Análisis Matemático I

Sucesiones Numéricas

utn facultad regional paraná
utnfrp
utnparana

Almafuerte 1033
(3100) Paraná - E. Ríos
Tel:054-343-4243054/4243694
Fax: 54-343-4243589

www.frp.utn.edu.ar

11.1 Sucesiones

Definición 1: Una sucesión es una lista de ***infinitos*** números dados en un cierto orden

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

El subíndice es un número natural que nos indica la posición que ocupa el número en el conjunto. Así

a_1: *primer término*

a_2: *segundo término*

a_n: *n-ésimo término*

Definición 2: Una sucesión es una función tal que a cada número natural de su dominio le corresponde un único valor.

Dominio: $\boldsymbol{N}$ (naturales) o también $\boldsymbol{N_0}$ (naturales aumentados)

Ejemplo:

La sucesión $f(n)=\dfrac{1}{n}$ tiene los siguientes términos $\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right\}$

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

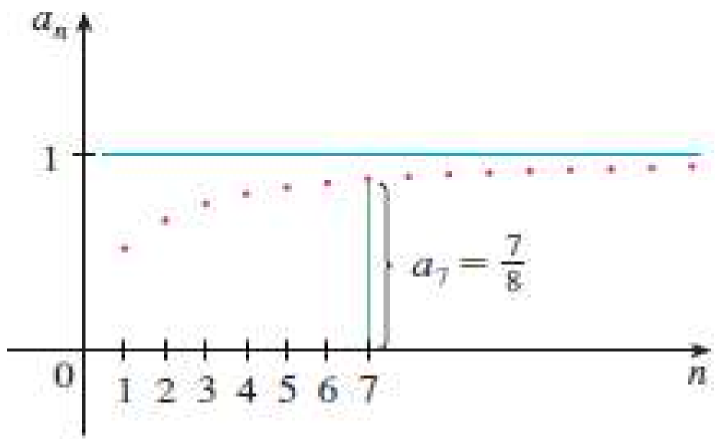
Distintas notaciones para una sucesión:

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} \qquad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$$

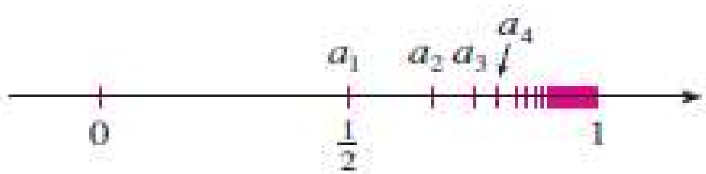
Representación gráfica de una sucesión

Al ser una función se puede representar en un sistema de ejes coordenados, por ejemplo

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$



O también se pueden representar sus términos en una recta numérica



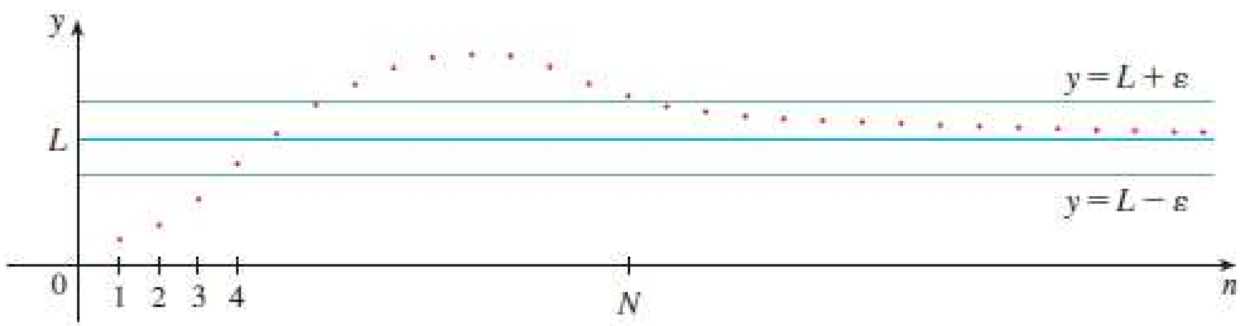
Límite de una sucesión

2 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y lo expresamos como

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente entero N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$



Si este límite es un número real la sucesión se llama **CONVERGENTE**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \text{N° real} \longrightarrow & \textbf{CONVERGENTE} \\ \infty \longrightarrow & \textbf{DIVERGENTE} \\ \text{Oscila} \longrightarrow & \textbf{DIVERGENTE} \end{cases}$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \longrightarrow \textbf{CONVERGENTE}$$

$$\{2n-1\} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} (2n-1) = \infty \longrightarrow \textbf{DIVERGENTE}$$

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) = \left.\begin{matrix} 0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ \\ 1 \text{ si } n \text{ es par} \end{matrix}\right\} \text{Oscila} \longrightarrow \textbf{DIVERGENTE}$$

Sucesiones importantes

Sucesión aritmética

$a_n = a+(n-1)s$ *a, s* constantes

Ej. $a=2$, $s=3$

$a_1=2$, $a_2= 5$, $a_3=8$

{2, 5, 8, 11, 14, …} cada término se obtiene sumando un mismo número al anterior.

Sucesión geométrica

$a_n= a\, q^{n-1}$ q: razón

Ej: $a=2$, $q=3$

{2, 6, 18, 54, 162, …}

Sucesión armónica

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

Ley de formación de números pares $\{2n\}$

Ley de formación de números impares $\{2n+1\}$ o $\{2n-1\}$

Alternante $\{(-1)^n\}$

Recurrencia: se tienen los dos primeros términos y los siguientes se hallan en base a los anteriores a partir de una ley

Ejemplo: Dados a_1, a_2

$a_3 = 2a_2 - a_1$

$a_4 = 2a_3 - a_2$

•

•

•

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ $\Longrightarrow$ Ley de recurrencia

Sucesión Creciente

Una sucesión $\{a_n\}$ se llama creciente si $a_n < a_{n+1}$, para toda $n \geq 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$

Ejemplo $\{a_n\} = \{2n\}$

Sucesión Decreciente

Si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geq 1$ se denomina **decreciente**.

Ejemplo $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

Sucesión Monótona

Una sucesión es ***monótona*** si es creciente o decreciente

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} \right\}$$ no es una sucesión monótona

Cotas: Sucesiones acotadas

11 Definición Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si existe un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Está **acotada por abajo** si existe un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, entonces $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo $(a_n > 0)$, pero no por arriba.

La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

NO toda sucesión acotada es convergente:
Ejemplo

$a_n = (-1)^n$ satisface $-1 \leq a_n \leq 1$, pero es divergente

NO toda sucesión monótona es convergente:

Ejemplo $a_n=\{2n\}$

$\boxed{12}$ **Teorema de la sucesión monótona** Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

MUCHAS GRACIAS