Unidad I: Sucesiones numéricas y Series de Funciones

Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Multivariado

PARTE A: Sucesiones

T1: SUCESIONES NUMÉRICAS

Definición: Llamamos **sucesión numérica** a un conjunto **ordenado** de números, afectados de un **índice natural** que indica el lugar que cada uno ocupa en el conjunto y que satisfacen una determinada **ley de formación**.

$$\boxed{\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}}$$

1er 2do 3er término de la sucesión

Término general de la sucesión o término n-ésimo

PARTE A: Sucesiones

T1: SUCESIONES NUMÉRICAS

Otra definición:

Definición: Llamamos **sucesión numérica** a una **función** cuyo **dominio** es el **conjunto de los números naturales** y cuyo **rango** es el **conjunto de los números reales:**

$$f : \aleph \rightarrow \Re \,/\, \forall\, n \in \aleph : a_n = f(n)$$

Es un conjunto **ordenado** de infinitos elementos.

Ejemplo1) Encontrar los primeros términos de: $\{a_n\} = \{2n\}$ y $\{b_n\} = \{1/n\}$

Ejemplo2) Encontrar el término enésimo de: $\{c_n\} = \{1/2 ; 2/3 ; 3/4 ; 4/5 ; 5/6 , 6/7 ; \ldots\}$

La sucesión en la cual todos los términos son constantes se denomina sucesión constante

Representación de una sucesión

1) Mediante la **expresión del término n-ésimo** a_n.

Ejemplo3) $a_n = n / (n^2 + 1)$

2) En **forma coloquial**, o sea describir los términos verbalmente.

Ejemplo4) Encontrar la sucesión donde $a_n = 0$, si n es impar y $a_n = 1$ si n es par.

3) Mediante **fórmula o regla de recurrencia**

Ejemplo5) Encontrar la sucesión donde $a_n = 3\, a_{n-1} - a_{n-2}$. Siendo $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$.

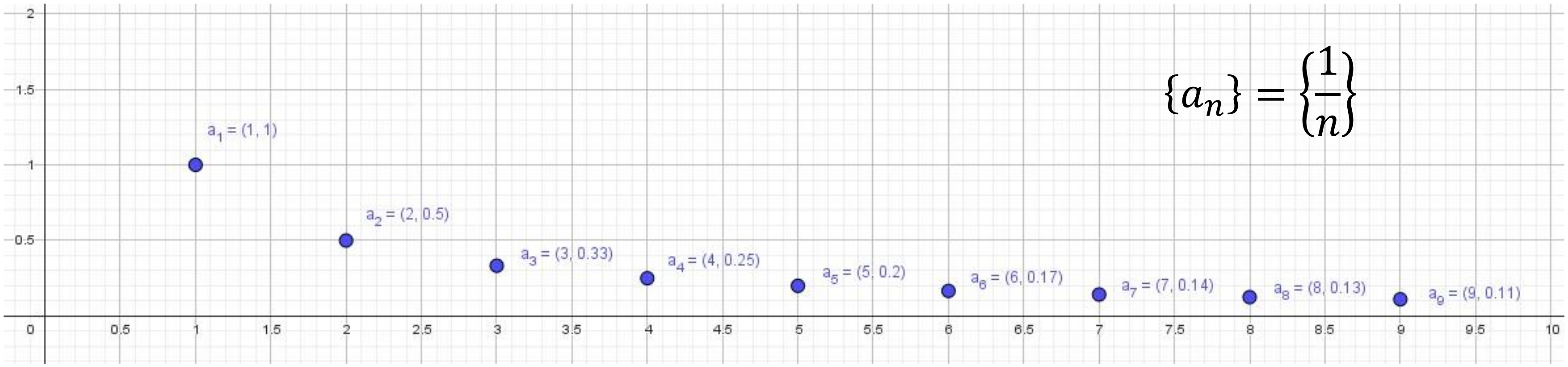
4) **Representación geométrica**.

C_1) Sistemas de ejes coordenados xy, a través de puntos P_n $(n; a_n)$ y $n \in N^+$

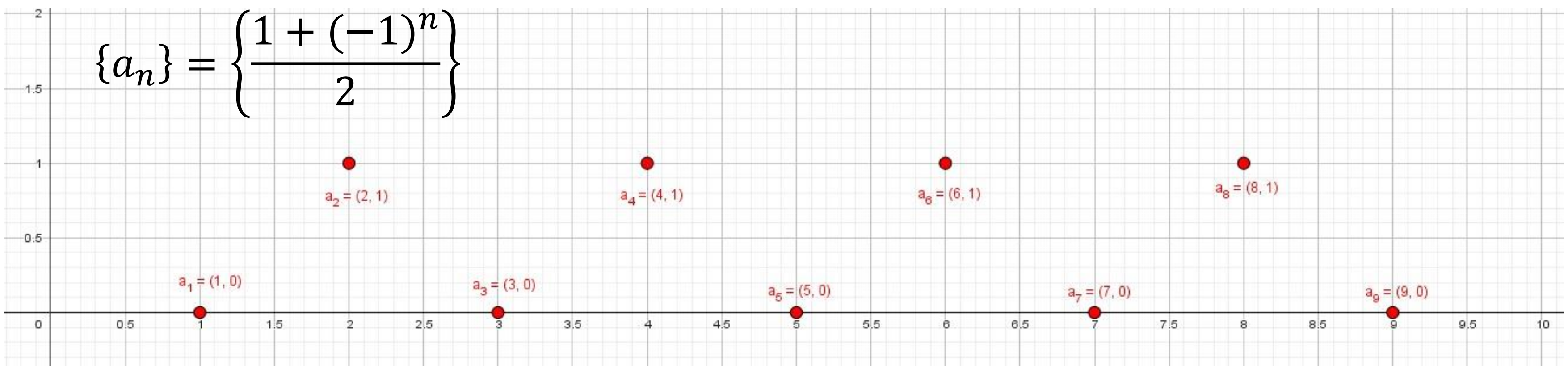
C_2) Un solo eje, el eje de las abscisas (x)

C$_1$) Sistemas de ejes coordenados xy

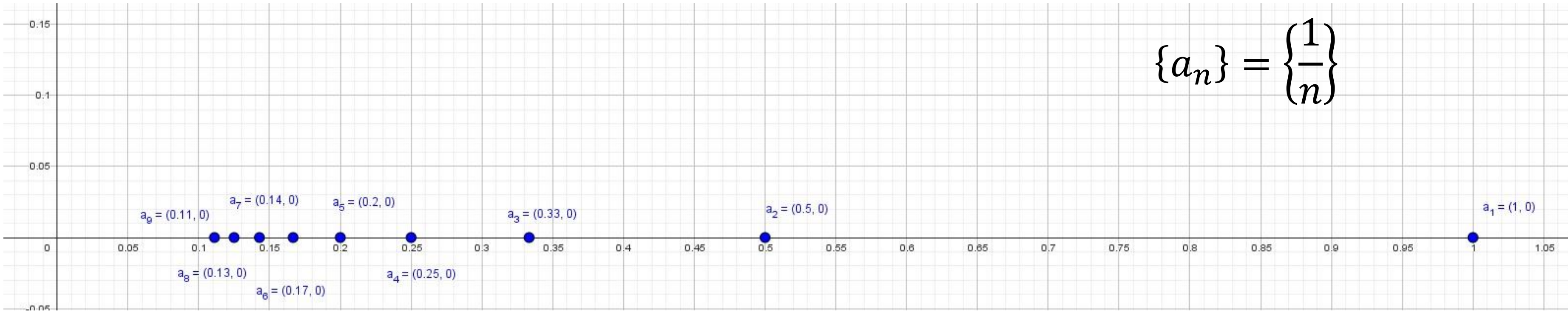
$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$



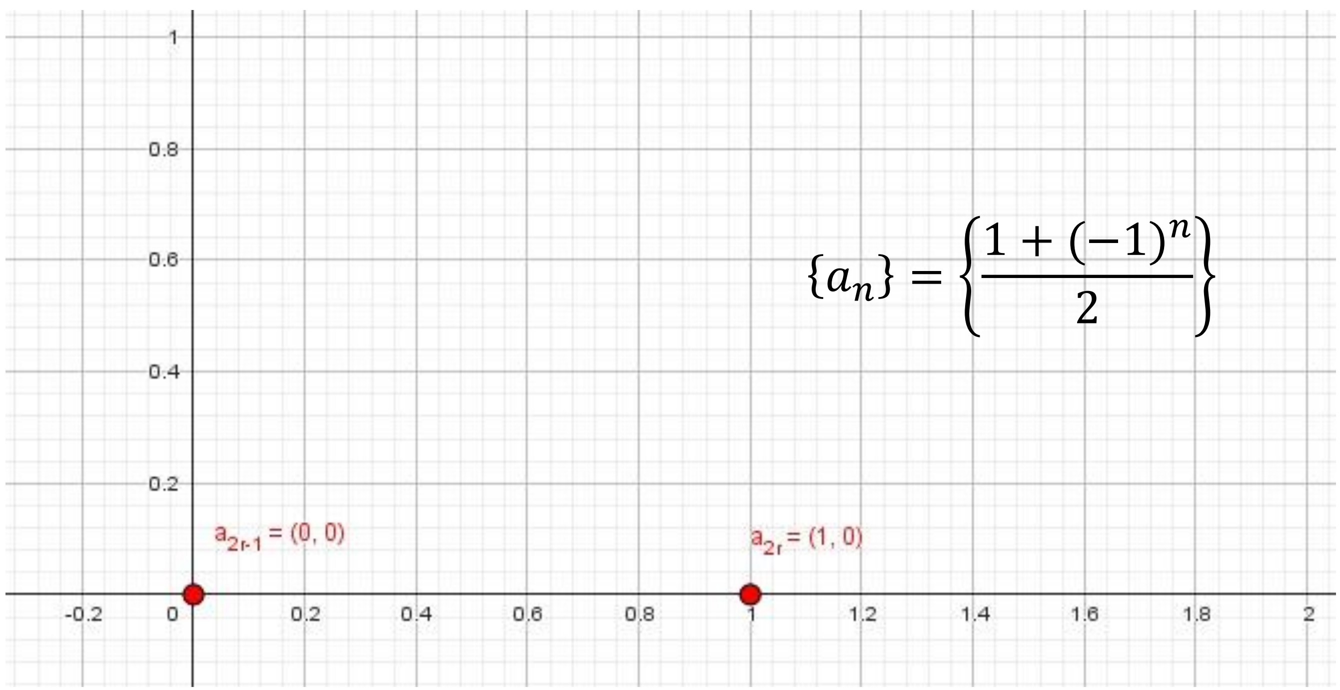
$$\{a_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}\right\}$$



C_2) Un solo eje, el eje de las abscisas (x)



$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$



$$\{a_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}\right\}$$

Sucesiones Especiales

A) Sucesión aritmética

Sean a y s ε R y n ε N^+, se denomina sucesión aritmética a la que verifica:

$a_1 = a$

$a_2 = a + s$

$a_3 = a + 2\,s$

$a_4 = a + 3\,s$

$a_5 = a + 4\,s$

…

$a_n = a + (n - 1)\,s$

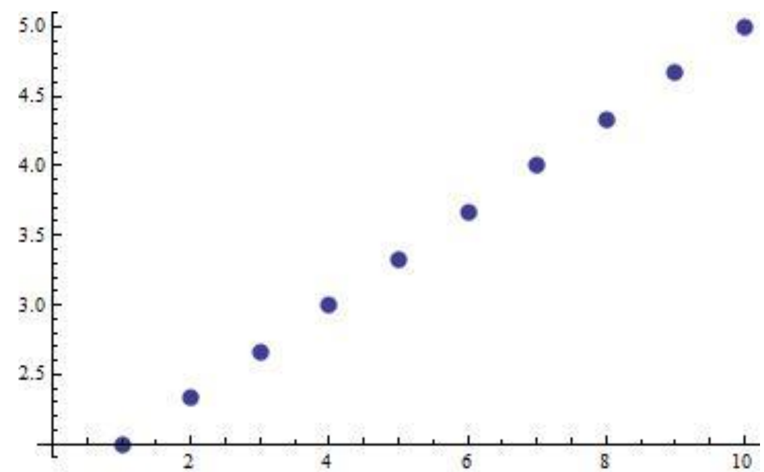
$$\boxed{a_n = a + (n-1)s}$$

Ejemplo 6) Encontrar los términos de la sucesión: $a_n = 2 + (n - 1)\, {}^1/_3$

También se la denomina **PROGRESIÓN aritmética**

Es una sucesión, donde cada término se obtienen sumando al anterior un número constante S.

ListPlot[Table[2 + (n-1) *1/3,{n,10}]]



B) Sucesión geométrica

Sean a y q ε R y n ε N^+, se denomina sucesión geométrica a la que verifica:

$a_1 = a$

$a_2 = a\,q$

$a_3 = a\,q^2$

$a_4 = a\,q^3$

$a_5 = a\,q^4$

…

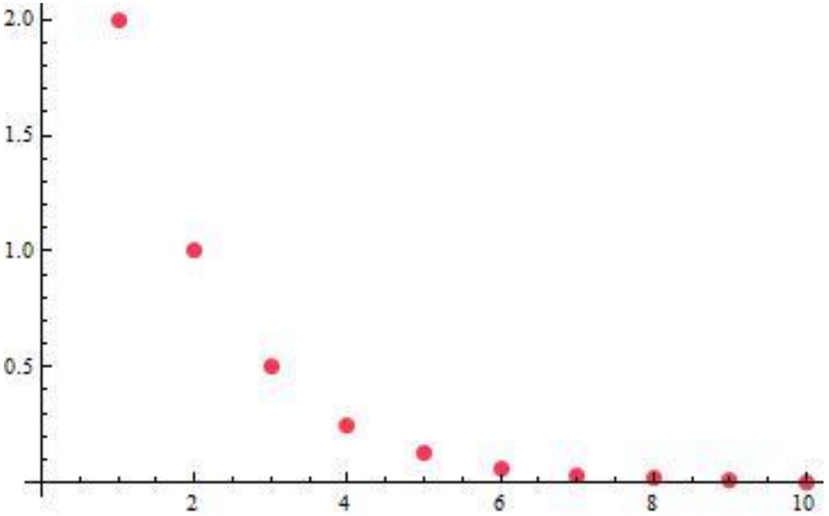
$a_n = a\,q^{n-1}$

$$\boxed{a_n = a\,q^{n-1}}$$

Ejemplo 7) Encontrar los términos de la sucesión: $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

También se la denomina **progresión geométrica**

ListPlot[Table[2 *(1/2)^(n-1),{n,10}]]



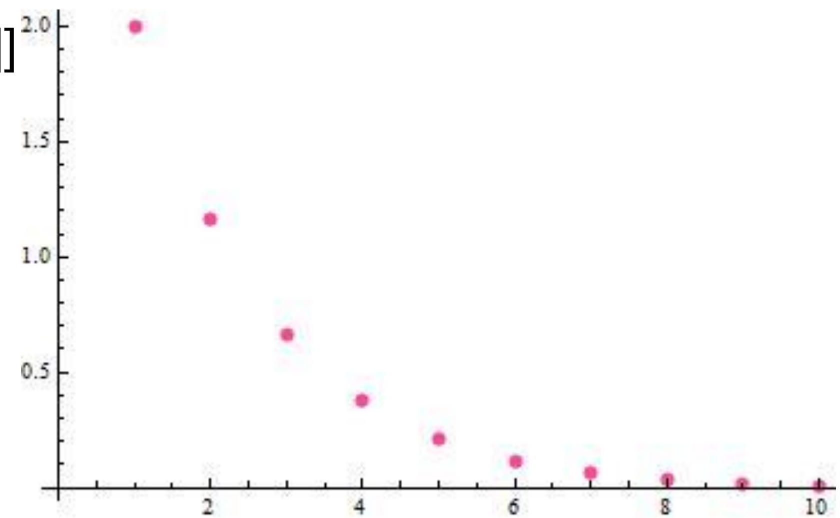
C) Sucesión aritmética geométrica

Sean a, s y q ε R y n ε N^+, se denomina sucesión aritmética geométrica a la que verifica:

$$\boxed{a_n = [a + (n-1)\, s]\, q^{n-1}}$$

Ejemplo 7) Encontrar los términos de la sucesión: $a_n = \left[2 + (n-1)\frac{1}{3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ListPlot[Table[(2 + (n-1) *1/3)*(1/2)^(n-1),{n,10}]]



D) Sucesión armónica o sucesión recíproca

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$$

Operaciones con sucesiones

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones numéricas, α y β dos constantes arbitrarias

a) El producto $\{a_n\ b_n\}$ también es una sucesión. $\{(a\,b)_n\}$

b) La combinación lineal de $\{\alpha\ a_n\ \beta\ b_n\}$ también es una sucesión. $\{(\alpha\ an + \beta\ bn_n)\}$

c) $\{b_n\} \neq 0, \forall n \in \aleph \Rightarrow \left\{\dfrac{1}{b_n}\right\} es\ sucesión \quad \left\{\left(\dfrac{1}{b}\right)_n\right\}$

d) $\{b_n\} \neq 0, \forall n \in \aleph \Rightarrow \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} es\ sucesión \quad \left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)_n\right\}$

Ejemplo8) Dadas las sucesiones {2n} y {1/n} , hallar la sucesión {2n + 1/n}

Igualdad de sucesiones

Se dice que : $\{a_n\} = \{b_n\} \Leftrightarrow a_j = b_j, \forall j \in N$

T2: SUCESIONES MONÓTONAS

Sucesiones crecientes y decrecientes

Definición 1: La sucesión $\{a_n\}$ se denomina **decreciente,** si cada término precedente (o anterior) es mayor que el posterior (o sucesor) a él.

$\{a_n\}$ es **decreciente** $\Leftrightarrow \forall$ n: $a_n > a_{n+1}$

Definición 2: La sucesión $\{a_n\}$ se denomina **creciente,** si cada término precedente es menor que el posterior a él. $\{a_n\}$ es **creciente** $\Leftrightarrow \forall$ n: $a_n < a_{n+1}$

Ejemplo 9) Determinar si las sucesiones $\{a_n\} = \{1/n\}$, $\{b_n\} = \{2n/(n+1)\}$ son decrecientes y crecientes .

Definición 3: La sucesión $\{a_n\}$ se denomina **no decreciente,** si $a_n \leq a_{n+1}$

Definición 4: La sucesión $\{a_n\}$ se denomina **no creciente,** si $a_n \geq a_{n+1}$

Ejemplo 10) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \{2\,n - (-1)^n - 1\}$ es monótona.

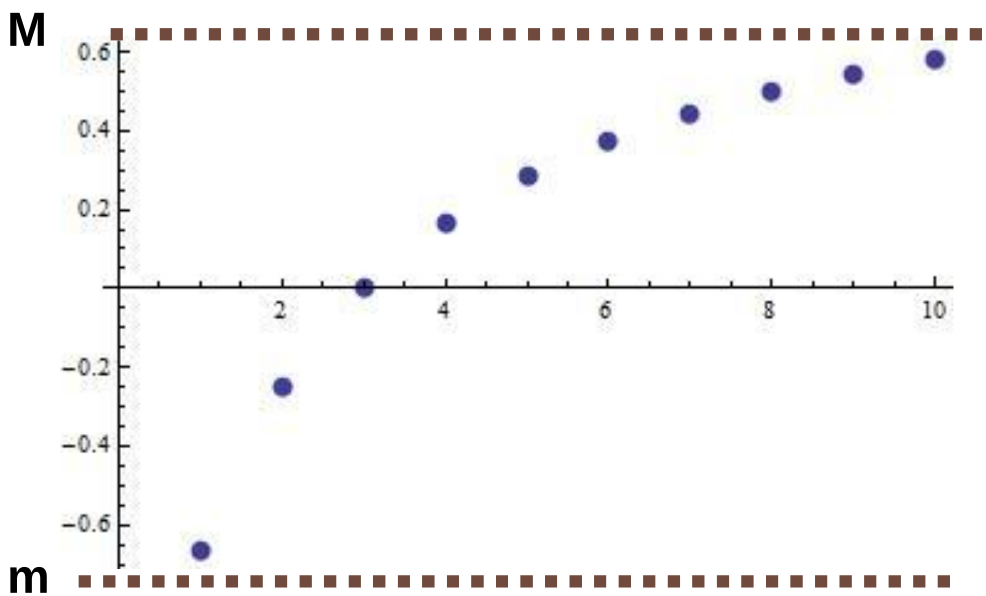
Si se cumple que una sucesión es creciente, decreciente, no creciente o no decreciente, entonces se dice que la sucesión es monótona.

T3: SUCESIONES ACOTADAS - COTAS

Una sucesión {an} se dice **acotada** si existen números **M** y **m**, / $\forall$ n $\in N^+$ se cumple: $m \leq a_n \leq M$.

Una sucesión es acotada ↔ tiene una cota superior y una cota inferior.

Ejemplo 11) Determinar si la sucesión $\{a_n\}$ = es acotada $\left\{\dfrac{n-3}{n+2}\right\}$



m es **cota inferior** de la sucesión {an} si: $\exists$ **m** ε R / **$m \leq a_n$** , $\forall$ n ε N .

M es **cota superior** de la sucesión {an} si: $\exists$ **M** ε R / **$M \geq a_n$** , $\forall$ n ε N.

T4: LÍMITE DE UNA SUCESIÓN - CONVERGENCIA

Definición: Una sucesión tiene límite L si para cada número positivo $\varepsilon > 0$ es posible hallar un número natural N > 0, tal que para todo número n mayor que N se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$ y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, n > 0 / \forall n > N, \exists |a_n - L| < \varepsilon$$

siendo N=N(ε)

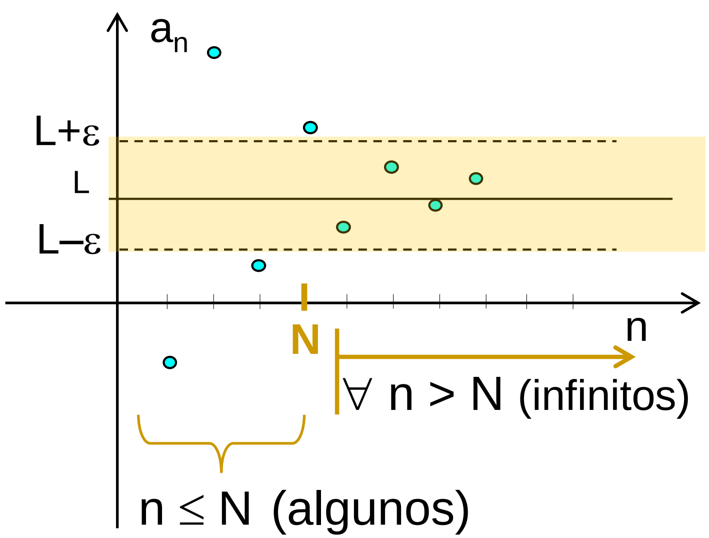
Definición: una sucesión numérica que **tiene límite** se dice que es **convergente**

Si la sucesión numérica **no tiene límite** se dice que es **divergente**

$$\{a_n\}\ \textbf{convergente} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

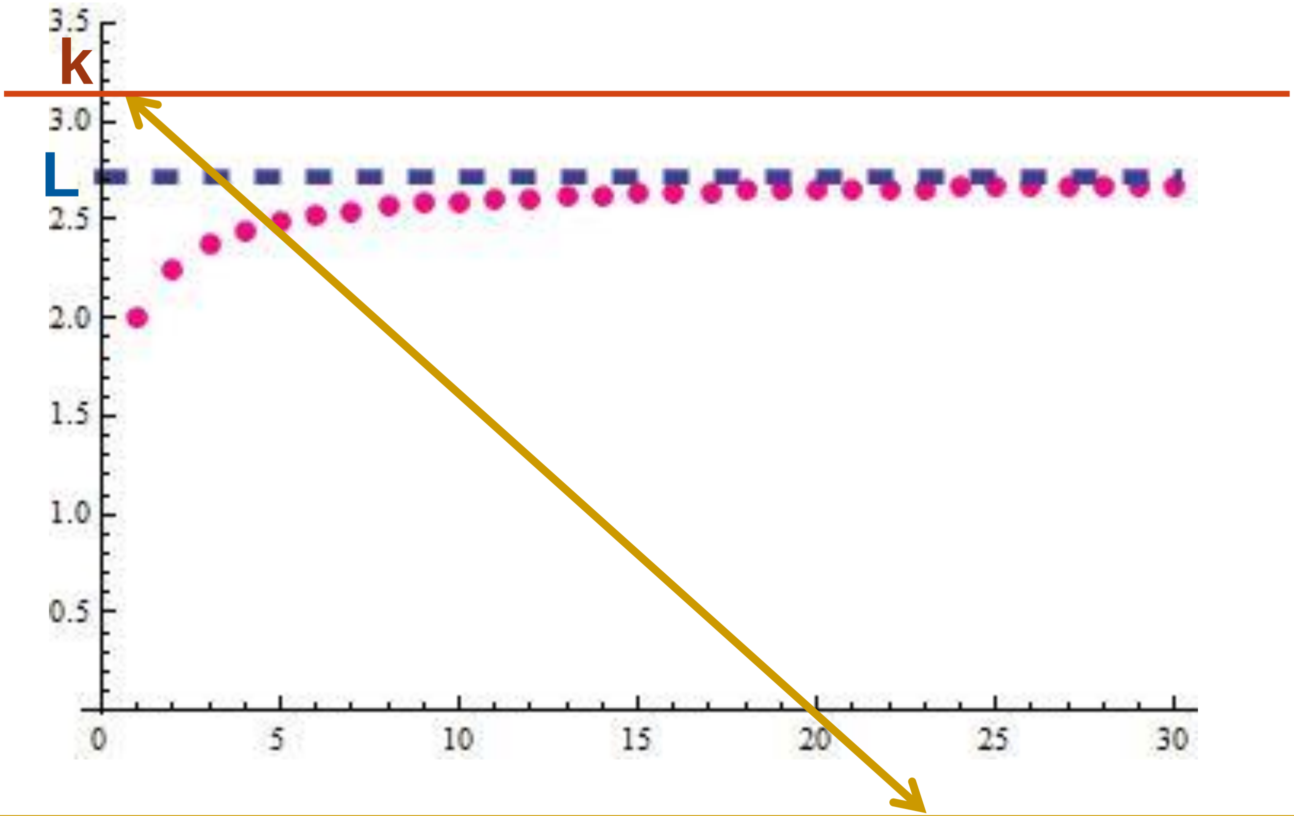
Interpretación

Geométrica



Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona creciente** y **tiene cota superior**, es **convergente**

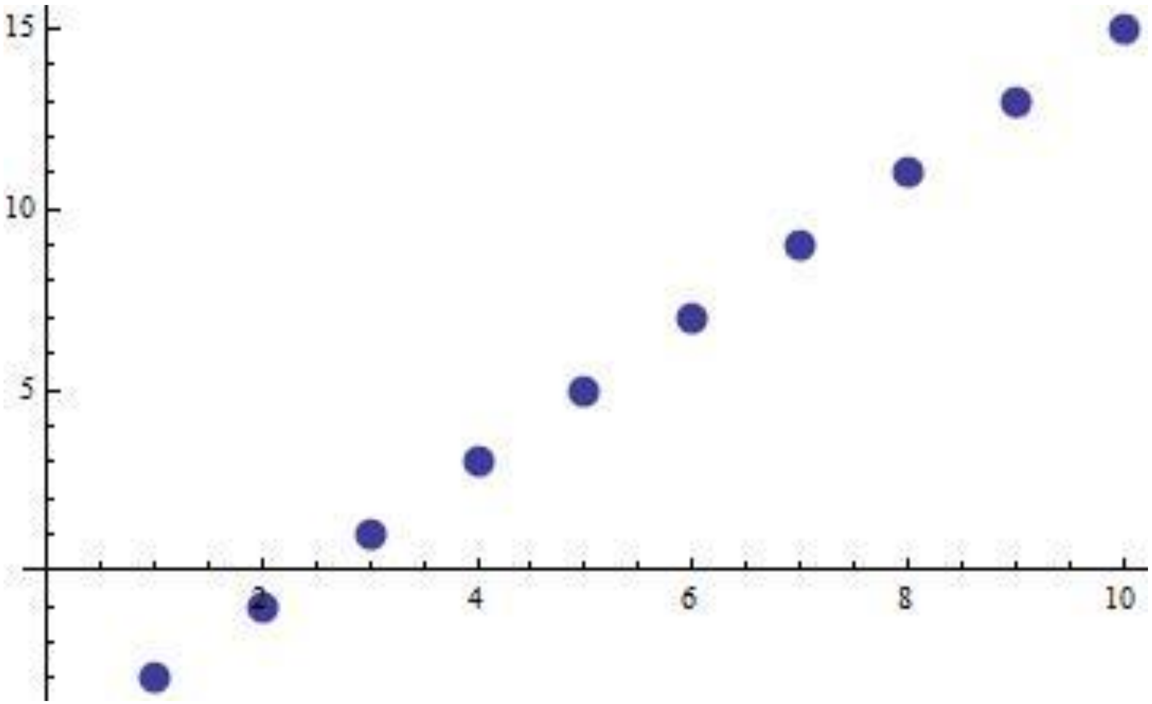


$\{a_n\}$ tiene cota superior **k** y es monótona creciente

$\exists$ **L** $\leq$ **k** $\Rightarrow \{a_n\}$ converge

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona creciente** y **no tiene cota superior**, es **divergente**



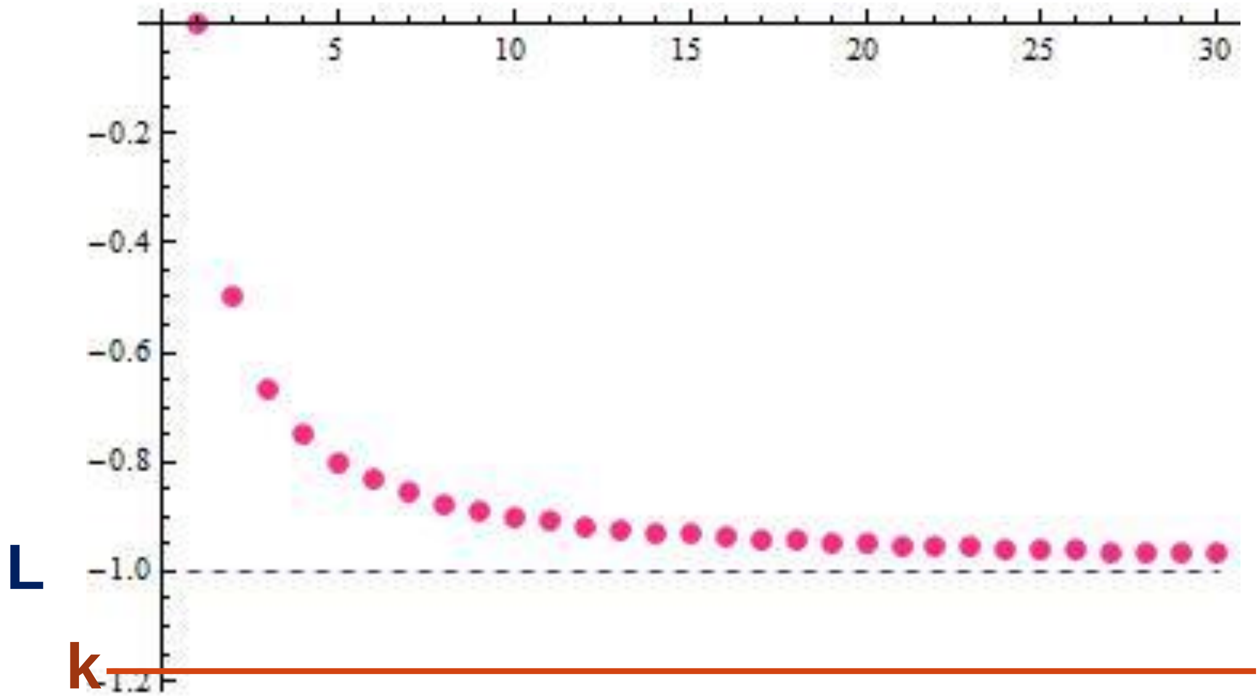
$a_n \to \infty$

$\{a_n\}$ no es acotada

$\{a_n\}$ no es convergente

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona decreciente** y **tiene cota inferior**, es **convergente**

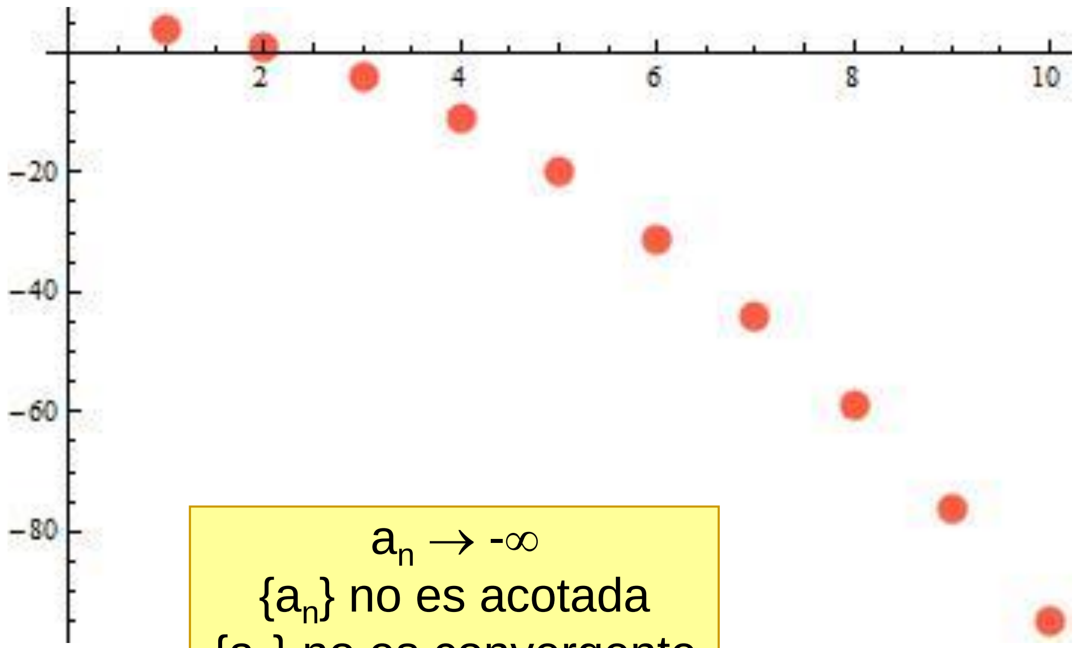


$\{a_n\}$ tiene cota inferior **k**

$\exists$ **L** $\geq$ **k** $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ converge

Convergencia de las sucesiones monótonas acotadas

Si una sucesión es **monótona decreciente** y **no tiene cota inferior**, es **divergente**



$a_n \to -\infty$

$\{a_n\}$ no es acotada

$\{a_n\}$ no es convergente

Las dos anteriores se reúnen en una única propiedad:
Si una sucesión es **monótona y acotada**, entonces es **convergente**

Interpretación geométrica de la convergencia de una sucesión

Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Por definición del límite de una secesión:

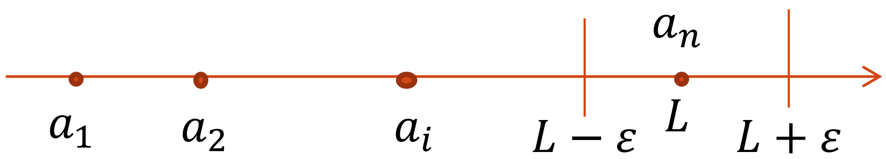
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, n > 0 / \forall n > N, \exists |a_n - L| < \varepsilon$$

siendo N=N(ε)

$|a_n - L| < \varepsilon$

-ε < $a_n - L < \varepsilon$

L -ε < $a_n < L +\ \varepsilon$



Todos los elementos $a_1, a_2, \ldots$ están en un entorno con centro L y de semiamplitud ε

T5: CONDICIÓN NECESARIA DE EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN NUMÉRICA

Que la **sucesión este acotada** **es necesario** para que **exista el límite de una sucesión** (sucesión convergente).

Es decir:

Que la **sucesión este acotada** es obligatorio para que **exista el límite de una sucesión** (sucesión convergente).

Es decir:

Si la **sucesión no esta acotada** entonces **no existe el límite de la sucesión**

no p $\Rightarrow$ **no q**

(por la ley del contrarrecíproco)

q $\Rightarrow$ **p**

existencia de límite (convergencia) $\Rightarrow$ **acotación**

T5: CONDICIÓN NECESARIA DE EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN NUMÉRICA

Ejemplo 12) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n-3}{n+2} \right\}$ es convergente.

Ejemplo 13) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{2} \right\}$ es convergente.

Conclusión 1: La **acotación** no implica **convergencia.** La acotación es condición **necesaria pero no suficiente**.

Conclusión 2: Toda **sucesión no acotada** es **divergente**

Ejemplo 14) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n^2}{n+1} \right\}$ es convergente.

T6: SUCESIONES INFINITÉSIMAS

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice infinitésima si su límite es igual a 0

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Ejemplo 15) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+2}\right\}$ es infinitésima.

Propiedad 1: La suma de dos sucesiones infinitésimas es otra sucesión infinitésima.

Propiedad 2: El producto de una sucesión infinitésima $\{a_n\}$ por una sucesión acotada $\{b_n\}$ es otra sucesión infinitésima.

Propiedad 3: Para que el número L sea el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es necesario y suficiente que a_n pueda escribirse de la siguiente forma: a_n = L + α_n, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitésima y α_n su elemento enésimo.

T9: PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE UNA SUCESIÓN

P1: Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergentes, entonces $\{a_n + b_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

P2: Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergentes, entonces $\{a_n . b_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

P3: Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y C es una constante, entonces $\{C . a_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \left(C . a_n\right) = C . \lim_{n\to\infty} a_n$$

P4: Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergentes, siendo $b_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\{a_n / b_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

P5: Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $r \in R$, entonces $\{a_n^r\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,r} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^r$$

De la misma forma:

$$\lim_{n\to\infty} r^{a_n} = r^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

T10: SUCESIONES INFINITAS Y SU RELACIÓN CON LAS SUCESIONES INFINITÉSIMAS

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice infinita si su límite es igual a ∞

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$$

Ejemplo 16) Determinar si la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2}{n+2}\right\}$ es infinita.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ que es infinita y siendo $a_n \neq 0$, entonces la sucesión $\{1 / a_n\}$ es infinitésima.