Distribución Geométrica

Ahora estamos interesados en el N° de pruebas hasta obtener el 1° éxito.

X: $N°$ *de pruebas hasta obtener el primer éxito*

Probabilidad de éxito $= p$

Probabilidad de fracaso $q = 1 - p$

Sigue los postulados del Proceso de Bernoulli.

OJO: Acá X no puede tomar el valor CERO

Ejemplo 6: De una urna que contiene 6 bolillas rojas (**6R**) y 2 bolillas negras (**2N**) encontrar la función de distribución para la variable aleatoria **X = número de pruebas hasta obtener la primer bolilla negra**. Las extracciones son con reposición.

$$P(X = 1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = p$$ **N**

$$P(X = 2) = \frac{6}{8} . \frac{2}{8} = q . p$$ **R N**

$$P(X = 3) = \frac{6}{8} . \frac{6}{8} . \frac{2}{8} = q^2 . p$$ **R R N**

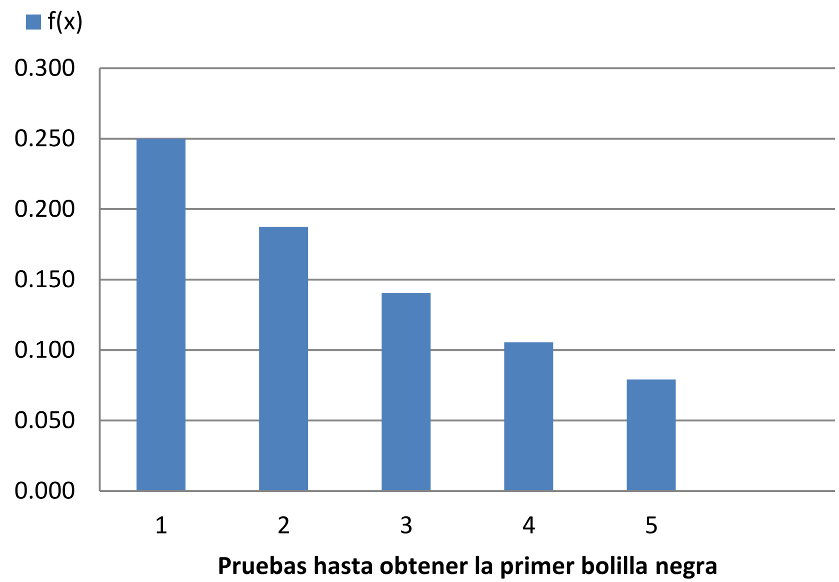
$$\boxed{P(X = x) = q^{x-1} . p}$$

$$E(x) = \frac{1}{p} \qquad V(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

<u>Función de distribución:</u> Tabla con los pares $(x, f(x))$

$$P(X = x) = q^{x-1}.p$$

Evento	*X*	*Prob.*
N	1	*0,25*
RN	2	*0,1875*
RRN	3	*0,1406*
RRRN	4	*0,1055*
RRRRN	5	*0,0791*



Calcule la Esperanza y la Varianza

$$E(x) = \frac{1}{p} = 4$$ Esperamos que en la cuarta extracción salga la primer bolilla negra

No necesariamente la *E(X)* = $P_{max}(X)$, depende de la forma de la distribución.

Por esto decimos que la Esperanza no indica lo más probable. Lo más probable está asociada la Moda (lo más frecuente) en el análisis estadístico de los datos.

Distribución Binomial Negativa

Ahora estamos interesados en el N° de pruebas hasta que se verifiquen *k* éxitos.

Como en el caso anterior:

Probabilidad de éxito $= p$

Probabilidad de fracaso $q = 1 - p$

Sigue los postulados del Proceso de Bernoulli.

$$\boxed{b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}; \qquad x \geq k}$$

Ejemplo 6 b: De una urna que contiene 6 bolillas rojas (**6R**) y 2 bolillas negras (**2N**) encontrar la función de distribución para la variable aleatoria **X = número de pruebas hasta obtener dos bolillas rojas**. Las extracciones son con reposición.

$P(X = 2, k = 2)$ **R R** $P(X = 2) = \frac{6}{8}.\frac{6}{8} = p^2$

$P(X = 3, k = 2)$

N R R

R N R

~~**R R N**~~

$P(X = 3) = 2.\frac{2}{8}.\frac{6}{8}.\frac{6}{8} = 2.p^2.q$

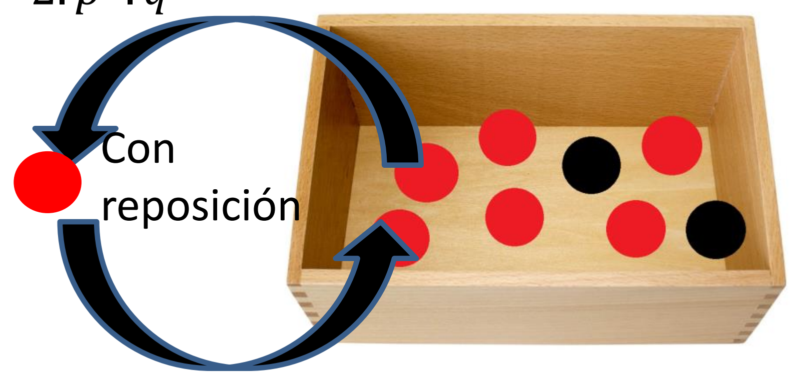
$P(X = 4, k = 2)$

N N R R

N R N R

R N N R

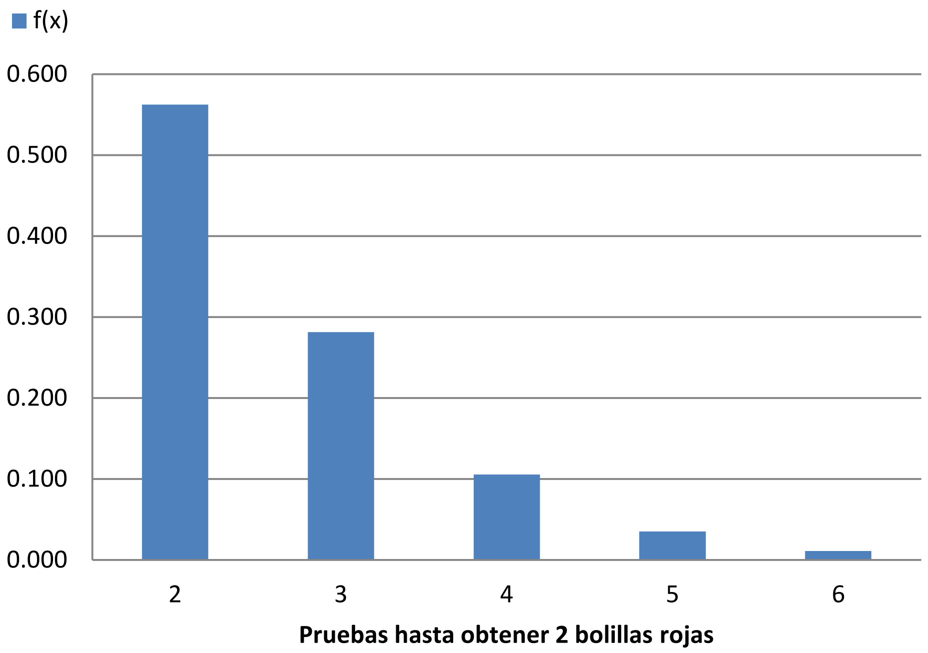
$P(X = 4) = 3.q^2.p^2$



Función de distribución: Tabla con los pares $(x, f(x))$

$$b^*(x;k,p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

X	Prob.
2	0.563
3	0.281
4	0.105
5	0.035
6	0.011



Distribución Poisson

Pruebas de ocurrencia en un **Intervalo de Tiempo** o en una **Región**.

Proceso de Poisson: resultados de un experimento aleatorio que se presentan en un intervalo de tiempo o en una región.

Propiedades:

1° Los resultados que se observan son independientes entre intervalos de tiempo o regiones (**proceso sin memoria**).

2° La probabilidad de que ocurra un solo resultado en un $\Delta t \rightarrow 0$ depende de Δt.

3° La probabilidad de que ocurran 2 o más resultados (éxitos) en un intervalo corto o pequeña región se aproxima a cero.

$$P(x, \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

x: 0, 1, 2, …

λ: N° de resultados promedio por unidad de tiempo o región. λ = ctte.

t: Longitud del intervalo (tiempo o región).

$$E(x) = \lambda t \qquad V(x) = \lambda t$$

Ejemplo 7: El número de llamadas que se realizan en una central de atención al cliente de una empresa es de 10 por minuto. Obtener la probabilidad que en el próximo minuto se presenten menos de tres llamadas.

Solución:

$\lambda = 10\ llamadas/min$

$t = 1\ minuto$

$x < 3\ llamadas$

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(x = 0) = \frac{e^{-10.1}(10.1)^0}{0!} = e^{-10} = 4{,}54.10^{-5}$$

$$P(x = 1) = \frac{e^{-10.1}(10.1)^1}{1!} = 10e^{-10} = 4{,}54.10^{-4}$$

$$P(x = 2) = \frac{e^{-10.1}(10.1)^2}{2!} = 50e^{-10} = 2{,}27.10^{-3}$$

$$P(x < 3) = 4{,}54.10^{-5} + 4{,}54.10^{-4} + 2{,}27.10^{-3} = 2{,}77.10^{-3}$$

Ejemplo 8: Un hospital cuenta con tres ambulancias. Si el número promedio de requerimiento diario de ambulancias es de dos ambulancias ¿cuál es la probabilidad que en un día cualquiera haya más de tres pedidos?

Solución:

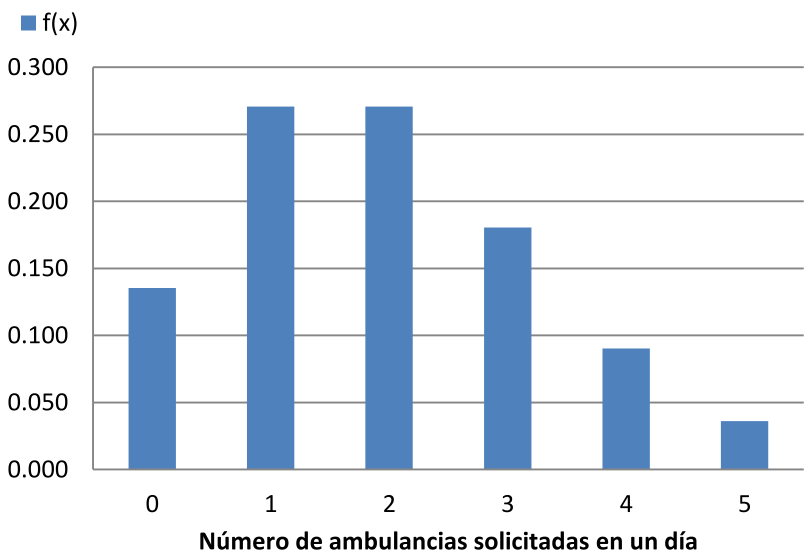
$$\lambda = 2\ ambulancias/día$$

$$t = 1\ día$$

$$x > 3\ ambulancias$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$



$$P(x = 0) = \frac{e^{-2.1}(2.1)^0}{0!} = e^{-2} = 0{,}135$$

$$P(x = 1) = \frac{e^{-2.1}(2.1)^1}{1!} = 2e^{-2} = 0{,}271$$

$$P(x = 2) = \frac{e^{-2.1}(2.1)^2}{2!} = 2e^{-2} = 0{,}271$$

$$P(x = 3) = \frac{e^{-2.1}(2.1)^3}{3!} = \frac{4}{3}e^{-2} = 0{,}180$$

La distribución es sesgada a la derecha

$$P(X \leq 3) = 0{,}8574$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$\boxed{P(X > 3) = 0{,}1426}$$

En el ejemplo anterior vimos que la distribución Poisson tiene una asimetría positiva, sin embargo la forma de la distribución de Poisson se vuelve cada vez más simétrica, incluso con forma de campana, a medida que la media se hace más grande.

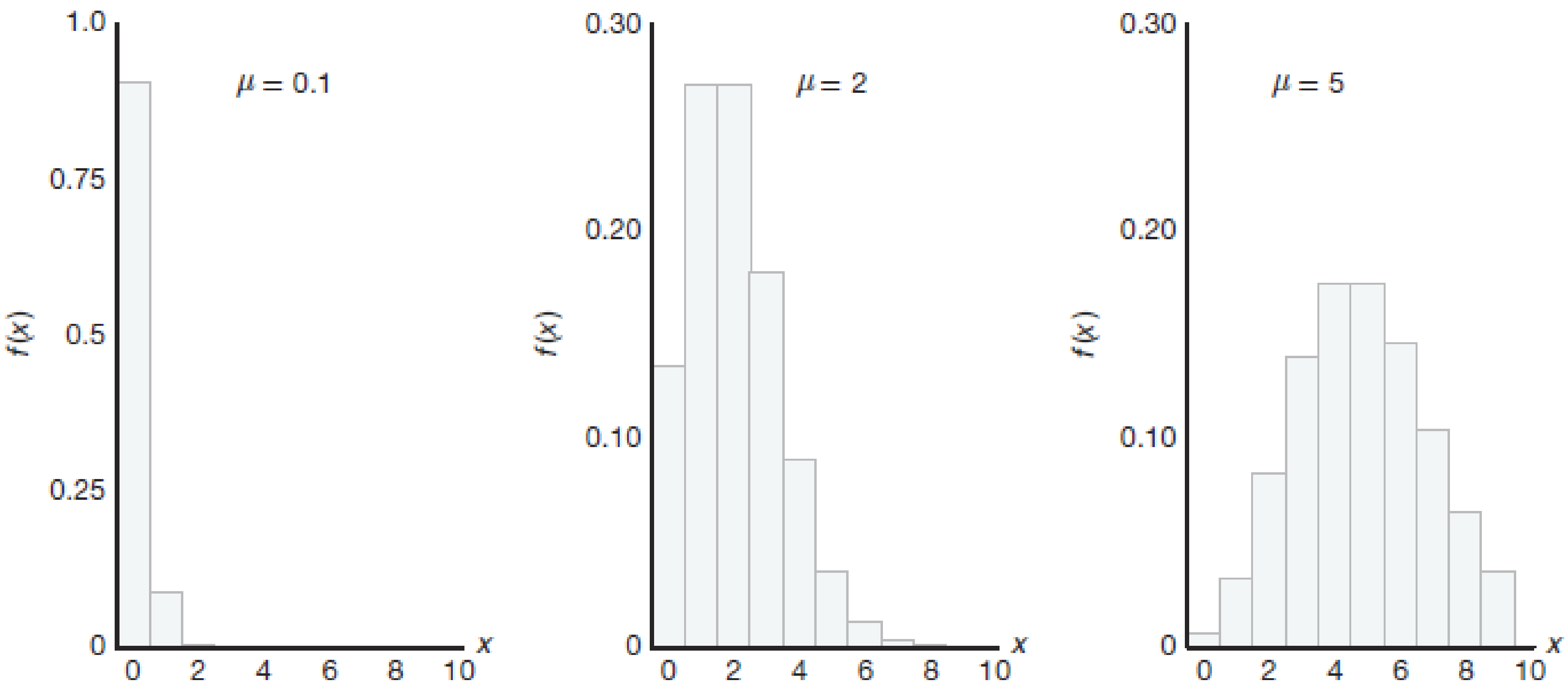


Figura 5.1: Funciones de densidad de Poisson para diferentes medias.

Ejemplo 9: En una estación de carga llegan en promedio 10 camiones por día. La estación puede abastecer hasta un máximo de 15 camiones.

a) ¿cuál es la probabilidad de que un día haya camiones que no puedan ser abastecidos?
b) Graficar la función de distribución.

Solución:

$\lambda = 10\ camiones/día$

$t = 1\ día$

$x > 15\ camiones$

a) $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15)$

En lugar de calcular con la fórmula se puede usar la Tabla A.2 del Walpole, Miers y Miers que brinda la *P(X ≤ x)* para la Distribución de Poisson.

Ejemplo 9: En una estación de carga llegan en promedio 10 camiones por día. La estación puede abastecer hasta un máximo de 15 camiones.

a) ¿cuál es la probabilidad de que un día haya camiones que no puedan ser abastecidos?

b) Graficar la función de distribución.

<u>Solución</u>:

$\lambda = 10\ camiones/día$

$t = 1\ día$

$x > 15\ camiones$

$$P(X \leq 15) = 0{,}9513$$

$$P(X > 15) = 1 - 0{,}9513$$

$$\boxed{P(X > 15) = 0{,}0487}$$

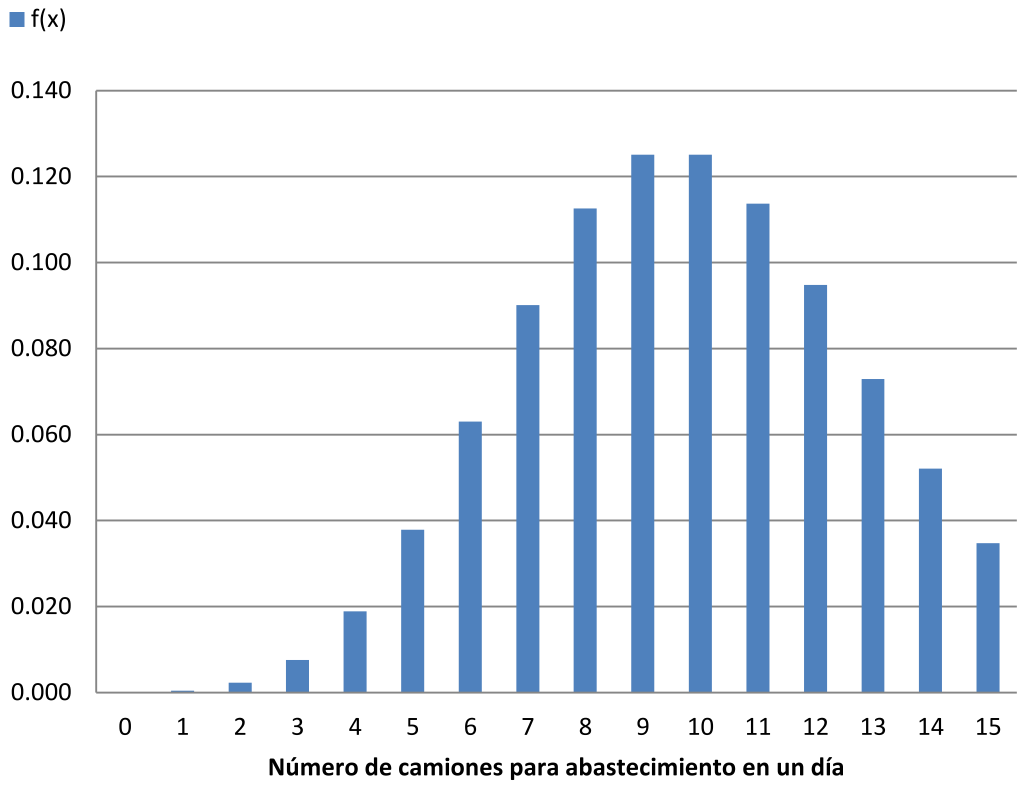
750 *Apéndice A Tablas y pruebas estadísticas*

Tabla A.2 (continuación) Sumas de probabilidad de Poisson $\sum_{x=0}^{r} p(x;\mu)$

	μ								
r	**10.0**	**11.0**	**12.0**	**13.0**	**14.0**	**15.0**	**16.0**	**17.0**	**18.8**
0	0.0000	0.0000	0.0000						
1	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000				
2	0.0028	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000		
3	0.0103	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
4	0.0293	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
5	0.0671	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003
6	0.1301	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010
7	0.2202	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029
8	0.3328	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071
9	0.4579	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154
10	0.5830	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304
11	0.6968	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549
12	0.7916	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917
13	0.8645	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426
14	0.9165	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081
15	0.9513	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867
16	0.9730	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751
17	0.9857	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686
18	0.9928	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622
19	0.9965	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509
20	0.9984	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307

b) Tabla de función de distribución

x	*f(x)*
0	0.00005
1	0.00045
2	0.00227
3	0.00757
4	0.01892
5	0.03783
6	0.06306
7	0.09008
8	0.11260
9	0.12511
10	0.12511
11	0.11374
12	0.09478
13	0.07291
14	0.05208
15	0.03472



Caso extremo:

Cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$ la $b(x; n, p) \to P(x; \lambda t)$

$* \, n \to \infty$ Vamos hacia el espacio continuo o tiempo continuo (se acerca a Poisson).

* Independencia de las pruebas: Igual premisa en ambas distribuciones.

$* \, n \to \infty \Rightarrow p \to 0$ Para conservar le producto $n.p = ctte$

$E(x) = n.p$ binomial

$E(x) = \lambda.t$ Poisson

Además, si $p \to 0$ es la 3° propiedad de Poisson.

Ejemplo 10: En un proceso de fabricación donde se manufacturan productos de vidrio ocurren defectos o burbujas, lo cual ocasionalmente hace que la pieza ya no se pueda vender. Se sabe que, en promedio, 1 de cada 1000 artículos producidos tiene una o más burbujas. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 8000 tenga menos de 7 artículos con burbujas?

Solución:

X = número de artículos con burbujas. Es una V.A.D. Es dicotómica porque la muestra tiene o no tiene burbujas.

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} \quad ; \quad x\text{: } V.A.D. \text{ número de artículos con burbujas.}$$

$P(X < 7)$

n: 8000

p: 0,001

Como $n \to \infty \quad y \quad p \to 0, \quad b(x; n, p) \to P(x; \lambda t)$

$$\lambda t = 8000.0{,}001 = 8$$

Con la binomial: $$P(X < 7) = \sum_{0}^{6} \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

de la Tabla A.1

$0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$

$n \leq 20$

Con Poisson: $$P(X < 7) = \sum_{0}^{6} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} = \underline{0{,}3134}$$

de la Tabla A.2

con $\mu = 8$ y $r = 6$