

## Preguntas de teoría para el parcial 2.

- 1) Defina Incremento total y parcial de una función.
- 2) Defina derivables parciales y de sus condiciones.
- 3) Defina la relación entre diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad.
- 4) Defina derivada direccional. valor maximo y valor minimo.
- 5) Defina Gradiente y su interpretacion geometrica.
- 6) Defina Extremos Relativos de una funcion de dos variables y su condicion necesaria para su existencia.
- 7) Defina Punto Critico.
- 8) Defina la condición suficiente para la existencia de un extremo relativo en un punto.

Respuesta:

1) El Incremento total de una función se refiere al cambio del valor de la función cuando se varían todas sus variables independientes simultáneamente. Por Ejemplo: si  $f(x, y)$  es una función de varias variables y sus variables cambian de  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ , el incremento total  $\Delta f$  esta dado por:

Incremento total de la función:

$$\Delta z = \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

El Incremento parcial de una función se refiere al cambio del valor de la función debido al cambio en una sola variable independiente, dejando las demás como constantes.

Incremento parcial de la función según la variable x:

$$\Delta z_x = \Delta f_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Incremento parcial de la función según la variable y:

$$\Delta z_y = \Delta f_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

b) Se define derivada parcial al cambio de una función con respecto al cambio de una de sus variables independientes, mientras que las demás pasan a ser constantes.

**4** Si  $f$  es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones  $f_x$  y  $f_y$ , definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Condiciones:

□ Una función de dos variables independientes es **derivable** en un punto, si existen ambas derivadas parciales en dicho punto. Una función  $z = f(x, y)$  es derivable en una región si lo es en todos los puntos de esa región.

□ Dado  $z = f(x, y)$ , la  $\frac{\partial z}{\partial x}$  en  $P_0 = (x_0, y_0)$  mide la **tasa de variación instantánea** en el punto  $P_0$  de  $f(x, y)$  por unidad de variación de  $x$  manteniendo  $y = y_0$ . La  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en  $P_0$  mide la tasa de variación de  $y$  manteniendo  $x = x_0$ .

□ Cuando se calcula las derivadas en forma genérica en un punto  $(x, y)$  de  $z = f(x, y)$  obtenemos dos funciones derivadas. La  $\frac{\partial z}{\partial x}$  es una función derivada y la  $\frac{\partial z}{\partial y}$  otra función derivada.

3)

## T7: Relación entre diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad

### Diferenciabilidad y Continuidad

a) Diferenciable  $\Rightarrow$  Continuidad

Si  $z = f(x, y)$  es diferenciable en  $P_0(x_0, y_0)$  entonces es continua en dicho punto

b) Diferenciable  $\Rightarrow$  Derivable

Si  $z = f(x, y)$  es diferenciable en  $P_0(x_0, y_0)$  entonces es derivable en dicho punto

c) Relación entre derivabilidad y continuidad

Para funciones, la derivabilidad  $\Rightarrow$  continuidad y

continuidad  $\nRightarrow$  derivabilidad

### Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si  $z = f(x, y)$  es una función continua en una región  $R$ , y las primeras derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en un punto en una región abierta  $R$ , entonces  $z = f(x, y)$  es **diferenciable** en  $R$ .

15

4) La Deriva Direccional es una generalización del concepto de derivada de una función en una dirección específica. Calcula la variación instantánea de la función  $z=f(x,y)$  en la dirección del vector  $u$ .

### En otras palabras:

• El valor máximo de la derivada direccional es  $|\nabla f|$  y ocurre cuando  $u$  tiene la misma dirección que  $\nabla f$  (cuando  $\cos \phi = 1$ ),

y

El valor mínimo de la derivada direccional es  $-|\nabla f|$  y ocurre cuando  $u$  y  $\nabla f$  tienen direcciones opuestas (cuando  $\cos \phi = -1$ ).

5) El gradiente de una función escalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un vector que apunta en la dirección de mayor incremento de la función y cuya magnitud es la tasa de cambio de la función en esa dirección.

Matemáticamente, el gradiente se denota como  $\nabla f$  y este compuesto por las derivadas parciales de  $f$  con respecto a cada una de las variables independientes.

Ejemplos:

a) Suponga que  $f(x, y)$  es una función de dos variables y cuyas derivadas parciales y existen. Entonces el **gradiente de  $f$**  se define como:

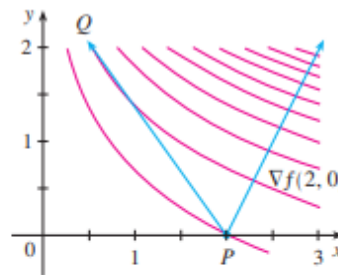
$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j}$$

b) Suponga que  $f(x, y, z)$  es una función de tres variables cuyas derivadas parciales  $f_x, f_y$  y  $f_z$  existen. Entonces el **gradiente de  $f$**  se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$$

### Interpretación Geométrica.

- **Dirección del mayor incremento:** El gradiente apunta en la dirección donde la función incrementa más rápidamente. (COLTA)
- **Perpendicularidad a superficies de nivel:** En el caso de funciones de dos variables  $f(x, y)$ , el gradiente en un punto  $(a, b)$  es perpendicular a la curva de nivel  $f(x, y) = c$  que pasa por  $(a, b)$ .



**FIGURA 7**

En  $(2, 0)$  la función del ejemplo 6 se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente  $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$ . Observe que según la figura 7 este vector, al parecer, es perpendicular a la curva de nivel que pasa por  $(2, 0)$ . En la figura 8 se ilustra la gráfica de  $f$  y el vector gradiente.

Para funciones de tres variables, en un punto  $(a, b, c)$ , el gradiente  $\nabla f(a, b, c)$  de  $f$  es perpendicular a la superficie de nivel  $f(x, y, z) = k$  que pasa por  $(a, b, c)$ .

Esto significa que el gradiente  $\nabla f(a, b, c)$  es ortogonal (PERPENDICULAR) al plano tangente a la superficie de nivel  $(a, b, c)$ .

Definición más explícita:

### ■ Significancia del vector gradiente

Ahora se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función  $f$  de tres variables y un punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  indica la dirección del incremento más rápido de  $f$ . Además, también sabemos que  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  es ortogonal a la superficie de nivel  $S$  de  $f$  que pasa por  $P$  (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de  $P$  en la superficie de nivel  $S$ , el valor de  $f$  no cambia. Así, parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función  $f$  de dos variables y un punto  $P(x_0, y_0)$  en su dominio. Una vez más, el vector gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  señala la dirección del incremento más rápido de  $f$ . Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que  $\nabla f(x_0, y_0)$  es perpendicular a la curva de nivel  $f(x, y) = k$  que pasa por  $P$ . Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de  $f$  siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

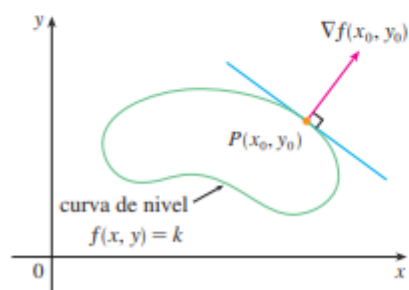


FIGURA 11

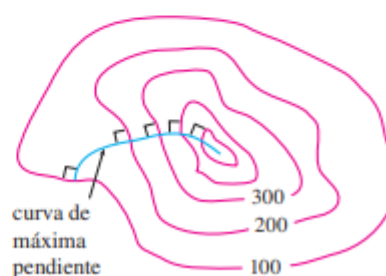


FIGURA 12

6)

**1 Definición** Una función de dos variables tiene un **máximo local** en  $(a, b)$  si  $f(x, y) \leq f(a, b)$  cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(a, b)$ . [Esto significa que  $f(x, y) \leq f(a, b)$  para todos los puntos  $(x, y)$  en algún disco con centro  $(a, b)$ .] El número  $f(a, b)$  recibe el nombre de **valor máximo local**. Si  $f(x, y) \geq f(a, b)$  cuando  $(x, y)$  está cerca de  $(a, b)$ , entonces  $f$  tiene un **mínimo local** en  $(a, b)$  y  $f(a, b)$  es un **valor mínimo local**.

Si las desigualdades de la definición 1 se cumplen para *todos* los puntos  $(x, y)$  en el dominio de  $f$ , entonces  $f$  tiene un **máximo absoluto**, o un **mínimo absoluto**, en  $(a, b)$ .

**2 Teorema** Si  $f$  tiene un máximo local o un mínimo local en  $(a, b)$  y las derivadas parciales de primer orden de  $f$  existen ahí, entonces  $f_x(a, b) = 0$  y  $f_y(a, b) = 0$ .

7)

### **Puntos críticos**

Un **punto crítico** de una función  $z = f(x,y)$  es un punto  $(a,b)$  en el dominio de  $f$  para el cual  $f_x(a, b) = 0$  y  $f_y(a,b) = 0$ , o si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

8)

### **Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo en un punto**

Sea  $(a, b)$  un punto crítico de  $z = f(x, y)$  y suponga que:  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$  son continuas en un disco centrado en  $(a,b)$ .

Si  $f_x(a,b) = 0$  y  $f_y(a,b) = 0$ , se considera que:

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

- a) Si  $H(a,b) > 0$  y  $f_{xx}(a,b) > 0$ , entonces  $f(a,b,f(a,b))$  es un **mínimo relativo**.
- b) Si  $H(a,b) > 0$  y  $f_{xx}(a,b) < 0$ , entonces  $f(a,b,f(a,b))$  es un **máximo relativo**.
- c) Si  $H(a,b) < 0$ , entonces  $f(a,b,f(a,b))$  **no es extremo relativo (Punto silla)**.
- d) Si  $H(a,b) = 0$ , entonces la prueba no es concluyente.

# BLOQUE 3 TEORIA

- 1) Defina Ecuacion diferencial.
- 2) Cuál es la diferencia entre la ecuacion diferencial ordinaria y la ecuacion diferencial parcial?
- 3) Defina orden y grado de una ecuacion diferencial.
- 4) Defina las soluciones de una ecuacion diferencial.
- 5) Defina Condición Suficiente de Existencia y Unicidad de la Solución.
- 6) Defina punto de vista geometrico de las soluciones de la ecuaciones diferenciales.
- 7) Condiciones de ecuaciones diferenciales de variables separables.
- 8) Defina Ecuaciones diferenciales Homogeneas de primer Orden.

## Respuestas:

- 1) Una Ecuacion diferencial es una ecuación que se relaciona con la variable independiente (x), la variable dependiente (y), y sus derivadas.
- 2) Si la función depende de una sola variable se denomina ecuación diferencial ordinaria, y si la función depende de más de una variable se denomina ecuación diferencial parcial.
- 3) El orden de una ecuacion diferencial esta dado por el orden de la derivada superior que interviene en ella.

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente de la derivada de mayor orden que figura en ella.

4)

Dada la  $F(x; y; y'; y^{(2)}; y^{(3)}; \dots; y^{(n)}) = 0$  se denomina solución de la ecuación diferencial de toda función  $y = f(x)$  tal que introducida ella y sus derivadas, ésta se transforma en la identidad.

La **solución general** es la integral que contiene tantas constantes como orden tiene la ecuación diferencial.

La **solución particular** se obtiene al fijar un punto cualquiera  $P(x_0, y_0)$  que debe satisfacer necesariamente la ecuación diferencial para un único valor de C.

La **solución singular** es una función que verifica la ecuación diferencial, pero que no se obtiene particularizando la solución general.



5)

Dada la función de variable real:  $f(x, y)$ , la cual es continua en un cierto dominio  $D$  del plano  $xy$  que contiene al punto  $P_0(x_0, y_0)$ , entonces el problema de valor inicial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  que satisface la condición  $y(x_0) = y_0$  **tiene al menos una solución** en un intervalo abierto que pertenece a  $R$  y contiene a  $x = x_0$

Si  $\frac{\partial f}{\partial y}$  es continua en  $D$ , entonces la solución es única en algún intervalo abierto que contiene a  $x = x_0$

6) La Solucion General de una ecuacion diferencial representa una familia de curvas llamadas curvas integrals.

Dada la ecuación diferencial lineal  $F(x, y, y') = 0$  su solución general es:  $y = f(x, C)$  que representa una **familia de curvas**. Sin embargo, la solución:  $y = f(x, C_0)$  representa a una de las curvas.

7)

## T7: Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Consideramos la ecuación diferencial de primer orden:  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  (1)

Se llama variables separadas si  $f(x, y)$  puede expresarse como el producto de una función de  $x$  por una función de  $y$ , o por el cociente de esas funciones.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{h(y)}{g(x)}$$



8)

## T8: Ecuaciones Diferenciales Homogéneas de Primer Orden

Dada una función  $f(x, y)$  se dice que es una función **homogénea de grado  $n$**  respecto a las variables  $x$  e  $y$ , si al reemplazar  $x$  por  $kx$  e  $y$  por  $ky$  se verifica la identidad:

$$f(kx; ky) = k^n f(x; y) \quad \forall k$$

Una ecuación diferencial de primer orden se dice **homogénea** si tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1) \quad , \text{ donde } f(x, y) \text{ es una función homogénea de grado } 0,$$

$$f(kx; ky) = k^0 f(x; y) = f(x, y) \quad (2)$$

La ecuación diferencial:  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  es homogénea si  $M(x, y)$  y  $N(x, y)$  son homogéneas del mismo grado.

Ejemplo 6: Resolver la ecuación diferencial  $(x^2 + y^2)dy - xy \cdot dx = 0$