Tema 9: Pruebas de Hipótesis

W – Cap 10

Se presentan los formalismos para formular tests de hipótesis referidos a procedimientos de decisión que se basan en los datos y que pueden producir una conclusión acerca de algún sistema científico.

- Hipótesis estadística.
- La Hipótesis Nula y la Hipótesis Alternativa.
- El Estadístico de una prueba.
- Pasos para realizar un test de Hipótesis.
- Errores de tipo I y II. α , β y n en la probabilidad de errores Tipo I y II.

Hipótesis Estadística

Es la afirmación que se realiza acerca de un parámetro estadístico de la población: $\begin{cases} Media \\ Rango \\ Desvío \\ \dots \end{cases}$

Se debe formular la Hipótesis indicando específicamente el valor que toma el parámetro. A esta afirmación se la denomina **Hipótesis Nula**.

Hipótesis Nula $\boldsymbol{H_0}$: Valor exacto del parámetro.

Hipótesis Alternativa: $\boldsymbol{H_1}$: Rango de valores alternativos que excluyen al valor planteado en la H_0.

El resultado de la Hipótesis Estadística planteada puede ser que no exista evidencia en la muestra utilizada para rechazar la H_0 o que exista fuerte evidencia para rechazarla.

La verdad o falsedad **nunca se sabe con absoluta certeza** sino que se utilizan NIVELES DE CONFIANZA ya que no se examina a toda la población.

Procedimiento:

Se toma una Muestra Aleatoria → $(EVIDENCIA)$

Se plantea la H_0 y la H_1

Consistente con H_0

No hay evidencia para rechazar H_0

Inconsistente con H_0

Existe fuerte evidencia de la inconsistencia de H_0 (CONCLUSIÓN FIRME)

Es mejor llegar a una conclusión firme rechazando una H_0 que indicar que no hay evidencia para rechazarla.

Es muy parecido a la Ley PENAL: El acusado es inocente hasta que no se demuestre lo contrario.

Resultados posibles del test de Hipótesis:

a) La evidencia actual (muestra) es contundente para el rechazo de H_0.

b) La evidencia actual (muestra) no alcanza para rechazar H_0 pero es posible que con más evidencia alcance para rechazarla.

Observe que en el caso (b) las conclusiones no implican una "aceptación de H_0" formal y literal.

Esto es porque la evidencia es una muestra de la población que la representa con un NIVEL DE CONFIANZA menor al 100%.

El estadístico de una prueba

Llamemos $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ al estadístico de la muestra y $\boldsymbol{\theta}$ al parámetro poblacional a estimar.

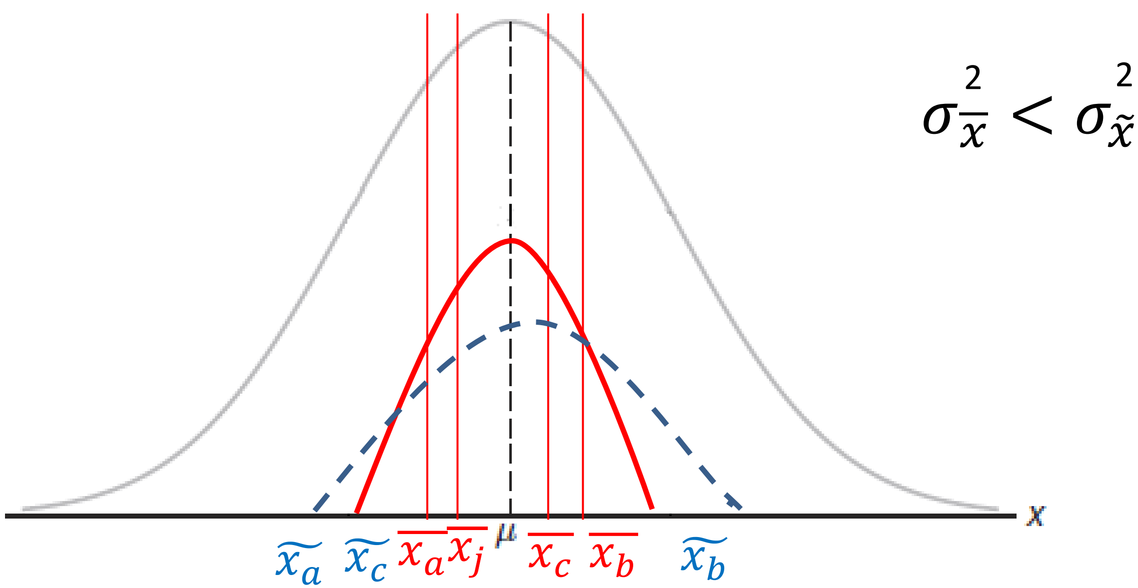
La prueba de hipótesis se basa en construir, a partir de la muestra aleatoria, un estadístico y según el valor que tome este estadístico de prueba se aceptará o se rechazará la hipótesis.

Habíamos visto en el tema anterior que para seleccionar un estadístico deberíamos prestar atención al que tenga menor varianza. Así, para estimar la media poblacional μ se elige como estadístico a la media muestral $\overline{X}$ en lugar de la mediana muestral $\widetilde{X}$ porque $\sigma_{\overline{X}}^2 < \sigma_{\tilde{X}}^2$.

Varianza de un Estimador puntual (Estadístico del Test de Hipótesis):

Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estimadores insesgados del parámetro poblacional θ elegimos el estimador cuya distribución muestral tenga menor varianza.

$\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}_1$ es un estimador más eficiente de θ que $\hat{\theta}_2$



Entonces, $\overline{x}$ es mejor estimador de μ que $\tilde{x}$

Una vez elegido el estadístico de la muestra que representa mejor la población se realiza el Test de Hipótesis con un procedimiento que contempla los siguientes pasos:

Pasos para realizar un test de hipótesis

1. Establecer H_0
2. Establecer H_1
3. Fijar el nivel de significancia α.
4. Obtener regiones críticas.
5. Calcular el estadístico.
6. Comparar y decidir NO RECHAZAR H_0 ó RECHAZAR H_0 (que implica ACEPTAR H_1).

1. Establecer H_0 implica indicar un **valor exacto** que toma el parámetro poblacional a estimar:

   $$H_0\text{: } \mu = 20\, mg\ (p.ejemplo).$$

   Es decir, la H_0 se plantea como una igualdad para ser probada por el test.

2. Establecer H_1 implica indicar un **intervalo** que toma el parámetro poblacional a estimar y que excluye al valor planteado en H_0. El planteo de H_1 puede ser alguno de los siguientes:

$H_1 < 20\ mg$. (caso de intervalo inferior al valor planteado en H_0).

$H_1 > 20\ mg$. (caso de intervalo superior al valor planteado en H_0).

$H_1 \neq 20\ mg$. (caso de intervalo diferente al valor planteado en H_0).

Es decir, la $\boldsymbol{H_1}$ se plantea como un intervalo de valores que excluyan al valor exacto planteado en $\boldsymbol{H_0}$ utilizando alguna de las tres alternativas.

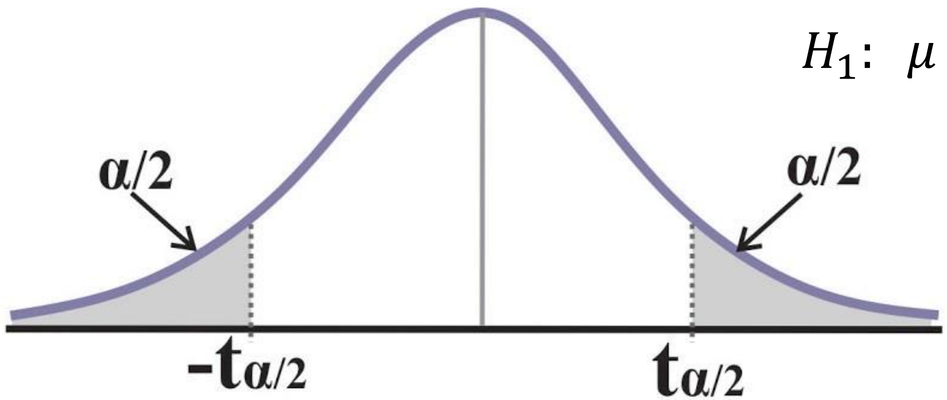
3. Fijar el nivel de significancia α implica elegir el **porcentaje de casos en los cuales el rechazo de la $\boldsymbol{H_0}$ es erróneo**, es decir el riesgo que corremos al rechazar una hipótesis nula cuando es cierta. Cuanto más alto sea el nivel de significancia que utilizamos para probar una hipótesis, mayor será la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta. En la mayoría de los test de hipótesis se utiliza un $\alpha = 5\%$ pero puede elegirse cualquier valor para el nivel de significancia.

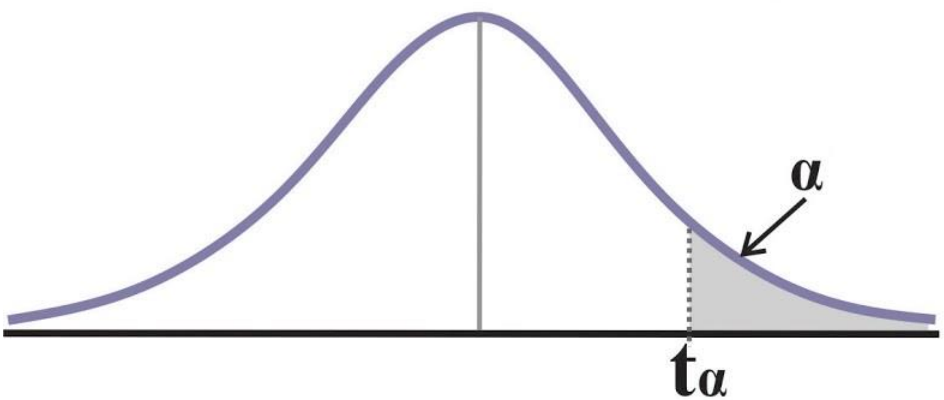
4. Obtener las Regiones Críticas: Implica elegir los valores umbrales para no rechazar o rechazar H_0 según la distribución teórica de la variable aleatoria. Al elegir estos valores umbrales se delimitan las regiones críticas de rechazo de H_0 (o aceptación de H_1) según se haya planteado la hipótesis alternativa H_1.

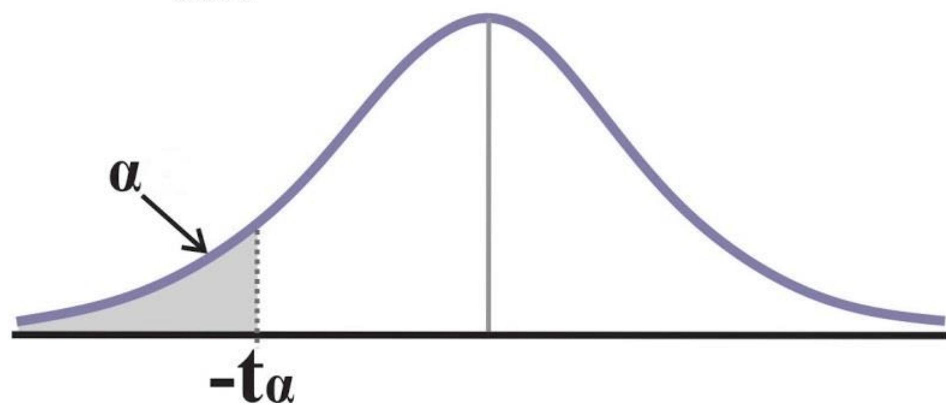
$\boxed{H_0\colon\ \mu = 20\,mg}$

$H_1\colon\ \mu \neq\ 20\,mg$

Se observa que este paso está estrechamente ligado al anterior.







$H_1\colon\ \mu >\ 20\,mg$

$H_1\colon\ \mu <\ 20\,mg$

5. Calcular el estadístico: Implica el cálculo del valor del estadístico de la prueba utilizando los datos muestrales.

   Por ejemplo, en el caso de la distribución t de la variable aleatoria se calcula el estadístico T para ser comparado con los valores críticos de la distribución.

$$T = \frac{\overline{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sim t(0, \nu)$$

El cálculo de estadístico se realiza según la distribución de la variable aleatoria por un lado y de la H_0 que se plantee. Esta última se refiere a si se está interesado en la prueba de una población o de la comparación de dos poblaciones, por ejemplo en este último caso el estadístico T se calcula como:

$$T = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2}}$$

6. Comparar y decidir. Aquí, en este último paso se decide por alguna de las dos opciones siguientes:

a) RECHAZAR H_0.

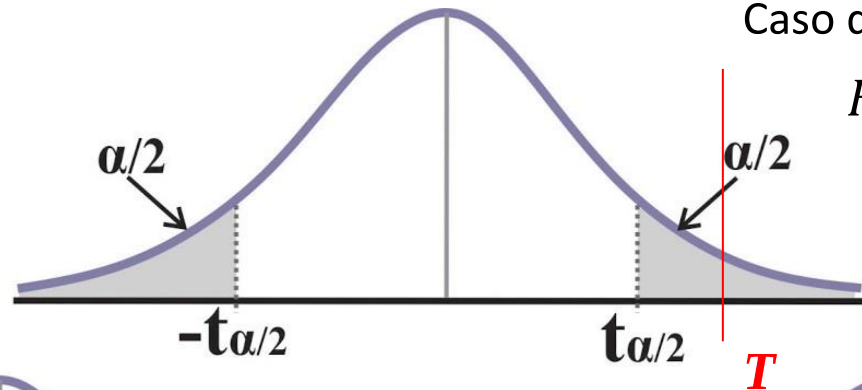
b) NO RECHAZAR H_0.

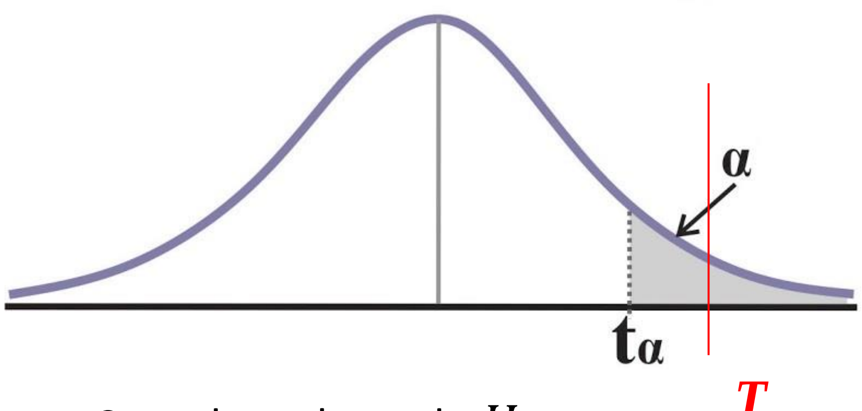
<u>Ejemplos</u>

$H_0: \mu = 20\ mg$

Caso de rechazo de H_0 con

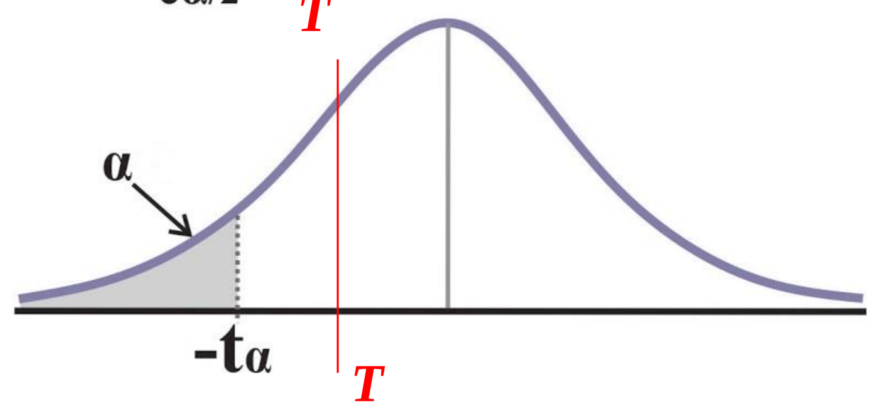
$H_1: \ \mu \neq \ 20\ mg$





Caso de rechazo de H_0 con

$H_1: \ \mu > \ 20\ mg$



Caso de no rechazo de H_0 con

$H_1: \ \mu < \ 20\ mg$

Errores Tipo I y II

Error Tipo I: Es el error que se comente al rechazar una H_0 cuando en realidad es verdadera. Este error está ligado a la elección del nivel de significancia α.

$$\boxed{P(ET\ I) = \alpha}$$

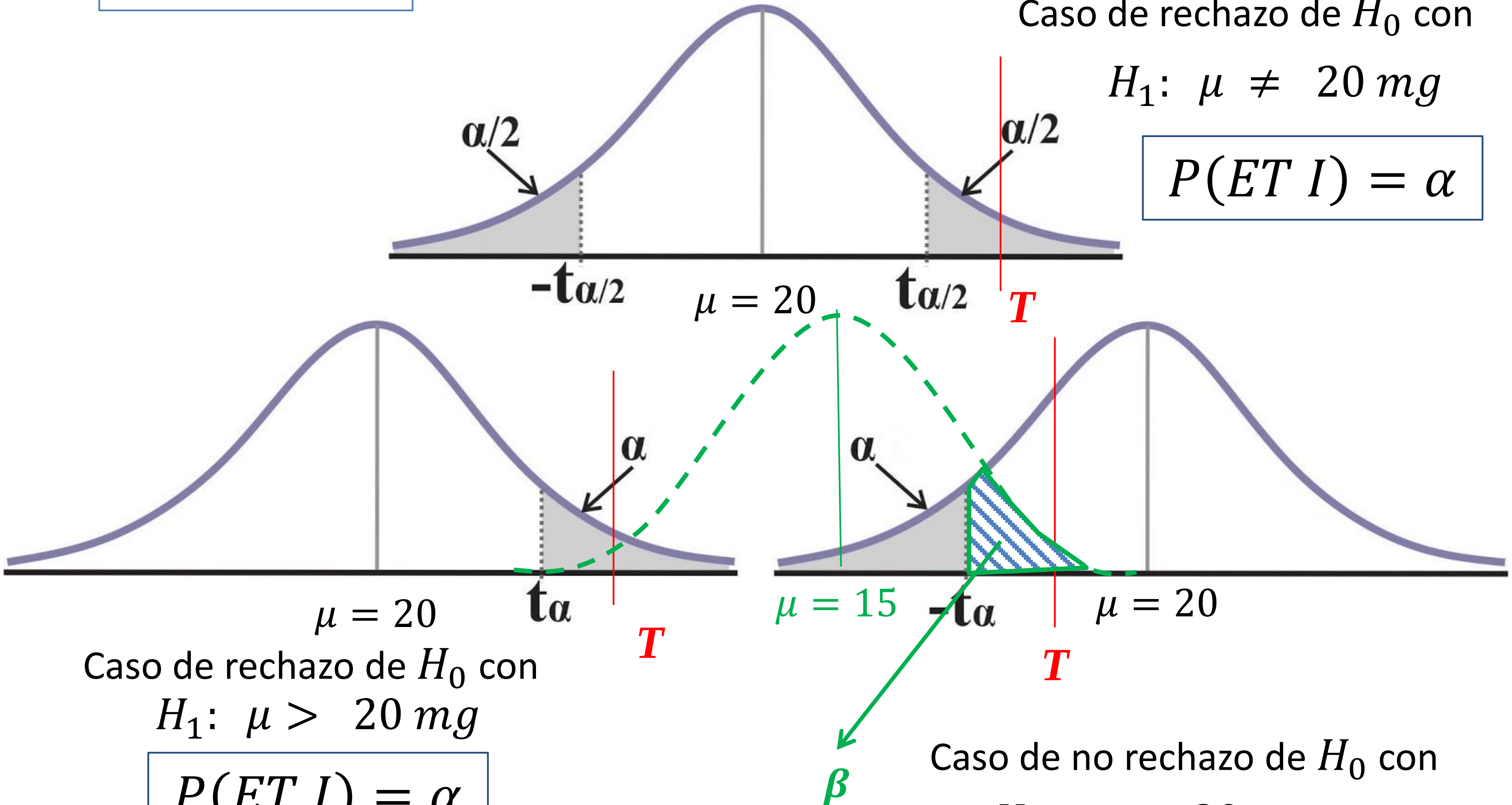
Este error puede cometerse sólo en el caso de haber rechazado H_0

Error Tipo II: Es el error que se comente al no rechazar una H_0 cuando en realidad es falsa porque el parámetro poblacional es diferente, mayor o menor al que se estableció en H_0. Este error está ligado a la propuesta de elección del valor del parámetro poblacional distinto del que se planteó H_0 ya que puede calcularse así una probabilidad β que corresponde al Error Tipo II.

$$\boxed{P(ET\ II) = \beta}$$

En nuestro ejemplo de la distribución t de *Student*:

$\boxed{H_0:\ \mu = 20\ mg}$



Caso de rechazo de H_0 con

$H_1:\ \mu \neq\ 20\ mg$

$$\boxed{P(ET\ I) = \alpha}$$

Caso de rechazo de H_0 con

$H_1:\ \mu >\ 20\ mg$

$$\boxed{P(ET\ I) = \alpha}$$

Caso de no rechazo de H_0 con

$H_1:\ \mu <\ 20\ mg$

$$\boxed{P(ET\ II) = \beta_{(15)}}$$

En definitiva, los casos posibles de cometer errores al no rechazar o rechazar H_0 se pueden resumir en la siguiente tabla:

	H_0 es verdadera	H_0 es falsa
No rechazar H_0	Decisión correcta	Error Tipo II
Rechazar H_0	Error Tipo I	Decisión correcta

Ejemplo 1: El peso medio de las personas de una provincia es de 68 Kg. Se toma una muestra de 36 individuos obteniendo:

$$\overline{x} = 70\ Kg$$
$$S = 3{,}6\ Kg$$

¿Se puede afirmar que el peso medio se mantiene?
¿Qué tipo de error puede cometerse y cuál es el valor del mismo?

Solución:

Como el número de individuos es mayor a 30 se utilizará la distribución normal aunque σ sea desconocida.

1. Establecer H_0:

$$H_0\colon \mu = 68\ Kg$$

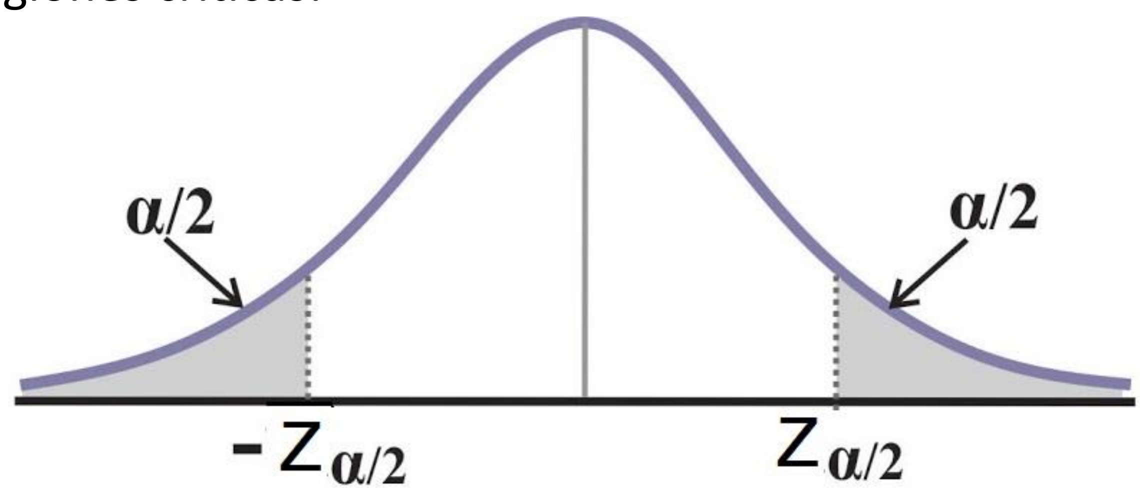
2. Establecer H_1:

$$H_1\colon \mu \neq 68\ Kg$$

3. Fijar el nivel de significancia α:

$$\alpha = 0{,}05$$

4. Obtener regiones críticas:

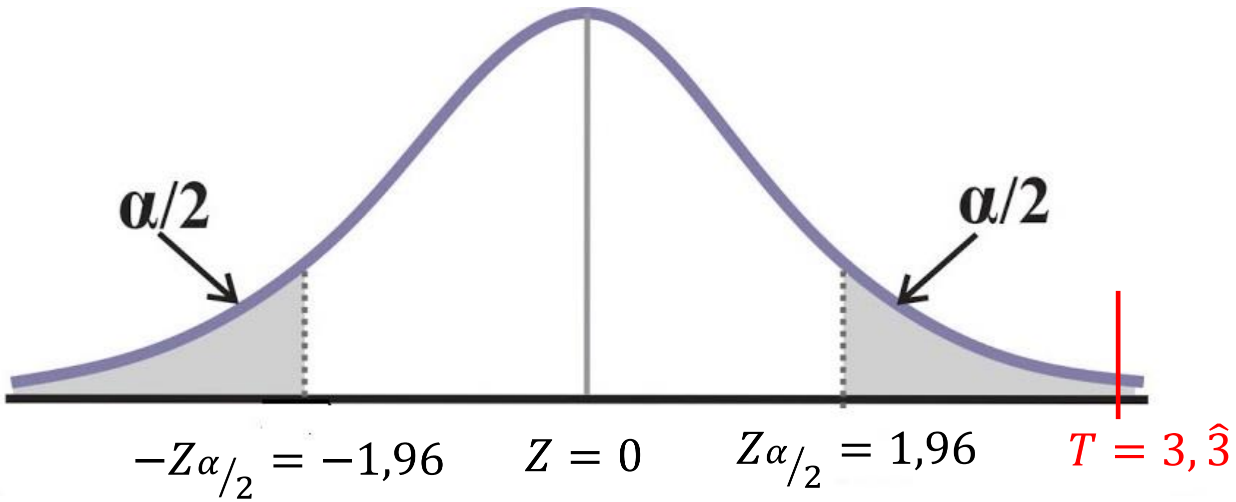


$$-Z\alpha/_2 = -Z_{0,025} = -1{,}96 \qquad Z\alpha/_2 = Z_{0,025} = 1{,}96$$

5. Calcular el estadístico.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{S/_{\sqrt{n}}} = \frac{70 - 68}{3{,}6/_{\sqrt{36}}} = \frac{2}{0{,}6} = 3{,}\hat{3}$$

6. Comparar y decidir.



Como $T > Z\alpha/_2$ se rechaza H_0 con un nivel de significancia de $\alpha = 5\%$

Al rechazar la H_0: $\mu = 68\ Kg$ puede cometerse ERROR Tipo I del 5%