FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

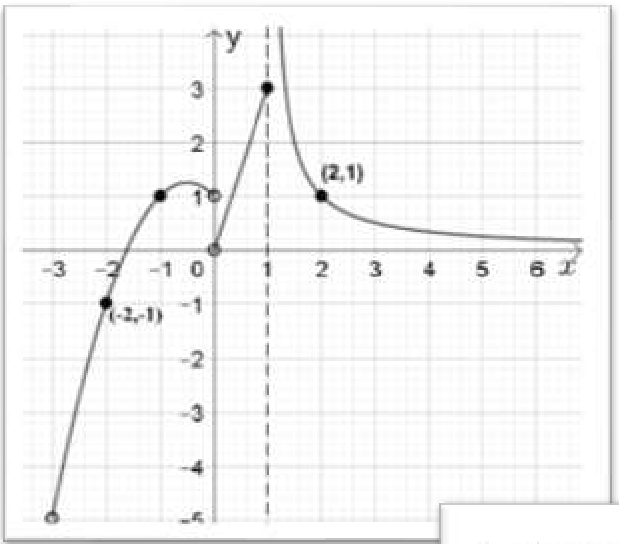
Les proponemos la realización de esta segunda guía para que pongan en práctica todos tus conocimientos sobre funciones y que conozcan aquellos que no han visto aún.

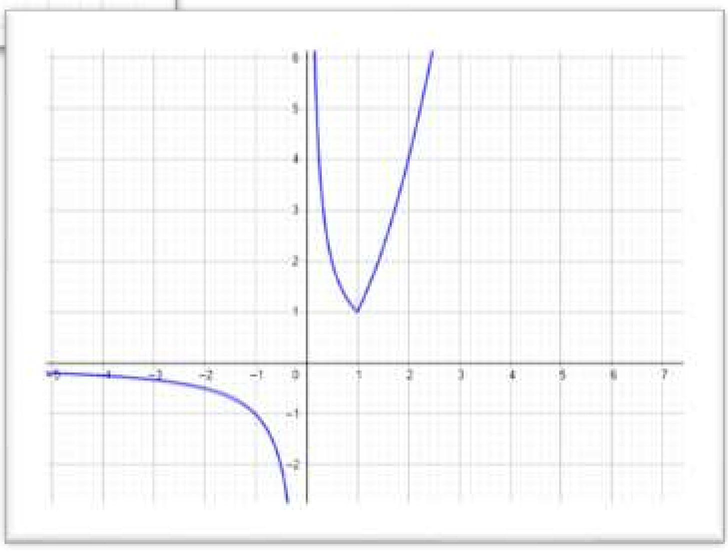
Con este trabajo, comprenderán la importancia de haber utilizado un software, ya que será el programa GeoGebra el recurso más importante con el que contarán para visualizar cada una de las funciones de manera práctica, rápida y sencilla. Si aún no lo han descargado, aquí les dejamos el link para hacerlo.

GeoGebra www.geogebra.org

---

1. Encontrá los intervalos de crecimiento, decrecimiento, raíces, ordenada al origen, dominio, rango,intervalos de positividad y negatividad, y los valores de la función f(0),f(1),f(-1).





2. Determiná el dominio de las siguientes funciones.

$1)\ f(x)=\frac{x-1}{3}$ $\qquad 2) f(x)=\frac{2x-1}{3x-3}$ $\qquad 3) f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

$4) f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-6}$ $\qquad 5)\ f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x-1}$ $\qquad 6)\ f(x)=log_3(2x-2)$

3. Dadas $\boldsymbol{f(x)=3x-5}$ y $\boldsymbol{g(x)=2-x^2}$ calcule:

$f\big(g(0)\big)=$

$g\big(f(0)\big)=$

$f\big(f(4)\big)=$

$g\big(g(3)\big)=$

$(f°g)(-2)=$

$(g°f)(-2)=$

$(f°f)(-1)=$

$(g°g)(2)$

4. Determiná la paridad de las siguientes funciones.

$a) f(x)=x^3$ $\qquad b) f(x)=x^3-x^2-8x+1$ $\qquad c) f(x)=x^4-2x$

$d) f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}+2$ $\qquad f) f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ $\qquad g) f(x)=-x^2+1$

5. Utilizá el programa GeoGebra para representar gráficamente los siguientes grupos de funciones:

$\boldsymbol{a})\ 1) f(x)=4x-1 \quad 2)\ f(x)=-\frac{3}{5}x$

$\boldsymbol{b})\ 1)\ f(x)=-3 \quad 2)\ f(x)=-\frac{1}{2}$

¿Qué conclusiones puedes extraer de la representación de cada una de estas funciones? ¿Qué diferencias y similitudes tienen las funciones en cuanto a sus pendientes? ¿Qué particularidad presentan las funciones del grupo b)?

6. Calculá para cada una de las funciones anteriores las coordenadas de las raíces y de la ordenada al origen, luego represéntalas gráficamente en tu cuaderno.

7. Representá gráficamente cada una de las siguientes familias de funciones cuadráticas, con la ayuda del programa GeoGebra analizando las raíces, ordenada al origen, el vértice y el eje de simetría de cada una de ellas y luego, respondé.

1) $a)\ f(x)=-x^2+1 \quad b) f(x)=-2x^2-4x+6$

¿Qué tienen en común las gráficas de cada una de las funciones anteriores?

………

2) $a)\ f(x)=x^2+1 \quad b) f(x)=2x^2-4x+6$

¿En qué difieren analíticamente y gráficamente las funciones del grupo 2 respecto de la primera familia de funciones?

………

8. Dadas las siguientes funciones:

$GRUPO\ 1\text{:}\ a) f(x)=3^{x-1}-2 \quad f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-3$

$$GRUPO\ 2:\ a)\ f(x) = \log_2(x) \qquad b) f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

1) Calculá los puntos de intersección de la gráfica de cada función con los ejes cartesianos y la ecuación de la asíntota y realizá el gráfico.

2) Utilizá el programa GeoGebra para corroborar las gráficas de las funciones.

9. Dadas las siguientes funciones reales de variable real,

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{3x-2} \qquad h(x) = \frac{3x^2-1}{x^2+1}$$

Realizá un bosquejo de las funciones racionales fraccionarias. Antes, para cada una de las funciones indicar:

1.1. Dominio, codominio, imagen.

1.2. Intersección con los ejes.

1.3. Asíntotas, dar las ecuaciones.

1.4. A partir de la gráfica realizada para f, representá la función $f(x) = -\frac{1}{x-2}$, $f(x) = \left|\frac{1}{x-2}\right|$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$. Corroborá tu gráfico con el GeoGebra.

10. Con ayuda del GeoGebra, representa gráficamente las siguientes funciones trigonométricas y describí su comportamiento.

$$1) f(x) = 2sen(x) \qquad 2) f(x) = \mathrm{sen}(3x) \qquad 3) \frac{1}{2}\cos(x) \qquad 4) f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

11. Representá gráficamente en tu cuaderno las siguientes funciones.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \forall x < 3 \\ x-1, & \forall x \geq 3 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \forall x \in (-1,2) \\ -2x+3 & \forall x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty) \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & \forall x < 1 \\ -x^2+3x-2, & \forall x > 1 \end{cases}$$

1.5. Determiná el dominio de las funciones.

1.6. Considerando la función del punto a). ¿A qué valor se aproxima la función si x se aproxima a 3 por la izquierda?. ¿y a qué valor se aproxima la función cuando *x* se aproxima a 3 por la derecha del eje de abscisas?.

1.7. Considerando la función del punto b). ¿Qué valor toma la función si x se aproxima a -1 por la izquierda?. ¿y a qué valor se aproxima la función cuando *x* se aproxima a -1 por la derecha del eje de abscisas?.

1.8. Considerando la función del punto c) ¿A qué valor se aproxima la función si x se aproxima a 1 por la izquierda?. ¿y a qué valor se aproxima la función cuando x se aproxima a 1 por la derecha del eje de abscisas?.

12. Para cada situación presentada a continuación, se pide:
   - Leer atentamente cada uno de los problemas.
   - Resolver cada una de las actividades presentada, realizando los cálculos necesarios, respondiendo de forma completa y contextualizada.

1. Sabemos que una población inicial de 2000 virus de una especie africana sigue el siguiente patrón de crecimiento $N(t) = 2000 \cdot 3^t$. Si la población final de virus es de 1.000.000. Averiguar el tiempo que han tardado los virus en alcanzar ese tamaño.

2. Una de las formas que un medicamento se elimina del organismo es a través de la orina. Para unas cápsulas cuya dosis inicial está compuesta por 10 mg de droga base se comprobó que la cantidad de droga presente en el cuerpo después de t horas se puede representar por $D\ (t)\ = 10\left(\frac{4}{5}\right)^t$
   2.1. Calcular la cantidad de droga del fármaco que se encuentra en el organismo 8 horas después de la ingestión de la cápsula.
   2.2. ¿Qué porcentaje del medicamento, que está aún en el organismo, se elimina en la primera hora?
   2.3. Calcular las raíces y la ordenada al origen, de ser posible.
3. Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento f (t) después de un tiempo t en años, satisface la fórmula $f\ (t)\ =\ 60 \cdot 2^{-0{,}02t}$
   3.1. ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?
   3.2. ¿Qué cantidad queda después de 500 años?
   3.3. ¿Qué cantidad queda después de 1.000 años?
   3.4. ¿Qué cantidad queda después de 2.000 años?

¡Más funciones especiales!

La **función parte entera** de x o función suelo entero, es la que asigna a cada número real el entero más próximo menor o igual que x.
Simbólicamente se las representa de la siguinte manera:
$f(x) = Ent(x)$; $f(x) = \lfloor x \rfloor$ o bien $f(x) = [x]$

$$f(x) = \begin{cases} \quad\dots \\ -2 \ \ si\ x \in [-2; -1) \\ -1 \quad si\ x \in [-1; 0) \\ \ \ 0 \quad\ si\ x \in [0; 1) \\ \ \ 1 \quad si\ x \in [1; 2) \\ \ \ 2 \quad si\ x \in [2; 3) \\ \quad\dots \end{cases}$$

<u>Actividad 1:</u> Representen gráficamente la función anterior y realicen el estudio completo.

La **función techo entero** de x es la que asigna a cada número real el entero más próximo mayor o igual que x.
Simbólicamente se las representa de la siguiente manera:
$f(x) = \lceil x \rceil$

<u>Actividad 2</u>: determinen la fórmula de la función techo entero, represéntenla gráficamente y realicen un estudio completo de la misma.

<u>Actividad 3</u>: determinen la fórmula de la función que modeliza el costo de un estacionamiento por t horas, sabiendo que cobran $200 por hora.

<u>Actividad 4</u>: representen las siguientes funciones $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$; $g(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 2$

<u>Actividad 5</u>: representen gráficamente la función definida por
$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$ A esta función se la denomina **función signo**.

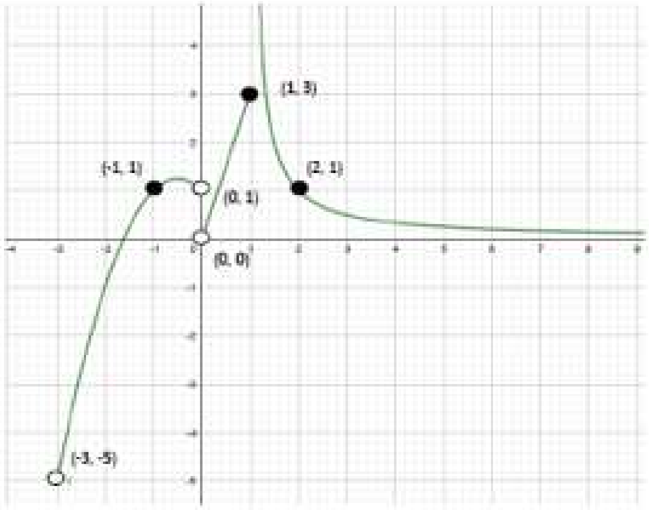
Para seguir practicando.

<u>Actividad 6:</u> Grafiquen una función que satisfaga, simultáneamente, las siguientes condiciones:

Dominio $\Re - \{0\}$, *Rango* $\Re - \{0\}$, *no posee asíntotas horizontales, es creciente en* $(-\infty, -2) y\ (0, \infty)$

<u>Actividad 7</u>: Dada la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1\,, & -3 < x < c \\ ax\,, & c < x < d \\ \dfrac{1}{x-b}, & x > 1 \end{cases}$$



a) Encuentren los valores de a, b, c, d
b) Determinen las intersecciones con los ejes.
c) Hallen el/los valores de x que tienen por imagen a 3.

Actividad 8: Determinen si cada conjunto, en los ejercicios 1 al 3, es una función de X = {1, 2, 3, 4} a Y = {a, b, c, d}. Si es una función, encuentren su dominio y rango (conjunto imagen), dibujen el diagrama de flechas y determinen si es uno a uno, sobre o ambas. Si es biyectiva, den la descripción de la función inversa como un conjunto de pares ordenados. Dibujen el diagrama sagital y den el dominio y el rango de la función inversa.

1) $\{(1,a),(2,a),(3,c),(4,d)\}$
2) $\{(1,c),(2,a),(3,b),(4,c),(2,d)\}$
3) $\{(1,c),(2,d),(3,a),(4,b)\}$

Actividad 9: A partir de una función $f(x) = x^2$ cuyo dominio es Domf=$\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ al conjunto de enteros, escriba f como un conjunto de pares ordenados y represéntenla gráficamente. ¿Es f una función inyectiva?