Análisis Matemático I

Series de Potencias

utn facultad regional paraná
utnfrp
utnparana

Almafuerte 1033
(3100) Paraná - E. Ríos
Tel:054-343-4243054/4243694
Fax: 54-343-4243589

11.8 **Series de potencias**

Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

x: variable

C_n: constantes

Si a la variable x le damos un valor la Serie de Potencias se convierte en una ***serie numérica infinita*** que podría ser ***Convergente*** *o* ***Divergente***.

Para cada valor de $\boldsymbol{x}$ para el cual converge, la Serie de Potencias representa un número que es la ***suma de la Serie de Potencias.***

11.8 Series de potencias

Luego, la serie de potencias representa una FUNCIÓN $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ que llamamos ***suma de la serie*** y que tiene como ***dominio*** al conjunto de valores de ***x*** para los cuales la serie de Potencias ***Converge.***

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

Observamos que *f(x)* es una función polinomial con infinitos términos

11.8 Series de potencias

Dadas las Series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

- Todas son CONVERGENTE para $x=0$
- Algunas CONVERGEN para todo x
- Otras CONVERGEN en un intervalo de radio ***R*** tal que:

$Si\ |x| < R\ \ la\ serie\ \ es\ CONVERGENTE$ $\longrightarrow$ ***R*: *RADIO DE CONVERGENCIA***

Podemos escribir: $-R < x < R$

Si $x = R,\ x = -R$ la serie puede ser *CONVERGENTE o DIVERGENTE*

Dando las siguientes posibilidades para el ***INTERVALO DE CONVERGENCIA***

$$[-R, R] \quad , \quad (-R, R) \quad , \quad [-R, R) \quad , \quad (-R, R]$$

V EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|$$

$= \infty|x|$ < 1 La expresión debe ser menor que 1 para que sea convergente por criterio del cociente

$$|x| < \frac{1}{\infty}$$

$|x| < 0$ Por lo tanto para el único valor que la serie es convergente es $\boldsymbol{x=0}$

Radio de Convergencia de una Serie de Potencias

Estudiar la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es equivalente a estudiar la serie de los módulos $\sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$

Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1$$

El límite debe ser menor que 1 para que sea convergente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \Longrightarrow |x| < R$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}}$$

Radio de Convergencia

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right| = \left|x^2\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{4(n+1)^2}\right| = \left|x^2\right| * 0 < 1$$

De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Serie de potencias de *(x-a)*

Más generalmente, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

V EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}n}{(n+1)(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}n}{(n+1)(x-3)^n}\right| \quad = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)n}{n+1}\right|$$

$$= |x-3| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \quad = |x-3| * 1$$

Según el criterio del cociente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ la serie es convergente

Por lo tanto si $|x-3| * 1 \quad < \quad 1$ La serie será convergente

$$|x-3| * 1 \quad < \quad 1$$

$$|x-3| \quad < \quad 1 \longrightarrow$$ Radio de convergencia

Para encontrar el intervalo de convergencia, operamos

$$|x-3| < 1 \qquad -1 < x-3 < 1 \qquad 2 < x < 4$$

de modo que la serie converge cuando $2 < x < 4$

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x-3| = 1$ de modo que debemos considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado.

Consideramos ahora los extremos del intervalo.

Reemplazando $x=2$ en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

Obtenemos la serie numérica infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Sabemos que es convergente analizada por el criterio de serie Alternante

Reemplazando $x=4$ en la serie, obtenemos la serie numérica infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sabemos que la serie armónica es divergente

Por lo tanto el ***intervalo de convergencia*** es $2 \le x < 4$

O también $[2,4)$

3 **Teorema** Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

ii) La serie converge para toda x.

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

Para $x = a \pm R$

Las posibilidades para el intervalo de convergencia son:

$(a-R, a+R)$ $(a-R, a+R]$ $[a-R, a+R)$ $[a-R, a+R]$

La situación se ilustra en la figura 3.

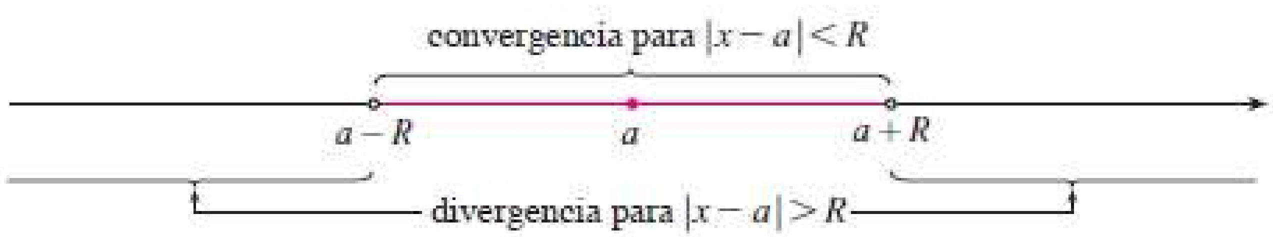

FIGURA 3

V **EJEMPLO 5** Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

MUCHAS GRACIAS