Unidad I: Sucesiones numéricas y Series de Funciones

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Multivariado

Año 2024

Parte A: Series Infinitas de términos constantes
T13: SERIES INFINITAS

Problema 1: Escribir el número $\frac{1}{3} = 0.33333...$ descomponiéndolo como suma de términos que contengan potencias de 10.

Problema 2: Una hoja de 1 m de lado, es decir de 1 m^2 de área, se divide en dos mitades, se obtiene dos cuadriláteros, uno de ellos se vuelve a dividir en dos y se repite la operación anterior, seguimos el proceso indefinidamente. Expresar el área total como suma de las áreas de los sucesivos cuadriláteros.

Problema 3: Se deja caer una pelota de tenis desde una altura de 6 m y comienza a rebotar. Cada vez que pega en el suelo rebota verticalmente hasta una altura que es las ¾ partes de la altura anterior. Expresar la distancia total que recorre la pelota, como suma de las distancias recorridas en cada rebote.

Todos involucran sumas con un número infinito de sumandos

Dada la sucesión infinita {an} de números, si sumamos cada uno de ellos:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$ **SUMA INFINITA**

Definición: Dada la sucesión infinita {an} de números se denomina **serie infinita** a la expresión de la forma

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

Para resolver esta suma procedemos de la siguiente manera.

Sea:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

….

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ **SUMA PARCIAL N-ÉSIMA**

A esta nueva sucesión de sumas parciales {Sn} se denomina **SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES**

Definición: Dada la sucesión infinita {an} entonces la sucesión {Sn} de sumas parciales se llama **serie infinita**.

$$\{S_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Los números a_1 ; a_2 ; a_3 ; … ; a_n. Son los términos de la serie infinita.
Los números s_1 ; s_2 ; s_3 ; … ; s_n. Son los sumas parciales de la serie infinita.

Luego si tenemos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
Tomando el límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Suma de la serie infinita

Ejemplo 1: Dada la expresión del Problema 1, expresarlo como serie

Ejemplo 2: Dada la expresión del Problema 2, expresarlo como serie

Ejemplo 3: Dada la expresión del Problema 3, expresarlo como serie

Definición: Dada la **sucesión infinita $\{S_n\}$** de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Si la sucesión converge a un límite S, entonces se dice que la **serie converge a S** y **S** se llama **suma de la serie infinita**.

Es decir que una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si converge la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, lo que implica que:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Si la sucesión de las sumas parciales de una serie diverge, S no existe ($S \to \infty$ o S no existe), entonces se dice que la serie diverge.

Una serie divergente no tiene suma.

T14: PROPIEDADES DE LAS SERIES INFINITAS

Propiedad 1: La convergencia o divergencia de una serie no es afectada al cambiar un número finito de términos (por ejemplo, omitiendo pocos términos al inicio).

Propiedad 2: La convergencia o divergencia de una serie no es afectada al multiplicar cada término de la serie por una constante.

Propiedad 3: Dos series convergentes pueden sumarse (o restarse) término a término. La serie resultante es convergente y su suma es obtenida sumando (o restando) las sumas de las series dadas.

Propiedad 4: Si se suma una serie convergente y una divergente, entonces la serie resultante es divergente.

T15:

a) Condición necesaria de convergencia de una serie.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

En una serie convergente el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pero este límite en una serie no garantiza que la serie sea convergente.

Demostración:

Suponemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, por lo que existe el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Siendo: $S_n = S_{n-1} + a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = S_n - S_{n-1}$

Si el $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existe y es único, existirá $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

Luego: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

De la suposición de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplo 6: Dada la serie armónica determinar si converge.

T15:

b) Criterio del término enésimo para la divergencia

Si el $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ => La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Ejemplo 7: Determinar si son divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n-1} =$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} =$

T16: Condición necesaria y suficiente de una Serie Infinita. Condición de Cauchy

La condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie infinita es que la suma de q términos a partir de un cierto m en adelante se pueda hacer menor que un cierto $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera con tal de tomar m suficientemente grande y q fijo.

Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+q} + \ldots + a_n + \ldots$$ es convergente **si y solo si**

O sea: $$\left| a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+q} \right| < \varepsilon$$ Con ε > 0 (tpcsq)

T17: Series especiales

a) Serie geométrica

$$\left\{a\ q^{n-1}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a\ q^{n-1} = \underbrace{a}_{a_1} + \underbrace{a\ q}_{a_2} + \underbrace{a\ q^2}_{a_3} + \underbrace{a\ q^3}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a\ q^{n-1}}_{a_n} + \ldots$$

razón

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + a\ q$$

$$S_3 = a + a\ q + a\ q^2$$

$$S_4 = a + a\ q + a\ q^2 + a\ q^3$$

$\ldots$

$$S_n = a + a\ q + a\ q^2 + a\ q^3 + \ldots + a\ q^{n-1} \quad (1)$$

En (1) multiplico q a ambos miembros

$$q\ S_n = a\ q + a\ q^2 + a\ q^3 + a\ q^4 + \ldots + a\ q^n \quad (2)$$

Ahora: (2) – (1): $q\ S_n - S_n = a\ q^n - a = a\ (q^n - 1) \Rightarrow \boxed{S_n} = \dfrac{a\ (q^n - 1)}{(q-1)} = \boxed{\dfrac{a\ (1-q^n)}{(1-q)}}$

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} x \lim_{n\to\infty} (1-q^n)$$

$$\boxed{S = \frac{a}{1-q} x \lim_{n\to\infty} (1-q^n)}$$

Conclusión: $$\sum_{n=1}^{\infty} a\ q^{n-1} \begin{cases} \text{es convergente} \Leftrightarrow |q| < 1 \\ \text{es divergente} \Leftrightarrow |q| \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 8: Determinar si es convergente la serie que permite representar al número real 0.33…. . En caso de serlo encontrar la suma de sus términos.

b) Serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ Serie divergente

c) Serie p o Serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots\Rightarrow\begin{cases}\text{si } p>1 \text{ la serie es convergente}\\ \text{si } p<1 \text{ la serie es divergente}\end{cases}$$

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS
T18: Criterio de la integral de Cauchy

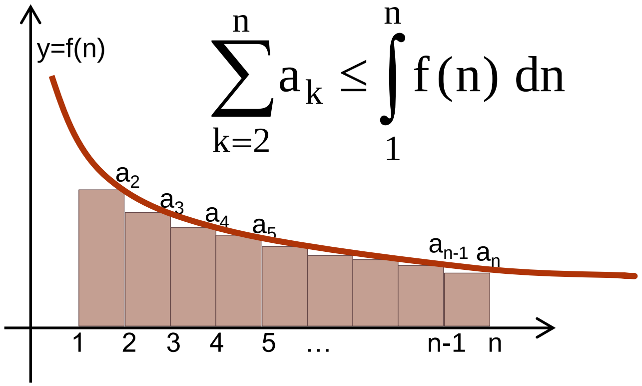
Suponga $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y f es una función continua, monótona decreciente y no negativa en el intervalo [1 , + ∞) tal que f(n) = a_n ∀ n ≥ 1.

$$\begin{cases} \int_1^{+\infty} f(n)\, dn = \exists \text{ y finito} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n \text{ es convergente} \\ \int_1^{+\infty} f(n)\, dn = \nexists \text{ ó inf inito} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n \text{ es divergente} \end{cases}$$

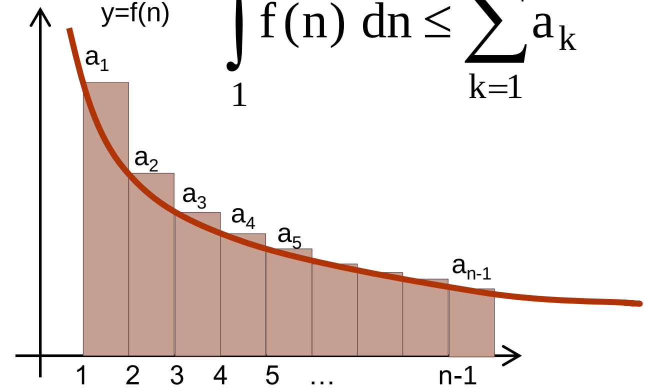
$$f(n) = a_n, \forall n \in \aleph \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ es convergente si } \int_1^{+\infty} f(n)\, dn \text{ es convergente}$$

Demostración:

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(n)\,dn$$



$$\int_1^n f(n)\,dn \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$$



$$1\times a_2 + 1\times a_3 + \ldots + 1\times a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx \;\; \leq 1\times a_1 + 1\times a_2 + \ldots + 1\times a_{n-1}$$

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \;\; \leq S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - a_1\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n f(x)\,dx\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(S_{n-1}\right)$$

$$S \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n f(x)\,dx\right) \leq S$$

Conclusión:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^{+\infty} f(n)\,dn = \exists \text{ y finito} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n \text{ es convergente} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} f(n)\,dn = \nexists \text{ y inf inito} \Rightarrow \sum_1^{\infty} a_n \text{ es divergente} \end{cases}$$

Ejemplo 9: Determinar si es convergente la serie armónica.

Ejemplo 10: Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

T19: Criterios de comparación

Mediante ellos se comparan ordenadamente los términos de la serie en estudio con los de otras series cuyo comportamiento se conoce.

Dadas dos series: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de términos positivos

a) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n, \forall\, n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también es convergente.

b) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente y $a_n \geq b_n, \forall\, n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también es divergente.

T19: Criterios de comparación

c) Criterio de comparación en el límite

Dadas dos series: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de términos positivos y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

c1) Si L > 0 entonces ambas son convergentes o ambas son divergentes.

c2) Si L = 0 y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

c3) Si L = ∞ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo 11: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{8+n^3}$

Ejemplo 12: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Ln}(8+n)}{n}$

T20: Serie P o Serie Armónica Generalizada

Esta serie tiene la forma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Se demostrará que: Si p > 1, la serie convergente
Si p < 1, la serie divergente

Si p ≠ 1: $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p} dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$

Si p > 1: La expresión $n^{1-p} \to 0$ y el límite será $L = \frac{1}{p-1}$, la serie converge

Si p < 1: La expresión $n^{1-p} \to \infty$ y el límite será $L = \infty$, la serie diverge

Si p = 1: $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} [Lnx]_1^n = \lim_{n\to\infty} [Ln \quad n - Ln \quad 1] = \infty$, la serie diverge

Conclusión: Dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si p > 1 y divergente si p ≤ 1

T21: Criterio de la razón. Criterio de D' Alembert

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

a) Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente

b) Si $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente

c) Si L = 1 nada se puede decir.

T21: Criterio de la razón. Criterio de D' Alembert

Demostración:

a) Si L < 1.

Sea k = L + ε > 0 / L < k < 1 ⇒ ∃ N ∈ ℵ / ∀ n ≥ N se verifica que: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$,

Entonces: $a_{n+1} \leq k \times a_n$, ∀ n ≥ N

Por tanto:

$$a_{N+1} \leq k \times a_N$$
$$a_{N+2} \leq k \times a_{N+1} \leq k^2 \times a_N$$
$$a_{N+3} \leq k \times a_{N+2} \leq k^2 \times a_{N+1} \leq k^3 \times a_N$$
$$a_{N+4} \leq k \times a_{N+3} \leq k^2 \times a_{N+2} \leq k^3 \times a_{N+1} \leq k^4 \times a_N$$
$$\ldots$$
$$a_{N+(n-N)} \leq k \times a_{N+(n-N-1)} \leq k^{n-N} \times a_N \quad \Rightarrow \quad a_n \leq k^{n-N} \times a_N$$

T21: Criterio de la razón. Criterio de D' Alembert

Demostración:

Aplicando sumatoria miembro a miembro:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} k^{n-N} \times a_N$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq k^{-N} \times a_N \sum_{n=N+1}^{\infty} k^n$$

Serie Geométrica convergente ya que | k | < 1

Por criterio de comparación $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es convergente

T21: Criterio de la razón. Criterio de D' Alembert

Demostración:

b) Si L > 1 $\Rightarrow \exists N \in \aleph / \forall n \geq N$ se verifica que : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Entonces: $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq N,$ lo que significa

que: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$

La serie diverge

T21: Criterio de la razón. Criterio de D' Alembert

Ejemplo 13: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Ejemplo 14: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$

T22: Criterio de la Raíz o de la raíz de Cauchy

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y calculamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

a) Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente

b) Si $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente

c) Si L = 1 nada se puede decir.

Ejemplo 15: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log\ n} \right)^n$

T23: Criterio de Raabe

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y calculamos $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] = L$

a) Si L > 1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente

b) Si L < 1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente

c) Si L = 1 nada se puede decir.

Ejemplo 16: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

T24: Series alternantes – Criterio de Leibnitz

En estas series sus términos son alternadamente positivos y negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\, a_n + \ldots$$

Condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie alternada

Dada la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\, a_n + \ldots$ con $a_n > 0$, $\forall$ n

1) Si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall\, n \in \aleph$ (serie monótona decreciente)

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Demostración:

Dada la serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}\, a_n + \ldots$

Recordando que $a_n > 0,\ \forall\ n \in \aleph$

Considerando las sumas parciales de índice par:

$S_2 = (a_1 - a_2)$ Considerando $a_1 > a_2 \Rightarrow S_2 > 0$

$S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$ Considerando $a_1 > a_2 \wedge a_3 > a_4 \Rightarrow S_4 > 0$

…

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ Siendo $S_{2n} > 0$ y crece a medida que n aumenta.

Considerando ahora:

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$

Es decir que: $S_{2n} > a_1,\ \forall\ n \in \aleph$

$\{S_{2n}\}$: sucesión acotada y monótona creciente.

Considerando las sumas parciales de índice impar:

$S_1 = a_1$

$S_3 = a_1 - (a_2 - a_3)$

$S_5 = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5)$

...

$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})$

$a_1 = S_1 > S_3 > S_5 > \ldots > S_{2n+1}$

Entonces $\{S_{2n+1}\}$: sucesión acotada monótona decreciente.

Como $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

$$S - S = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Entonces $\{S_n\}$ es convergente es decir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$ es convergente

Conclusión

Dada la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n =$

1) Si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall\, n \in \aleph$ (serie monótona decreciente)

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Entonces, $a_n > a_{n+1}$ es equivalente a: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

- Si en una serie alternada $a_n > a_{n+1}$ pero $\lim\limits_{n->\infty} a_n \neq 0$ la serie es oscilante. (no convergente)
- Si en una serie alternada $\lim\limits_{n->\infty} a_n = 0$, pero sus términos no son decrecientes, entonces la serie es divergente.

Ejemplo 17: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

T25: Serie de términos cualesquiera

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Series absolutamente convergente

Dada la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice que es absolutamente convergente si:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ es convergente}$$

Series condicionalmente convergente

Dada la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice que es condicionalmente convergente si:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ es divergente

Teorema: si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Ejemplo 18: Determinar si es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$