INTEGRALES

PRÁCTICA DOCENTE II

Practicantes: Dabin, Dalma.
Dyke, Daiana.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ENTRE RÍOS

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Profesorado en Matemática

Práctica Docente II

Docentes:

Prof. Bonelli, Ivana.

Prof. Cappelletti, Magalí.

Prof. Pedrazzoli, Romina.

Licenciatura en Sistemas de Información

Cálculo Diferencial e Integral

Docentes:

Prof. Céparo, Evelyn.

Prof. García Verdier, Ángela.

Prof. López, Oriana.

Prof. Ramírez, Roxana.

Prof. Reisenauer, Natalí.

Ciclo lectivo 2023

MAPA MENTAL

INTEGRALES

- ANTIDERIVADA
- INTEGRALES INDEFINIDAS
- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN
- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES
- SUMA SUPERIOR E INFERIOR
- ÁREA BAJO LA CURVA
- CÁLCULO DE ÁREA
- INTEGRALES DEFINIDAS
- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL- REGLA DE BARROW

El contenido citado en estas páginas ha sido planeado para la cátedra Cálculo diferencial e integral perteneciente al primer año de la carrera, Licenciatura en Sistemas de Información dictada en la Facultad de Ciencia y Tecnología, sede Oro Verde de la Universidad Autónoma de Entre Ríos. Dicha cátedra posee una carga horaria de cuatro horas semanales.

INDICE

INTRODUCCIÓN

El cálculo integral surge a raíz de un problema relacionado al estudio del área de figuras planas. La dificultad se presentó a la hora de calcular áreas de figuras limitadas por líneas curvas. Arquímedes en el siglo III a.C. fue quien consiguió dar con una aproximación muy buena del área del círculo, como también calcular el área determinada por un arco de parábola y la cuerda correspondiente; lo cual era realmente difícil en aquel tiempo, ya que no se disponía del álgebra formalizada ni de la geometría analítica. El método utilizado era el de agotamiento o exhaución de Eudoxo que consistía en el uso de polígonos inscritos y circunscritos en torno a la región, cuya área sea fácil de calcular. El proceso continúa tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región y así obtener el área buscada.

A mediados del siglo XVII se afianza el estudio del cálculo infinitesimal donde Cavalieri y Torricelli ampliaron el uso de los infinitesimales, por su parte Descartes y Fermat utilizaron el álgebra para encontrar el área y las tangentes apareciendo por primera vez la integración y derivación en términos modernos. Fermat e Isaac Barrow tenían la certeza de que ambos cálculos estaban relacionados, aunque fueron Newton (hacia 1660) en Inglaterra y Leibniz en Alemania (hacia 1670) quienes demostraron que los problemas del área y la tangente son inversos, lo que se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo.

En la vida cotidiana nos encontramos con numerosas aplicaciones de la Matemática y el cálculo integral no es la excepción a esto.

En el campo de los sistemas de información se encuentran interesantes aplicaciones. Es por esto que para los estudiantes de la Licenciatura en Sistemas de Información, el estudio de este concepto es de gran utilidad en su formación, ya que se utiliza en la creación de software para empresas o entidades financieras para desarrollar funciones de costos, producción, ingresos, ganancias, entre otras. También en el manejo de datos o señales. Además es útil si se desea crear un software en campos específicos como en la Matemática, por ejemplo, para desarrollar un programa relacionado a PhotoMath, Symbolab, entre otros; éstos son muy utilizados por los estudiantes para realizar cálculos algebraicos, gráficos y verificar resultados.

Retomamos una de las situaciones que han trabajado en el recorrido de derivadas.

Si no lo recuerdan, a continuación se presenta en link donde pueden visualizar el problema.

https://drive.google.com/drive/folders/15uQU5VTT7tw5zCCsWWz2Uk-wzmhNh16K?hl=es

SITUACIÓN 1

Supongamos ahora que la comisión de los Juegos Olímpicos revisa los informes de la competencia con respecto a la posición del nadador. Encuentran que el informático calculó la velocidad en el momento del impacto, que está dada por la función $s'(t) = -32t + 16$. Pero se perdió la posición inicial del nadador. Conociendo $s'(t)$, ¿cómo podemos determinarla?

$$s'(t) = \underbrace{-32t} + \underbrace{16}$$

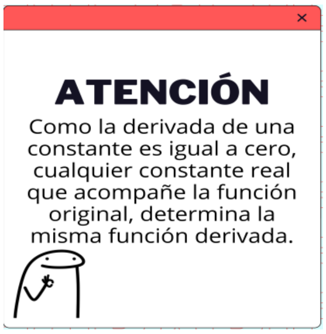
¿Cómo tiene que ser el término de la función original?

¿Cómo tiene que ser el término de la función original?

Antes de concluir la función original, debemos tener en cuenta que el nadador en el instante $t = 0$ se encontraba a . Finalmente encontramos la posición inicial del nadador que está dada por la función:

$$s(t) =$$

¿Cómo se llama la regla que se aplica en el último término de la función original? .



Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Conociendo que la derivada primera de una función está dada por: $f'(x) = 6x^5$, encuentre $f(x)$.

<u>Resolución</u>

¿Cómo tiene que ser la función original $f(x)$, si la derivada es $f'(x) = 6x^5$?

¿Qué regla se aplicó al derivar? .

Entonces, $f(x) =$

Para verificar hacemos , aplicando la regla :

$f'(x) =$

$f'(x) =$

EJEMPLO 2

Conociendo que la derivada primera de una función está dada por: $f'(x) = 12x^3$, encuentre $f(x)$.

<u>Resolución</u>

¿Cómo tiene que ser la función original $f(x)$, si la derivada es $f'(x) = 12x^3$?

¿Qué reglas se aplicaron al derivar? .

Entonces, $f(x) =$

Para verificar hacemos $f'(x) =$, aplicando las reglas mencionadas anteriormente:

$f'(x) =$

$f'(x) =$

$f'(x) =$

DEFINICIÓN

Una función F se denomina **antiderivada** de f, en un intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

TEOREMA

Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en un intervalo I sí y sólo sí G es de la forma:

$G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.

Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = 2x$ una función polinómica de grado 1, calcule su antiderivada.

Teniendo en cuenta el Teorema enunciado anteriormente y la regla de la potencia, ¿Cómo resulta de forma general la antiderivada de la función $f(x) = 2x$?

$G(x) =$

Como C es una constante, al asignarle distintos valores obtenemos una familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$.

- $y = x^2 + 3$
- $y = x^2 + 2$
- $y = x^2$
- $y = x^2 - 2$
- $y = x^2 - 4$

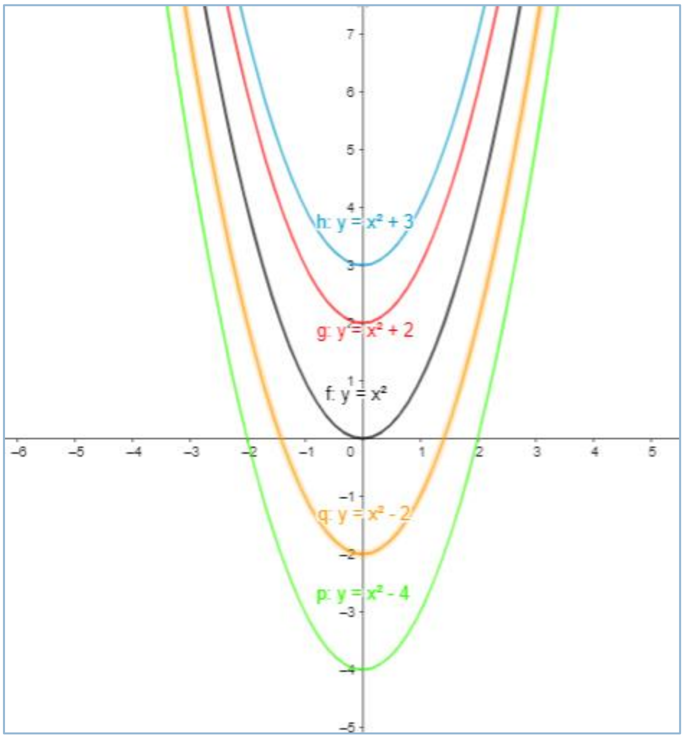


IMAGEN 1

<u>Resolución:</u>

Derivamos cada una de las funciones aplicando la regla de la potencia.

Sea $y = x^2 + 3$, al calcular la derivada de la función con respecto a x obtenemos:

$y' =$

$y' =$

Sea $y = x^2 + 2$, al calcular la derivada de la función con respecto a x obtenemos:

$y' =$

$y' =$

Sea $y = x^2$, al calcular la derivada de la función con respecto a x obtenemos:

$y' =$

$y' =$

Sea $y = x^2 - 2$, al calcular la derivada de la función con respecto a x obtenemos:

$y' =$

$y' =$

Sea $y = x^2 - 4$, al calcular la derivada de la función con respecto a x obtenemos:

$y' =$

$y' =$

El procedimiento para determinar la familia de antiderivadas de una función se denomina:

Integración indefinida.

INTEGRAL INDEFINIDA

DEFINICIÓN

Sea $f(x)$ una función continua y $F(x)$ una antiderivada o primitiva de $f(x)$, la expresión $F(x) + C$. Se llama **integral indefinida** de la función $f(x)$ y se designa mediante el símbolo

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde C es una constante arbitraria.

La expresión $\int f(x)dx = F(x) + C$ indica que la integral indefinida de f es la familia de funciones dadas por $F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$.

La expresión $\int f(x)\ dx$ se lee como la *antiderivada de f respecto a x*. De tal manera, la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El término **integral indefinida** es sinónimo de antiderivada.

Se denomina:

- f : al integrando o función bajo el signo integral.
- $\int$: al símbolo de integración.
- dx: diferencial de x, indica cual es la variable de la función que se integra.
- $F(x)$: a la antiderivada o primitiva de f.
- C: constante de integración.

CONDICIONES INICIALES Y SOLUCIONES PARTICULARES.

Como se dijo anteriormente, el procedimiento para determinar la familia de antiderivadas de una función se denomina integración indefinida y la *solución más general* se denota como: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Por ejemplo, retomando el ejemplo visto anteriormente y observando la IMAGEN 1:

$\int 2x\, dx = \; x^2 + c$

Esto es, que la integral indefinida de la función $f(x) = 2x$ es *cualquier* otra función de la forma: $F(x) = x^2 + C$. Debido a la constante de integración C, no conocemos a $f(x)$ específicamente. Sin embargo al observar las gráficas (IMAGEN 1) notamos que sólo una de ellas pasa por el punto $(0,2)$ y si reemplazamos las coordenadas en la función obtenemos:

$f(0) = 0^2 + C$

$2 = 0^2 + C$

Luego $C = 2$. Por lo tanto para la ***condición inicial*** $(0,2)$, encontramos un valor de $C = 2$.

Finalmente la función primitiva $F(x) = x^2 + 2$ es una ***solución particular*** de la integral de $f(x)$.

Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Dada la función $f(x) = 6x$. Encuentre la primitiva que pasa por el punto $A(1,2)$.

Resolución:

Calculamos $\int 6x\, dx =$ **Solución general.**

Ahora buscamos una solución particular, a partir de la condición inicial dada $A(1,2)$.

$F(x) = 3x^2 + C$

Por lo tanto la **solución particular** para la primitiva es: $F(x) =$

EJEMPLO 2

La función $f(x) = 2x + 5$ tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para $x = 2$?

<u>Resolución</u>

$\int 2x + 5\, dx =$. Como toma el valor 18 para $x = 2$, resulta:

Luego la función buscada es $F(x) =$

Las siguientes reglas sirven para hallar la integral indefinida de una función dada.

- Integral indefinida de la adición o sustracción de dos o más funciones:

  $$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)dx$$

- Integral indefinida de la multiplicación de una constante por una función:

  $$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

- Integral indefinida de una constante:

  $$\int kdx = k \cdot \int dx = kx + C$$

- Integral indefinida de la potencia enésima de la variable de integración: (*Regla de la potencia)*

  $$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\, , n \neq -1$$

- Integral indefinida de la función $\frac{1}{x}$:

  $$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

- Integral indefinida de la función e^x:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Por lo que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración.

Veamos la siguiente tabla con algunas fórmulas de derivadas y sus fórmulas de integración análogas.

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\, dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\, dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \ - \ 1$	Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$	

Puedes descargar la tabla completa de integrales indefinidas en el siguiente enlace, o escaneando el código QR.

https://drive.google.com/file/d/1zFoINEN4rMRKrlH0QUVfQPwwgoPFWcfL/view

Cuando podemos encontrar la integral mediante la tabla anterior, se llama **integral inmediata**.

Ahora que conocemos la definición de integral indefinida y las reglas básicas de integración, retomamos la

SITUACIÓN 1.

Calculemos la integral indefinida de la velocidad del nadador, en el momento del impacto, que está dada por la función $s'(t) = -32t + 16$.

$\int(-32t + 16)dt =$ Por propiedad

Por propiedad

y por propiedad

Por fórmula de integración (tabla)

Resolviendo, obtenemos:

$\int(-32t + 16)dt =$


En los ejemplos que se dan a continuación, observa que el patrón general de la integración es similar al de la derivación.

Integral original

⇩

Reescriba

⇩

Integre

⇩

Simplifique

Integral original	Reescriba	Integre	Simplifique
$\int \frac{1}{x^3} dx$	$\int x^{-3} dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
$\int \sqrt{x}\, dx$	$\int x^{1/2} dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + C$
$\int 2\, sen\, x\, dx$	$2 \int sen\, x\, dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

Encuentre las siguientes integrales indefinidas inmediatas, utilizando las reglas básicas de integración vistas anteriormente.

EJEMPLO 1

$\int 2x^5\, dx$

Resolución:

$\int 2x^5\, dx$ — Por regla de la multiplicación de una constante por una función.

$\int 2x^5\, dx \;= 2\int x^5\, dx$ — Por fórmula de integración: (tabla)

$\int 2x^5\, dx \;= \cancel{2}^{1}\frac{x^6}{\cancel{6}^{3}} + C$ — Resolviendo, obtenemos:

$$\int 2x^5\, dx \;= \frac{x^6}{3} + C$$

EJEMPLO 2

$\int (3x^4 - 5x^2 - x)dx$

Resolución:

$\int (3x^4 - 5x^2 - x)dx =$ — Por regla de

Por regla

Por

Reacomodando la expresión obtenemos:

$\int (3x^4 - 5x^2 - x)dx =$

EJEMPLO 3

$\int 4e^x \, dx$

<u>Resolución:</u>

Por regla

Por

$\int 4e^x \, dx =$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Existen integrales que no se pueden resolver en forma inmediata por lo que se debe recurrir a algunos métodos particulares.

Toda regla de derivación tiene una correspondiente regla de integración.

La regla de sustitución para integración corresponde a la regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la del producto para la derivación se denomina **regla de integración por partes.**

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Como se mencionó antes, siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración.

La integración por sustitución proporciona un método que permite conocer cuando un integrando es el resultado de una derivación en la que se ha utilizado la regla de la cadena.

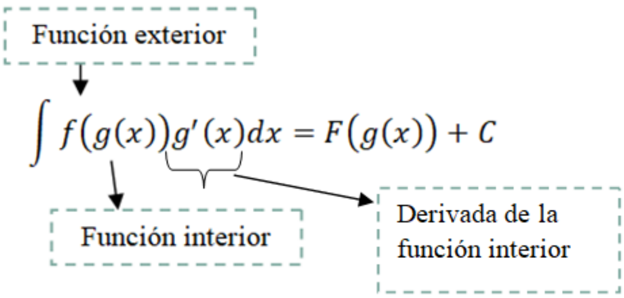
TEOREMA

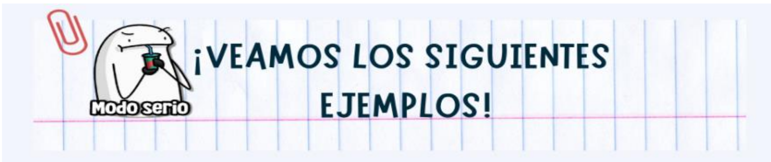
Sea g una función cuyo rango es un intervalo I, y sea f una función continua en I. Si g es derivable en su dominio y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$

Y $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + C$.





Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar directamente el teorema enunciado anteriormente.

EJEMPLO 1

$\int e^{5x}\ dx$

Sea $u = g(x)$ donde $g(x)$ forma parte del integrado y es la "función interna" de la función compuesta $f(g(x))$. Por lo tanto:

$u = 5x$ Derivando miembro a miembro,

$du = 5\, dx$ Despejando dx resulta:

$\frac{du}{5} = dx$

Utilizamos la sustitución $u = 5x$ y $\frac{du}{5} = dx$ para convertir la integral indefinida en una que involucre solamente a u.

$\int e^u \frac{du}{5} =$ Por regla de la multiplicación de una constante por una función.

$= \frac{1}{5}\int e^u du =$ Por fórmula de integración (tabla)

$= \frac{1}{5}.e^u + C =$ Antiderivada en términos de u

Reemplazamos u por $g(x)$ para obtener la solución final en términos de x.

$\int e^{5x}\ dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$

EJEMPLO 2

$\int \sqrt{2x+3}\,dx$

Sea $u =$

$u =$ Derivando miembro a miembro,

$du =$ Despejando dx resulta:

Utilizamos la sustitución $u =$ y $= dx$ para convertir la integral indefinida en una que involucre solamente a u.

Por regla de la multiplicación de una constante por una función.

Reescribimos la integral como $\int (u)^{1/2} du$

Regla de la potencia

Simplificando obtenemos:

Reemplazamos u por $g(x)$ para obtener la solución final en términos de x.

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

La regla del producto expresa que si f y g son funciones derivables, entonces $\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

En la notación para integrales indefinidas esta ecuación se convierte en:

$$\int [f(x).g'(x) + g(x).f'(x)]\ dx = f(x).g(x)$$

O bien aplicando la regla de la adición de dos o más funciones resulta:

$$\int f(x).g'(x)\,dx + \int g(x).f'(x)dx = f(x).g(x)$$

Podemos reacomodar esta última ecuación como:

$$\boxed{\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x)dx}$$

Con la expresión anterior llegamos a la fórmula para **integración por partes.**

Puede resultar más fácil de recordar haciendo un cambio de variable – método de sustitución – considerando $u = f(x)$ y $v = g(x)$.

Entonces las derivadas son: $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$.

Luego la fórmula para integración por partes se convierte en:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Encuentre las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

EJEMPLO 1

$\int x.2^x\ dx$

Resolución

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = x$ Derivando miembro a miembro

$du =$

$dv = 2^x dx$, como $\int 2^x dx =$. Por fórmula de integración (tabla)

Entonces,

$v =$

Reemplazando lo obtenido en la fórmula:

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x\, 2^x dx = x\, \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx$

$= x\, \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x\, dx$ Regla de una constante por una función

$= x\, \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} . \frac{2^x}{\ln 2} + C$ Por fórmula de integración (tabla)

$\int x. 2^x\ dx = x\, \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + C$

EJEMPLO 2

$\int x. sen\, x\, dx$

Resolución

Como $\int sen\, x\, dx = -\, cos\ x$

Reemplazando lo obtenido en la fórmula:

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Por fórmula de integración (tabla)

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR MEDIO DE FRACCIONES PARCIALES.

A continuación mostraremos cómo expresar una función racional (un cociente de polinomios) como una suma de fracciones más sencillas, denominadas *fracciones parciales*, que son fáciles de integrar.

MÉTODO DE LAS FRACCIONES PARCIALES $\frac{f(x)}{g(x)}$ PROPIAS.

1. Factor denominador: factorice completamente el denominador en factores de forma:
   $(px+q)^m$ y $(ax^2+bx+c)^n$ donde ax^2+bx+c es irreducible.

2. Factores lineales: para cada factor de la forma $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de m fracciones.
$$\frac{A_1}{(px+q)}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

3. Factores cuadráticos: para cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la siguiente suma de n fracciones.
$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

4. Iguale la fracción original $\frac{f(x)}{g(x)}$ a la suma de todas estas fracciones parciales. Elimine las fracciones de la ecuación resultante y reacomode los términos en potencias decrecientes de x.

5. Iguale los coeficientes de potencias correspondientes de x y resuelva las ecuaciones resultantes para los coeficientes indeterminados.

Para entender mejor el método descripto anteriormente,

Veamos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx$

1- $g(x) = x^2 - 2x - 3$ podemos reescribirlo en su forma factorizada como:

   $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

2- Reescribimos la función racional como suma de fracciones parciales:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

3- Resolvemos la ecuación resultante

$5x - 3 = \frac{A[\cancel{(x+1)^1}(x-3)]}{\cancel{(x+1)^1}} + \frac{B[(x+1)\cancel{(x-3)^1}]}{\cancel{(x-3)^1}}$

$5x - 3 =$

4- Encontramos los coeficientes indeterminados A y B:

$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1)$ Aplicando propiedad distributiva:

$5x - 3 = Ax - 3A + Bx + B$ Extrayendo factor común x:

$5x - 3 = (A+B)x - 3A + B$ Igualamos los coeficientes:

$\begin{cases} A + B = 5 \\ -3A + B = -3 \end{cases}$

Al resolver este sistema de ecuaciones por sustitución:

Despejamos B:

Reemplazamos en $-3A + B = -3$

$-3A + (5 - A) = -3$

$-4A + 5 = -3$

$-4A = -3 - 5$

$-4A = -8$

$A =$

Reemplazamos el valor encontrado de A en $B = 5 - A$ y obtenemos B.

$B = 5 - A \rightarrow B = 5 - 2 \rightarrow B =$

Luego, $\boldsymbol{A = 2}$ y $\boldsymbol{B = 3}$.

Reescribimos la integral como suma de fracciones parciales y la calculamos:

$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx =$	Por método de fracciones parciales
$\int \frac{2}{x+1}\, dx + \int \frac{3}{x-3} dx =$	Por regla de la multiplicación de una constante por una función.
$2\int \frac{1}{x+1}\, dx + 3\int \frac{1}{x-3} dx =$	

EJEMPLO 2

$\int \frac{x-2}{x^2+x}\, dx$

Resolución:

$g(x) =$

Podemos reescribirlo en su forma factorizada como:

Reescribimos la función racional como suma de fracciones parciales:

$\frac{x-2}{x^2+x} =$

Resolviendo la ecuación resultante

$x - 2 =$

$x - 2 =$

Encontramos los coeficientes indeterminados A y B:

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$A = \quad ; B =$

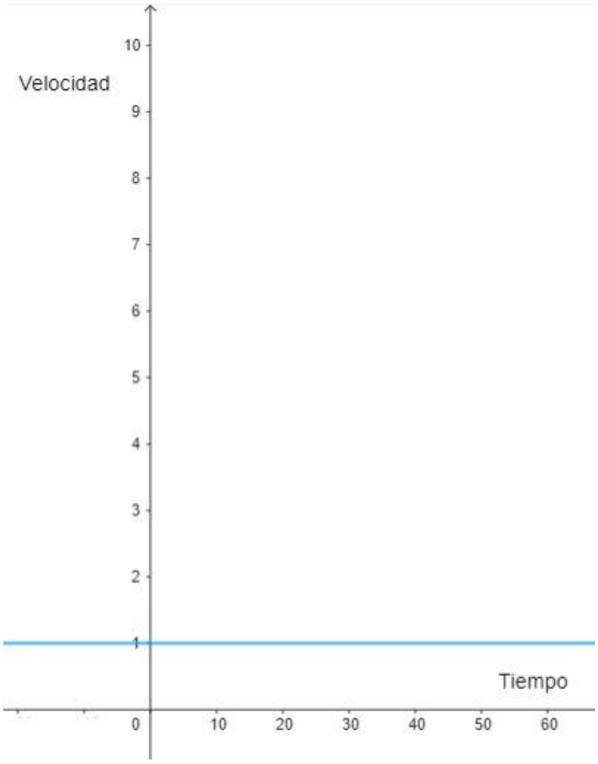
Luego reescribimos la integral como suma de fracciones parciales y calculamos:

CÁLCULO DE ÁREA

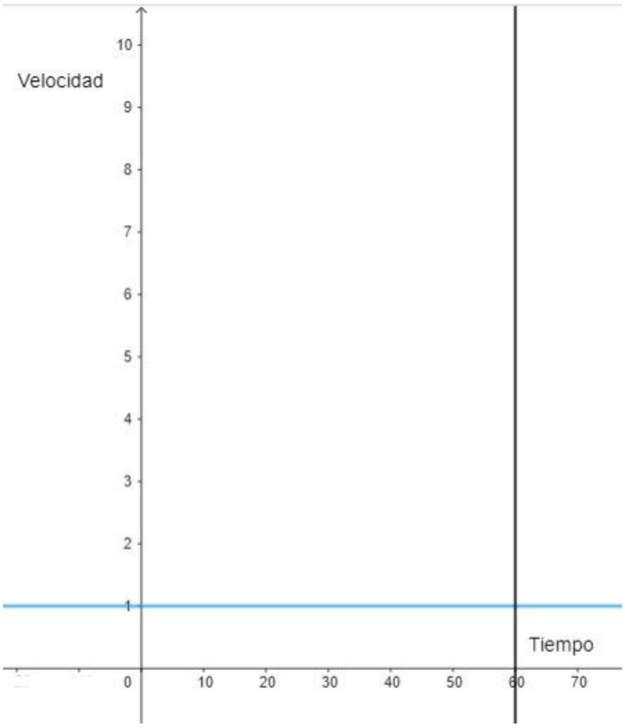
SITUACIÓN 2

Pensemos ahora que el nadador una vez que llega al agua recorre una distancia con velocidad constante de $1\frac{pies}{seg}$. ¿Cuál es la distancia recorrida por el nadador en 60 segundos? .

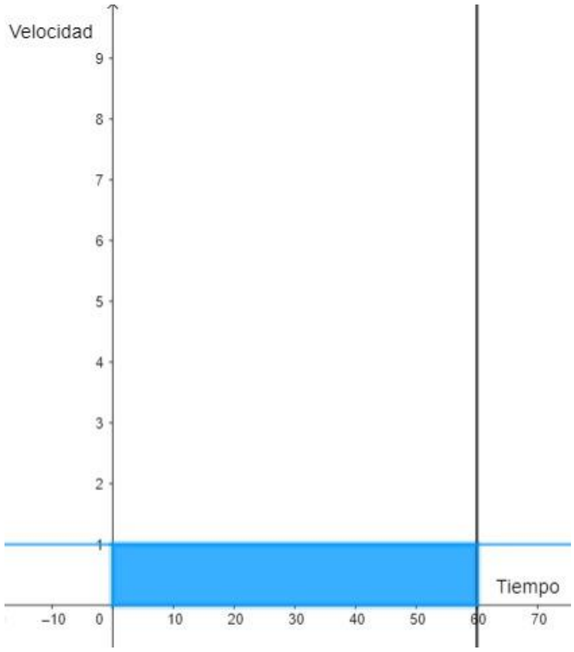
Si representamos los datos del problema en un sistema de ejes cartesianos, nos queda lo siguiente:



Si miramos el intervalo que nos interesa $[0, 60]$, obtenemos gráficamente lo siguiente:



¿Qué pasa si queremos calcular el área de la región que queda determinada?



¿Cómo calculamos el área de un rectángulo?

Teniendo en cuenta los datos del enunciado $b = 60\ seg.$ y $h = 1\,\frac{pies}{seg}$

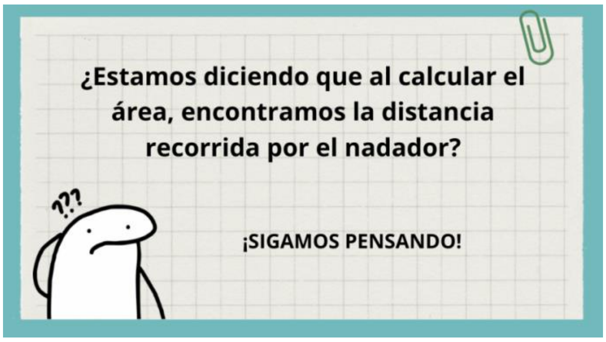
Como vamos a encontrar el área de una región, en este caso un rectángulo, no debemos tener en cuenta las unidades.

Calculamos el área:

$A = 60\ .1$

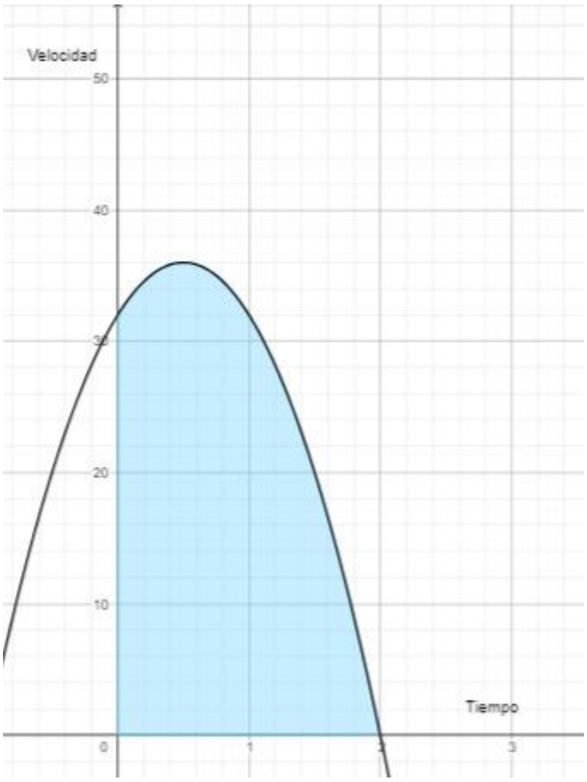
$A = 60\ unidades\ de\ área.$

Luego, el área del rectángulo es de $60\ unidades\ de\ área.$



SITUACIÓN 3

Veamos ahora la situación cuando el nadador se lanza del trampolín, la función de su recorrido está dada por $f(t) = -16t^2 + 16t + 32$ y su representación gráfica es la siguiente:

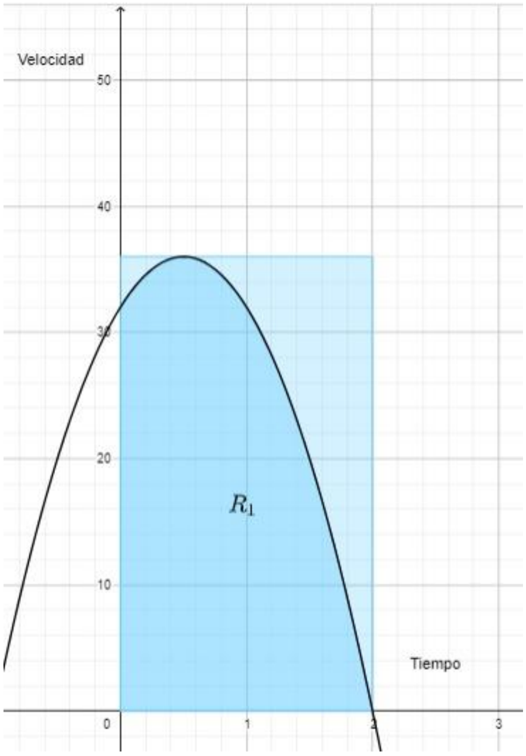


La parte sombreada de la parábola representa una parte del recorrido del nadador.

Siguiendo la misma idea planteada anteriormente, si queremos encontrar ese recorrido ¿Cómo lo hacemos?

Veamos que en este caso, no contamos con una figura geométrica conocida que nos permita calcular el área mediante una fórmula. Pero sí podemos aproximarnos a la misma, utilizando como recurso, por ejemplo, la construcción de rectángulos.

Para una mejor interpretación veamos lo siguiente:



Si construimos un rectángulo que contenga a la curva siendo su base $b = 2\ seg$ y de altura $h = 36\frac{pies}{seg}$.

Calculando su área, obtenemos:

$R_1 = b.h$

Como podemos observar hay una región que no pertenece al recorrido que hace el nadador, por lo tanto este resultado no es el más preciso como aproximación al área bajo la curva que estamos buscando.

Si dividimos en dos el intervalo $[0, 2]$. Construimos dos rectángulos,

R_2:

$b = 1\ seg.$

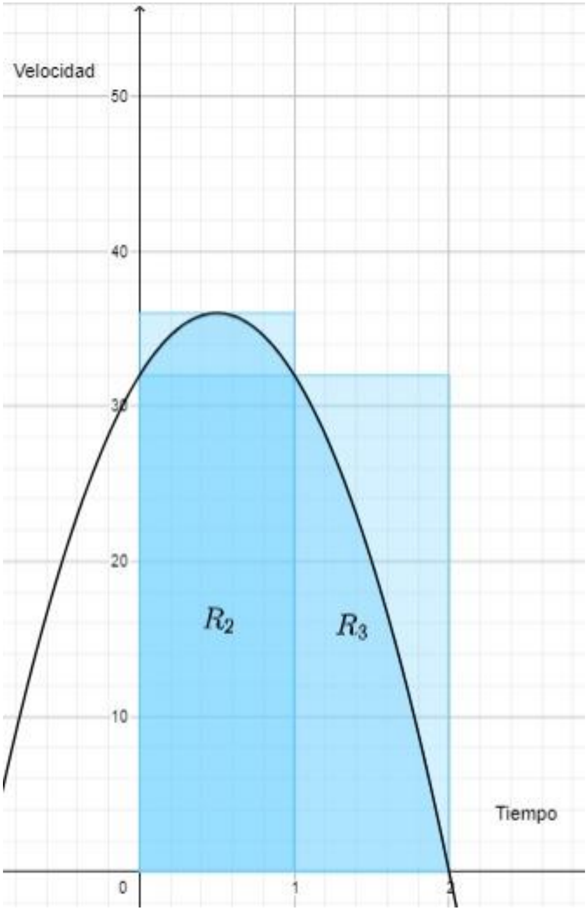
$h = 36\ \frac{pies}{seg.}$

R_3:

$b = 1\ seg.$

$h = 32\frac{pies}{seg.}$

Luego calculamos el área de cada rectángulo y obtenemos lo siguiente:



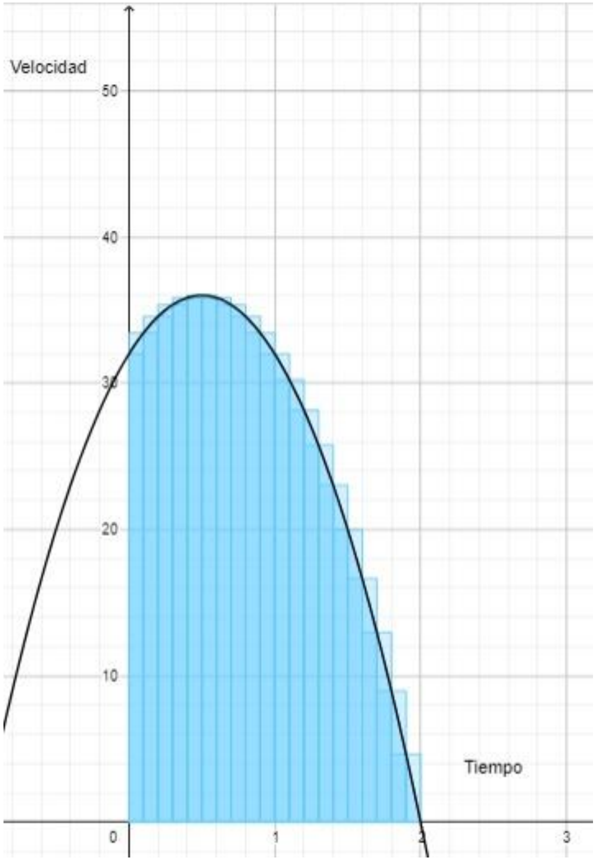
$R_2 = 1\,.36$

$R_3 = 1\,.32$

$R_2 + R_3 =$

$R_2 + R_3 =$

Podemos notar que la aproximación, con respecto a la anterior, es mejor. Si realizamos particiones sucesivas del intervalo $[0, 2]$, calculamos la altura y sumamos las áreas de cada uno de los rectángulos, podemos notar que cuanto más dividamos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos, obtenemos una mejor aproximación al área buscada, como se muestra a continuación:



Consideramos en general un intervalo $[a, b]$, el cual se particiona en n subintervalos de igual longitud.

Se denomina **partición** de un intervalo al conjunto ordenado de $n + 1$ elementos, es decir:

$$\boldsymbol{a} = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = \boldsymbol{b}.$$

Luego, quedan determinados los siguientes subintervalos:

$$[x_0, x_1]; [x_{1,} x_2]; \; [x_2, x_3]; \dots ; [x_{n-1}, x_n]$$

La amplitud de cada subintervalo se define como: $\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{n}}$

La cual determina la base de cada rectángulo.

Para encontrar la altura, debemos calcular la imagen de algún punto arbitrario perteneciente al subintervalo. Por ejemplo si miramos el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y tomamos un punto arbitrario x_i^* perteneciente al mismo, obtenemos un rectángulo cuya base es: $\Delta x = \frac{x_i - x_{i-1}}{n}$ y su altura: $f(x_i^*)$.

A medida que aumenta la cantidad de rectángulos, y haciendo las sucesivas sumas de áreas de cada uno de ellos, más nos aproximamos al área buscada.

Utilizando la notación de sumatoria podemos expresar lo dicho anteriormente de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{S_{aprox.}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{x}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i^*})$$

SUMA INFERIOR Y SUPERIOR

Se puede estimar el área de una región empleando dos conjuntos de rectángulos, unos inscritos en ella y otros circunscritos.

La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de **suma inferior**, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como **suma superior**.

$Suma\ inferior = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$

$Suma\ superior = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$

Se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \leq (\acute{A}rea\ de\ regi\acute{o}n) \leq S(n)$$

Y queda expresada de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{x}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i^*})$$

https://www.geogebra.org/m/YUVffGyb

¿Cómo podemos hacer para aproximarnos tanto como queramos al área real de la región?

¿Cómo vamos a aplicarlo en la expresión $A = \sum_{i=1}^{n} \Delta x. f(x_i^*)$?

Se concluye que la expresión anterior nos aproxima al área bajo la curva.

Este límite existe siempre que dé el mismo valor para todas las posibles elecciones de los puntos muestras.

A continuación se formaliza la definición de Integral definida.

INTEGRAL DEFINIDA

DEFINICIÓN

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.

Sean $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ los puntos extremos de estos subintervalos, y sean $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ los puntos muestras en estos, de modo que x_i^* se encuentre en el $i - ésimo$ subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Entonces la integral definida de f, desde a hasta b, es:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

Es importante observar que las integrales definidas y las integrales indefinidas son identidades diferentes. La primera es un ***número*** y la segunda es una ***familia de funciones.***

Una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a, b]$ es que sea continua en ese intervalo.

TEOREMA

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)\, dx$ existe.

En la notación $\int_a^b f(x)\, dx$, a es el límite inferior y b es el límite superior.

La suma $\sum_{i=1}^{n} \Delta x . f(x_i^*)$ se define suma de Riemann.

Recibe este nombre en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866).

Si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación. Mientras que *la integral definida* $\int_a^b f(x)dx$ *puede interpretarse como el área bajo la curva* $y = f(x)$ *desde* a *hasta* b.

Por esto último definimos el área bajo la curva de la siguiente manera:

ÁREA BAJO LA CURVA

DEFINICIÓN

Sea f una *función continua y no negativa* en el intervalo cerrado $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

En la definición de integral definida de f en el intervalo $[a;b]$ especifica que $a<b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a>b$ o $a=b$. Es decir, para el primer caso $\Delta x=\frac{a-b}{n}$ y para el segundo $\Delta x=0$

En consecuencia veamos las siguientes *integrales definidas especiales:*

1- f es integrable en $[a;b]$, entonces se define $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.

2- Si f está definida en $x=a$, entonces se define $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

También consideremos algunas **propiedades** básicas de las integrales que los ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad. Suponga que $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son funciones continuas en $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ y que $\boldsymbol{k}$ es cualquier constante perteneciente a los reales:

2- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

3- $\int_a^b k.f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

NOTA HISTÓRICA

En uno de los eventos más asombrosos ocurridos en las matemáticas, se descubrió que el problema de la recta tangente y el problema del área están estrechamente relacionados. La conexión fue descubierta de forma independiente por Isaac Newton y Gottfriend Leibniz y está enunciada en un teorema que recibe el nombre de Teorema Fundamental del Cálculo.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO– REGLA DE BARROW.

Una parte del Teorema Fundamental del Cálculo expresa lo siguiente:

DEFINICIÓN

Si f es una función continua en el intervalo cerrado$[a;b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a;b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este teorema establece que si se conoce una antiderivada F de f, entonces se puede evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a;b]$.

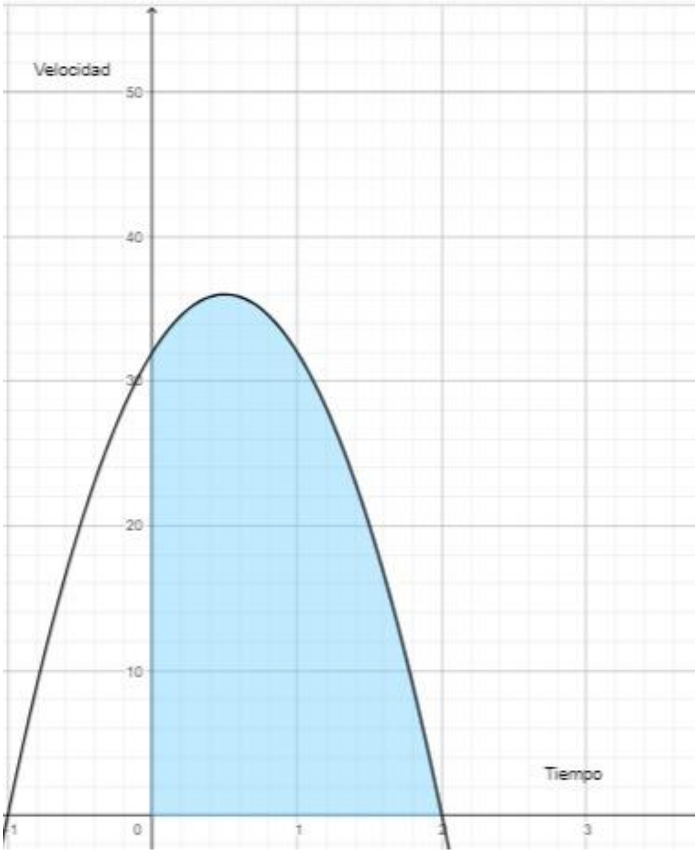
NOTACIÓN

Cuando se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo, la siguiente notación resulta conveniente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Cabe aclarar que no se debe incluir la constante de integración C.

Teniendo los conocimientos necesarios se retoma la **SITUACIÓN 3** que propone encontrar el área bajo la curva.



El área que representa el recorrido del nadador está dada por la siguiente integral definida:

$A = \int_0^2 (-16t^2 + 16t + 32) dx$

¿Cuál es la primitiva $F(x)$ de la función anterior?

Por el Teorema Fundamental del Cálculo resulta:

$A =$

Finalmente: $A = \int_0^2 (-16t^2 + 16t + 32)\, dx = \ 53,\hat{3}\ unidades\ de\ área.$

Entonces, el recorrido realizado por el nadador es de $53,\hat{3}\ pies$.

EJEMPLO 2

$\int_1^3 \frac{2}{x^3} dx$

<u>Resolución</u>

Por regla de la multiplicación de una constante por una función, y reescribiendo.

Por regla de la potencia y Teorema Fundamental del Cálculo.

EJEMPLO 3

$\int_0^2 x^3 dx$

<u>Resolución</u>

Por regla de la potencia y Teorema Fundamental del Cálculo.

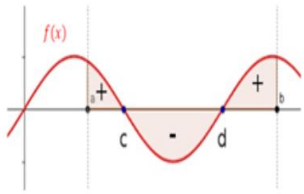
CÁLCULO DE ÁREA DE REGIONES PLANAS

Como se vio anteriormente, es posible hallar el área bajo la curva de funciones no negativas, ahora se realizará la generalización del cálculo de área para funciones cualesquiera.

DEFINICIÓN

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, el área de la región limitada p
función f y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ esta dada por:

$$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



Veamos los siguientes ejemplos

EJEMPLO 1

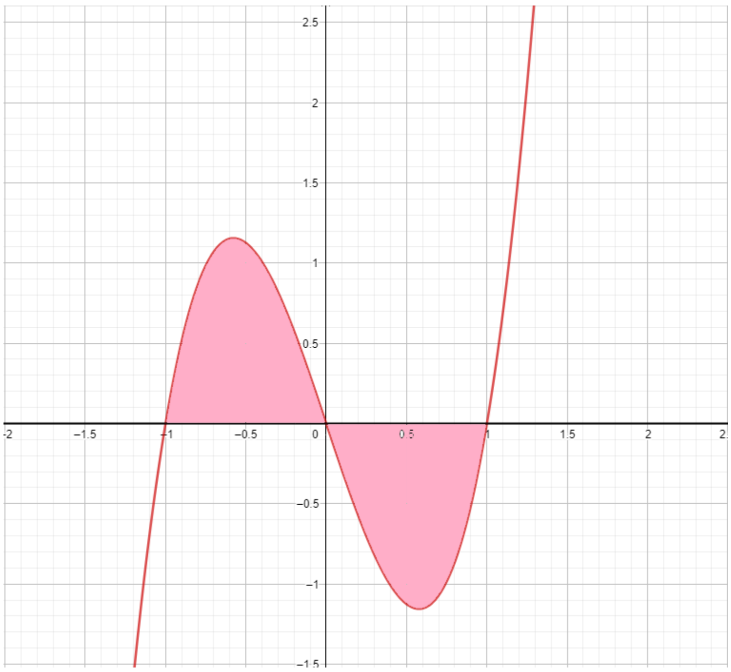
Encuentre el área determinada por las funciones:

$y_1 = 3(x^3 - x)$

$y_2 = 0$

<u>Resolución:</u>

Gráficamente resulta:



Realizando los cálculos:

$$A = \int_{-1}^{0} 3(x^3 - x)\, dx - \int_{0}^{1} 3(x^3 - x)\, dx$$

$$A = 3\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^{0} = 3\left[\left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right] - 3\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{0}^{1}$$

$$= 3\left[\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

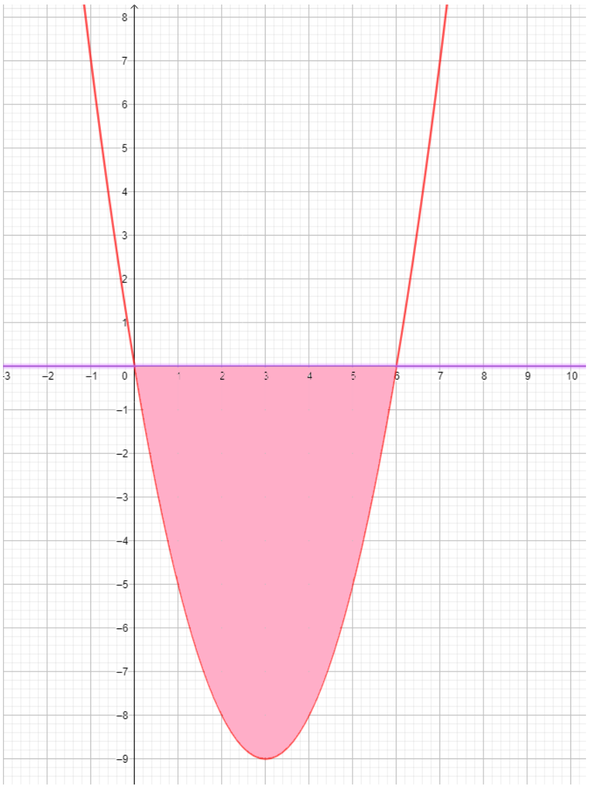
$A = \int_{-1}^{0} 3(x^3 - x)\, dx - \int_{0}^{1} 3(x^3 - x)\, dx = \frac{3}{2}\, u. de\ área.$

EJEMPLO 2

$y_1 = x^2 - 6x$

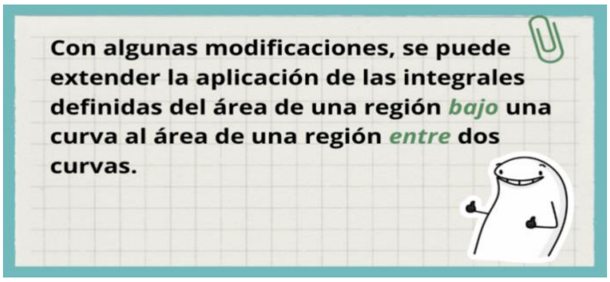
$y_2 = 0$

Gráficamente resulta:



$A = -\int_{0}^{6} (x^2 - 6x)\ dx$

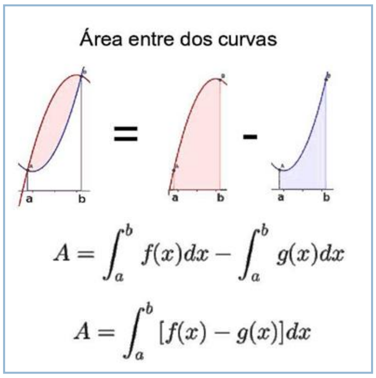
$A =$



ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

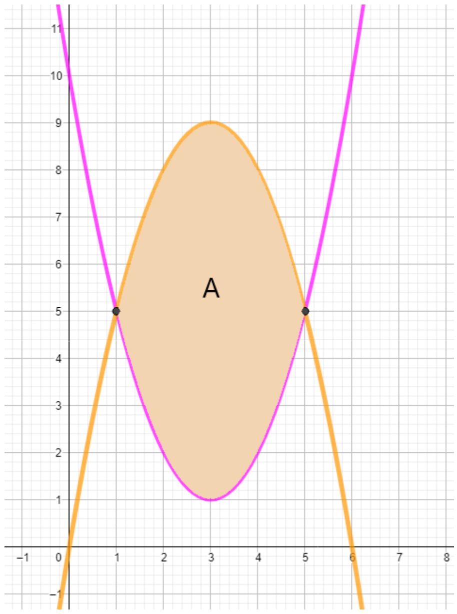


Veamos los siguientes ejemplos

EJEMPLO 1

Halle el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 6x + 10$ y $g(x) = 6x - x^2$.

Resolución:



Si bien podemos visualizar en el gráfico los límites de integración, se procede a calcularlos de la siguiente manera:

Igualamos las funciones y resolvemos:

$x^2 - 6x + 10 = 6x - x^2$

$x^2 - 6x + 10 - 6x + x^2 = 0$ Sumando miembro a miembro $-6x + x^2$

$2x^2 - 12x + 10 = 0$ Sumando m.a.m. términos semejantes

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos:

$x_1 = 1\,; x_2 = 5$

Luego el área se calcula resolviendo la integral definida:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

$$A = \int_1^5 [(6x - x^2) - (x^2 - 6x + 10)]dx$$

$$A = \int_1^5 (-2x^2 + 12x - 10)dx$$

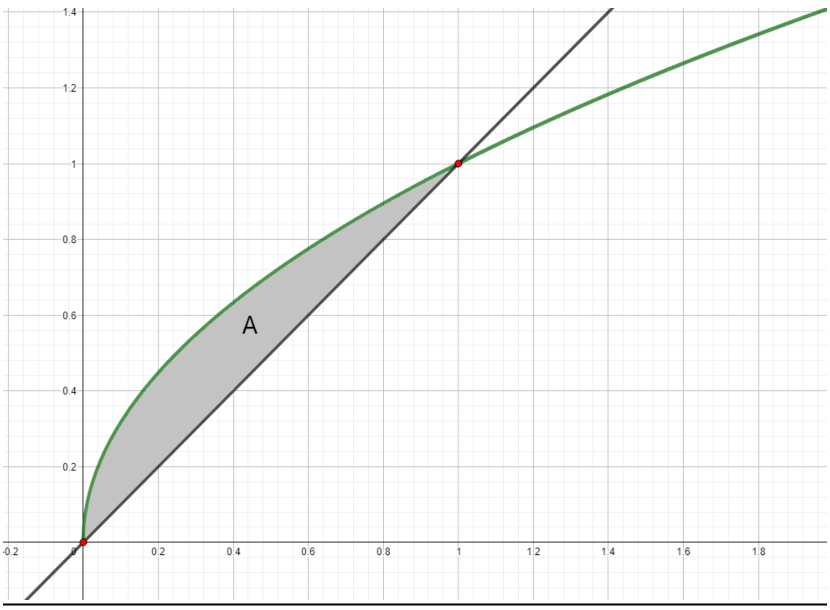
$$A = -2\frac{x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} - 10x\Big|_1^5 = \left(-2\frac{5^3}{3} + \frac{12.5^2}{2} - 10.5\right) - \left(-2\frac{1^3}{3} + \frac{12.1^3}{2} - 10.1\right)$$

$$= \frac{50}{3} + \frac{14}{3}$$

$A = \frac{64}{3}\ u. de\ área.$

EJEMPLO 2

Halle el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x.$



Resolución:

Igualamos las funciones y resolvemos:

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

Resolviendo obtenemos:

$x_1 =$; $x_2 =$

Luego el área se calcula resolviendo la integral definida:

$A =$

GUÍA DE ACTIVIDADES

1. Encontrar la integral indefinida para cada una de las siguientes funciones:

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

b) $\int x^{-4}\, dx$

c) $\int (x^2 + x + x^{-3}) dx$

d) $\int 2senx\, dx$

e) $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx$

f) $\int \frac{7}{x} dx$

g) $\int x^2(2 - 2x^3) dx$

h) $\int \frac{1}{x^5} dx$

2. Para cada una de las siguientes funciones $f(x)$, calcular la primitiva $F(x)$, tal que cumpla la condición dada:

a. $f(x) = 3x^2 - 1$ tal que $F(2) = 4$

b. $f(x) = x^2 + 3x$ tal que $F(1) = 0$

3. Encontrar las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de sustitución:

a. $\int 4(4x + 3)^4\, dx$

b. $\int t^2\sqrt{t^3 + 2}\, dt$

c. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

d. $\int \sec^2 x\ \ dx$

e. $\int e^{-t}\, dt$

f. $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$

g. $\int x^2\sqrt{1 + x^3}\, dx$

h. $\int x. cos(x)^2 dx$

i. $\int \frac{3}{(3x-1)^3} dx$

j. $\int (x + 5)^7 dx$

4. Encontrar las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

a. $\int x. cosx\, dx$

b. $\int x^3 . \ln x \, dx$

c. $\int 3x^2 . \ln x \, dx$

d. $\int x\sqrt{x+1} \, dx$

e. $\int x^2 . sen\, x \, dx$

f. $\int e^x . (7+2x) \, dx$

g. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

h. $\int e^x . x \, dx$

5. Resolver por el método de fracciones parciales:

a. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

b. $\int \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)} dx$

c. $\int \frac{5x-7}{x^2-2x+1} \, dx$

d. $\int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$

e. $\int \frac{3x-1}{x^2-x} dx$

6. Calcular las siguientes integrales definidas:

a. $\int_{-2}^{1} x^3 dx$

b. $\int_{-1}^{1} (4-9y) dy$

c. $\int_{1}^{3} (x+3)^3 dx$

d. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+7x} \, dx$

e. $\int_{-1}^{4} (x^2+x) dx$

f. $\int_{0}^{2} e^{3x} dx$

g. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$

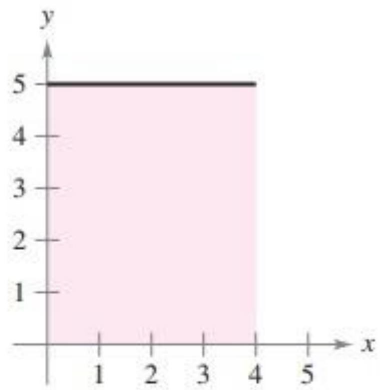
h. $\int_{0}^{\pi} sen\, x \, dx$

i. $\int_{0}^{2} x^2 dx$

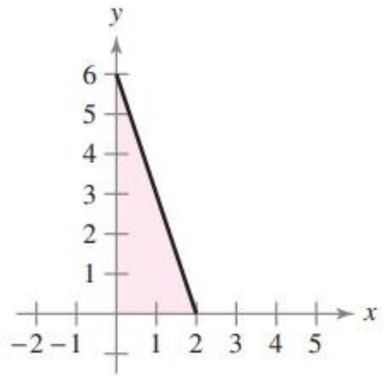
j. $\int_{1}^{7} \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx$

7. Formular una integral definida que produzca el área de la región.

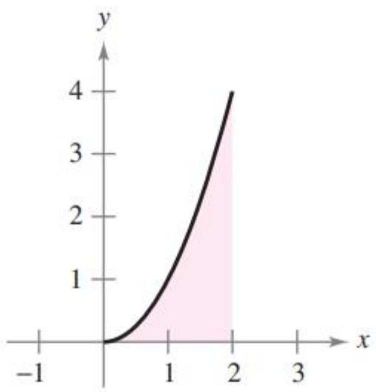
a. $f(x) = 5$



b. $f(x) = 6 - 3x$



c. $f(x) = x^2$



8. Calcular el área comprendida entre las siguientes funciones. Utilizar Geogebra para visualizar las gráficas.

a. Encontrar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = 4x - x^2 + 8$ y $f(x) = -2x + x^2$.
b. Encontrar el área de la región limitada por $f(x) = -x^2$ y $f(x) = x^2 - 2x$.

c. Encontrar el área determinada por la gráfica de la función y las rectas $y = x^2, x = 2, x = 6, y = 0$.

d. Encontrar el área de la región limitada por $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x + 2$

e. Encontrar el área de la región limitada por $f(x) = x$ y $f(x) = 2 - x^2$.

f. Encontrar el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.

g. Encontrar el área limitada por la curva de ecuación $y = 2\sqrt{x}$ y la recta $y = x$.

h. Hallar el área comprendida entre las curvas $y = 6x - x^2$; $y = x^2$

i. Determinar el área entre las curvas $y = x^2 + 5$, $y = x^3$ y las rectas $x = 2$, $x = 1$.

9. Determinar si el enunciado es verdadero o falso. Justificar en ambos casos.

a. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$

b. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx$

c. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx. \int g(x)dx$

d. Si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces: $F(x) = G(x) + C$

e. El valor de $\int_a^b f(x)dx$ debe ser positivo

ANEXOS PARA LA PLATAFORMA

- **Tabla de integrales inmediatas.**

https://drive.google.com/file/d/1zFoINEN4rMRKrlH0QUVfQPwwgoPFWcfL/view

- **Geogebra para visualizar Sumas inferiores y superiores.**

  https://www.geogebra.org/m/gqfxpu9c

  https://www.geogebra.org/m/YUVffGyb

- Video*:* *LA INTEGRAL, junto a la DERIVADA es uno de los conceptos más importantes dentro del CALCULO*.

  https://www.youtube.com/watch?v=y6YQSUDTzqE

BIBLIOGRAFÍA

De GUZMÁN, M y otro (2000). Capítulo 17: Integrales. G. Anaya. (Ed.),*Matemática I.* (pp.320-343). Madrid, España.

JAGDISH, A y otro (2009). Capítulo 15: Integración. En R. Rivera (Eds.), *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Quinta edición* (pp. 620-649). Distrito Federal, México: Prentice hall.

JAGDISH, A y otro (2009). Capítulo 16: Integral definida. En R. Rivera (Eds.), *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. Quinta edición* (pp. 650-718). Distrito Federal, México: Prentice hall.

LARSON, R. y otro (2010). Capítulo 4: Integración. En A.L. Delgado (Ed.), *Cálculo 1. De una variable. Novena edición* (pp. 247-322). Distrito Federal, México: Mcgraw-hill/interamericana editores.

LARSON, R. y otro (2010). Capítulo 7: Aplicaciones de la integral. En A.L. Delgado (Ed.), *Cálculo 1. De una variable. Novena edición* (pp. 447-518). Distrito Federal, México: Mcgraw-hill/interamericana editores.

PISKUNOV, N (1978). Capítulo 10: Integral indefinida. EnM. y Simón S.A. (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Tercera edición*(pp. 393-422). Barcelona, España.

PISKUNOV, N (1978). Capítulo 11: Integral definida. EnM. y Simón S.A. (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Tercera edición*(pp.458-482). Barcelona, España.

PISKUNOV, N (1978). Capítulo 11: Aplicaciones geométricas y mecánicas de la integral definida. EnM. y Simón S.A. (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Tercera edición*(pp.513-515). Barcelona, España.

PURCELL, M y otro (2007). Capítulo 3: Aplicaciones de la derivada. EnP.Educación (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Novena edición*(pp. 197-202). Distrito Fedral, México.

PURCELL, M y otro (2007). Capítulo 4: La integral definida. EnP.Educación (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Novena edición*(pp. 215-274). Distrito Fedral, México.

PURCELL, M y otro (2007). Capítulo 5: Aplicaciones de la integral. EnP.Educación (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Novena edición*(pp. 275-280). Distrito Fedral, México.

PURCELL, M y otro (2007). Capítulo 7: Técnicas de integración. EnP.Educación (Ed.),*Cálculo diferencial e integral. Novena edición*(pp. 383-422). Distrito Fedral, México.

SADOSKY, M y otro (2010). Capítulo 10: Integrales indefinidas. EnL.E. Alsina (Ed.),*Elementos de cálculo diferencial e integral. Vigesimotercera edición* (pp. 273-306). Buenos Aires, Argentina.

SADOSKY, M y otro (2010). Capítulo 11: Integrales definidas. EnL.E. Alsina (Ed.),*Elementos de cálculo diferencial e integral. Vigesimotercera edición* (pp. 356-373). Buenos Aires, Argentina.

STEWART, J. (2012). Capítulo 4: Aplicaciones de la derivación. En S. Cervantes y G. Olguín (Eds.), *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición* (pp. 344-353). Distrito Federal, México: CengageLearning Editores.

STEWART, J. (2012). Capítulo 5: Integrales. En S. Cervantes y G. Olguín (Eds.), *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Séptima edición* (pp. 354-413). Distrito Federal, México: CengageLearning Editores.

STEWART, J. (2012). Capítulo 6: Aplicación de la integración. En S. Cervantes y G. Olguín (Eds.), *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición* (pp. 421-429). Distrito Federal, México: CengageLearning Editores.

STEWART, J. (2012). Capítulo 7: Técnicas de integración. En S. Cervantes y G. Olguín (Eds.), *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas. Sexta edición* (pp. 524-565). Distrito Federal, México: CengageLearning Editores.

THOMAS, G y otros. (2006). En P. Educación (Eds.), *Cálculo: una variable. Undécima edición* (pp. 524-565). Distrito Federal, México.