Distribuciones Conjuntas

Espacios muestrales multidimensionales.

Trataremos en este apartado las bidimensionales de variable aleatoria *(x, y).*

Propiedades:

Discreta	Continua
$f(x,y) \geq 0\ ;\ \forall(x,y)$	$f(x,y)\ \geq 0\ \ ;\ \ f(x,y)$
$\sum_{\forall x}\sum_{\forall y} f(x,y)\ =\ 1;\ \forall(x,y)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy\ =\ 1$
$P(X\ =\ x, Y =\ y)\ = f(x,y)$	$P(a < x < b, c < y < d\,)\ = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dx\,dy$ $si\ \{a\ \leq x \leq b\ ;\ c \leq y \leq d\}$
$P[(x,y)\ \in A]\ = \sum_x\sum_y f(x,y)$	

f(x,y) se denomina Función de Distribución conjunta **fdc** para VAD ó Función de Densidad de Probabilidad Conjunta **fdpc** para VAC.

Ejemplo: Si (x, y) es un para de Variables Aleatorias Discretas (VAD) y:

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & si \quad 1 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determine la constante *c* para que *f(x,y)* sea una **fdc**

b) Obtenga $P(X,Y) \in A,$ con $A = \{1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

c) Calcule: $P\left[{}^{(x,y)}/_{(x+y)\leq 3}\right]$

<u>Resolución</u>:

a) Según las condiciones que debe cumplir una f(x) para ser considerada fdc

1. $f(x,y) \geq 0 \quad \forall(x,y)$

2. $\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f(x,y) = 1$

$$\sum_{\forall x} \sum_{\forall y} f(x,y) = 36C$$

$$C = {}^{1}/_{36}$$

		X			$\sum X$
		1	2	3	
Y	1	C	2C	3C	6C
	2	2C	4C	6C	12C
	3	3C	6C	12C	18C
$\sum Y$		6C	12C	18C	36C

b) $P[1 \leq x \leq 2 \quad, 1 \leq y \leq 2] = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} f(x,y) = 9C = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

c) Calcule: $P\left[{}^{(x,y)}/_{(x+y)\leq 3}\right]$

X					$\sum X$
		1	2	3	
Y	1	C	2C	3C	6C
	2	2C	4C	6C	12C
	3	3C	6C	12C	18C
$\sum Y$		6C	12C	18C	36C

$$P\left[{}^{(x,y)}/_{x+y\leq 3}\right] = \sum_{\forall x}\sum_{\forall y}(x+y)\leq 3 = 5C = \frac{5}{36}$$

Ejemplo: Sea una *f(x,y)* para *(x,y)* VAC definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & para \quad 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & para \quad otro\ caso \end{cases}$$

1) Verificar si f(x,y) es una fpc
2) Obtener $P[(x,y) \in A]$ $\quad si \quad A = \begin{cases} 0 \le x \le {}^1/_2 \\ {}^1/_4 \le y \le {}^1/_2 \end{cases}$

Solución:

a) $f(x,y) \ge 0\ ;\ \forall (x,y)$

b) $$\int_{y=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy \ = \ 1$$

b) $$\int_{y=-\infty}^{+\infty}\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}\frac{2}{5}(2x+3y)dx\,dy =$$

$$\frac{2}{5}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1}(2x+3y)dx\,dy = \frac{2}{5}\int_{y=0}^{1}\left(2\frac{x^2}{2}+3xy\right)\Bigg|_0^1 dy =$$

$$\frac{2}{5}\int_{y=0}^{1}(1+3y)dy = \frac{2}{5}\left(y+3\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5}\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5}.\frac{5}{2} = 1$$

2) Obtener $P[(x,y)\in A]$ $\quad si \quad A = \begin{cases} 0 \le x \le {}^1/_2 \\ {}^1/_4 \le y \le {}^1/_2 \end{cases}$

$$\int_{y={}^1/_4}^{{}^1/_2}\int_{x=0}^{{}^1/_2}\frac{2}{5}(2x+3y)dx\,dy = \frac{2}{5}\int_{y={}^1/_4}^{{}^1/_2}\left(2\frac{x^2}{2}+3xy\right)\Bigg|_0^{{}^1/_2} dy$$

$$\frac{2}{5}\int_{y={}^1/_4}^{{}^1/_2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}y\right)dy = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}y+\frac{3}{2}\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{{}^1/_4}^{{}^1/_2} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{3}{16}\right) = \frac{2}{5}.\frac{13}{64} = \frac{13}{160}$$

Distribuciones Marginales

Dentro de las distribuciones conjuntas bidimensionales, las Distribuciones Marginales son distribuciones de una variable cuando la otra toma todos los valores posibles.

$$g(x) = \sum_{\forall y} f(x, y) \qquad y \qquad h(y) = \sum_{\forall x} f(x, y)$$ VAD

$$g(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy \qquad y \qquad h(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$ VAC

Del ejemplo de VAD:

		X			$\sum X$
Y		1	2	3	
	1	C	2C	3C	6C
	2	2C	4C	6C	12C
	3	3C	6C	12C	18C
$\sum Y$		6C	12C	18C	36C

$$\mathrm{h}(y=1)=6C$$
$$\mathrm{h}(y=2)=12C$$
$$\mathrm{h}(y=3)=18C$$

$g(x=1)=6C$ $\quad g(x=2)=12C$ $\quad g(x=3)=18C$

Del ejemplo para VAC: ?

Distribuciones de Probabilidad Condicional

De la definición de Probabilidad Condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P\left({}^{Y\,=\,y}\!/_{X\,=\,x}\right) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

$$\boxed{f\left({}^{y}\!/_{x}\right) = \frac{f(x, y)}{g(x)}}$$

De la misma forma:

$$\boxed{f\left({}^{x}\!/_{y}\right) = \frac{f(x, y)}{h(y)}}$$

Independencia Estadística

De la teoría de conjuntos sabemos que:

P(B/A) = P(B) **y** ***P(A/B) = P(A)*** A y B son independientes

Si las VA *x* e *y* son independientes:

$$f\left({}^{x}/_{y}\right) = g(x)$$

$$f\left({}^{y}/_{x}\right) = h(y)$$

Entonces:

$$f\left({}^{x}/_{y}\right) = g(x) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \rightarrow \quad f(x,y) = g(x).h(y)$$

$$f\left({}^{y}/_{x}\right) = h(y) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \rightarrow \quad f(x,y) = h(y).g(x)$$

CONDICIÓN
DE
INDEPENDENCIA
ESTADÍSTICA