Seguimos con la Teoría de Conjuntos

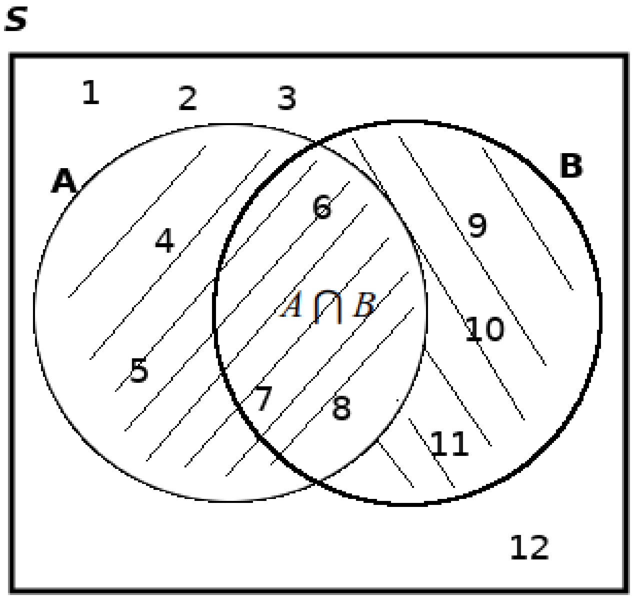
Reglas Aditivas

Si un evento puede ser expresado como la unión de otros eventos entonces:

$$\boldsymbol{P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Del Ejemplo 5: Si $A = \{X \mid 3 < X < 9\}$ y $B = \{Y \mid 5 < Y < 12\}$

$$A \cup B = \{C \mid 3 < Z < 12\}$$



$$P(A) = \frac{5}{12};\ P(B) = \frac{6}{12};\ P(C) = \frac{8}{12}$$

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5+6-3}{12} = \frac{8}{12}$$

En el caso de tres eventos *A*, *B* y *C*; para la unión de los tres, representado por el evento *D*, se tiene:

$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Corolario:

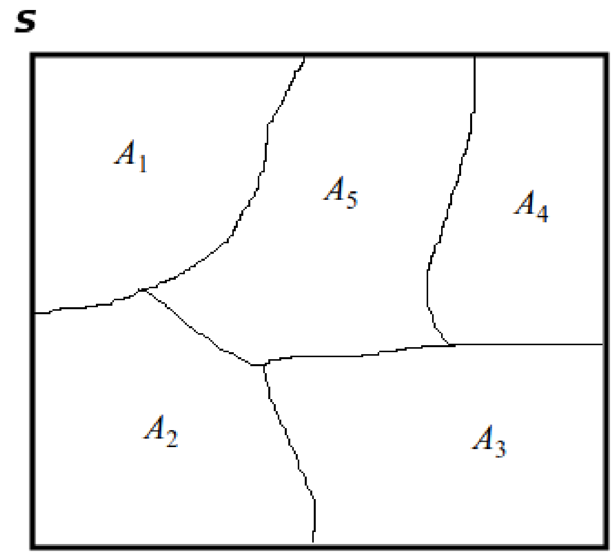
- Si los eventos son <u>mutuamente excluyentes</u> $\Rightarrow P(A \cap B) = (\emptyset) = 0$
- $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

Si los eventos pueden ser expresados como la partición del Espacio Muestral *S*, entonces:

$A_1, A_2, \ldots A_n$ *son mutuamente excluyentes*

Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ es una partición de *S* entonces: $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \{\emptyset\}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$
$$= P(S) = 1$$



$$P(A_4) = P(S) - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5)$$

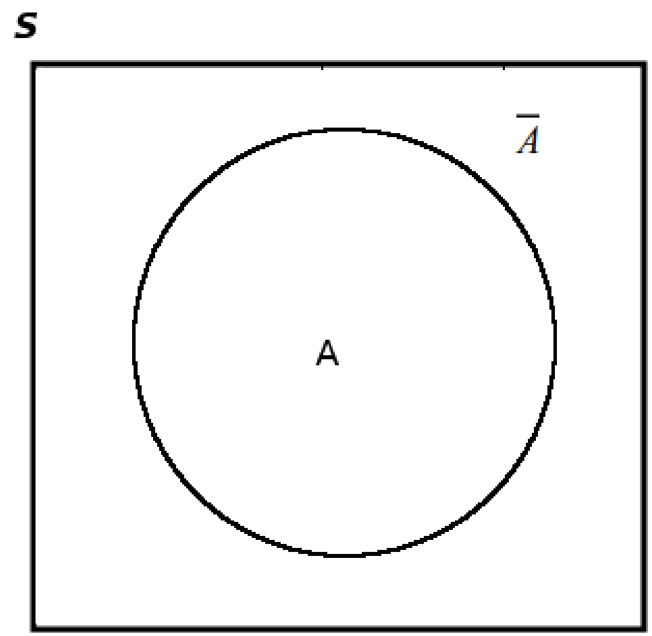
$$P(A_4) = 1 - [P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_5)]$$

- Si A y B son eventos complementarios:

$$P(B) = P(\overline{A})$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(B)$$



Probabilidad condicional

Probabilidad de ocurrencia de un evento cuando se sabe que ya ocurrió otro relacionado con éste.

$$P(B/A): Probabilidad\ del\ evento\ B\ dado\ que\ ocurrió\ A$$

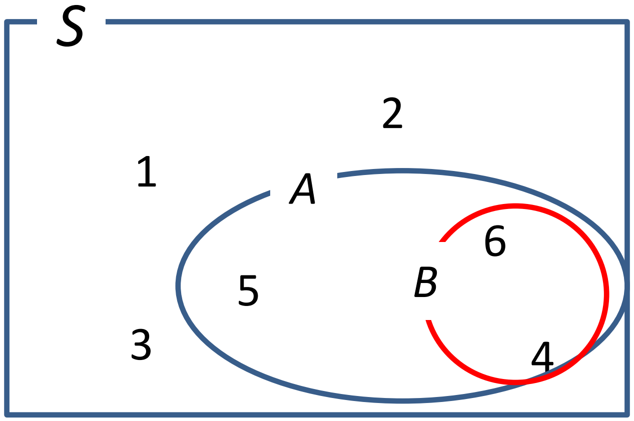
Ejemplo 16: Calcular la probabilidad de que salga un **número par** al tirar un dado sabiendo que **el número es mayor de 3**.

Llamemos a $X: \{N° \ del\ dado\}$

Evento $B: \{X/X\ es\ par\}$

Evento $A: \{X/X > 3\}$

$P(A) = 1/2$



Ahora *A* es nuestro nuevo espacio muestral porque sabemos (estamos seguros) que se produjo *A*.

$A: \{4,5,6\} = \boxed{P(B/A) = 2/3}$

RESULTADO

Probabilidad condicional

Probabilidad de ocurrencia de un evento cuando se sabe que ya ocurrió otro relacionado con éste.

$$P(B/A): Probabilidad\ del\ evento\ B\ dado\ que\ ocurrió\ A$$

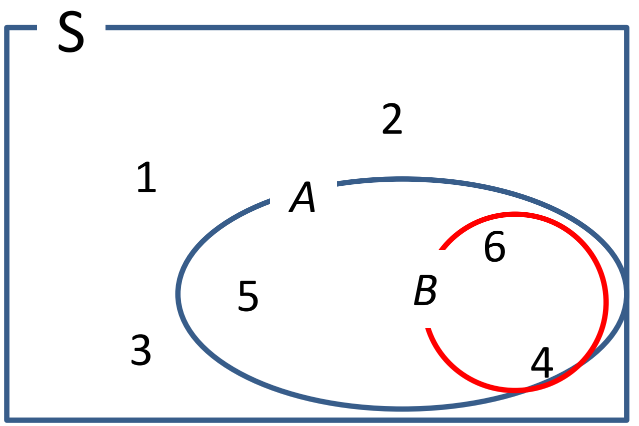
Ejemplo 16: Calcular la probabilidad de que salga un número par al tirar un dado sabiendo que el número es mayor de 3.

Ahora lo planteamos para el espacio muestral original *S*:

$$P(A \cap B) = 1/3$$

$$P(A) = 1/2$$

Por lo tanto: $$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$



Siempre que *P(A) > 0*

Ejemplo 17:

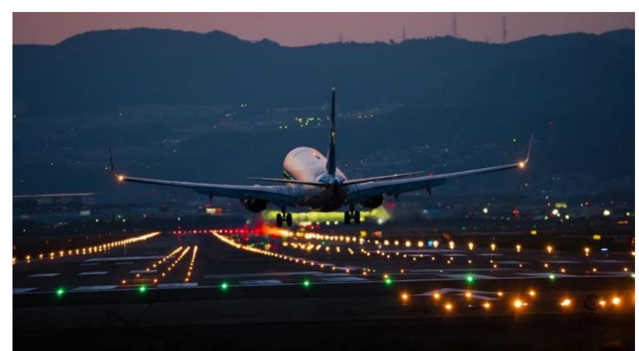
La probabilidad de que un vuelo programado **normalmente salga a horario es *P(D) = 0.83***. La probabilidad de que **llegue a horario es *P(A) = 0.82*** y la probabilidad de que **salga y llegue a horario es *P(D∩A) = 0.78***. Encuentre la probabilidad que:

a) Un avión llegue a horario sabiendo que salió a horario.
b) Un avión salió a horario sabiendo que llegó a horario.

Respuestas:

a) $$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

b) $$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$



Eventos Independientes

En probabilidad condicional vemos cómo **la ocurrencia de un evento altera la probabilidad de ocurrencia de otro siempre y cuando exista una vinculación entre ambos**. Es decir, el conocimiento adicional de la ocurrencia de un evento altera la probabilidad de otro siempre que exista dependencia. **Justamente cuando no exista esta dependencia no se altera la probabilidad de la ocurrencia de un evento aunque sepamos de la ocurrencia del otro.**

A esto llamamos EVENTOS INDEPENDIENTES

Por tanto:

$$\boxed{P(B/A) = P(B) \quad \text{y} \quad P(A/B) = P(A)}$$

Entonces *A* y *B* son eventos ***independientes***.

Corolario: Regla multiplicativa solamente si los eventos son independientes

Si observamos la fórmula de condicionalidad de eventos decimos que:

$P(B/A) \,.\, P(A) \;=\; P(A \cap B)$ y también $P(A/B) \,.\, P(B) \;=\; P(A \cap B)$

Si los eventos *A* y *B* son independientes:

$P(B/A) = P(B)$ $\boldsymbol{y}$ $P(A/B) = P(A) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}}$

Ejemplo 18:

$A\colon \{X/X > 1\}; B\colon \{X/X\ sea\ par\}$ en un tiro del dado.

a) ¿Son independientes?

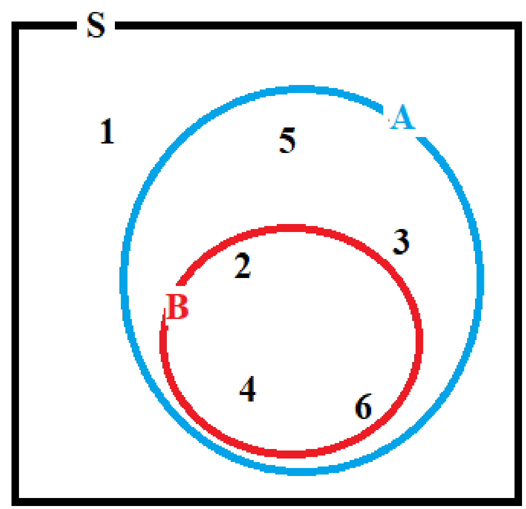
b) ¿Son excluyentes?

Respuestas:

a) Para saber si son independientes verificamos las relaciones:

$$P(B/A) = P(B); P(A/B) = P(A)$$

Observamdo el Diagrama de Venn:



$$P(B/A) = P(B);\ \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = P(A);\ 1 \neq \frac{5}{6}$$

Aplicando las fórmulas de Probabilidad condicional:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/2}{5/6} = \frac{3}{5}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

a) No son independientes

b) No son excluyentes

Extensión de la Intersección de eventos:

Si en un experimento pueden ocurrir $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos, entonces:

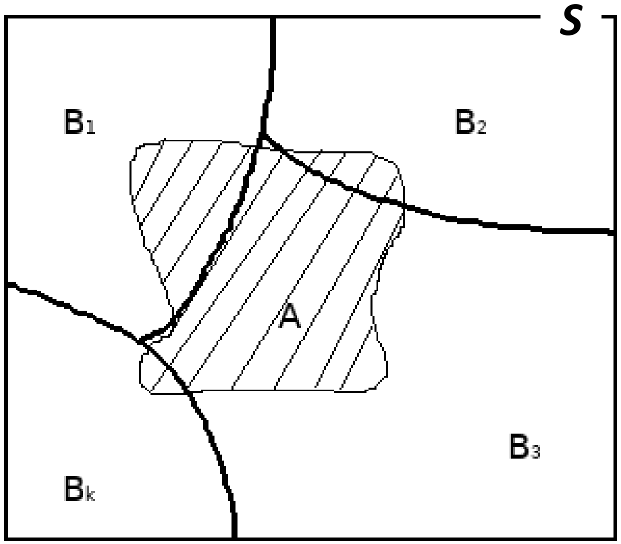
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \,.\, P(A_2/A_1) \,.\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \;\ldots .$$

$$\ldots . P(A_k/A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_{k-1})$$

Teorema de probabilidad total

Dado un evento ***A*** que puede ser descripto por suma de las intersecciones de éste con eventos mutuamente excluyentes:

$B_i = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) = 1$, formados como una partición del Espacio Muestral ***S***.



Entonces, según la fórmula de intersección de eventos:

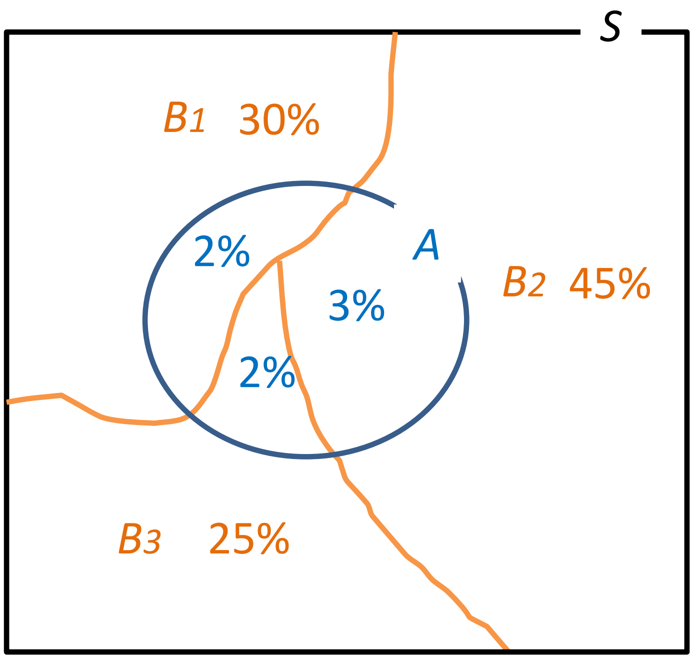
$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} [P(B_i).P(A/B_i)]$$

Ejemplo 20:

En una planta de montaje existen **3 máquinas** $\boldsymbol{B_1, B_2, B_3}$ que trabajan fabricando el **30%, 45% y 25%** de las partes respectivamente. Se sabe por experiencia que el **2%, 3% y 2% de estos productos fabricados respectivamente son defectuosos**.
Suponga que se selecciona de forma aleatoria 1 producto terminado.
¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Resolución

Eventos:
A: Producto defectuoso.
B_1: Producto fabricado por la máquina 1.
B_2: Producto fabricado por la máquina 2.
B_3: Producto fabricado por la máquina 3.



$P(B_1) = 30\%,$ $\qquad P(A/B_1) = 2\%$
$P(B_2) = 45\%,$ $\qquad P(A/B_2) = 3\%$
$P(B_3) = 25\%,$ $\qquad P(A/B_3) = 2\%$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3}[P(B_i).P(A/B_i)] = (0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02) = 0.0245$$

Regla de Bayes (o Probabilidad de las Causas)

Si los eventos $B_1, B_2, ..., B_k$ constituyen una partición del Espacio Muestral S y $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, ..., k$ entonces cualquier evento B_r en S tal que $P(A) \neq 0$ puede expresarse como :

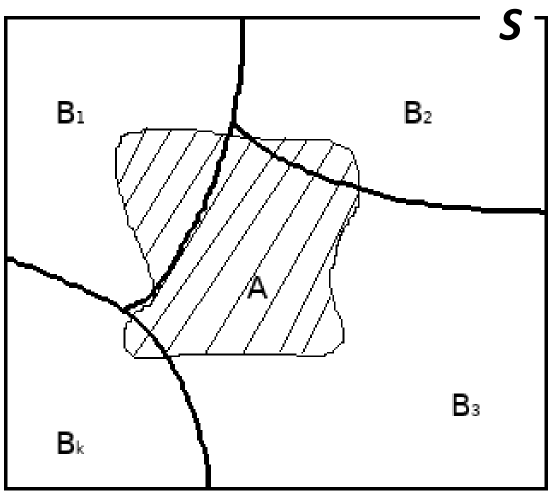
$P(B_r/A) = P(B_r \cap A) \,/\, P(A)$ $[\,Probabilidad\ Condicional]$

Como por la regla de la intersección: $P(B_r \cap A) = P(B_r)\,.\,P(A/B_r)$

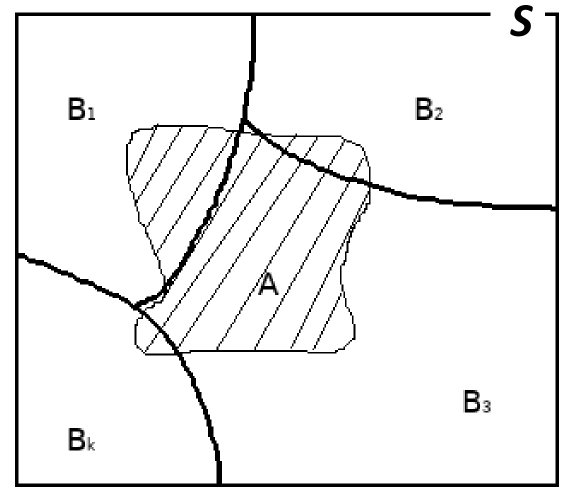
Y por el teorema de la Probabilidad Total: $P(A) = \sum_{i=1}^{k}[P(B_i).\,P(A/B_i)]$

Entonces:

$$\boxed{P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,.\,P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k}[P(B_i)\,.\,P(A/B_i)]}}$$



En el ejemplo 20:
Si el artículo seleccionado es defectuoso.
¿Qué probabilidad existe que lo haya fabricado B_2?



$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)\,.\,P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k}[P(B_i)\,.\,P(A/B_i)]}$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_2)\,.\,P(A/B_2)}{\sum_{i=1}^{3}[P(B_i)\,.\,P(A/B_i)]}$$

$$P(B_2/A) = \frac{(0.45)\,.\,(0.03)}{(0.3)\,.\,(0.02) + (0.45)\,.\,(0.03) + (0.25)\,.\,(0.02)}$$

$$= \frac{0.0135}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = 0.55$$