Licenciatura en sistemas de información - FCyT - UADER

Matemática Discreta - Examen final - 15/12/2021

RECUERDE QUE DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS.

Alumno:..

Problema 1 (8+5+8 puntos):

a) Se desea distribuir 15 gaseosas de la misma marca, sabor y tamaño; y 20 facturas diferentes entre 8 chicos. Calcular la cantidad de formas de hacerlo, considerando que cada chico recibe al menos una gaseosa.

b) Determinar el coeficiente de $a^3b^3c^4$ en el desarrollo de $(2a - b + c + d)^{10}$.

c) Contar la cantidad de soluciones enteras no negativas de $x + y + z + w = 40$ sujeta a que z sea divisible por 11.

Problema 2 (5+5+7 puntos):

a) Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y los lenguajes $A = \{00, 010, \lambda\}$ y $B = \{x \in \Sigma^*/|x| \leq 4 \wedge \; x \textit{ tiene peso menor a 4}\}$. Listar los elementos de BA.

b) Construir una máquina de estados que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:
- Posea un sólo estado sumidero.
- Existan x tal que $\omega(s_0,\ x)$ tenga como sufijo propio 1.
- Posea una submáquina fuertemente conexa.
- No posea estados transitorios.

Problema 3 (15+10 puntos):

a) La siguiente función booleana $f : B^3 \to B$ está definida como $f(x, y, z) = \Sigma m(1, 7)$, donde m indica los mintérminos, es decir las conjunciones fundamentales se pide:
   - I) Construir la tabla de valores de f.
   - II) Hallar la **expresión algebraica** de la forma normal conjuntiva (f.n.c.) de f.

b) Demostrar, utilizando inducción matemática, que para todo natural n se verifica: $3^n + 7^n + 6$ es múltiplo de 8.

Problema 4 (10+17 puntos):

a) Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica $6x + 11y + z = 5$ sujeta a que $x + y = 20$.

b) Hallar las últimas **dos** cifras en el desarrollo decimal de 207^{207}.

Problema 5 (10+10 puntos):

a) Sea el anillo $R_1 = \mathbb{R}^3$ y $R_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$; y dada la función $f : R_1 \to R_2$ tal que $f(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. Analizar si f determina un homomorfirmo sobre los anillos dados bajo las operaciones usuales de ternas en $\mathbb{R}^3$ y matrices en $M(\mathbb{R})$, respectivamente.

b) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = 0, \qquad a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4, \qquad \forall n > 1 \end{cases}$$