Licenciatura en Sistemas de información - FCyT - UADER

Matemática Discreta - Parcial 3 - 07/12/2021

RECUERDE QUE DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.

Alumno:..

Problema 1 (10+15 puntos):

a) Demostrar, utilizando inducción matemática, que para todo natural n se verifica que $2^{5n+8} + 5^{n+1} \cdot 3^{n+3}$ es un múltiplo de 17.

b) Sea $N = 5 \cdot 7^3 \cdot 14^2 \cdot 6^5$:

   I) Calcular la cantidad de divisores positivos que posee N.

   II) Mostrar los que son cubos perfectos.

   III) Del total de divisores, ¿cuántos son coprimos con 21?

Problema 2 (20 puntos):

Considerar el anillo $\mathbb{Z}_{42}$ para:

a) Calcular la cantidad de elementos que poseen inverso multiplicativo? Mostrar 5, y sus respectivos inversos.

b) Mostrar 3 pares de divisores propios de cero.

c) Resolver por completo la ecuación $7.a.b \equiv 0 \ (mod\ 42)$, sujeta a que a, b sean coprimos.

d) Hallar todos los enteros que verifican $19x - 4 \equiv 7 \ (mod\ 42)$

e) En el anillo $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_6$ hallar el inverso multiplicativo de $a = (5,\ 1)$ (Ayuda: Utilizar el Teorema Chino del Resto)

Problema 3 (18+5 puntos):

a) Sea la ecuación $ax + by = c$. Resolver para:

   i) $a = 105,\ b = 198,\ c = mcd(a, b)$; ii) $a = 105,\ b = 198,\ c = 7$; iii) $a = 105,\ b = -198,\ c = 6$;

b) Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ con $a = 630$, $mcd(a, b) = 105$ y $mcm(a, b) = 242550$, ¿cuál es el valor de b?

Problema 4 (22 puntos):

Dado el siguiente anillo $(R, +, \cdot)$

$+$	α	β	π	λ
α	π	λ	α	β
β	λ	π	β	α
π	α	β	π	λ
λ	β	α	λ	π

$\cdot$	α	β	π	λ
α	β	λ	π	α
β	λ	α	π	β
π	π	π	π	π
λ	α	β	π	λ

a) Mostrar, si posee, el elemento neutro de cada operación (z y u)

b) Resolver: $\alpha - \beta(\lambda + \pi)$

c) ¿Es R un anillo conmutativo con elemento unidad?

d) Mostrar, si posee, el conjunto de unidades (y el inverso de cada elemento) y de divisores propios de cero. Luego concluir si R es un dominio de integridad y/o cuerpo.

Problema 5 (10 puntos):

Sea el anillo $R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{Z} \right\}$ y $R_2 = \mathbb{Z}$; y dada la función $f : R_1 \to R_2$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = a + 2b$. Analizar si f determina un homomorfirmo sobre los anillos dados.