Variables aleatorias discretas y continuas

(1) Un embarque de cinco autos importados contiene dos que tienen ligeras manchas de pintura. Si una concesionaria recibe tres de estos automóviles al azar, construya un diagrama de árbol con los posibles resultados del experimento aleatorio. Utilice las letras M y $\overline{M}$ para manchado y no manchado, respectivamente. Luego, a cada punto muestral asigne un valor x de la variable aleatoria X que representa el número de autos que la concesionaria compra con manchas de pintura. ¿Cuál es su distribución de probabilidades?

(2) Un camión ha cargado mercadería defectuosa por error y la misma será entregada a diferentes casas de electrodomésticos. Equivocadamente, de las siete computadoras que han incluido al reparto, hay dos que son defectuosas. Si una de las casas de electrodomésticos adquiere tres de las computadoras, construya un diagrama de árbol con los posibles resultados del experimento aleatorio. Sea X el número de unidades defectuosas que recibe casa de electrodomésticos, encuentre la distribución de probabilidad de X. Exprese los resultados en un diagrama de bastones.

(3) Sea X la temperatura a la cual ocurre una reacción química en grados Celsius. Suponga que X tiene una función de densidad de probabilidad como la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4 - x^2) & con \ -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\, c.o.c. \end{cases}$$

a) ¿La variable aleatoria X es discreta o continua? Justifique.
b) Verifique que f es una función de densidad de probabilidad.
c) Determine la función de distribución acumulada de probabilidad.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la reacción química ocurra a temperaturas que no excedan los 0°C?
e) Resuelva el inciso anterior nuevamente empleando la función de distribución acumulada de probabilidad.
f) ¿Cuál es la probabilidad de que la reacción química ocurra exactamente a 0°C?
g) ¿Cuál es la probabilidad de que la reacción se produzca a menos de 1°C pero a más de 0°C? Resuelva de dos maneras diferentes.

(4) Sea X la cantidad de tiempo en días durante el cual un famoso libro de Programación de la biblioteca de nuestra facultad es ocupado en calidad de préstamo por algún estudiante en las cercanías de un examen parcial y suponga que X presenta la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & con \ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\, c.o.c \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de la constante k para que f sea una función de densidad de probabilidad.
b) Grafique f.
c) Determine la función de distribución acumulada de probabilidad. Grafique.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante ocupe mencionado libro menos de 36 horas?

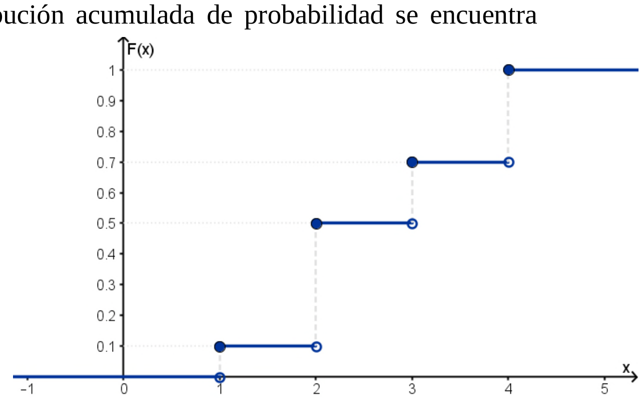
(5) La siguiente tabla es una distribución de probabilidades de las ganancias en miles de dólares proyectadas por *MRA Company* durante el primer año de trabajo (los valores negativos indican pérdida).

X	-100	0	50	100	150	200
$f(x)$	0.10	0.20	0.30	0.25	0.10	0.05

a) Verifique que f es una distribución de probabilidad.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane por lo menos $150.000?
c) Grafique f.
d) Escriba la expresión de la distribución acumulada de probabilidades. Grafique.
e) Repita el inciso b empleando lo hallado en el inciso anterior.

(6) Sea la variable aleatoria discreta X, cuya distribución acumulada de probabilidad se encuentra graficada a continuación. Determine:

a) $P(X \leq 3)$.
b) $P(X = 3)$.
c) $P(X > 3)$.
d) $P(X \geq 3)$.
e) $P(X < 3)$.
f) $P(X = 2)$.
g) $P(2 < X \leq 3)$.



(7) El número total de horas, medidas en unidades de 100 horas, que una familia utiliza una aspiradora en un periodo de un año es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que en un periodo de un año, una familia utilice su aspiradora

a) menos de 120 horas;
b) entre 50 y 100 horas.

(8) En una empresa electrónica se conoce que el volumen de producción diario de fichas USB, en miles de unidades, es una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = c(6+2x) \text{ siendo } 0 \le x \le 1 .$$

a) Encuentre c para que f sea una función de densidad de probabilidad.
b) Determine la función de distribución acumulada para X.
c) Obtenga P(0,1<X<0,5). ¿Qué representa esta probabilidad en la situación problemática?
d) Obtenga la probabilidad de que en un día se produzcan exactamente 700 fichas USB.

(9) La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el número de pilas defectuosas que en una linterna que es vendida con tres pilas AA incluidas.

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k$	$\frac{1}{3}k$	$\frac{1}{6}k$

a) ¿Cuánto vale *k* para que *f* sea una función de distribución de probabilidad?
b) Grafique *f*.
c) Obtenga la probabilidad de que una linterna vendida tenga al menos una pila defectuosa.

(10) El tiempo de fabricación, en segundos, de un perno en una máquina es una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad $f(x) = \frac{3x-1}{136}$ con $2 \le x \le 10$.

a) ¿Qué condiciones debe cumplir *f* para ser una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua?
b) Determine $P(X \ge 5)$. Interprete qué representa esta probabilidad en el problema.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de fabricación de un perno sea exactamente igual a 7 segundos?
d) Determine la función acumulada de probabilidad F.

(11) Un especialista en programación está interesado en investigar acerca de la cantidad de pestañas que abren al mismo tiempo los usuarios de su navegador de páginas web. Para ello experimentó con 120 usuarios y contabilizó que: 48 abren sólo una pestaña, 30 acceden a dos, 24 abren tres, 6 acceden cuatro, 6 abren cinco y los demás seis pestañas.

a) Defina la variable aleatoria estudiada. ¿Es continua o discreta? Justifique.
b) Construya la distribución de probabilidades de la variable aleatoria del inciso anterior:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$						

c) Grafique la distribución de probabilidad f.
d) Determine la función acumulada de probabilidad.
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario abra exactamente dos pestañas?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario abra al menos dos pestañas?