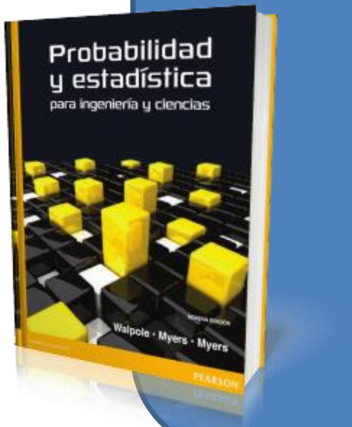
Tema 5: Distribuciones Discretas de Probabilidad



w – Cap 5

Repaso:

- Vimos cómo se pueden calcular probabilidades de ocurrencia de eventos a partir de la **Estadística descriptiva** ⇒ **Análisis de datos** tomados de una muestra del objeto de estudio.

  Distribuciones empíricas: Tablas, Gráficos, Histogramas.

$$P(A) = \frac{n}{N} = fr \rightarrow Tablas\ de\ frecuencias\ relativas$$

- Vimos que algunos parámetros estadísticos como por ejemplo la media aritmética de una muestra $\overline{X}$ se pueden expresar en términos de Probabilidad.

$\overline{X}$	$\rightarrow$	$E(x) = \mu$
Proceso muestral	$\downarrow$	**Esperanza** (valor esperado de la población)
	Inferencia estadística	

La **inferencia estadística** es el conjunto de métodos y técnicas que permiten inducir, a partir de la información empírica proporcionada por una **muestra**, cuál es el comportamiento de una determinada **población** con un riesgo de error medible en términos de probabilidad.

$S^2 \rightarrow V(x) = \sigma^2$

$S \rightarrow \sigma$

$V.A.D$	$\rightarrow$	Función de Distribución	|	VAD → f.d.
$V.A.C.$	$\rightarrow$	Función de Densidad de Probabilidad	|	VAC → f.d.p

- Vimos que con las funciones de distribución o función de densidad de probabilidad se pueden calcular probabilidades de eventos.

Ej:

$X \quad \rightarrow \quad V.A.C$

$P(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x)\,dx$ → f.d.p de V.A.C

$X \quad \rightarrow \quad V.A.D$

$P(X \geq 2) = \sum_2^{\infty} f(x)$ → f.d. de V.A.D

Vamos ahora a estudiar en más detalle estas *f(x)* (funciones de distribución) para V.A.D:

- Distribución Uniforme
- Distribución Binomial
- Distribución Hipergeométrica

Distribuciones Discretas de probabilidad

Describen el comportamiento de una *V.A.D.* por su distribución de probabilidad o cuantía.

- **<u>Distribución uniforme</u>**

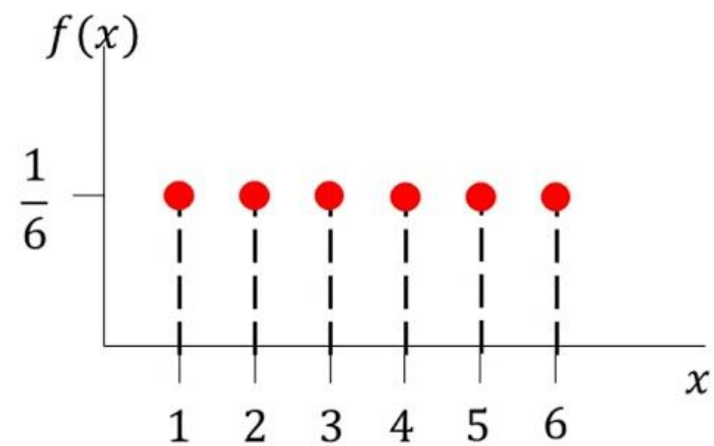
  Cada uno de los elementos del espacio muestral toma probabilidades idénticas.

Distribución uniforme discreta

Muy común en juegos de azar.

Todos los elementos tienen la misma probabilida de ocurrencia.

Valor	Probabilidad
x=1	1/6
x=2	1/6
x=3	1/6
x=4	1/6
x=5	1/6
x=6	1/6



$$f(x,k) = \frac{1}{k} \quad ; \quad x = x_1, x_2, ..., x_k \quad k \text{ elementos del espacio muestra.}$$

$$E(x) = \mu = \sum_{1}^{k} x\, f(x,k) = \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} x$$

$$V(x) = \sigma^2 = \sum_{1}^{k} (x-\mu)^2\, f(x,k)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} (x-\mu)^2$$

<u>Ejemplo 1</u>.
Arrojar una moneda siendo X el número de caras

$$f(x,k) = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$$

<u>Ejemplo 2</u>.
Arrojar un dado y observar el resultado de la cara superior.

$$f(x,k) = \frac{1}{k} = \frac{1}{6}$$

Calcule la Esperanza y la varianza para los ejemplos 1 y 2

Ejemplo 1.

$$E(x) = \mu = \frac{1}{k}\sum_{1}^{k} x = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{1}^{k}(x - \mu)^2 = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 2.

$$E(x) = \mu = \frac{1}{k}\sum_{1}^{k} x = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{1}^{k}(x - \mu)^2 = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6}\left(x - \frac{21}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\left[\left(1 - \frac{21}{6}\right)^2 + \dots + \left(6 - \frac{21}{6}\right)^2\right]$$
$$= \frac{35}{12}$$

- **Distribución binomial**

  Los resultados de cada una de las pruebas se clasifican en dos categorías.

  - Pruebas repetidas con 2 resultados posibles (dicotómica: éxito o fracaso).
  - Las pruebas son independientes. El resultado de la anterior no incide en el resultado de la próxima prueba.
  - La probabilidad no varía para cada prueba.
  - Extracción con reemplazo si n es finito.
  - $p = constante.$
  - $E(x) = n.p$
  - $V(x) = n.p.q$

En este caso se dice que la variable aleatoria *X* sigue un **Proceso de Bernoulli**

- El experimento consiste en *n* pruebas que se repiten.
- Es dicotómica (éxito o fracaso).
- La probabilidad de éxito se mantiene constante en cada prueba.
- Las pruebas que se repiten son independientes.

Ejemplo 3: Selección aleatoria de tres artículos de un proceso de fabricación para luego ser clasificados como "D" Defectuoso; "N" No defectuoso. Sea *X* el número de artículos defectuosos. Obtener *f(x)* sabiendo que la máquina tiene una probabilidad de fabricar un artículo defectuoso del 20%.

Espacio muestral *S = {NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD}*

Función de distribución: Tabla con los pares $(x, f(x))$

Evento	*X*	*Prob.*
NNN	0	*0,8. 0,8. 0,8*
NND	1	*0,8. 0,8. 0,2*
NDN	1	*0,8. 0,2. 0,8*
DNN	1	*0,2. 0,8. 0,8*
NDD	2	*0,8. 0,2. 0,2*
DND	2	*0,2 .0,8. 0,2*
DDN	2	*0,2. 0,2. 0,8*
DDD	3	*0,2. 0,2. 0,2*

$$P(x=0) = 0{,}8^3$$

$$P(x=1) = 3.0{,}2.0{,}8^2$$

$$P(x=2) = 3.0{,}2^2.0{,}8$$

$$P(x=3) = 0{,}2^3$$

$$f(x) = \binom{3}{x} 0{,}2^x . 0{,}8^{(3-x)}$$

$$\boxed{f(x) = \binom{n}{x} p^x . q^{(n-x)} \qquad siendo: \quad q = 1 - p}$$

$$E(x) = n.p$$

$$V(x) = n.p.q$$

Ejemplo 4: En el Acceso Norte de la ciudad de Paraná se ha comprobado que durante el fin de semana el 75% de los vehículos que circulan provienen del interior de la provincia. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los próximos cinco vehículos no sean del interior?

<u>Solución</u>: ¿Es VAD?

No hay vínculo entre el pasaje de dos vehículos sucesivos.

¿Responde al modelo de Bernoulli?

- El experimento consiste en *n* pruebas que se repiten.

Pasaje de vehículos en el Acceso

- Es dicotómica (éxito o fracaso).

El vehículo es del interior o no lo es.

- La probabilidad de éxito se mantiene constante en cada prueba.

No cambia la prob. de que el próximo vehículo sea del interior si el vehículo que pasó antes lo era.

- Las pruebas que se repiten son independientes.

CUMPLE TODOS LOS CRITERIOS DEL PROCESO DE BERNOULLI

Distribución Binomial

$$f(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} \quad ; \quad x\text{: } V.A.D.\ número\ de\ vehiculos\ de\ la\ Capital.$$

Ejemplo 4: En el Acceso Norte de la ciudad de Paraná se ha comprobado que durante el fin de semana el 75% de los vehículos que circulan provienen del interior de la provincia. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los próximos cinco vehículos no sean del interior?

$$f(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)} \quad ; \; x\text{:} \; V.A.D. \; número \; de \; vehiculos \; de \; la \; Capital.$$

x: 2 vehículos

n: 5 vehículos

p: 0,25

q: 0,75

$$f(2;5{,}0{,}25) = \binom{5}{2} 0{,}25^2 . 0{,}75^3 = \underline{0{,}26}$$

Ejemplo 5: De una urna que contiene 6 bolillas rojas (**6R**) y 2 bolillas negras (**2N**) encontrar la función de distribución para la variable aleatoria *x* = número de bolillas negras si se extraen cinco bolillas con reposición.

Solución: ¿Responde al modelo de Bernoulli?

- El experimento consiste en *n* pruebas que se repiten. Sí, *n = 5*
- Es dicotómica (éxito o fracaso). Sí, Sale **R** ó **N**, **R** -> fracaso, **N** -> éxito
- La probabilidad de éxito se mantiene constante en cada prueba. Sí, porque cada vez que sacamos una bolilla, la reponemos para la próxima extracción
- Las pruebas que se repiten son independientes.

Que haya salido **R** en la extracción anterior no condiciona el resultado de la siguiente porque la bolilla extraída se repone a la caja.

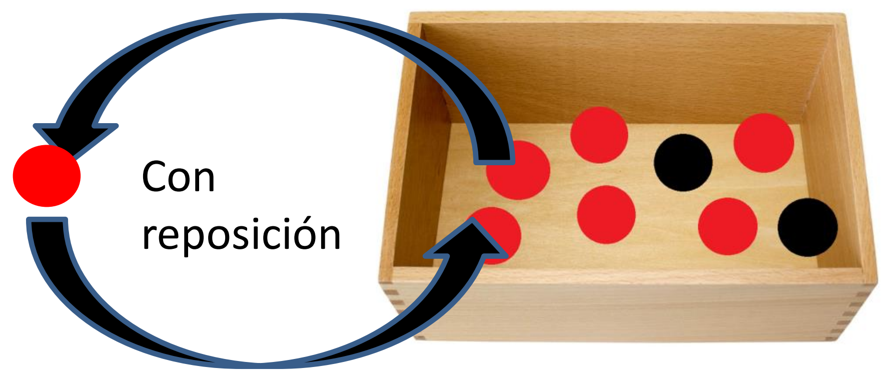
x: N° de bolillas **N**

n: 5 extracciones

p: 0,25

q: 0,75

$$f(x;5{,}0{,}25)=\binom{5}{x}0{,}25^{x}.0{,}75^{(5-x)}=$$

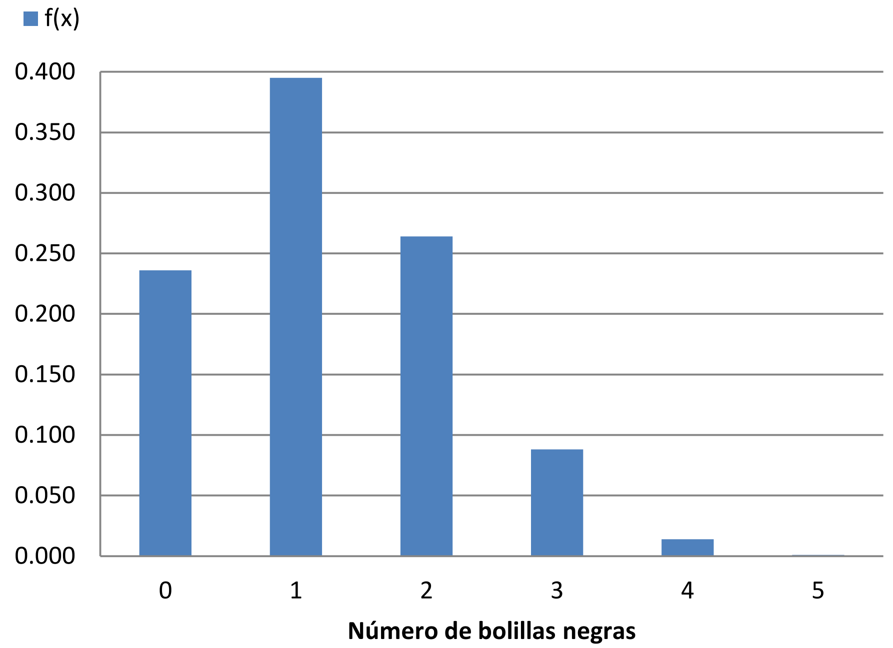


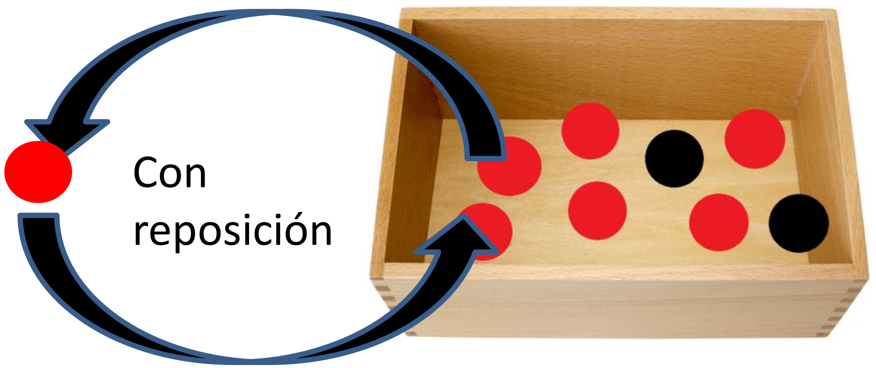
Ejemplo 5: De una urna que contiene 6 bolillas rojas (**6R**) y 2 bolillas negras (**2N**) encontrar la función de distribución para la variable aleatoria *x* = número de bolillas negras si se extraen cinco bolillas con reposición.

$$f(x; 5{,}0{,}25) = \binom{5}{x} 0{,}25^{x} . 0{,}75^{(5-x)}$$

Función de distribución:

x	$f(x)$
0	0,236
1	0,395
2	0,264
3	0,088
4	0,014
5	0,001





Ejemplo 5 (bis): De una urna que contiene 6 bolillas rojas (**6R**) y 2 bolillas negras (**2N**) encontrar la función de distribución para la variable aleatoria *x* = número de bolillas negras si se extraen cinco bolillas SIN reposición.

- **Distribución Hipergeométrica**

Como no importa el orden usamos **COMBINATORIA**

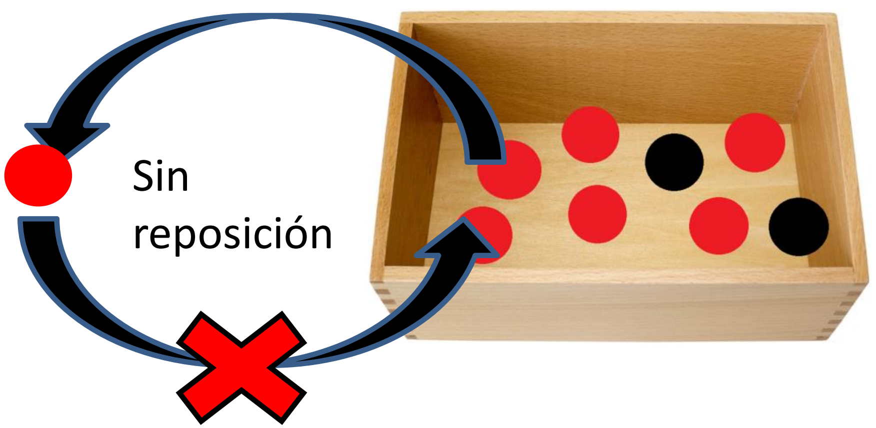
$$f(0) = \frac{n_1 \, . \, n_2}{N} = \frac{\binom{2}{0}\binom{6}{5}}{\binom{8}{5}} = 0{,}107$$

$$f(1) = \frac{n_1 \, . \, n_2}{N} = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{4}}{\binom{8}{5}} = 0{,}536$$

$$f(2) = \frac{n_1 \, . \, n_2}{N} = \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{3}}{\binom{8}{5}} = 0{,}357$$

Tabla de distribución:

x	*f(x)*
0	*0,107*
1	*0,536*
2	*0,357*



- **Distribución Hipergeométrica**

Una V. A. x tiene distribución Hipergeométrica si el resultado del experimento consiste en pruebas DEPENDIENTES, es decir, no se cumplen los postulados de Bernoulli:

- Las probabilidades de éxito cambian de una prueba a otra.
- El resultado de una prueba depende del resultado de la prueba anterior.

Esto ocurre cuando las extracciones son SIN REEMPLAZO y el número de elementos es finito.

éxitos

fracasos

$$\boxed{H(x;N,n,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

N: N° total de elementos.

n: N° de extracciones o pruebas

k: N° de elementos de éxito.

x: N° de éxitos de la prueba.

$$E(x) = \frac{n.k}{N} \qquad V(x) = \left(\frac{n.k}{N}\right)\underbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{k}{N}}^{p}\right)}\underbrace{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}_{1}$$

¿Qué pasa si N $\longrightarrow \infty$? $\quad n \ll N$

$$\frac{k}{N} = p \rightarrow ctte \qquad E(x) \rightarrow n.p \qquad V(x) \rightarrow \overbrace{n.p}.q$$

$$\boxed{H(x;N,n,k) \rightarrow b(x;n,p)}$$