Lic en Sistemas de información - FCyT - UADER

Matemática Discreta - Tercer Parcial Promoción 23/11/2023

RECUERDE QUE DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.

Ejercicio 1 (10 puntos):

Analizar por qué la siguiente estructura no determina un anillo $R = (\mathbb{R} - \{0\}, \oplus, \odot)$, tal que para todo elemento a y b de R:

$$a \oplus b = a \cdot b \qquad a \odot b = a^b$$

Ejercicio 2 (30 puntos):

Sea $R = (M_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, el anillo de las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos son enteros, y las operaciones son la adición y multiplicación usuales de matrices:

a) Probar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una unidad.

b) Analizar si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es divisor propio de cero.

c) ¿Es R un cuerpo?

d) Probar que el conjunto de las matrices simetricas de orden 2 de elementos enteros, determinan un subanillo de R pero no un Ideal.

Ejercicio 3 (30 puntos):

Sea $R = (\mathbb{Z}_{22}, +(mod\ 22), \cdot(mod\ 22))$:

a) Calcular la cantidad de unidades que posee el anillo. ¿Es R un cuerpo?

b) Resolver la ecuación en congruencia: $15x \equiv 7 \cdot 3^{704} (mod\ 22)$

c) Indicar si $\mathbb{Z}_{22}^{*}$ determina un grupo multiplicativo.

d) Analizar si U_{22}, el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathbb{Z}_{22}$, es cíclico.

e) En caso de que U_{22} sea cíclico, hallar dos subgrupos no triviales.

Ejercicio 4 (30 puntos):

a) Un canal simétrico binario tiene una probabilidad $p = 0,02$ de transmisión incorrecta. Si se transmite la palabra codificada $c = 11110000$, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra un error doble?

b) Sea $E : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^{12}$ la función de codificación para el código de repetición triple $(12, 4)$, y sea D la correspondiente función de decodificación:

   i) Codificar la cadena 0111, luego hallar una cadena r que posea dos errores simples.

   ii) Decodificar $r = 000101001111$

   iii) Para cada $w \in \mathbb{Z}_2^4$, ¿cuánto vale $|D^{-1}(w)|$?

c) Sea $E : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^4$ y sea el conjunto $C = \{0000, 1010, 1111, 0101\}$ de palabras codificadas, realice una tabla de operaciones aditivas para mostrar que $(C, \oplus)$ es un grupo, considerando que se suma elemento a elemento módulo 2 (es decir $1100 + 1010 = 0110$).