Variables aleatorias bidimensionales

1) La función de distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y está dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} c.(2x+y) & si\ \ x=0,1,2\ ;\ y=0,1,2,3 \\ 0 & c.o.c \end{cases}$$

X \ Y	0	1	2	3
0				
1				
2				

a) Halle el valor de la constante c, completando previamente la siguiente tabla.
b) Halle las distribuciones marginales y $P(X \leq 2{,}5)$.
c) Calcule $P(X=2\ ;\ Y=1)$.
d) Calcule $P(X \geq 1\ ;\ Y \leq 2)$

2) Un supermercado del barrio dispone de dos cajas para sus clientes. En un día cualquiera, sea X la proporción del tiempo que la caja rápida está funcionando (por lo menos un cliente es atendido o espera por serlo) e Y la proporción del tiempo en que la caja normal está funcionando. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta de las proporciones del tiempo de funcionamiento en ambas cajas está dado por: $f(x,y)=\begin{cases} k(x^2+y^2) & con\ \ 0\leq x\leq 1;\ \ 0\leq y\leq 1 \\ 0 & en\ c.o.c. \end{cases}$

a) Encuentre el valor de la constante k para verificar que f es una función de densidad de probabilidad conjunta. Represente la región donde está definida f.
b) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la caja normal esté ocupada menos de la mitad del tiempo?
~~**d)** ¿Cuál es la probabilidad de que la caja normal esté funcionando más de 45 minutos dado que la caja rápida funciona sólo 30 minutos?~~

3) Dos líneas de producción fabrican cierto tipo de artículo. Supóngase que la capacidad productiva (en cualquier día dado) es de 5 artículos para la línea I y 3 artículos para la línea II. Además, el número verdadero de artículos producidos por cada una de las líneas de producción es una variable aleatoria. (X,Y)que registra el número de artículos producidos por la línea I y la línea II, respectivamente. La siguiente tabla brinda la distribución de probabilidad conjunta de (X,Y).

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**0,01**	**0,03**	**0,05**	**0,07**	**0,09**
1	**0,01**	**0,02**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,08**
2	**0,01**	**0,03**	**0,05**	**0,05**	**0,05**	**0,06**
3	**0,01**	**0,02**	**0,04**	**0,06**	**0,06**	**0,05**

a) Calcule la probabilidad de que la línea I produzca 2 artículos y la línea II produzca 3 artículos.
b) Calcule la probabilidad que la cantidad de artículos producidos por la línea II sea mayor a la cantidad producida por la línea I.
c) Encuentre las funciones de distribución marginal de las variables aleatorias X y Y. ¿Son independientes? Justifique.
d) Calcule las probabilidades marginales: **(d.1)** Cuando la cantidad de artículos producidos por la línea I es igual a 2. **(d.2)**Cuando la cantidad de artículos producidos por la línea II es igual a 0.
e) Determine las distribuciones de probabilidades marginales acumuladas $G(x)$ y $H(y)$.

4) Considere la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x-y}{9} & con\ \ 1<x<3\ ,1<y<2 \\ 0 & en\ c.o.c. \end{cases}$$

a) Represente la región donde está definida *f*.
b) Encuentre las distribuciones marginales de X e Y.
c) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que Y sea mayor a 1.5? ¿Cuál es la probabilidad de que X sea menor a 2? Emplee los resultados del inciso b.
~~**e)** Calcule $P(X>2|Y=1)$.~~

5) Los contenidos de magnesio y vitamina A incorporados a un cierto suplemento dietario son variables aleatorias X e Y cuya función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)=c(xy+2)$ con $1\leq x\leq 4$; $0\leq y\leq 2$, ambas en microgramos (μg).

a) Represente la región R_{XY} donde está definida *f*. Obtenga el valor de la constante c.
b) Determina las funciones marginales de probabilidad de las variables. ¿Son independientes X y Y? Justifique.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el contenido de magnesio en el suplemento sea de más de 2 microgramos y el de vitamina A menor a 1 microgramos?
d) Halle P(X>3). Interprete en el contexto del problema.
~~**e)** ¿Cuál es la probabilidad de que el suplemento dietario contenga a lo sumo 2 miligramos de magnesio, dado que contiene 1 mg de vitamina A?~~

6) Una empresa metalúrgica posee dos fábricas ubicadas en dos ciudades. Interesa estudiar los números de accidentes laborales en un mes que ocurren en las fábricas de Paraná y Rosario, dados por X e Y, respectivamente. Su distribución de probabilidades está en la siguiente tabla.

f(x,y)	*X*			
Y	**2**	**4**	**6**	**8**
3	0	3c	c	3c
4	6c	0	2c	2c
5	5c	8c	3c	3c

a) Determine el valor de la constante *c*.
b) Determine las distribuciones marginales de probabilidad.
c) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y? Justifique.
d) Encuentre la distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria Y.
e) Calcule la probabilidad de que:
e.1) el número de accidentes laborales en Rosario supere al de Paraná, en un mes.
e.2) en Paraná ocurran más de 4 accidentes laborales en la fábrica, en un mes.

7) Los tiempos de control de calidad y envasado de un artículo en una fábrica, dados en minutos, son representados por las variables aleatorias X y Y, respectivamente, siendo $f(x,y)=\frac{1}{84}(2x+y)$ con $0\leq x\leq 6,\ 0\leq y\leq 2$ la función de probabilidad conjunta de las mismas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el control de calidad de un artículo tome menos de cinco minutos y el envasado más de un minuto?
b) Determine las densidades marginales de las variables aleatorias X y Y. ¿Son independientes? Justifique.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el control de calidad tarde exactamente dos minutos?

8) Considere las variables aleatorias X e Y donde X es la cantidad de dinero invertido en la compra de unas acciones particulares e Y es la ganancia obtenida por dicha inversión, ambas en miles de dólares. La distribución de probabilidad conjunta está dada por:

f(x,y)	*Y*		
X	**-1**	**0**	**1**
1	$\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}c$	$\frac{1}{4}c$
2	$\frac{1}{4}c$	$\frac{3}{4}c$	c

a) Halle el valor de c.
b) ¿Cuál es la probabilidad de invertir dos mil dólares y no ganar dinero?
c) Determine las distribuciones marginales de probabilidad. ¿Son independientes estas variables? Justifique.
d) Calcule la probabilidad de no perder dinero en esta transacción.

9) Los contenidos de aluminio y cobre que se incorporan en una aleación son dos variables aleatorias X y Y, respectivamente, cuya función de densidad conjunta es $f(x,y)=\dfrac{2xy-1}{324}$ siendo $2\leq x\leq 6;\ 2\leq y\leq 5;$ ambas en miligramos.

a) Determine las funciones de densidad marginales para ambas variables aleatorias. ¿Son independientes los contenidos aluminio y cobre que se incorporan? Justifique.
b) Encuentre la probabilidad de que en una aleación se incorporen al menos 3 gramos de aluminio.
c) Calcule P(X<4; Y>4). Interprete esta probabilidad en el contexto del problema.