Licenciatura en Sistemas de Información - FCyT - UADER

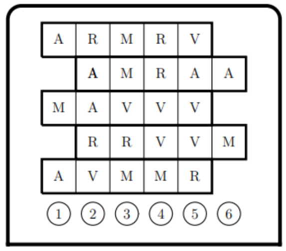
Matemática Discreta - Examen Final 12/02/2025

RECUERDE QUE DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.

Apellido y nombre:

Ejercicio 1 (20 puntos):

Un juego electrónico tiene una pantalla formada por 25 celdas iguales, dispuestas tal y como muestra la figura. Dichas celdas están coloreadas de manera que, en todo momento, 6 son rojas (R), 7 son verdes (V), 6 son azules (A) y 6 son magenta (M).



a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir los colores en la pantalla del juego, dado que hay 6 celdas rojas, 7 verdes, 6 azules y 6 magenta?

b) Debajo de la pantalla hay seis botones marcados del 1 al 6. Un jugador puede presionar una secuencia cualquiera de botones, con la única condición de que no se puede presionar el mismo botón dos veces **consecutivas**. Por ejemplo, si la secuencia es de 3 pulsaciones, podría presionar 156 o 352, pero no podría presionar 112 o 366. ¿Cuántas secuencias distintas de n pulsaciones puede efectuar un jugador?

Ejercicio 2 (15 puntos):

El polinomio característico de una RR lineal homogénea de orden 2 es: $P(x) = (x-3)(x+1)$. Además, se conocen los dos primeros términos de la sucesión, $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$. Se pide:

a) Escriba la definición recursiva.

b) Halle los primeros 5 elementos de la sucesión.

c) Resuelva la RR con las condiciones iniciales dadas, pero que sea **no homogénea** con $f(n) = 3n$.

Ejercicio 3 (25 puntos):

a) Simplifique la siguiente expresión booleana: $x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

b) Dadas las variables booleanas x, y y z, resuelva las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} x + yz = 1 \\ x\bar{y} + z = 0 \\ \bar{x} + y + \bar{z} = 1 \end{cases}$$

c) Sea c un número entero y la ecuación diofántica $220x + 168y = c$, ¿para qué valores de c la ecuación tiene solución? Resuelva la ecuación para **algún** valor de $c > 0$.

Ejercicio 4 (25 puntos):

a) Calcule el resto de dividir 32^{2025} por 10.

b) Si 2025 es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el menor múltiplo de él que sea también un cuadrado perfecto divisible por 66?

c) ¿Cuantos inversos multiplicativos tiene el anillo Z_{2025}?

d) ¿El elemento 2^{23} es un elemento unidad en el anillo Z_{2025}? En caso afirmativo, halle su inverso multiplicativo.

Ejercicio 5 (15 puntos):

a) Si en la división entera entre b y q el cociente es 10 y el resto es 7, y el resto de la división entera de c por 5 es 3, halle el resto de la división entera de $(b - 2c - 18)$ por 10.

b) Si es posible, halle $n \in \mathbb{N}$ tal que $mcd(5n+3, 2n+1) = 3$, de lo contrario justifique si ello no es posible.

c) Construya una máquina de estados finitos que reconozca solamente a todas las cadenas del lenguaje $\{0\}^+\{1\}\{0,1\}^*\{111\}$.

SOLO ESTUDIANTES LIBRES — Ejercicio 6 (20 puntos):

Probar que para todo número impar n, el número $n^2 - 1 \equiv 0$ módulo 8.