Tema 1: PROBABILIDAD

W – Cap 2

Definiciones:

¿Qué entendemos por probabilidad de ocurrencia de algún evento?

Permite ponderar (estimar cuantitativamente) la ocurrencia de un evento futuro con ayuda del análisis del mismo evento ocurrido en el pasado (Estadística).

Usos o aplicaciones

En Economía: Permitir valorar la ocurrencia de un evento en términos económicos, es decir:

Evento negativo: contrastarlo con el costo de evitar que ocurra (si puedo) o pagar o perder dinero (seguros); o reglamentar normas.

Evento positivo: invertir o no dinero para beneficiarse si el evento ocurre (lotería, etc.).

<u>Ejemplos</u>

- Costo de abrir una caja adicional en peaje de autopista o en supermercado.
- Costo de comprar un repuesto de mejor calidad en informática.
- Costo de colocar un semáforo.
- Costo de abrir una agencia en una localidad.
- Costo de habilitar un nuevo cajero automático en bancos, supermercados, facultades.
- Costo de aumentar la resistencia de partes de líneas de transmisión de energía eléctrica en redes.

En la gestión estatal: Vial, Mantenimiento, Urbanismo, Salud.

En las ciencias: Cs. Sociales, Cs. Naturales, Cs. Biológicas, Informática, Ingeniería.

<u>Ejemplos</u>

Definiciones de Probabilidad

- **Definición clásica**: La **probabilidad P** de que suceda un **evento A "P(A)"** de un total de **N** casos posibles igualmente probables es la razón del número de ocurrencias **n** de dicho caso en el pasado y el número total de casos posibles **N**.

$$P(A) = \frac{n}{N} \qquad \frac{casos\ favorables\ del\ evento\ A}{casos\ posibles\ del\ evento\ A}$$

- **Definición como Frecuencia Relativa**: La probabilidad frecuencial o frecuentista hace referencia a la definición de probabilidad entendida como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, cuando el número de casos tiende a infinito.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{f_a}{N} = f_r = P(A)$$

En palabras sencillas, el valor al que tiende la probabilidad de un suceso, cuando repetimos el experimento muchísimas veces.

- **Definición Axiomática**: Se define utilizando la teoría de conjuntos.

Teoría de Conjuntos

La teoría de conjuntos es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas.

Evento:
Suceso que se estudia.
Subconjunto de un Espacio Muestral.

$A_1 = \{impares\}$
$A_2 = \{2, 3\}$

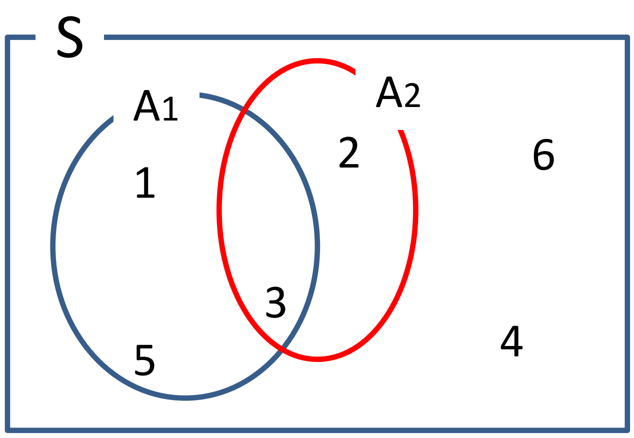
Espacio Muestral (E.M o S):
Conjunto de todos los resultados posibles de un experimento (finito o infinito).

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ej: tirar el dado

Experimento:
Cualquier proceso que genere un conjunto de datos.

Elementos (o Puntos Muestrales):
Dato perteneciente a un Espacio Muestral.



Observación:
Registro de los datos que genera un experimento.

Tipos de datos:
Categóricos (Discretos).
Numéricos (Discretos o continuos).

Definiciones de Probabilidad

Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov, 1933)

La asignación de probabilidad a cada uno de los sucesos considerados en un experimento aleatorio debe ser coherente con las operaciones lógicas entre dichos sucesos. Los axiomas de Kolmogorov establecen las reglas para ello.

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ el espacio medible asociado a un experimento aleatorio.

Una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una **función (medida) de probabilidad** sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ si verifica:

A1: $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{A} \ \rightarrow$ AXIOMA DE NO NEGATIVIDAD

A2: $P(\Omega) = 1 \ \rightarrow$ AXIOMA DEL SUCESO SEGURO

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

A3: $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j \ \Rightarrow \ P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \ \rightarrow$ AXIOMA DE σ – ADITIVIDAD.

Y　　　　Ó

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

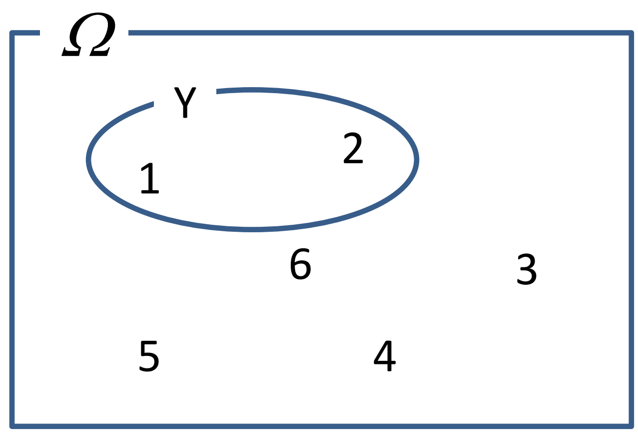
A_1 = {1}

A_2 = {2}

.

.

A_6 = {6}



Definiciones de Probabilidad

Definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov, 1933)

La asignación de probabilidad a cada uno de los sucesos considerados en un experimento aleatorio debe ser coherente con las operaciones lógicas entre dichos sucesos. Los axiomas de Kolmogorov establecen las reglas para ello.

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ el espacio medible asociado a un experimento aleatorio.

Una función $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una **función (medida) de probabilidad** sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ si verifica:

A1: $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$ → AXIOMA DE NO NEGATIVIDAD

A2: $P(\Omega) = 1$ → AXIOMA DEL SUCESO SEGURO

A3: $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$ → AXIOMA DE σ – ADITIVIDAD.

Y Ó

$$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

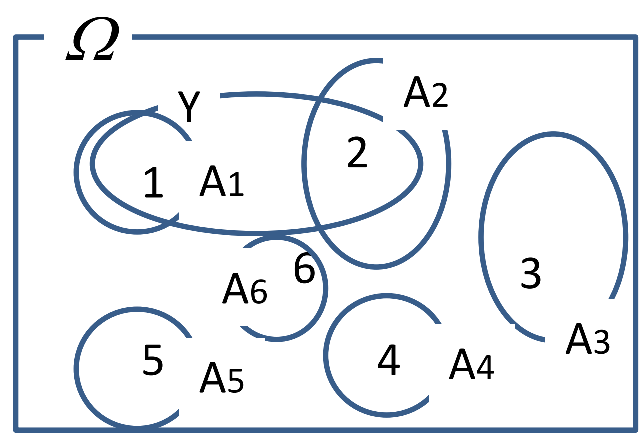
A_1 = {1}

A_2 = {2}

.

.

A_6 = {6}



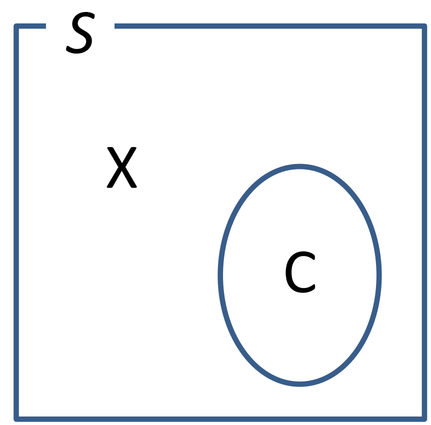
Ejemplo 1: **Lanzar una moneda**

Experimento: Lanzar una moneda al aire 1 vez.

Observación: Dato: Indica el resultado del lanzamiento según lo que observo del experimento.

Elementos: *C* (cara), *X* (seca ó cruz).

Espacio Muestral: $S = \{C, X\}$ Conjunto de todos los elementos o puntos muestrales posibles.



Evento: Suceso Cara (*C*), un subconjunto del *S*.

$$P(C) = \frac{n}{N} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

<u>Ejemplo 2</u>: **Lanzar un dado**

Experimento: Lanzar un dado.

Observación: Dato: Número de puntos que muestra la cara superior del dado

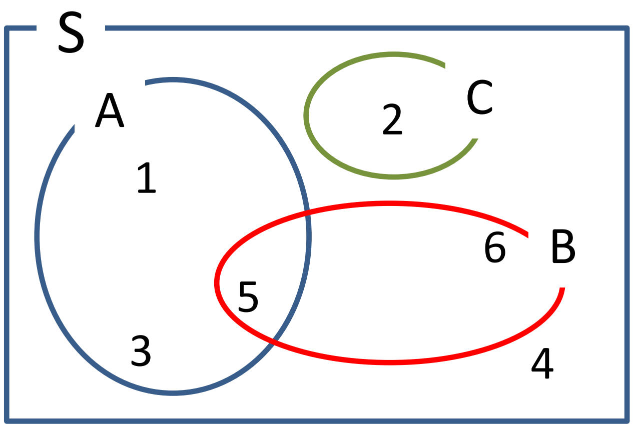
Elementos: *1, 2, 3, 4, 5, 6*.

Espacio Muestral: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ Conjunto de todos los elementos o puntos muestrales posibles.

Eventos: A -> Que salga un número impar.

B -> Que sea mayor que 4. B = {x/x > 4}

C -> que sea un 2. C = {x/x = 2}



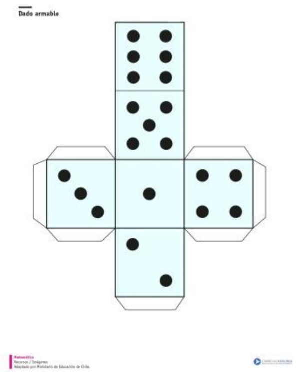
$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{n}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(C) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$$

Se observa que según se define el evento, la probabilidad cambia para el mismo experimento y el mismo espacio muestral.

Si cambiamos el experimento ¿cambia el Espacio Muestral?

Variante del Experimento del ejemplo 2: Lanzar el dado una vez y observar la cara superior e inferior del dado.

S = {1,6; 2,5; 3,4; 4,3; 6,1; 5,2}

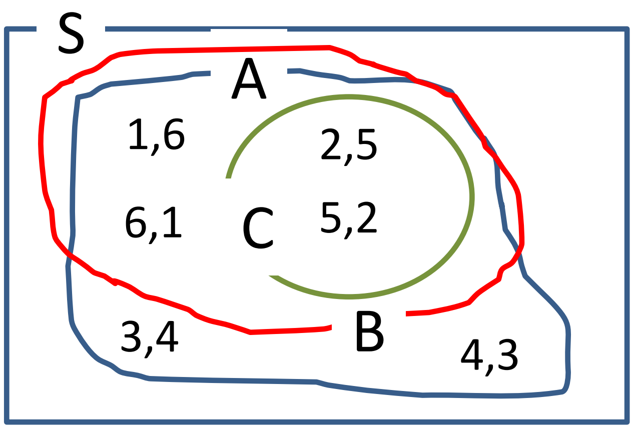


¿y la probabilidad de los eventos A, B y C cambia?

Eventos: A -> Que salga un número impar.

B -> Que sea mayor que 4. B = {x/x > 4}

C -> que se aun 2. C = {x/x = 2}

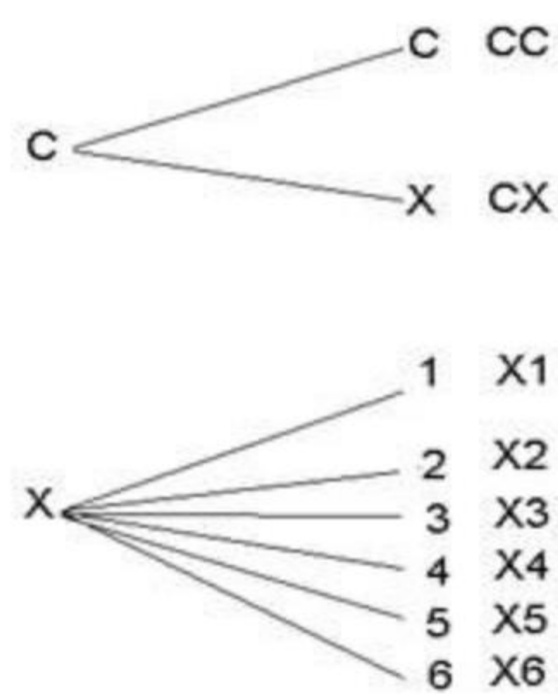


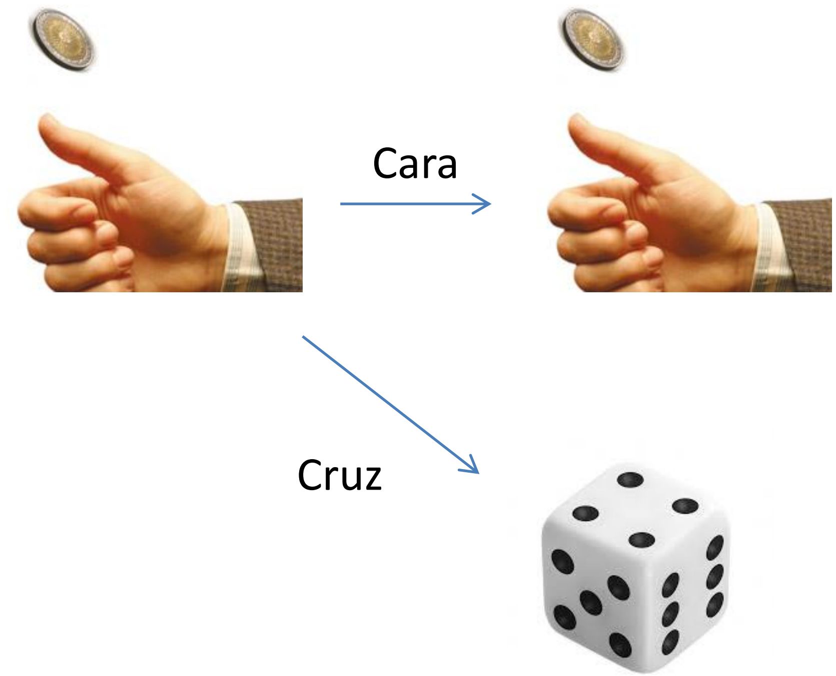
$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{6}{6} = 1 \;\;,\;\; P(B) = \frac{n}{N} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;,\;\; P(C) = \frac{n}{N} = \frac{2}{6}$$

Diagrama de Tallo y Hojas

Experimento: Lanzar una moneda al aire una vez y dos en caso que ocurra cara, si ocurre seca entonces lanzar un dado.

Suceso 1 Suceso 2 E.M



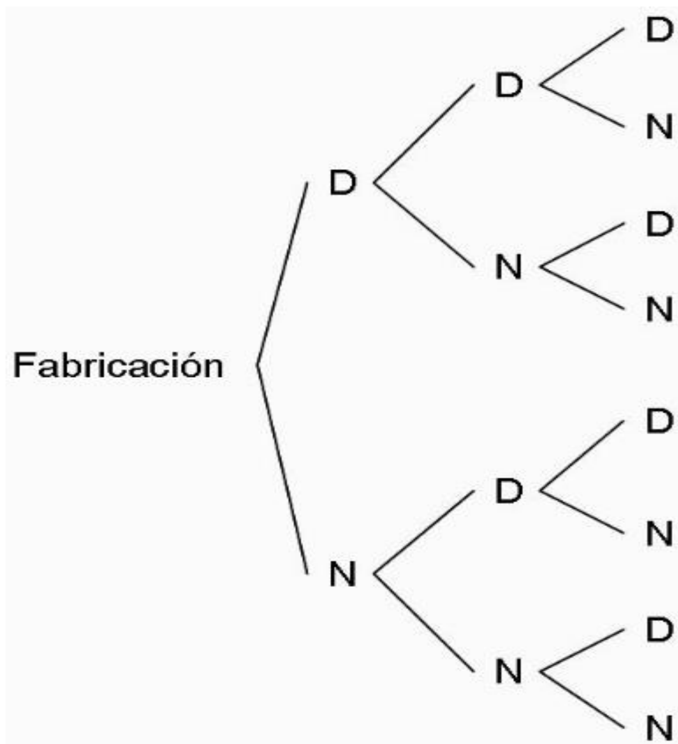


$$S = \{cc, cx, x1, x2, x3, x4, x5, x6\}$$

¿Qué probabilidad existe que ocurran dos secas en este experimento? ¿y dos caras?

Ejemplo 3: Selección aleatoria de tres artículos de un proceso de fabricación para luego ser clasificados como "D" Defectuoso; "N" No defectuoso.

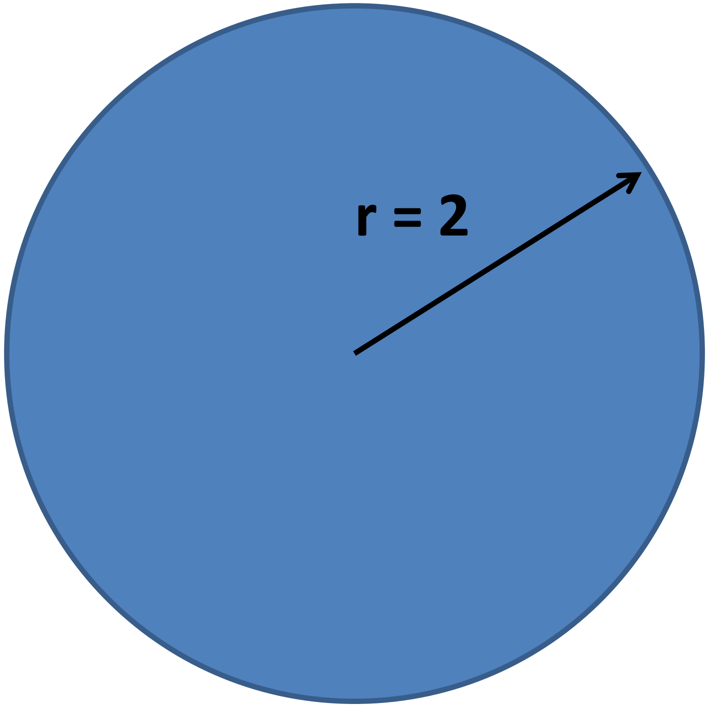
1. Construya el Diagrama de Tallo y hojas
2. Obtenga el Espacio Muestral



$$S = \{(D, D, D); (D, D, N); (D, N, D); (D, N, N); (N, D, D); (N, D, N); (N, N, D); (N, N, N)\}$$

También puede indicarse el Espacio Muestral con una expresión matemática en vez de listar los elementos:

$$S = \{(x, y) \;/\; x^2 + y^2 \leq 4\} \qquad ¿\,Que\;es\,?$$



Círculo de radio 2

Teoría de Conjuntos: Más definiciones

Complemento:

De un evento **A** del espacio muestral **S** es el conjunto de todos los elementos de **S** que no pertenecen a **A**.

Del Ej. 2:	Del Ej. 3:
$A = \{1,2,3,4\} \rightarrow \overline{A} = \{5,6\}$	$B = \{N >= 1\}$ Al menos uno no defectuoso $\overline{B} = \{DDD\}$

Ejemplo 2

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Ejemplo 3

$$S = \{(D,D,D);(D,D,N);(D,N,D);(D,N,N);(N,D,D);(N,D,N);(N,N,D);(N,N,N)\}$$

<u>Intersección</u>:

De dos eventos **A** y **B, (A∩B)** es el conjunto de todos los elementos comunes de **A** y **B**.

Ejemplo 4:

Sea $M = \{a, e, i, o, u\}$ y $N = \{r, s, t\}$ $\quad M \cap N = \emptyset$

<u>Unión</u>:

Evento que contiene a todos los elementos que pertenecen a dos o más eventos del Espacio Muestral. ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$)

Ejemplo 5:

Si $M = \{X \mid 3 < X < 9\}$ y $N = \{Y \mid 5 < Y < 12\}$

$$M \cup N = \{Z \mid 3 < Z < 12\}$$

Representación Gráfica → Diagrama de Venn

Espacio Muestral → **Un rectángulo**

Eventos → **Círculos dentro del rectángulo**

Ejemplo 6:

$$A \cap B = \{1,2\}$$

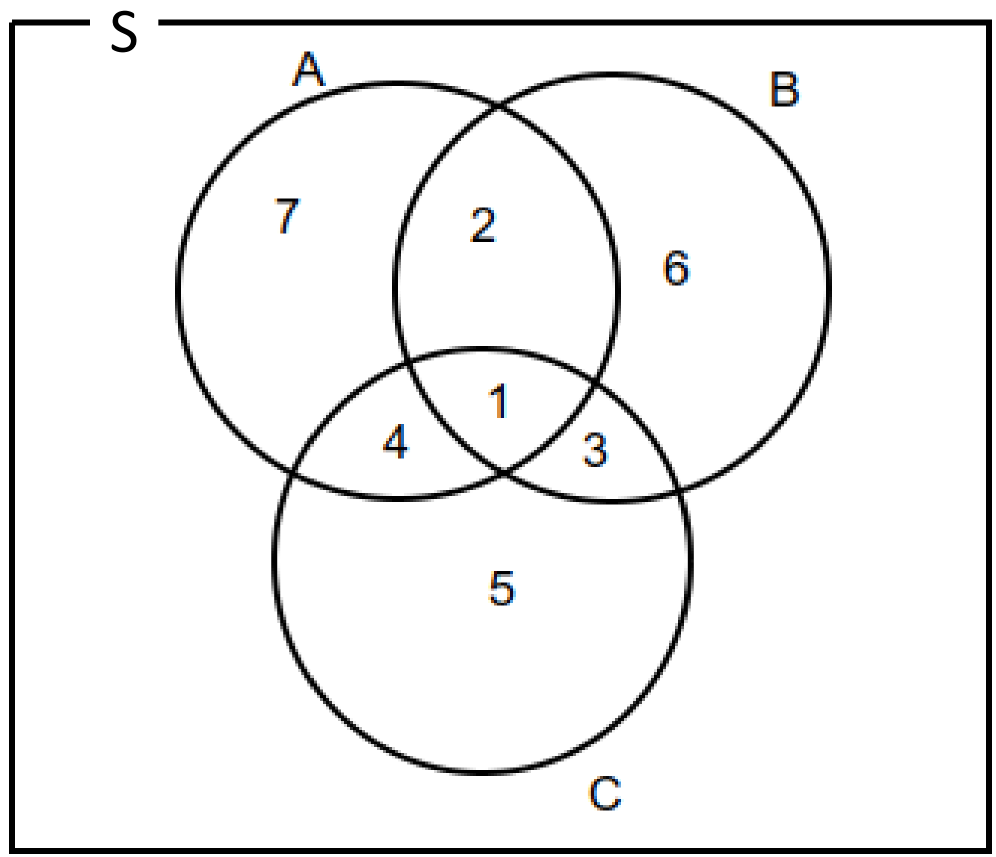
$$B \cap C = \{1,3\}$$

$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,7\}$$

$$\underline{B} \cap A = \{4,7\}$$

$$A \cap B \cap C = \{1\}$$

$$(A \cup B) \cap \underline{C} = \{2,6,7\}$$



<u>Probabilidad:</u> si un evento ***A*** puede tener como resultado cualquiera de los ***N*** diferentes resultados <u>igualmente probables</u> y si exactamente ***n*** de estos resultados corresponde al evento ***A***, entonces: $\boldsymbol{P(A) = \frac{n}{N}}$

En muchos casos todos los eventos tienen la misma oportunidad de ocurrencia y se les asigna la misma probabilidad.

Caso Ejemplo 2: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evento A: que salga **1** en la cara superior.

$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{1}{6}$ (Todos los números tienen la misma probabilidad de salir)

Igualmente Probables

Cada número es un punto muestral.
El evento ***A*** corresponde en este caso a un punto muestral.

Evento B: $\{x/x < 4\}$ $\quad$ $P(B) = \frac{3}{6}\ (suma\ de\ los\ puntos\ muestrales) = \frac{1}{2}$

¿Qué sucede si no todos los puntos muestrales tienen la misma probabilidad de ocurrir?

Ejemplo 7: Se carga un dado de manera que sea **2 veces más probable que salga un número par** que uno impar. Calcular la probabilidad del evento **B**.

$$Evento\ B: \{x/x < 4\}$$

En vez de <u>sumar</u> los puntos muestrales correspondientes a este evento debemos hacer una <u>suma ponderada</u> dando más “peso” al que tiene más probabilidad de ocurrencia.

Dado cargado

Llamemos ***w*** a la probabilidad de que salga **Impar**.
Llamemos ***2w*** a la probabilidad de que salga **par**.

Según el Axioma del suceso seguro en la definición axiomática de la Probabilidad:
$P(S) = 1$ ⇒ suma de los puntos muestrales

$$P(S) = w + 2w + w + 2w + w + 2w = 9w = 1$$

Entonces: $\boldsymbol{w = \frac{1}{9}}$

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(1) + P(2) + P(3) \\ &= w + 2w + w = 4w = \frac{4}{9} \end{aligned}}$$

Formas de Calcular todos los resultados posibles N:
CONTEO DE PUNTOS MUESTRALES

En muchos casos se hace difícil conocer los **N** diferentes resultados de un experimento para el cálculo de probabilidad.

Para calcular en forma rápida la cantidad de elementos de un espacio muestral puede usarse la **regla de la multiplicación:**

Regla de Multiplicación

N: N° de elementos en un Espacio Muestral que resulta de un experimento con varias operaciones.

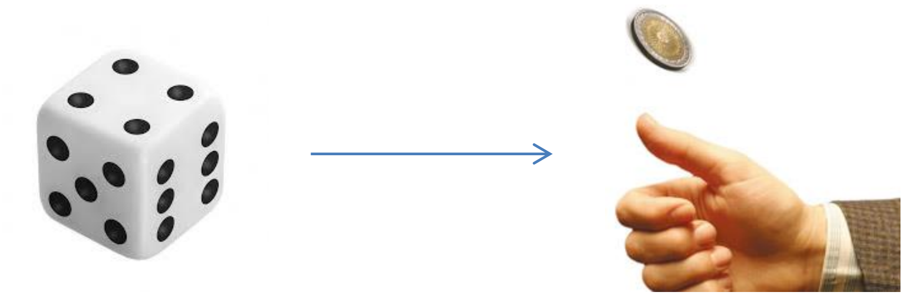
"Si una operación puede realizarse de $\boldsymbol{n_1}$ *formas y por cada una de estas, una segunda operación puede realizarse de* $\boldsymbol{n_2}$ *formas, entonces las 2 operaciones se pueden realizar juntas de* $\boldsymbol{n_1 n_2}$ *formas"*

$$\boxed{\boldsymbol{N = n_1 n_2 \ \ldots \ n_s}}$$

n_s: N° de elementos en la operación.

Del **Ejemplo 3** $\Rightarrow$ 3 elementos y 2 posibilidades (Defectuoso/No defectuoso) para cada uno. $\rightarrow$ N = $n_1 . n_2 . n_3 = \mathbf{2.2.2 = 8}$

Del **Ejemplo 2 una variante** $\Rightarrow$ Se lanza un dado y luego una moneda. Obtener el número de puntos muestrales o elementos en este espacio muestral.



$\boldsymbol{n_1 = 6}$	N° de elementos de **S** es **12**
$\boldsymbol{n_2 = 2}$	**N =** $\boldsymbol{n_1 n_2 = (6)(2) = 12}$

Diagrama de Tallo y hojas

1 → C, X — 1C, 1X
2 → C, X — 1C, 2X
3 → C, X — 3C, 3X
4 → C, X — 4C, 4X
5 → C, X — 5C, 5X
6 → C, X — 6C, 6X

N = 12 puntos muestrales

Ejemplo 8: ¿Cuántos números pares de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 5, 6 y 9 si cada uno de ellos puede utilizarse sólo una vez?

$n_3 = 2$ (Número par) en las unidades $n_1\ n_2\ n_3$

⍰ . ⍰ . 2

c d u

Al ocuparse un número en la casilla de unidades (u), quedan 4 números disponibles para las decenas (d).

$n_2 = 4$ (Los 4 números restantes) ⍰ . 4. 2

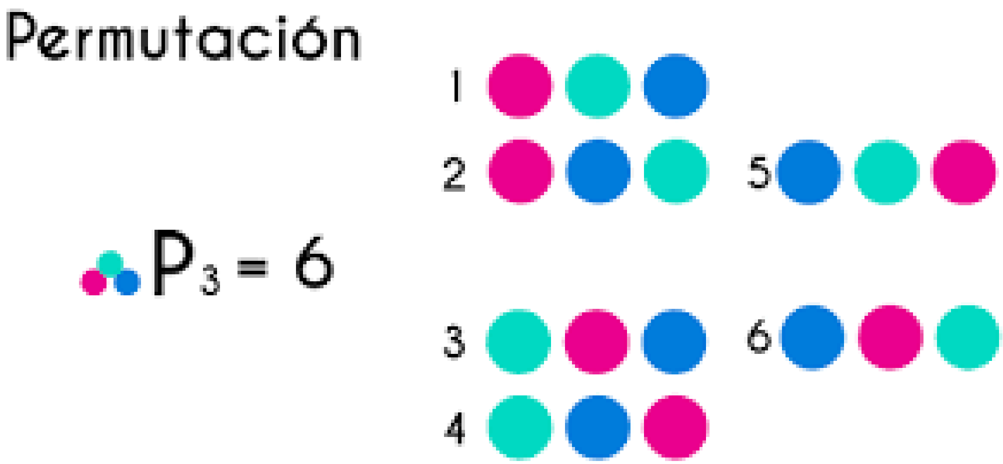
$n_1 = 3$ (los 3 números restantes) en las centenas (c) 3.4.2

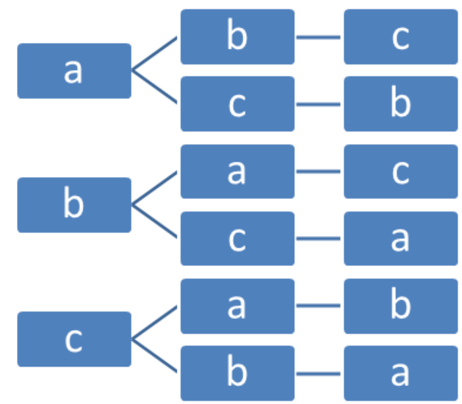
$\boldsymbol{n_1 . n_2 . n_3 = (3).(4).(2) = 24}$ **números pares de 3 dígitos**

Permutaciones

Número posible de arreglos de todos o algunos elementos de un Espacio Muestral.

Todos distintos $\boxed{N = P_n = n!}$ **n: N° de elementos a ordenar**





El número de permutaciones de ***n*** objetos distintos es ***n*!**

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}).\ldots\ \mathbf{1}$$

Ya que al usar un objeto en una posición, quedan (n-1) objetos para las demás

$$3! = 3.2.1 = 6$$

Si en vez de tomar todos los elementos para arreglarlos o acomodarlos se toman solo una parte de ellos se tiene:

n objetos tomados de a **r**

¿Cuantas formas hay de arreglarlos? (Importa el orden. No repetir.)

$$\boxed{\boldsymbol{nPr = \frac{n!}{(n-r)!}}}$$

Ejemplo 10: De las 4 primeras letras del abecedario, tomar de a 2 sin repetir.

a,b	a,c	a,d	12 formas
b,a	c,a	d,a	
b,c	c,b	b,d	
d,b	c,d	d,c	

$$nPr = 4P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

Ejemplo 11: Se sacan 2 ticket de lotería para el 1° y 2° premio de un total de 20. Encuentre el número de posibles formas de sacar el 1° y 2° premio.

n = 20

r = 2

$$nPr\ = 20P_2\ = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{20!}{18!}\ =\ (20).(19)$$

$$20P_2\ =\ 380\ formas\ de\ sacar\ el\ 1°\ y\ 2°\ premio$$

Ejemplo 12: 3 Disertantes se pueden ubicar en 5 fechas distintas. ¿ Cuál es el número total de formas en que se podrían organizar estas 3 disertaciones?

n = 5 fechas

r = 3 disertantes

$$5P_3\ =\ \frac{5!}{(5-3)!}\ =\ 5.4.3\ =\ 60$$

Rta: Estos 3 disertantes se pueden organizar de 60 formas diferentes.

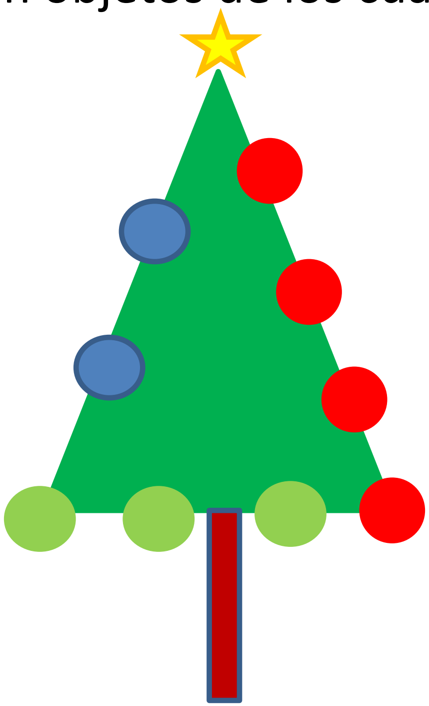
Caso en que no todos los elementos son distintos (algunos son iguales)

Ejemplo 13: Árbol de navidad

4 focos rojos
3 focos verdes
2 focos azules

¿Cuantas formas tengo para ordenarlas en el árbol?

Sean n objetos de los cuales:

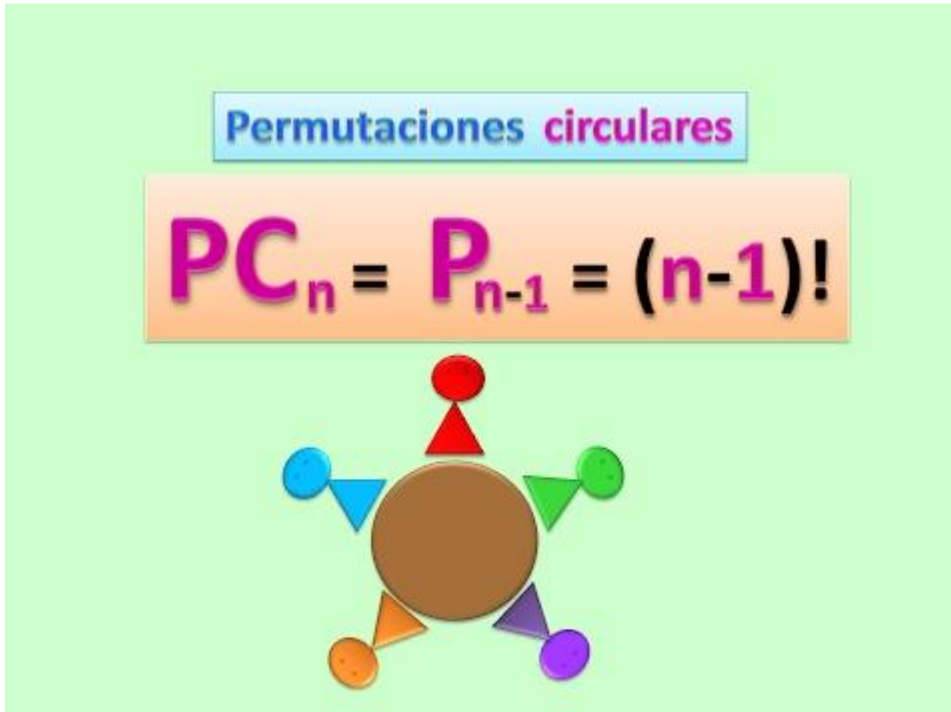


$$\begin{aligned} n_1 &= tipo\ 1 \\ n_2 &= tipo\ 2 \\ \ldots & \quad \ldots . \\ n_k &= tipo\ k \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{nP_k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\,\boldsymbol{n_2}!\ldots\boldsymbol{n_k}!}$$

$$9P_3 = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \frac{9.8.7.6.5}{(3.2).\,2} = 1260$$

Permutaciones de n objetos distintos arreglados en un círculo



$PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$

¿Porqué existe menor cantidad de permutaciones circulares que en línea?

El primer elemento que "se sitúe" determina el principio y el final. Entonces se reducen las formas de ordenar el resto.

Combinatoria

N° de formas posibles de seleccionar ***r*** objetos de un total de ***n*** sin importar el orden.

Del Ejemplo 10**:** De las 4 primeras letras del abecedario, tomar de a 2 sin repetir.

a,b	a,c	a,d	12 formas
~~b,a~~	~~c,a~~	~~d,a~~	
b,c	~~c,b~~	b,d	**Quedan 6**
~~d,b~~	c,d	~~d,c~~	

$$nPr = 4P_2 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

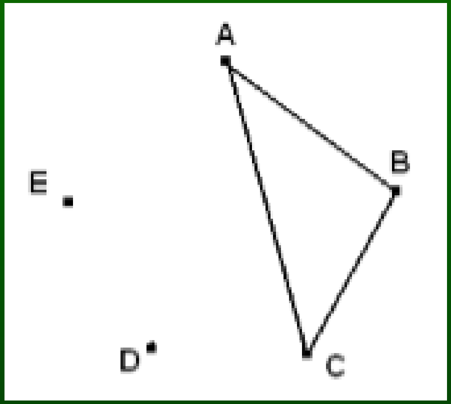
Ahora no importa el orden de las letras

$$\boxed{\boldsymbol{C_r^n} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}} \longrightarrow C_2^4 = \frac{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3.2}{2.2} = 6$$

Ejemplo:

Si disponemos de 5 puntos no colineales ,¿cuánto es el máximo número de triángulos que se podrán formar?

Solución:



Para dibujar un triángulo solo es necesario 3 puntos en el plano.
No importa el orden, ya que el triangulo ABC es igual al triángulo BAC, por lo tanto se trata de una combinación.

$$C_p^{\,n} = \frac{n!}{(n-p)\,!\,p!}$$

$$C_3^{\,5} = \frac{5!}{(5-3)!\;3!}$$

$$C_3^{\,5} = \frac{5x4x3!}{2\,!\;3!} = \frac{5x4}{2} = 10$$

Ejemplo 14: Encuentre el número de formas de organizar comités científicos que estén representados por 2 químicos y 1 físico sabiendo que se cuenta con 4 químicos y 3 físicos.

Comité Científico

Q Q F

Químicos: Q

Físicos: F

<u>Solución</u>:

De los 4 químicos, debo elegir 2.

De los 3 físicos debo elegir 1.

Con la regla de la multiplicación puedo encontrar el n° de comités sabiendo que hay químicos y físicos.

N = n_Q .n_F **Regla de la multiplicación.**

n_Q : Formas de elegir 2 químicos de 4 sin importar el orden.

$$n_Q = C_2^4 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

n_F: Formas de elegir 1 físico de 3 sin importar el orden.

$$n_F = C_1^3 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = 3$$

Número de comités científicos

N = n_Q.n_F = 6.3 = 18 comités

Ejemplo. 15: En una mano de póker que consiste en 5 cartas, encuentre la posibilidad de obtener 3 ases y 2 reyes si el mazo de cartas es de 52.

Solución:

A.A.A	R.R
n_1	n_2

n_1:formas de obtener 3 ases de 4 posibles

$$n_1 = C_3^4 = 4$$

n_2:formas de obtener 2 reyes de 4 posibles

$$n_2 = C_2^4 = 6$$

¿Cuantas manos de 3 ases y 2 reyes son posibles?

$$n = n_1 . n_2 = 4.6 = 24 \, manos$$

¿Cuantas formas de obtener esas manos de 3 ases y 2 reyes del total de cartas?

$$N = C_5^{52} = \frac{52!}{5!\,(47!)} = 2.598.960$$

P(A): 3 ases y 2 reyes en una mano de póker

$$\boxed{P(A) = \frac{n}{N} = \frac{24}{2.598.960}}$$