Matemática Discreta Licenciatura en Sistemas de Información

Docentes Vaira, Stella - Fedonczuk, Miguel Colliard, David - Cottonaro, Mariana

> Adscripta Bárbara Froloff

FCyT - UADER

2025

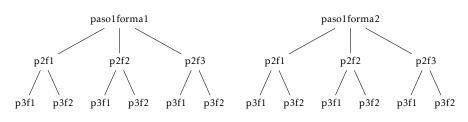
Unidad 1: Combinatoria.

Principios fundamentales del conteo: principio de multiplicación y de la suma. Concepto de factorial. Permutaciones. Permutaciones con repetición. Combinaciones. Combinaciones con repetición: distribuciones. Teoremas fundamentales. Propiedades. Aplicaciones.



Principio de multiplicación

Si una actividad se puede construir en t pasos sucesivos y el paso 1 se puede hacer de n_1 maneras, el paso 2 se puede realizar de n_2 maneras, ..., y el paso t de n_t maneras, entonces el número de actividades posibles diferentes es $n_1 \cdot n_2 \cdots n_t$.



Paso 1: dos formas $(n_1 = 2)$

Paso 2: tres formas $(n_2 = 3)$

Paso 3: 2 formas $(n_3 = 2)$

Total de formas de realizar la actividad: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$



Caso particular: Si una actividad/evento A se puede realizar de m formas diferentes \mathbf{y} luego se puede realizar otra actividad/evento B de n formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir A \mathbf{y} B es igual a $m \cdot n$. Es decir, ambos eventos se realizan, primero uno \mathbf{y} luego el otro. El « \mathbf{y} » indica multiplicación.

Ejemplo 1

Un club de teatro realiza ensayos para una obra. Si cuatro hombres y tres mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino), ¿de cuántas formas el director puede elegir a la pareja principal? Realizar el diagrama de árbol correspondiente y verificar el principio de la multiplicación.



Bajo las siguientes condiciones, se desea saber cuántas placas patentes diferentes de automóviles se pueden fabricar que consten de dos letras seguidas por tres dígitos y luego dos letras más (LLDDDLL), si

- 1 ninguna letra o dígito se puede repetir
- se permite repetir las letras y los dígitos
- 3 con repetición, sólo usando vocales y los dígitos pares.



Principio de la suma

Suponga que $X_1,...,X_t$ son conjuntos y que el i-ésimo conjunto X_i tiene n_i elementos. Si $\{X_1,...,X_t\}$ es una familia de conjuntos disjuntos por pares (es decir, si $i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$), el número de elementos posibles que se pueden seleccionar de X_1 o X_2 o ... o X_t es

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

(De manera equivalente, la unión $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_t$ contiene $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ elementos)

Es decir, para el caso de X_1 y X_2 , si una primera tarea puede realizarse de n_1 formas distintas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de n_2 formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden realizarse cualquiera de $n_1 + n_2$ formas distintas.

Esta idea es generalizable para *t* tareas.



¿De cuántas formas se puede seleccionar un libro distinto entre 30 libros de Programación en Python y 25 libros de Matemática Discreta?

Ejemplo 2

Durante las elecciones primarias argentinas, también llamadas PASO (Primarias, Abiertas, Simultáneas y Obligatorias) se presentan como candidatos a presidente nueve candidatos del partido A y cinco del partido B.

- Si el presidente va a ser alguno de estos candidatos, ¿cuántas posibilidades hay para el posible ganador?
- ¿Cuántas posibilidades hay para que una pareja de candidatos (uno de cada partido) se opongan entre sí en la elección final?



Toyota posee una planta de fabricación en la cual puede producir 5 modelos diferentes (Yaris, Corolla, Etios, SW4 y Hilux), 6 colores, 3 tamaños de motor y 2 tipos de transmisión.

- ¿Cuántos autos distintos se pueden fabricar en esa planta?
- ¿Cuántas variantes de una Hilux con el motor mas potente se pueden fabricar?



Un laboratorio de investigación tiene 12 miembros. De entre los cuales, en las próximas elecciones, se deben renovar los cargos de director, vicedirector, secretario y tesorero. Calcular la cantidad de formas de realizar la selección.

Supongamos ahora que de sus 12 miembros, 4 son ingenieros. ¿Cuántos selecciones del inciso anterior se pueden formar bajo las siguientes condiciones?

- 1 Con un tesorero que sea un ingeniero.
- 2 Con dos ingenieros exactamente en la lista.
- 3 Con al menos un ingeniero en la lista.



Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.1 (Página 226) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

- 1 al 4
- **2** 6
- **3** 8 al 16
- 4 17 al 19
- **6** 21 al 28
- **6** 32 al 41
- **7** 54 al 60



Permutación

Una permutación de n elementos diferentes $x_1, x_2, ..., x_n$ es un ordenamiento de los n elementos $x_1, x_2, ..., x_n$.

Si queremos permutar las letras a, b, c hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas posibles:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Factorial de un número

Para un entero $n \ge 0$, n factorial (que se denota con n!) se define como 0! = 1,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Así, por ejemplo, el problema anterior se puede calcular como

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Nota: Esta operación está disponible en la calculadora mediante la tecla [x!].



Teorema

Existen n! permutaciones de n elementos.

Por lo que si queremos permutar 10 elementos, la cantidad de formas que lo podemos hacer es 10! = 3628800

Una propiedad que vamos a utilizar durante los cálculos es la posibilidad de asociar alguno de los primeros factores del factorial:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-i+1) \cdot (n-i)!$$

Por ejemplo:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!$$



Sofía trabaja como encargada de la gestión de pedidos en una tienda de electrodomésticos. Una tarde, ella observa que durante el día se han recibido 15 pedidos para su preparación. ¿De cuántas formas puede ordenar la preparación de esos pedidos si

- no existe restricciones?
- Sofía considera que 6 de los pedidos no son urgentes y desea procesarlos al final?
- 3 primero los separa teniendo en cuenta cuándo se van a retirar: 3 por la mañana, 7 por la tarde y 5 antes de cerrar el local; y luego los procesa en ese orden de retiro.



¿De cuántas formas es posible realizar un camino si las flechas indican un paso hacia la derecha y los números indican pasos hacia abajo, sin utilizar dos flechas consecutivas?

Ejemplo 3

Un profesor de ciencias de la computación tiene cinco libros de Python y seis de R, todos de diferentes autores. ¿De cuántas formas se pueden ordenar estos libros en una repisa si

- no hay restricciones?
- 2 los lenguajes se deben alternar?
- 3 si todos los libros de R deben estar juntos?



Algunas veces se desea permutar sólo alguno de los elementos de un conjunto, no la totalidad.

Permutación de *r* en *n*

Una permutación r de n elementos (distintos) $x_1, x_2, ..., x_n$ es un ordenamiento de r elementos de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. El número de permutaciones r de un conjunto de n elementos diferenties se denota por P(n, r).

Por ejemplo, si se desea armar las permutaciones de orden 2 a partir de 4 elementos distintos a,b,c,d



15/1

Teorema

El número de permutaciones de r de un conjunto de n objetos diferentes es

$$P(n,r) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}_{r-veces}, \quad \forall r \le n$$

Si utilizamos la notación factorial:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

Así, la cantidad de maneras de seleccionar el director, vicedirector, secretario y tesorero de un grupo de 12 personas es

$$P(12,4) = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$$



Bajo las siguientes condiciones, se desea saber cuántas permutaciones en la palabra "murcielago" es posible hacer si

- 1 no se permiten repeticiones.
- sólo se utilizan tres de sus letras.
- se permiten repeticiones y se desea calcular el número de secuencias de 15 letras.

Ejemplo 2

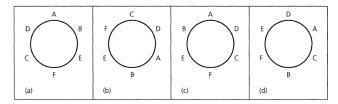
En una fiesta de cumpleaños, la quinceañera desea sacarse una foto en un sillón con sus 10 amigos. Si en el sillón sólo hay lugar para 7 personas, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerse la foto cambiando la ubicación de los amigos pero con la quinceañera en el medio?



Si seis personas, designadas como A, B, ..., F, se sientan en torno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles?

Respuesta

Las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de otra mediante una rotación. En la figura: (a) y (b) idénticas - (b), (c) y (d) distintas.



Por lo que si define: x: número de disposiciones circulares, y: número de disposiciones lineales. Así $6 \cdot x = y \iff 6 \cdot x = 6! \iff x = 5! = 120$ En general, la cantidad de disposiciones circulares de n objetos $y = \frac{FCy}{y_{\text{transference}}}$ distintos es (n-1)!

¿Qué ocurre si queremos seleccionar objetos de un conjunto sin que nos importe el orden de selección?

Combinaciones de n en r

Dado un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ que contiene n elementos diferentes,

- Una *combinación r* de X es una selección no ordenada de *r* elementos de X (es decir, un subconjunto de X de *r* elementos).
- **2** El número de combinaciones r de un conjunto de n elementos distintos se denota por C(n,r), $\binom{n}{r}$ o $C_{n,r}$.

Supongamos que queremos seleccionar de entre los docentes Marta, Belén, Rocío, Analía y Nahuel un grupo de tres para que realicen una clase de consulta.

¿De cuántas maneras pueden armarse dicho grupo?

Evidentemente no importa el orden de selección, por lo cual, seleccionar a Marta, Analía y Nahuel, es lo mismo que seleccionar a Analía, Nahuel y Marta.

Si listamos las posibilidades se ve que existen 10 maneras:

MBR, MBA, MRA, BRA, MBN, MRN, BRN, MAN, BAN, RAN, por lo que C(5,3) = 10.



Si consideramos que por cada combinación se pueden ordenar los elementos seleccionados, y de esta manera, obtener una permutación de dichos elementos, se tiene que $P(n,r) = C(c,r) \cdot r!$

Teorema

El número de combinaciones r de de un conjuntos de n objetos distintos es

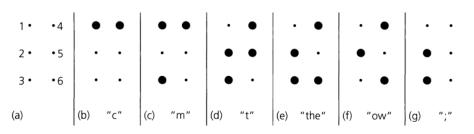
$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \qquad r \le n$$

Para el ejemplo anterior, la selección de 3 docentes de un grupo de 5, se puede calcular la cantidad de maneras diferentes de hacer dicha selección mediante

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$$



En el sistema Braille, un símbolo, como una letra minúscula, un signo de puntuación, un sufijo, etc., se escribe resaltando al menos uno de los puntos de la disposición de seis puntos que aparecen en la parte (a) de la figura. En las partes b) a la g) se presentan algunos ejemplos.



- ¿Cuántos símbolos diferentes podemos representar en el sistema Braille?
- 2 ¿Cuántos símbolos tienen exactamente tres puntos en relieve?
- 3 ¿Cuántos símbolos tienen un número par de puntos en relieve? FCyT
- ¿Cuántos símbolos tienen al menos cuatro puntos en relieve?

¿Cuántos bytes contienen...

- exactamente tres ceros?
- 2 un número par de unos?
- al menos seis unos?

Ejemplo 3

¿De cuántas formas un estudiante que realiza un examen puede responder

- seis de quince preguntas?
- 2 tres de las primeras cinco y cuatro de las últimas diez.



Una empresa decide contratar a 12 personas, de entre 10 arquitectos y 8 diseñadores gráficos postulantes, para entrenar una IA. ¿De cuántas maneras se puede realizar la selección si

- no hay restricciones?
- 2 debe haber un número par de arquitectos?
- debe haber más diseñadores que arquitectos?
- debe haber al menos siete aquitectos?



Verificar y luego demostrar las siguientes propiedades:

$$\binom{n}{0} = 1$$

2
$$\binom{n}{n} = 1$$

3
$$\binom{n}{1} = n$$



Resolver las siguientes ecuaciones:

$$P(n,2) - P(n-1,2) = 100$$

2
$$6C(n,2) = P(n+1,2) + 720$$



Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.2 (Página 237) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

- 1 al 6
- 2 31 al 37
- **3** 44 al 49
- **4** 58 al 62



¿Cuántas disposiciones (lineales) se pueden formar con las letras de la palabra *M I S S I S S I P P I* ?.

Se tienen 11 lugares para ubicar 11 letras, pero la respuesta no es 11!, ya que tenemos símbolos repetidos.

Consideremos ubicar:

Dos letras P en esos 11 lugares: C(11,2)

Cuatro letras S en los 9 lugares restantes: C(9,4)

Cuatro letras I en los 5 lugares disponibles: C(5,4)

Por último queda una letra M que se ubicará en el único lugar restante. Haciendo uso de la regla del producto:

$$C(11,2)C(9,4)C(5,4) = \frac{11!}{2!9!} \frac{9!}{4!5!} \frac{5!}{4!1!} = \underbrace{\frac{11!}{2!4!4!1!}} = 34650$$



Observa

Teorema

Suponga que una sucesión S de n artículos tiene n_1 objetos idénticos del tipo 1, n_2 objetos idénticos del tipo 2, ..., n_t objetos idénticos del tipo t, donde $n_1 + n_2 + ... + n_t = n$. Entonces, el número de ordenamientos de S es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$$

Ejemplo 1

Calcular el número de disposiciones de las letras de TALLAHASSEE.



De los 831600 ordenamientos anteriores, ¿cuántas no tienen letras A adyacentes?

Ayuda: primero se ordenan las letras restantes, y luego se considera que las letras A se pueden ubicar en cualquiera de los nueve lugares disponibles al inicio de la palabra o entre las letras restantes:



Siete amigos en un restaurante, luego de cenar, van a elegir cada uno un postre de entre los siguientes disponibles: (c) cheesecake, (h) helado, (t) tiramisú ó (f) flan con DDL. ¿Cuántos pedidos distintos es posible hacer?

2. 3.	c, c, h, h, t, t, f c, c, c, c, h, t, f c, c, c, c, c, c, f h, t, t, f, f, f, f	2. 3.	x x x x x x x x x x x x x x x x x x
5.	t, t, t, t, t, f, f	5.	
ĺ	t, t, t, t, t, t	1	
7.	f, f, f, f, f, f	7.	

Si observamos la segunda columna, el problema pasa a ser: ¿a dónde coloco la barra divisoria que me separa el tipo de postre? Pensado de esta manera, ¿cuántos pedidos distintos es posible hacer?

En general, este tipo de problema, se lo conoce como un problema Combinaciones con Repetición.

Combinaciones con repetición

Si X es un conjunto que contiene t elementos, el número de selecciones no ordenadas de k elementos de X, con repetición, es

$$\binom{k+t-1}{t-1}$$

Tener en cuenta que también es correcto plantear C(t+k-1,k), ¿por qué?

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos distribuir ocho alfajores iguales entre cinco niños, de modo que cada uno reciba al menos uno?



Se deslizan por una rampa 15 pelotas de tenis que caerán en alguna de las seis bolsas que se encuentran al final de la rampa. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir en dichas bolsas, si

- no hay restricciones?
- 2 cada bolsa recibe al menos una pelota?
- 3 la tercera bolsa 10 pelotas?



Una tienda de helados tiene disponibles 31 sabores de helado.

¿De cuántas formas de puede obtener una docena de conos de helado si

- 1 no queremos el mismo sabor más de una vez?
- 2 un sabor puede obtenerse hasta 12 veces?
- 3 un sabor no puede ordenarse más de un 11 veces?



Una PYME tiene cuatro gerentes: Ana, María, Juan y Raúl. Se quiere distribuir entre ellos 10000 dolares en concepto de premios; cada pago se hará con billetes de 100 dolares. Calcular el número de formas de distribuir esos premios si

- es posible que uno o más gerentes no obtenga nada.
- 2 cada gerente debe recibir al menos 1000 dolares.
- 3 cada gerente debe recibir al menos 1000 dolares y Juan, recibe al menos 5000.



Un mensaje está formado por 12 símbolos diferentes y se va a transmitir a través de un canal de comunicación. Además de los 12 símbolos, el transmisor también enviará un total de 45 espacios en blanco entre los símbolos, usando al menos tres espacios entre cada par de símbolos consecutivos. ¿De cuántas formas puede el transmisor enviar ese mensaje?

Ejemplo 6

Determinar todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$$



Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.6 (Página 265) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

- **1** 3-4-5
- **2** 8-9
- **3** 12-13
- **4** 24
- **6** 26



Supongamos que se tiene una suma de números (o expresiones) que cumplen con cierto patrón, por ejemplo: 1+3+5+7+...+533+535 Existe una notación abreviada de la misma. La idea consiste en encontrar un patrón que cumple cada término, en este caso es la suma de todos los impares desde 1 hasta 535. Por lo que cada término tendrá la forma de un impar.

Sumatoria (o Notación Sigma)

La operación sumatoria se expresa con la letra griega sigma mayúscula Σ , y se representa así:

$$\sum_{i=a}^{n} x_i$$

 x_i : es una función de i con dominio en \mathbb{Z} , y que tiene la propiedad de definir unívocamente cada término de la suma.

i: es la variable (puede ser otra letra), recorre todos los enteros entre a (límite inferior) y n (límite superior).



Volviendo a nuestro ejemplo, utilizando la notación sigma tenemos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 533 + 535 = \sum_{i=1}^{268} (2i - 1)$$

o también

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 533 + 535 = \sum_{k=0}^{267} (2k+1)$$

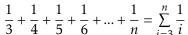
(Si no estas covencido, sustituye los valores de i (o k) en la función.)

Otros ejemplos:

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 998 + 999 = \sum_{k=8}^{999} k$$

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} = \sum_{i=0}^{4} \binom{7}{i}$$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots + 256 - 512 + 1024 = \sum_{i=0}^{10} (-2)^{i}$$
1 1 1 1 1 $\frac{n}{1}$ 1





Observemos el desarrollo del cubo de un binomio:

$$(a+b)^{3} = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(aa+ab+ba+bb)$$

$$(a+b)^{3} = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

$$(a+b)^{3} = 1 \cdot a^{3} + 3 \cdot a^{2}b + 3 \cdot ab^{2} + 1 \cdot b^{3}$$

$$(a+b)^{3} = \binom{3}{0}a^{3}b^{0} + \binom{3}{1}a^{2}b + \binom{3}{2}ab^{2} + \binom{3}{3}a^{0}b^{3}$$

Generalizando esta idea

Teorema Binomial

Si *a* y *b* son variables, y *n* es un entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Lo que en notación sigma es $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

¿Cuántos términos tiene el desarrollo de $(2a+b)^7$?, determinar el quinto.

Ejemplo 2

Calcular el coeficiente del término que posee x^5y^2 en el desarrollo de $(x-3v)^{7}$.

Ejemplo 3

Probar que para cualquier entero n > 0: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ FCyT
Founde curve

La generalización del teorema del binomio se conoce como el teorema multinomial.

Teorema multinomial

Sean n y t naturales, el coeficiente de $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...x_t^{n_t}$ en el desarrollo de

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$$
 es $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_t!}$

donde cada n_i es un natural entre 0 y n_t , $\forall \le i \le t$ y además, $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_t = n$.

Este coeficiente se denomina coeficiente multinomial.

También se puede escribir como $\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_t}$



Calcular el coeficiente del término que contiene a $x^2y^2z^3$ en el desarrollo de $(x+y+z)^7$, y en el desarrollo de $(2x+y+3z+5w)^7$.

Ejemplo 2

Hallar el término que contiene a a^4b^5 en el desarrollo de $(3a+2b-5)^{11}$.

Ejemplo 3

Calcular la cantidad de términos que tiene $(3v + 2w + x + y + z)^8$ en su desarrollo.



Actividades propuestas

Para realizar las actividades prácticas correspondientes a este apartado te sugerimos realizar los siguientes ejercicios del capítulo 6, apartado 6.7 (Página 270) del libro *Matemáticas Discretas de Johsonbaugh* que se encuentra en el campus virtual:

- **1**
- **2** 2
- **3** 4-5
- **4** 10-11

