Entropi, birim sıcaklık başına sistemin termal enerjisinin toplamının bir ölçüsüdür ve herhangi bir işlem yapamaz, çünkü entropi bir bozukluk ölçüsüdür ve bir işlemin olması düzene bağlıdır. Başka bir deyişle, entropi, fiziksel sistemlerin mikro yapısında bir yamama ya da bozukluğun ölçütüdür.

21. yüzyıl, bilgi ve bilginin yönetimi yüzyılıdır. Bilgi ve yönetimi bazı değişimlerin gösterimini sağlar, bununla; bununla birlikte, bilgi yönetimi tekniklerinin çoğu entropiye dayanmaktadır. Entropi, fiziksel (dijital) sistemlerde belirsizlik (veya bilgi) ölçüsüdür. Bu durum nedeniyle, Shannon, Tsallis, Renyi, vb. gibi tanımların tanımlanmasında pek çok yöntem vardır [1–3]. Shannon, rastgele değişkenlerden yararlandı ve entropiyi [1] tanımlamak için olasılıklar kullandı.

2. KULLANILAN YÖNTEMLER

Shannon kavramı ilk kez Claude Elwood Shannon tarafından 1948 yılında “İletişimdeki Matematik” adlı makale ile duyurulmuştur. Shannon entropisi bilgi analizinde kullanılan önemli bir ölçüm yöntemidir. Rastgele dağılımlı veride bulunan belirsizliği ölçmeye yarar.

Bir dizge veri içindeki harflerin yüzdelik dağılımları üzerinde entropi tanımı (Shannon tanımı)

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) ln(P(x_i)) \tag{1}$$

denklemi ile bulunur.

Entropi kavramı Karcı tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır, çünkü türev tanımı da değişmektedir ve kesir dereceli türev kavramı kullanılmaktadır.

Tanım (Kesir Dereceli Türev)[4,5,6,7,8]: *f(x):R→R bir fonksiyon/bağıntı olmak üzere, α∈R ve kesir dereceli türev aşağıdaki gibi verilebilir.*

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{\alpha}(x+h)-f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}$$

Bu tanımda h →0 değeri yerine yazılınca belirsiz limit elde edilir, bundan dolayı L'Hospital metodu uygulandığında:

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}L\left(\frac{f^{\alpha}(x+h)-f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d\left(f^{\alpha}(x+h)-f^{\alpha}(x)\right)}{dh}}{\frac{d((x+h)^{\alpha}-x^{\alpha})}{dh}}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1}f'(x)$$

denklemi elde edilir ve elde edilen bu türeve Karcı entropi denilmektedir, ${}^{\partial}_{\alpha}Kf(x)$ sembolü ile gösterilmektedir.

Kesir dereceli türev ile entropi tanımı elde etmek için

$$f(t)=\sum_i p_i^{-t}$$

fonksiyonun kesir dereceli türevi alınmıştır. Türev sonucunda elde edilen bağıntı

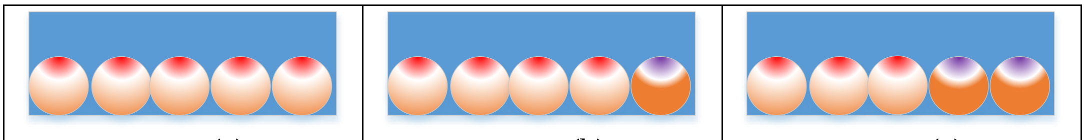
$$E=\left|\frac{d^{(\alpha)}f(t)}{dt}\right|=\left|\frac{d^{(\alpha)}}{dt}\sum_{i=1}^{n}p^{-t}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{p^{-t}}{t}\right)^{\alpha-1}(-1)p^{-1}\ln p\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|(-p)^{\alpha-1}(-p)\ln p\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|(-p)^{\alpha}\ln p\right|.$$

şeklindedir [9]. Bu denklemde α=1 olarak verildiğinde Shannon entropi denklemi elde edilir. Bu durumda farklı α değerleri için farklı entropi denklemleri elde edilir ve Karcı entropi esasında bir entropi denklemler kümesidir. Bu kümenin bir elemanı da Shannon entropi tanımıdır.

3. KARCI VE SHANNON ENTROPİ UYGULAMALARI

Her iki yöntem örnekler üzerinde birbiriyle karşılaştırılacaklardır. Karşılaştırma amacı bilgi ayrımının veya kazancının en iyi olduğu durum α=1 durumundaki Karcı entropi (Shannon entropi) durumu mudur yoksa daha iyi olduğu bir durum var mıdır sorgulaması yapılacaktır. Varlığı bilinen bilgi ile entropi birbirine zıt kavramlardır. Şekil 1(a)'da çekilecek topun üst kısmının kırmızı olma olasılığı 1 olduğundan çekilecek topun üst kısmının kırmızı olacağı bilinmektedir (yüksek bilgi seviyesi) ve bütün toplar aynı olduğundan entropi değeri sıfır olur. Şekil 1(b)'de ise %80 çekilecek topun üst kısmının kırmızı olacağı bilinmektedir ve bilgi seviyesi orta olarak kabul edilebilir, çünkü %20 olasılıkla çekilecek topun üst kısmı mor olabilir. Şekil 1(c)'de ise çekilecek topun üst kısmının kırmızı mı veya mor mu olma olasılığı aynıdır ve bilgi seviyesi düşük olarak kabul edilebilir. Bu üç örnek için entropinin en yüksek olduğu durum Şekil 1(c)'dir.



(a) (b) (c)

Şekil 1. Bilgi ve belirsizlik durumları.

Birinci örnek için bütün toplar aynı olduğundan ard arda beş tane top çekilecektir ve geri yerine konulacaktır. Çekilecek topun rengi not edilmektedir. Bu durumda çekilecek beş topun olasılık durumu

1x1x1x1x1=1 ve eğer bu kazanma durumu ise kazanma %100 olmaktadır. İkinci örnek için

0.8x0.8x0.8x0.8x0.2=0.08192 ve kazanma durumu %8 olur. Son örnek için ise,

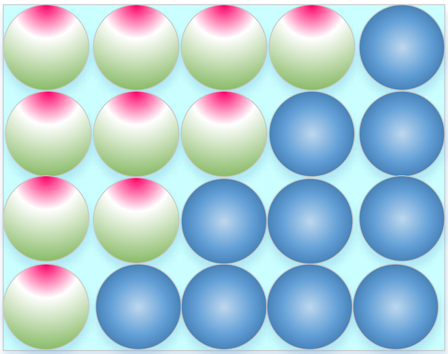
0.6x0.6x0.6x0.4x0.4=0.03456 ve kazanma durumu %3 olur. Bu üç durum için de çarpma işlemi değeri çok küçültmektedir ve bunun yerine çarpımların logaritması kullanılabilir ve bunun sonucunda belirsizlik durumu (entropi) ortaya çıkarılmış olur. İlk örnek için

$(-\log_2(1x1x1x1x1))/5=(0+0+0+0+0)/5=0$ olur ve belirsizlik durumu sıfırdır. İkinci durum için

(-log2(0.8x0.8x0.8x0.8x0.2))/5=(0.1386+0.1386+0.1386+0.1386+2.3219)/5=0.575 olur. Son örnek için ise,

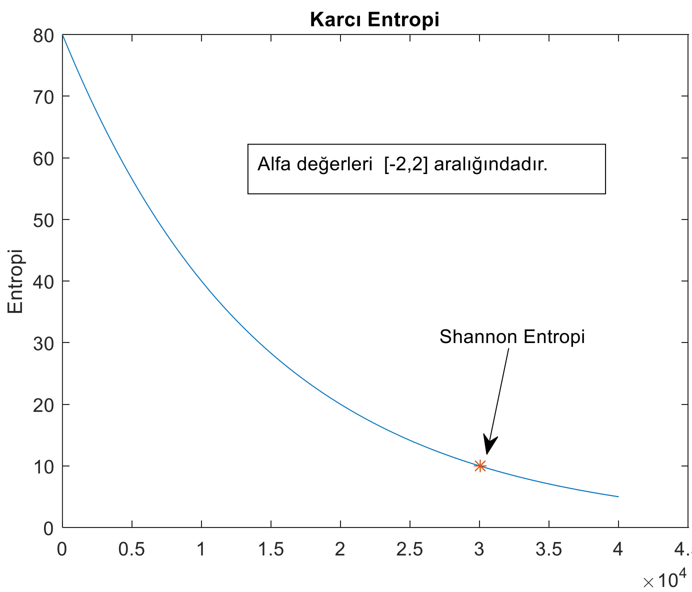
$(-\log_2(0.6x0.6x0.6x0.4x0.4)/5=(0.737+0.737+0.737+1.3219+1.3219)/5=0.97$ olur. Bu üç örnekte görüldüğü gibi belirsizliğin yüksek olduğu durum son örnektir.

Örnek 2: Eşit olasılıklı ortam



Şekil 2. 10 tane yeşil ve 10 tane mavi top.

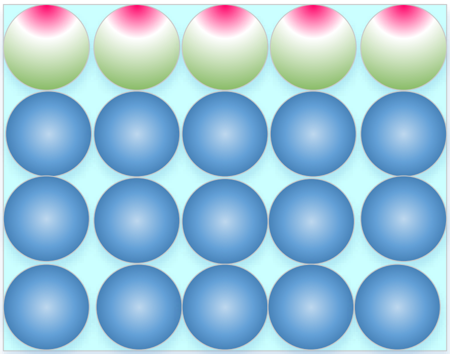
Şekil 2'de verilen durum için olasılık kümesi O={0.5,0.5} şeklinde olacaktır. Bu kümeden elde edilen Karcı ve Shannon entropiler Şekil 3' te görülmektedir.



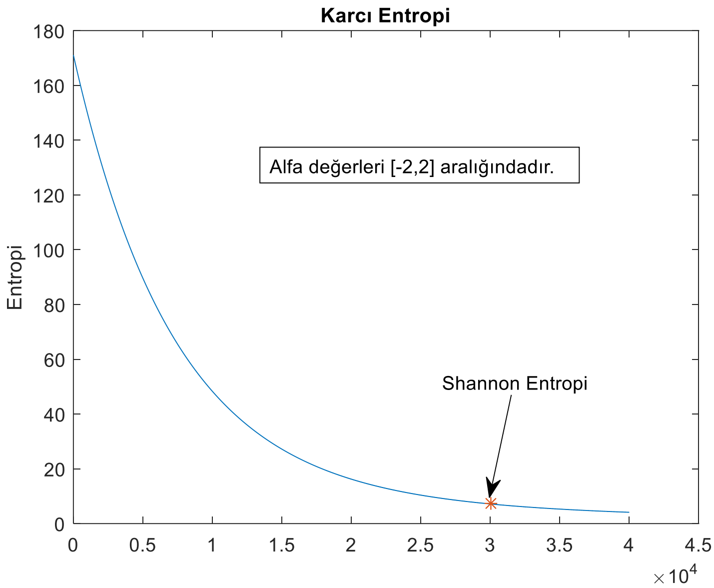
Şekil 3. Eşit olasılık ortamı için entropiler.

Şekil 3'te Karcı entropi için alfa değerlerinin [-2,2] aralığındaki değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi Karcı entropi ile aynı olmaktadır.

Örnek 3: Olasılıkların eşit olmadığı ortam



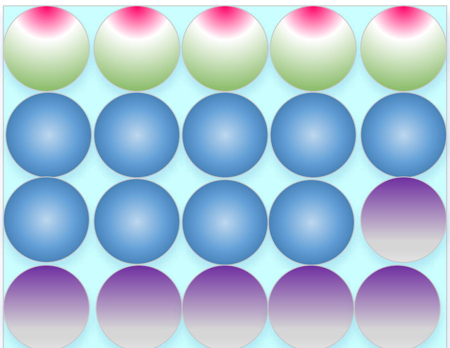
Şekil 4. 5 yeşil ve 15 mavi top.



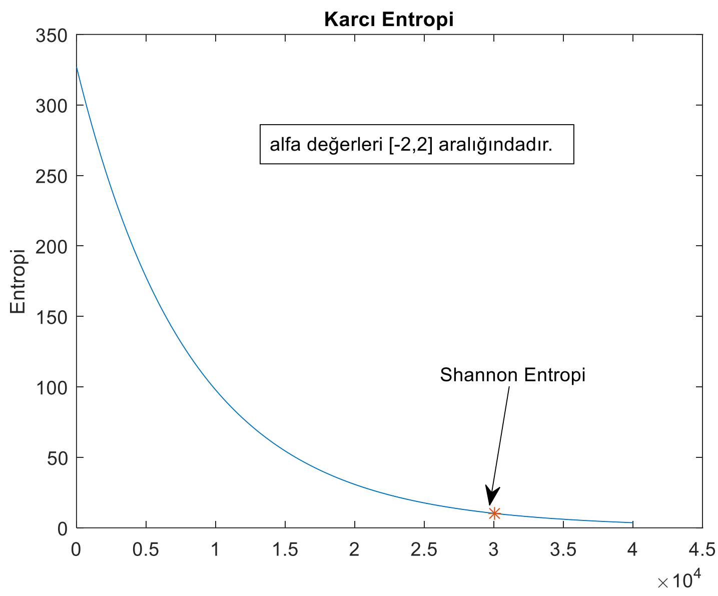
Şekil 5. Eşit olmayan olasılık ortamı için entropiler.

Şekil 4'te Karcı entropi için alfa değerlerinin [-2,2] aralığındaki değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi, Karcı entropi ile aynı olmaktadır.

Örnek 4: İkiden fazla sınıf olasılıkları.



Şekil 6. 5 yeşil, 9 mavi ve 6 mor top.



Şekil 7. Eşit olmayan olasılık ortamı için entropiler (üç sınıf).

Şekil 6'te Karcı entropi için alfa değerlerinin [-2,2] aralığındaki değerleri görülmektedir. Alfa'nın [-∞,1) aralığındaki değerlerde Karcı entropi Shannon entropiye göre daha yüksek çıkmaktadır. Alfa=1 olduğunda Shannon entropi, Karcı entropi ile aynı olmaktadır.

4.SONUÇLAR

Bu çalışmada Karcı entropi ile Shannon entropinin farklı olasılık ortamları için karşılaştırmaları yapılmıştır. Shannon entropi Karcı entropinin sadece bir durumuna karşı gelmektedir. Aynı zamanda alfa değerinin 1'den küçük olduğu durumların hepsinde Karcı entropi daha yüksek değer vermektedir.

KAYNAKLAR

[1] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948) 379–423, 623–656.

[2] S. Bouzebda, I. Elhattab, New Kernel-types Estimator of Shannon's Entropy, Comptes Rendus Mathematique, vol. 352, Comptes Rendus de l'Académiedes Sciences–Series I–Mathematics, 2014, pp. 75–80.

[3] M.R. Ubriaco, Entropies based on fractional calculus, Phys. Lett. A 373 (2009) 2516–2519.

[4] A. Karcı, A new approach for fractional order derivative and its applications, Univ. J. Eng. Sci. 1 (2013) 110–117.

[5] A. Karcı, Properties of fractional order derivatives for groups of relations/functions, Univ. J. Eng. Sci. 3 (2015) 39–45.

[6] A. Karcı, The linear, nonlinear and partial differential equations are not fractional order differential equations, Univ. J. Eng. Sci. 3 (2015) 46–51.

[7] A. Karcı, Generalized fractional order derivatives for products and quotients, Sci. Innov. 3 (2015) 58–62.

[8] A. Karcı, Chain rule for fractional order derivatives, Sci. Innov. 3 (2015) 63–67.

[9] A. Karcı, “Fractional order entropy New perspectives”, Optik - International Journal for Light and Electron Optics, vol:127, no:20, pp:9172-9177, 2016.