

Tema 6: Distribuciones Continuas de Probabilidad



w – Cap 6

Veremos en este tema los modelos teóricos de las Distribuciones de densidad de probabilidad de Variable Aleatoria Continua - VAC.

- Distribución Uniforme
- Distribución Normal
- Distribución Gamma y Exponencial.
- Distribución Chi Cuadrada
- Distribución Weibull

- **Distribución uniforme**

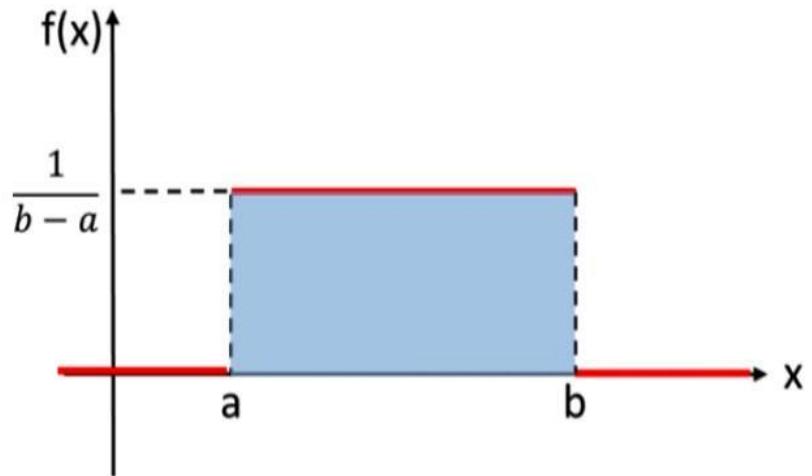
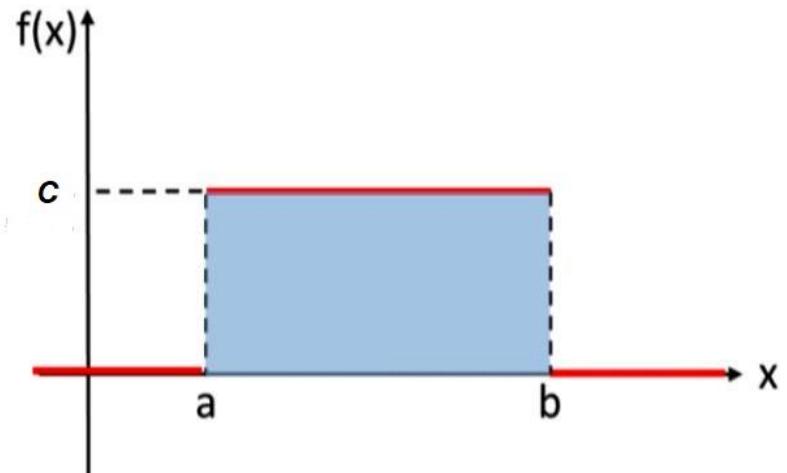
Al igual que en una VAD, la Distribución Uniforme de una VAC se puede utilizar cuando la $f(x)$ es plana, es decir, la probabilidad es uniforme en un intervalo de la VAC.

$$f(x, k) = \begin{cases} C, & a < x < b \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

¿Cuánto debe valer la constante C para que $f(x)$ sea una f.d.p.?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_a^b C dx = 1$$

$$C \cdot x \Big|_a^b = 1 \rightarrow C \cdot (b - a) = 1 \rightarrow C = \frac{1}{b - a}$$



Ejemplo 1.

Un salón de reuniones está disponible 3 horas por día. Las reuniones tiene diferente duración dentro de ese lapso de tiempo. ¿Cuál es la probabilidad que una reunión dure entre 1 hora y 2 horas?

Solución:

Como no hay ninguna mención a diferencias en la probabilidad de la duración de las reuniones entonces todas las duraciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia en ese intervalo de tiempo (VAC). Podemos utilizar la Distribución uniforme de VAC.

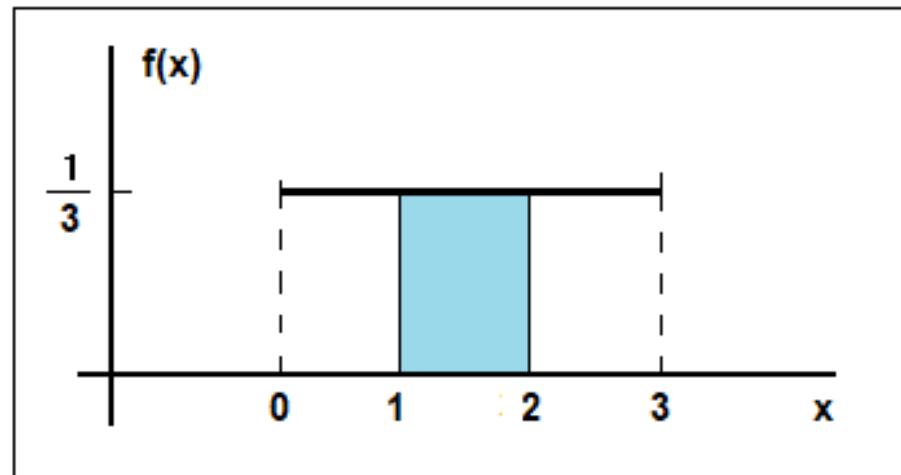
Si el salón está disponible 3 horas por día, las duraciones pueden ser desde 0 hs hasta 3 hs

$$a = 0, \quad b = 3, \quad C = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-0} = \frac{1}{3}$$

$$P(1 < x < 2) =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{3-0}\right) dx =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} x \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2 - 1) = \frac{1}{3}$$



Esperanza y Varianza de una Distribución uniforme continua:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot C \cdot dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b =$$

$$E(x) = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{1}{2(b-a)} (b+a)(b-a) =$$

$$E(x) = \frac{1}{2} (b + a)$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot C \cdot dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{1}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{b-a} =$$

$$b^3 + 0b^2a + 0ba^2 - a^3 \quad | \quad b - a$$

$$\begin{array}{r}
 b^3 + 0b^2a + 0ba^2 - a^3 \\
 \underline{-} \quad \underline{-b^2a} \\
 \hline
 b^2a \quad +0ba^2 \\
 \underline{-} \quad \underline{-ba^2} \\
 \hline
 ba^2 \quad -a^3 \\
 \underline{-} \quad \underline{-a^3} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$b-a$
 $b^2 + ba + a^2$

$\frac{b^3 - a^3}{b - a} = b^2 + ba + a^2$

$$E(x^2) = \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2), \quad E(x) = \frac{1}{2}(b + a)$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - \left[\frac{1}{2}(b + a)\right]^2 = \frac{(b^2 + ba + a^2)}{3} - \frac{(b + a)^2}{4}$$

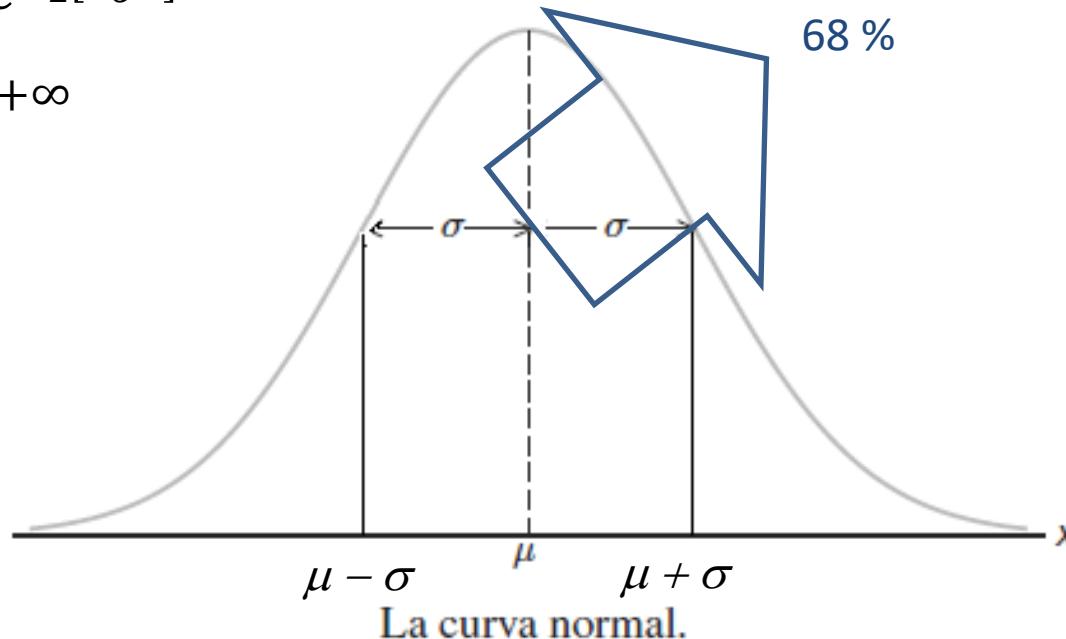
$$V(x) = \frac{4(b^2 + ba + a^2) - 3(b^2 + 2ba + a^2)}{12} = \frac{b^2 - 2ba + a^2}{12} = \frac{(b - a)^2}{12}$$

$V(x) = \frac{(b - a)^2}{12}$

- **Distribución normal**

La distribución de probabilidad continua más importante en todo el campo de la estadística. Su gráfica se denomina ‘curva normal’ o ‘gaussiana’ en honor de Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien también derivó su ecuación a partir de un estudio de errores en mediciones repetidas de la misma cantidad. Es la curva con forma de campana, la cual describe de manera aproximada muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

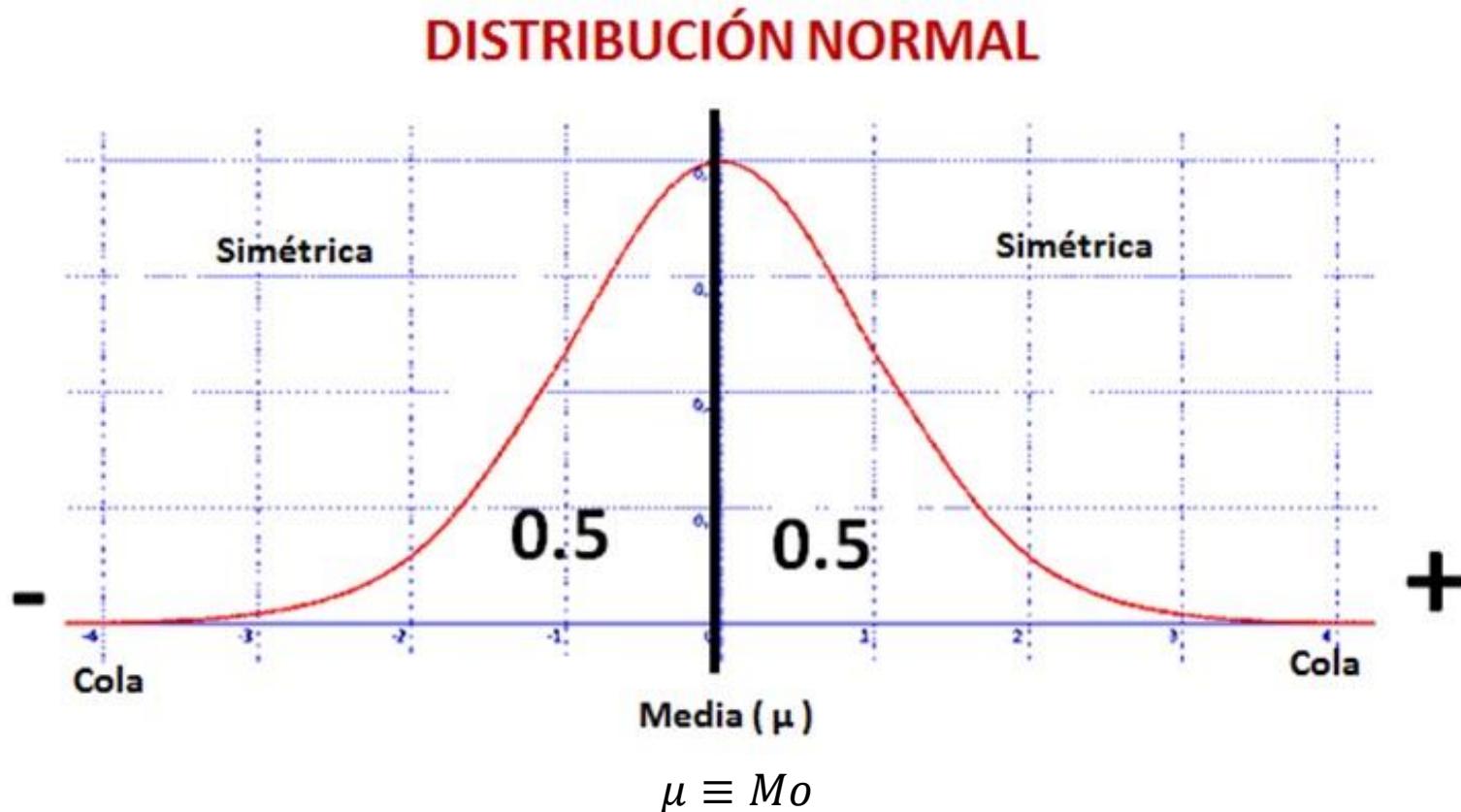
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}$$
$$-\infty < x < +\infty$$



Propiedades

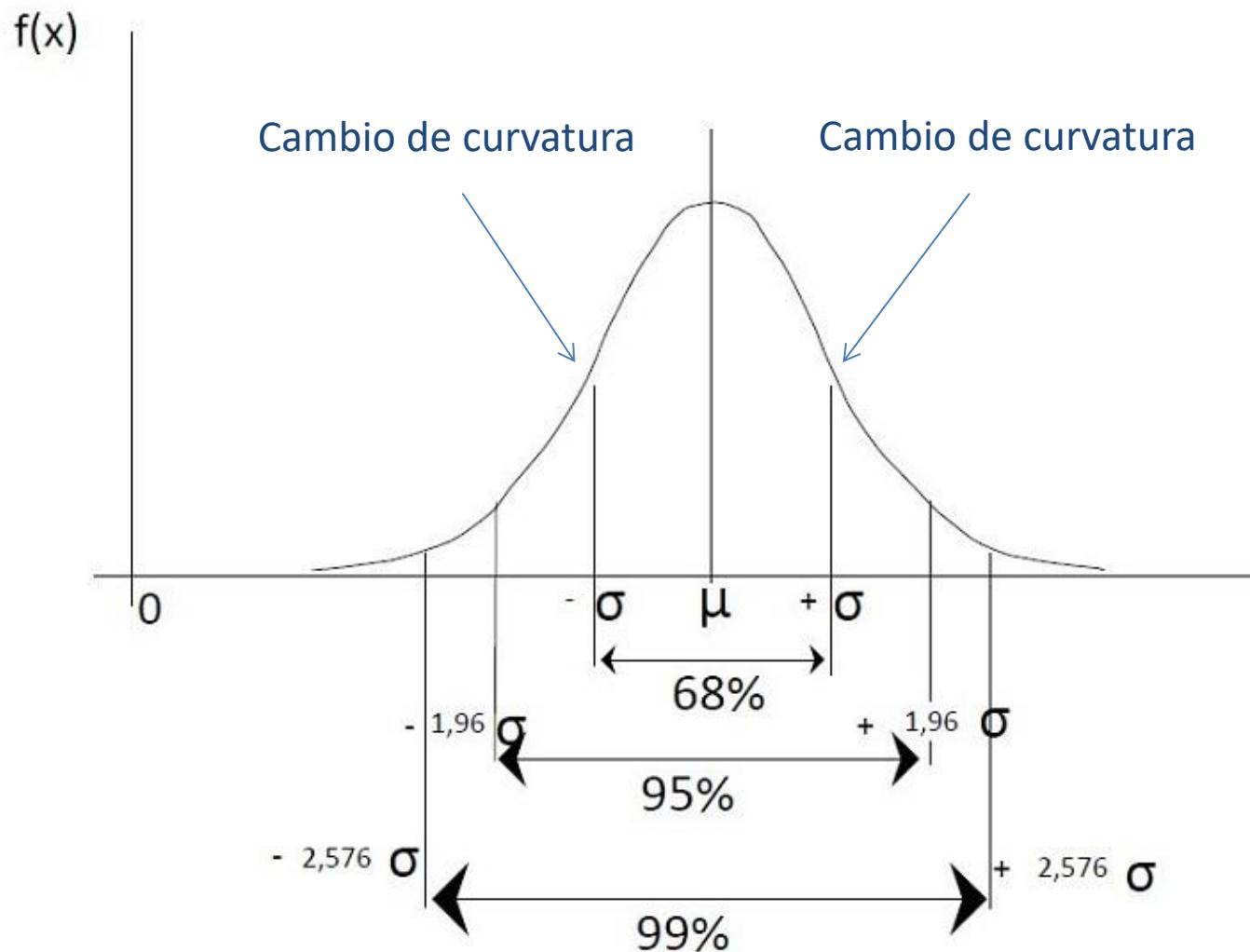
1° La moda ocurre cuando $x = \mu$

2° Simetría: La curva es simétrica alrededor del eje vertical donde $x = \mu$



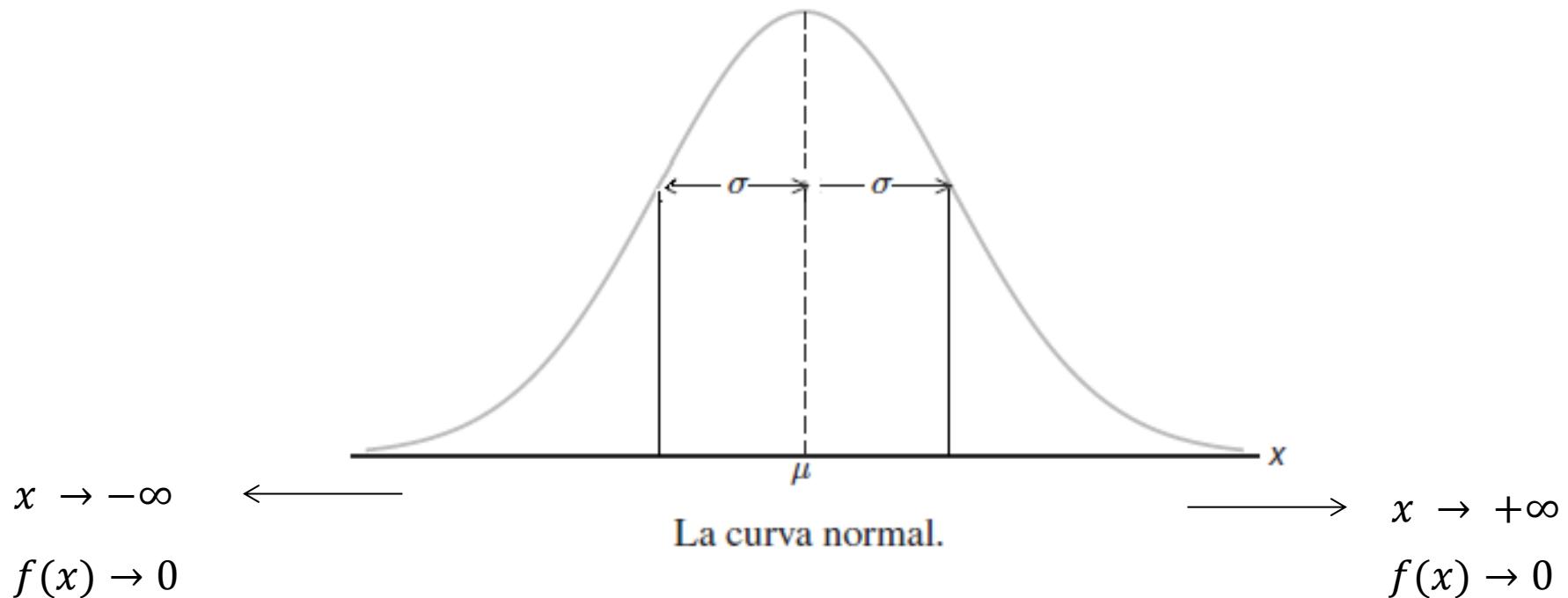
Propiedades

3º puntos de inflexión



Propiedades

4° Tendencias

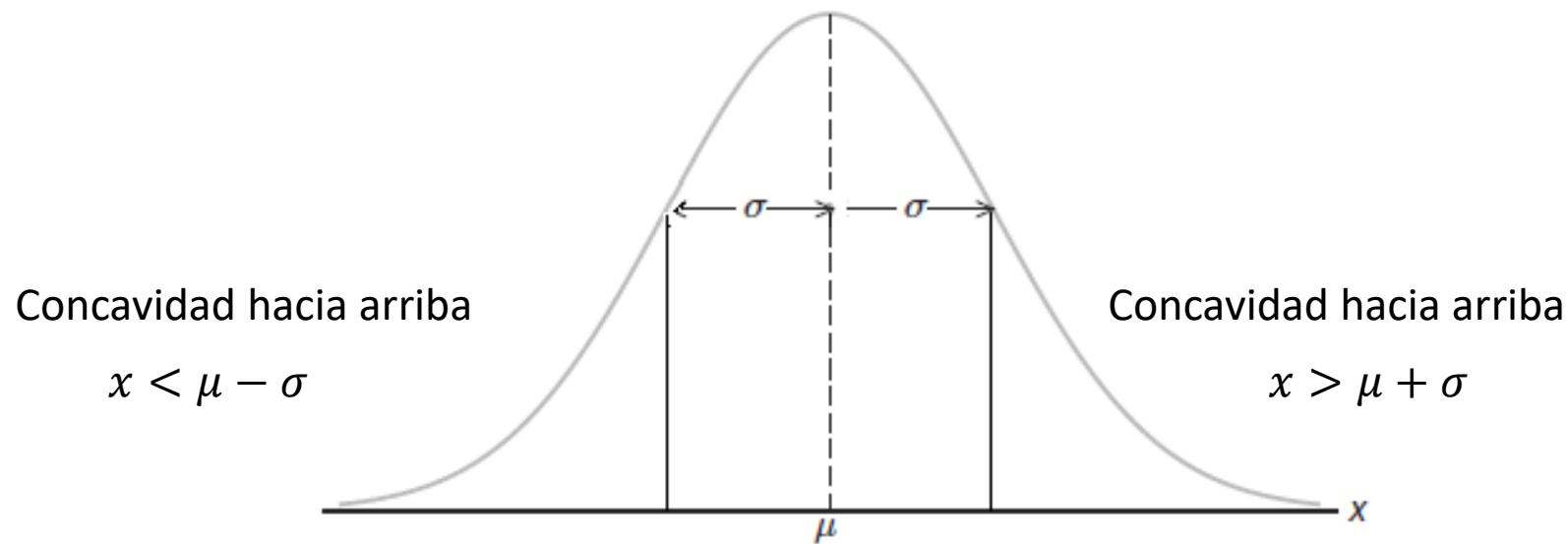


Propiedades

5° Concavidad

Concavidad hacia abajo

$$\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$$



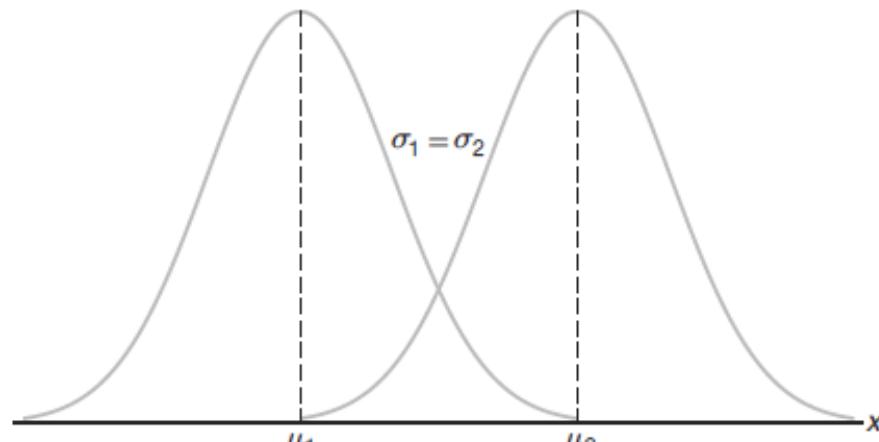
La curva normal.

6° Área bajo la curva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx = 1$$

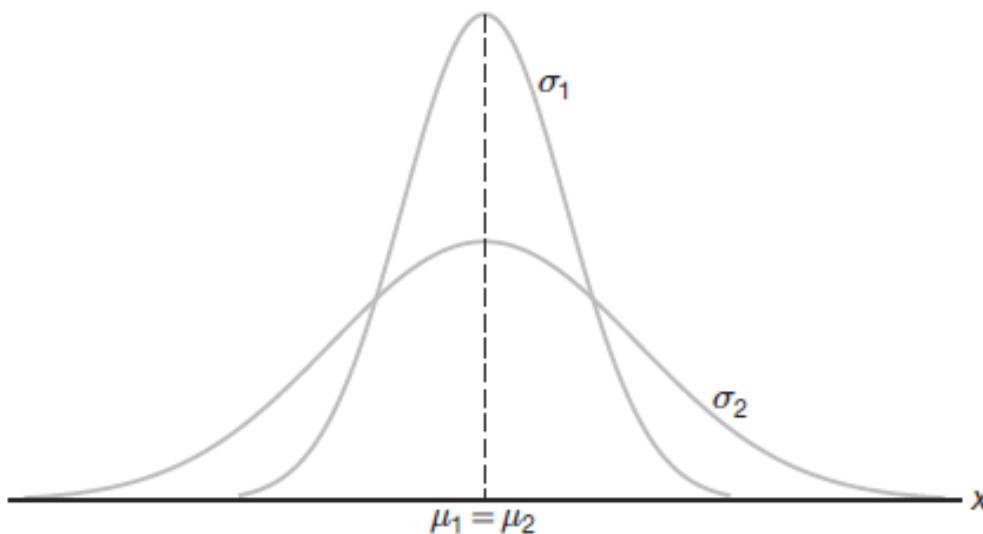
Rol de los Parámetros

Diferentes medias
con igual desvío estándar



: Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$.

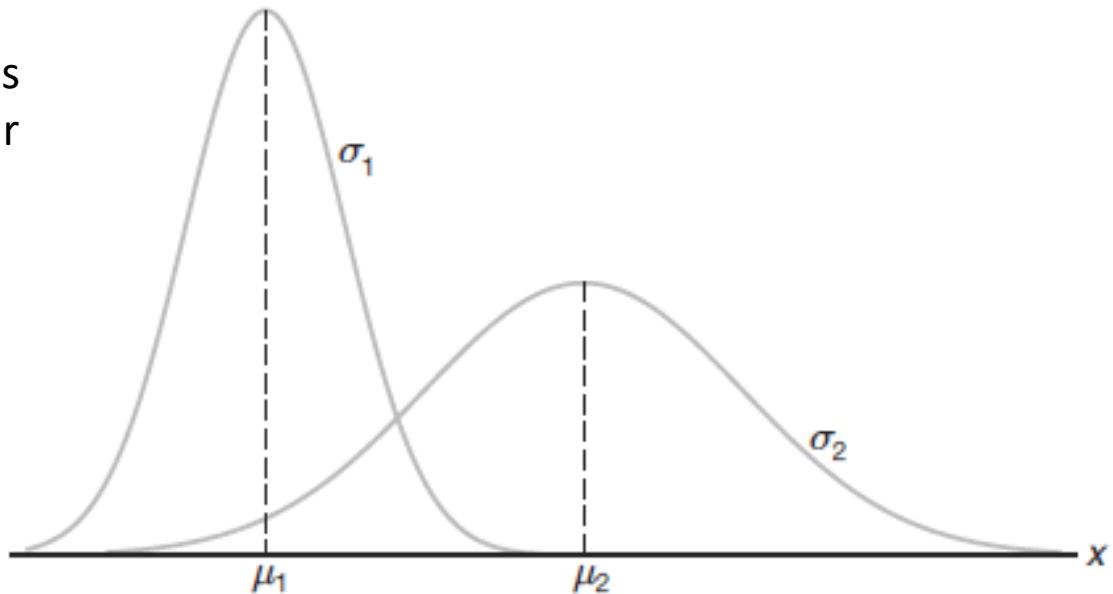
Diferentes desvío estándar
con igual valor medio



Curvas normales con $\mu_1 = \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

Rol de los Parámetros

Diferentes medias
y desvío estándar



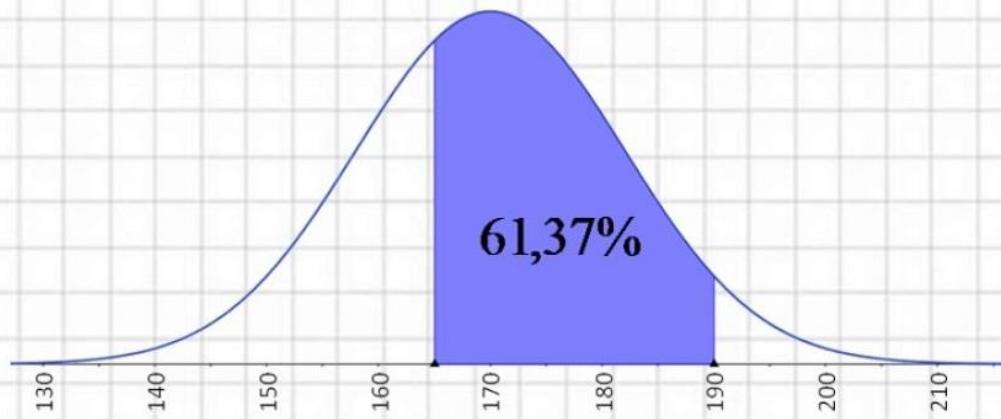
Curvas normales con $\mu_1 < \mu_2$ y $\sigma_1 < \sigma_2$.

Problema

Hallar la integral bajo la curva entre dos valores de la VAC para diferentes problemas se hace muy complejo. Por ejemplo: Alturas de las personas con una μ de 170 cm y un desvío estándar de 12 cm. ¿Qué porcentaje de la población mide entre 165 cm y 190 cm?

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx = ?$$

¿Qué porcentaje de esa población mide entre 165 y 190 cm?



$$\int_{165}^{190} \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-170}{12}\right)^2} dx = 0,6137$$

La curva normal estandarizada:

Por fortuna, podemos transformar todas las observaciones de cualquier variable aleatoria normal X en un nuevo conjunto de observaciones de una variable aleatoria normalizada Z con media 0 y varianza 1 . Esto se puede realizar mediante la transformación:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

De esta forma, la integral de la $f(x)$ pasa a transformarse en la integral de $f(z)$. Al hacer esta transformación se anula uno de los parámetros:

$$x = \mu + \sigma.z$$

$$dx = \sigma.dz$$

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx =$$

$$P(x_1 < x < x_2) = P(z_1 < z < z_2)$$

$$P(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}[z]^2} \cancel{\sigma}.dz$$

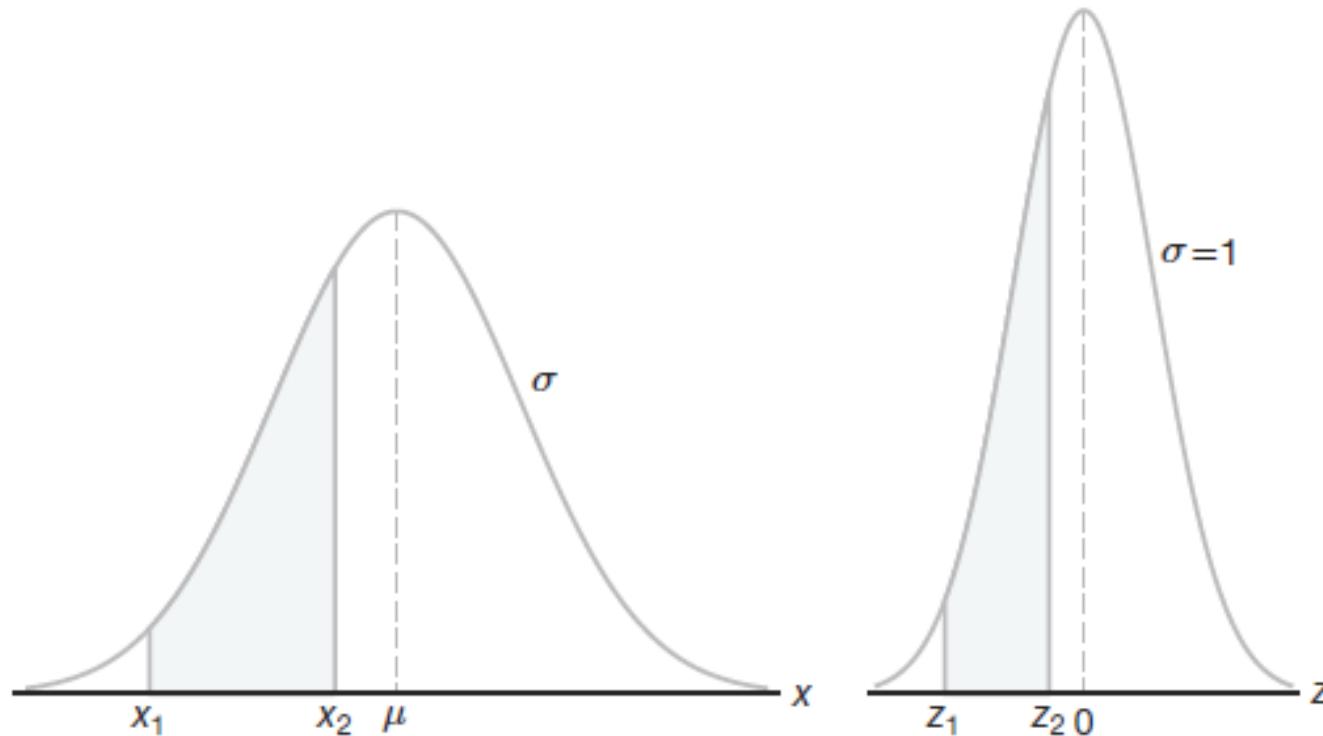
$$\left. \begin{array}{l} z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \\ z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} \end{array} \right\}$$

Y es fácil tabular las áreas bajo la curva cuando solo depende de la variable Z

La distribución normal estándar tiene entonces:

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$



Distribuciones normales original y transformada.

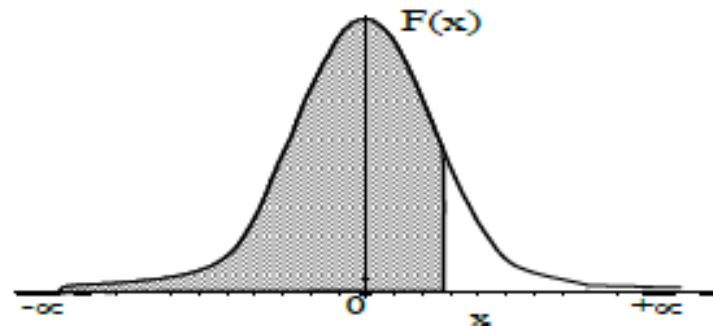
Se pueden tabular las $F(z)$, 'funciones acumuladas de la variable normalizada Z'

De esta forma: $P(x_1 < x < x_2)$ se transforma en $P(z < z_2) - P(z < z_1)$

Buscando los valores de z_1 y z_2 en la tabla.

Distribución

$$\text{Normal } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Tabla de áreas bajo la curva $F(z)$

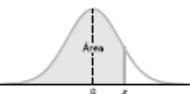


Tabla A.3 Áreas bajo la curva normal

<i>z</i>	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5090	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tabla A.3 (continuación) Áreas bajo la curva normal

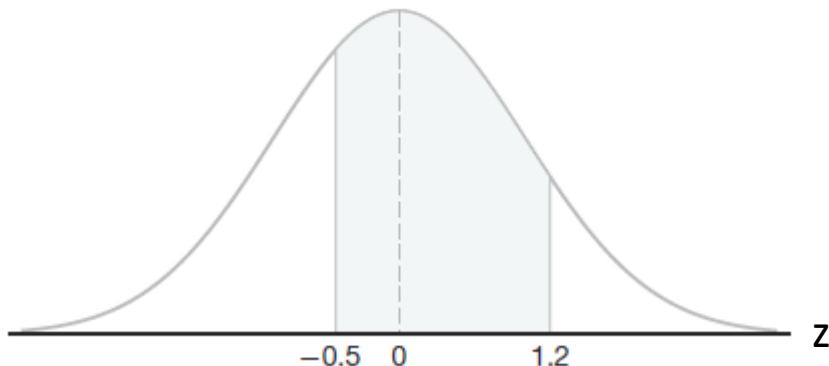
Ejemplo 2.

Dada una variable aleatoria X que tiene una distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 10$, calcule la probabilidad de que X tome un valor entre 45 y 62.

Solución: Los valores z que corresponden a $X_1 = 45$ y $X_2 = 62$ son

$$z_1 = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

$$z_2 = \frac{62 - 50}{10} = 1.2$$



Por tanto: $P(45 < x < 62) = P(-0.5 < z < 1.2) = P(z < 1.2) - P(z < -0.5)$

De tabla: $P(z < 1.2) = 0.8849$ $P(z < -0.5) = 0.3085$

$$P(45 < x < 62) = 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$$