Definition 1. Escribiremos $C \vdash^n_{\mathcal{M}} C'$ si hay $C_0, \ldots, C_{n+1}$ configuraciones de $\mathcal{M}$ tales que:

$$C_0 = C$$

$$C_{n+1} = C'$$

$$C_i \quad \vdash_{\mathcal{M}} \quad C_{i+1} \text{ con } i = 0, \ldots, n-1$$

Escribiremos $C \vdash^*_{\mathcal{M}} C'$ si hay $n \geq 0$ tal que $C \vdash^n_{\mathcal{M}} C'$ o $C = C'$. Notar que $\vdash^*_{\mathcal{M}}$ es la clausura transitiva y reflexiva de $\vdash_{\mathcal{M}}$.

La configuracion incial con entrada x de una maquina de Turing $\mathcal{M}$ con k cintas es:

$$C_{\text{start}(\mathcal{M},x)} = (q_{\text{start}}, (\triangleright, x), \underbrace{(\triangleright, \varepsilon), \ldots, (\triangleright, \varepsilon)}_{k-1})$$

Notar que las configuraciones son finitarias, se les podria agregar algunos $\square$, al final de cada palabra y representarian el mismo estado, aunque no estaría en "forma canónica".

Definition 2. Diremos que $\mathcal{M}$ de k cintas se detiene en (n pasos) a partir de x y devuelve y si

$C_{\text{start}(\mathcal{M},x)} \vdash^n_{\mathcal{M}} (q_{\text{halt}}, (U_1, V_1), \ldots, (U_k, V_k))$ para algunos $U_i, V_i \in \Gamma^*$ y $U_k V_k = y$

Notar que $U_1 V_1 = \triangleright x \square^*$.

Definition 3. Sean $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ y $T : \omega \to \mathbb{N}$, diremos que una maquina de Turing $\mathcal{M}$ *computa* f en tiempo T si para todo $x \in \{0,1\}^*$,

$$x \to^{T(|x|)}_{\mathcal{M}} f(x),$$

si $\mathcal{M}$ se detiene en $T(|x|)$ pasos a partir de x y devuelve $f(x)$.

Example 4. Dada $\mathcal{M}_{\text{Pal}}$ (CITA a la clase pasada), la maquina de Turing que determina si su entrada es palindroma. Es claro que $\mathcal{M}_{\text{Pal}}$ computa a $\text{Pal} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ con

$$\text{Pal}(x) = \begin{cases} 1 & x = x^R \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

en tiempo T, con $T(|x|) = 3|x| + 4$ ya que:

- Copia en $|n| + 1$ pasos,
- rebobina en $|n| + 1$ pasos,
- compara en $|n| + 1$ pasos,
- imprime en 1 paso.

0.1 Comparando funciones

Compararemos las funciones por su comportamiento *asintotico*.

Definition 5. Sean $f, g : \omega \to \omega$ escribiremos: $f = \mathcal{O}(g)$ si hay $c > 0$ y $n \in \omega$ tal que $f(m) \leq c.g(m)$, $\forall m : m > n$.

Notar que esta notacion es transitiva pero no conmutativa (en algunos contextos, se ve la notacion quiza mas natural $f \in \mathcal{O}(g)$).

Si $f = \mathcal{O}(g)$ y $g = \mathcal{O}(f)$, se escribe $f = \Theta(g)$.

Definition 6. Sean $f, g : \omega \to \omega$ escribiremos: $f = o(g)$ si
$lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

0.2 Codificaciones

Codificacion de palabras

Dado un alfabeto finito Γ, es claro que podemos asignar a cada uno de sus elementos un numero a traves de una funcion inyectiva $f : \Gamma \to \omega$ y codificarlo en binario en un string de tamaño fijo para todo $s \in \Gamma$. Dado $s \in \Gamma$, utilizaremos $\lfloor s \rfloor$ para su codificacion en binario, notar que $|\lfloor s \rfloor| = \lceil \log_2 |\Gamma| \rceil$.

Codificacion de tuplas

Dado una k-upla $(\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_k \rfloor)$, escribiremos $\langle \lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_k \rfloor \rangle$ para el string binario que codifica a $(\lfloor x_1 \rfloor, \ldots, \lfloor x_k \rfloor)$, repitiendo 2 veces los bits de cada $\lfloor x_i \rfloor$ y utilizando 01 como separador en vez de la coma.

Example 7. Dado $\Gamma = \{\text{♌}, \text{♒}, \text{♏}\}$, tomamos $f(s) = \begin{cases} \text{♌} & 0 \\ \text{♒} & 1 \\ \text{♏} & 2 \end{cases}$, luego $\lfloor s \rfloor = \begin{cases} \text{♌} & 00 \\ \text{♒} & 01 \\ \text{♏} & 11 \end{cases}$, luego $\langle \lfloor \text{♌♏} \rfloor, \lfloor \text{♒} \rfloor \rangle = \langle 0011, 01 \rangle = 00001111010011$.