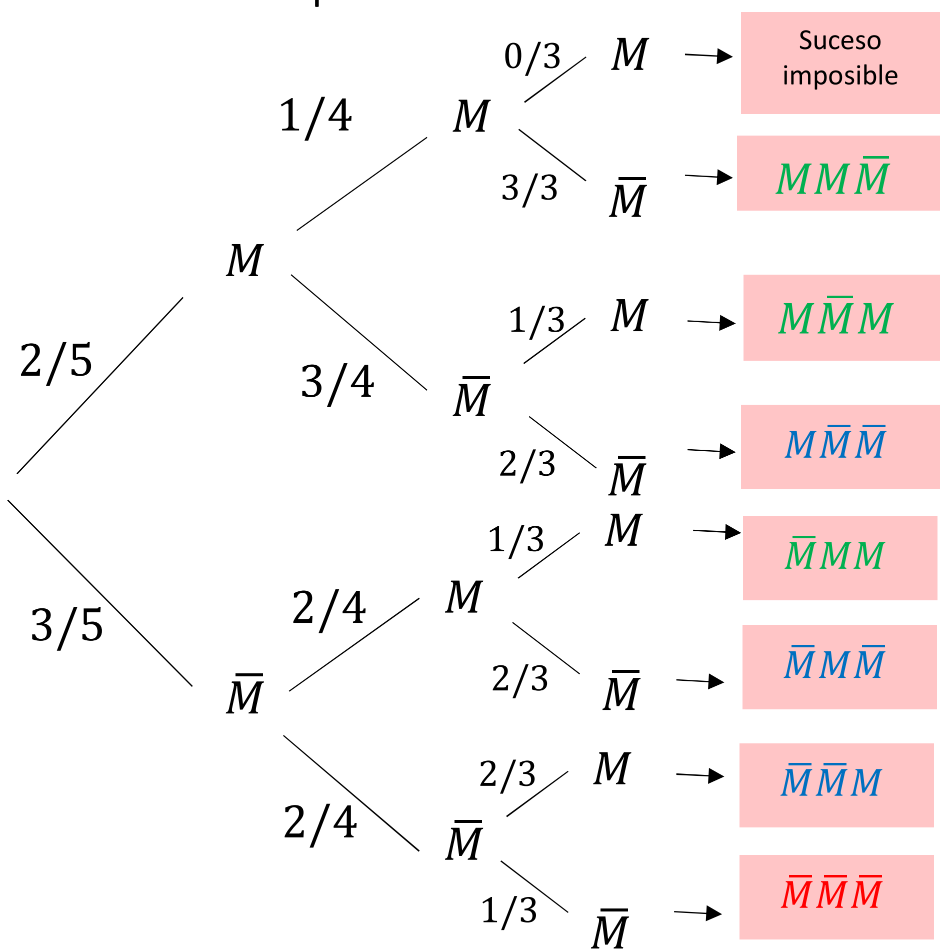
Ejercicio 1

Un embarque de cinco autos importados contiene dos que tienen ligeras manchas de pintura. Si una concesionaria recibe tres de estos automóviles al azar, construya un diagrama de árbol con los posibles resultados del experimento. Utilice las letras M y $\bar{M}$ para manchado y no manchado, respectivamente. Luego, a cada punto muestral asigne un valor x de la variable aleatoria X que representa el número de autos que la concesionaria compra con manchas de pintura. ¿Cuál es su distribución de probabilidades?



ε: "Seleccionar al azar 3 autos de un total de 5

(2 manchados y 3 no manchados)"

Como los autos serán comprados, **la extracción será SIN REEMPLAZAMIENTO (S/R) en este caso**.

Construimos el diagrama de árbol y escribimos el espacio muestral.

$$S = \begin{Bmatrix} MM\bar{M}, M\bar{M}M, M\bar{M}\bar{M}, \bar{M}MM, \\ \bar{M}M\bar{M}, \bar{M}\bar{M}M, \bar{M}\bar{M}\bar{M} \end{Bmatrix}$$

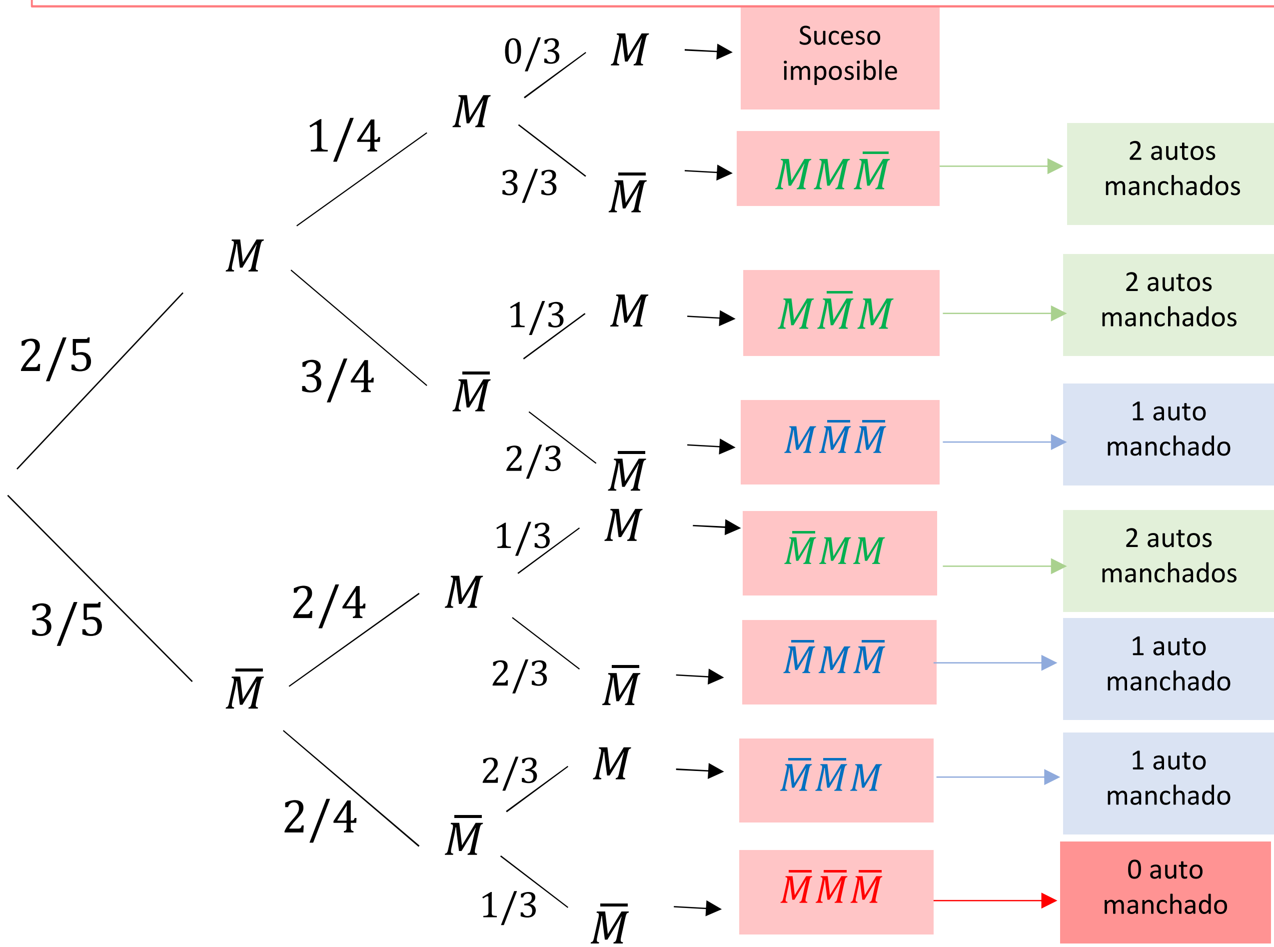
Ejercicio 1

Variable aleatoria discreta: X.v.a.d./X: Número de autos manchados adquiridos.

Ningún auto manchado: $f(0) = P(X = 0) = P(\bar{M}\bar{M}\bar{M}) = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

Un auto manchado: $f(1) = P(X = 1) = P(\{M\bar{M}\bar{M}, \bar{M}M\bar{M}, \bar{M}\bar{M}M\}) = \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Dos autos manchados: $f(2) = P(X = 2) = P(\{MM\bar{M}, M\bar{M}M, \bar{M}MM\}) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.\frac{3}{3} + \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$



Por lo tanto la distribución de probabilidades de x es:

x	0	1	2
f(x)	1/10	3/5	3/10

¿Cumple las condiciones?

i. $f(x) \geq 0, \forall x$

ii. $\sum_x f(x) = 1$

Ejercicio 1

En variables aleatorias discretas también podemos expresar la función de distribución de probabilidades mediante una fórmula.
En este caso, recurrimos a las combinaciones pues no importa el orden en que fueron extraídos los automóviles.

ε: "Seleccionar al azar 3 autos de un total de 5 (2 manchados y 3 no manchados)"

Sea X.v.a.d./**X: Número de autos manchados adquiridos.**

Por lo tanto la distribución de probabilidades de x es:

$$\boxed{f(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{5}{3}} \text{ , con } x = 0,1,2}$$

Y es fácil llegar al mismo resultado:

- $f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3-0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$
- $f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{3-1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}$
- $f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{3-2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$

x	0	1	2
f(x)	1/10	3/5	3/10

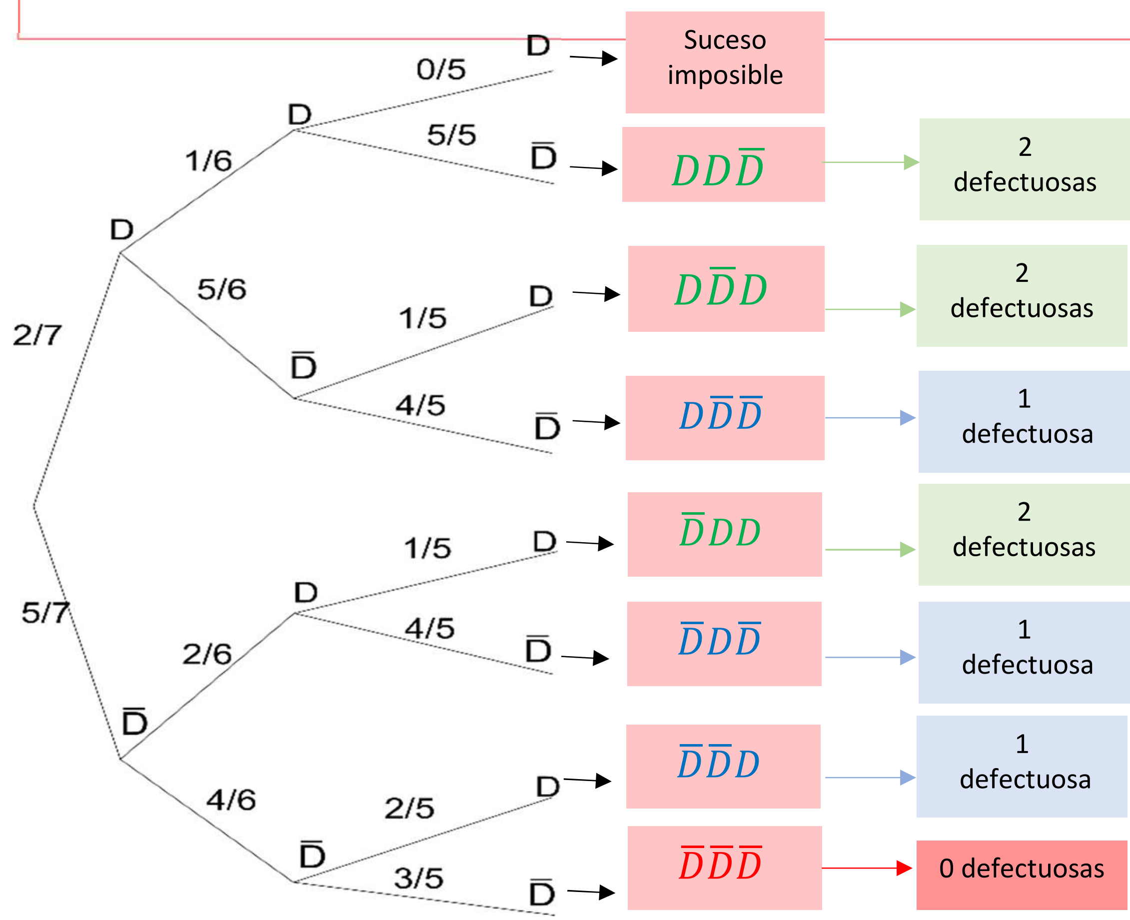
Ejercicio 2

Variable aleatoria discreta: X.v.a.d./X: Número de computadoras defectuosas en 3 seleccionadas sin reposición de un total de 5 no defectuosas y 2 defectuosas.

Ninguna defectuosa: $\mathrm{f}(0) = P(X = 0) = P(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5} = \frac{2}{7}$

Una defectuosa: $\mathrm{f}(1) = P(X = 1) = P(\{D\bar{D}\bar{D}, \bar{D}D\bar{D}, \bar{D}\bar{D}D\}) = \frac{2}{7}.\frac{5}{6}.\frac{4}{5} + \frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5} + \frac{5}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5} = \frac{4}{7}$

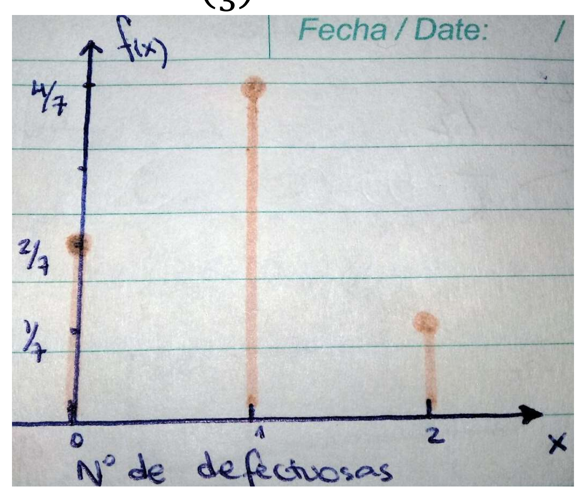
Dos defectuosas: $\mathrm{f}(2) = P(X = 2) = P(\{DD\bar{D}, D\bar{D}D, \bar{D}DD\}) = \frac{2}{7}.\frac{1}{6}.\frac{5}{5} + \frac{2}{7}.\frac{5}{6}.\frac{1}{5} + \frac{5}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5} = \frac{1}{7}$



x	0	1	2
f(x)	2/7	4/7	1/7

O bien, directamente por fórmula:

$$f(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \text{ con } x = 0,1,2$$



Ejercicio 5

La siguiente tabla es una distribución de probabilidades de las ganancias en miles de dólares proyectadas por MRA Company durante el primer año de trabajo (los valores negativos indican pérdida).

x	-100	0	50	100	150	200
$f(x)$	0.10	0.20	0.30	0.25	0.10	0.05

Primero definimos y clasificamos la variable en estudio:

X v.a.d. /X: "Ganancias proyectadas por MRA Company durante el primer año" (miles de US$)

Observación: notar que la variable aleatoria es considerada discreta en el problema.

a) Verifique que f es una distribución de probabilidad.

Walpole
Pág. 84

Definición 3.4: El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidades**, una **función de masa de probabilidad** o una **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado posible x,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

¿Cumple las condiciones?

i. $f(x) \geq 0, \forall x$ → *Se verifica.*

ii. $\sum_x f(x) = 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}10 +, 0{,}05 = 1$ → *Se verifica.*

∴ ***f es un distribución de probabilidades.***

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa gane por lo menos $\$150.000$?

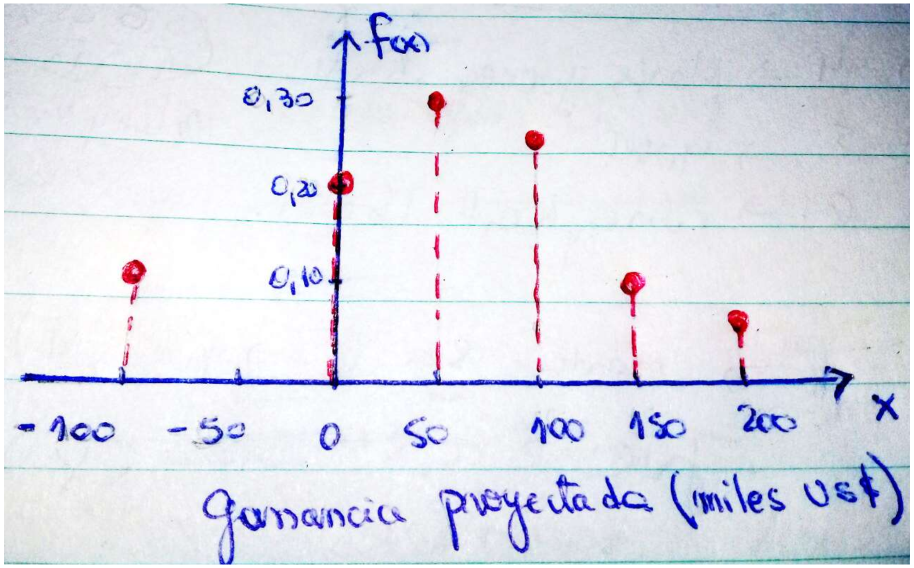
Tips
"Por lo menos/Al menos"→MAYOR O IGUAL (≥)
"A lo sumo" → MENOR O IGUAL (≤)

$$P(X \geq 150) = f(150) + f(200) = 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}15$$

x	-100	0	50	100	150	200
$f(x)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,10	0,05

c) Grafique f.

Construimos un diagrama de bastones pues X es discreta.



Ejercicio 5

d) Escriba la expresión de la distribución acumulada de probabilidades. Grafique.

Recordemos que f representa la distribución de probabilidades (puntuales): $f(x) = P(X = x)$
La distribución de probabilidades acumuladas se representa con F: $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$

Paso 1: En la misma tabla de distribución de probabilidades f, agregamos un renglón para F acumulando sus probabilidades.

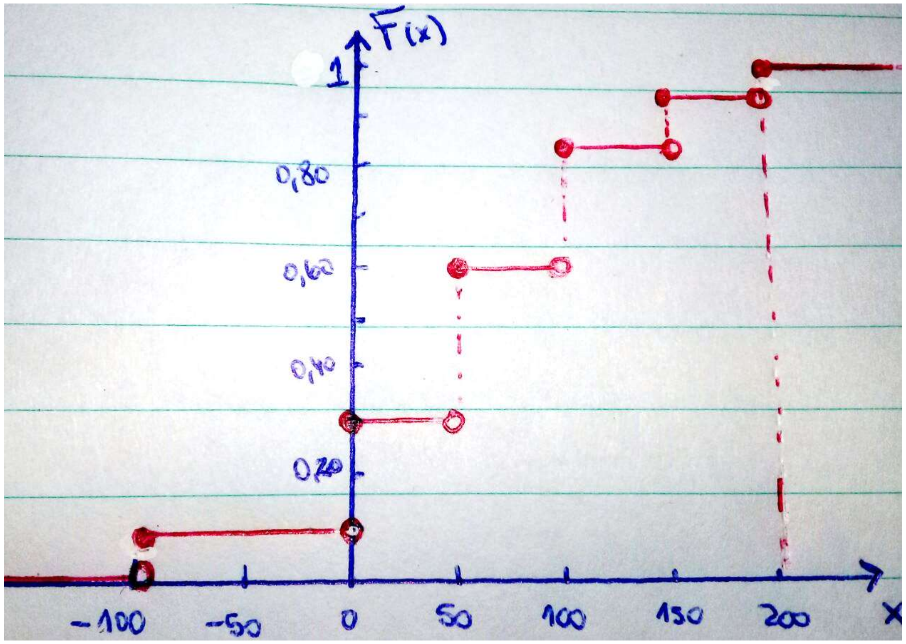
$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-100}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{50}$	$\mathbf{100}$	$\mathbf{150}$	$\mathbf{200}$
$\boldsymbol{f(x)}$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,10	0,05
$\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$	0,10	0,30	0,60	0,85	0,95	1

Paso 2: Expresamos completamente la función F.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -100 \\ 0{,}10 & si - 100 \leq x < 0 \\ 0{,}30 & si\ 0 \leq x < 50 \\ 0{,}60 & si\ 50 \leq x < 100 \\ 0{,}85 & si\ 100 \leq x < 150 \\ 0{,}95 & si\ 150 \leq x < 200 \\ 1 & si\ x \geq 200 \end{cases}$$

Es una función por partes, discontinua y de salto finito.

Gráfica de F. Construimos un gráfico escalonado.



Ejercicio 5

e) Repita el inciso b empleando lo hallado en el inciso anterior.

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}$$
$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$$

$$P(X \geq 150) = 1 - P(X < 150) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - F(100) = 0{,}15$$

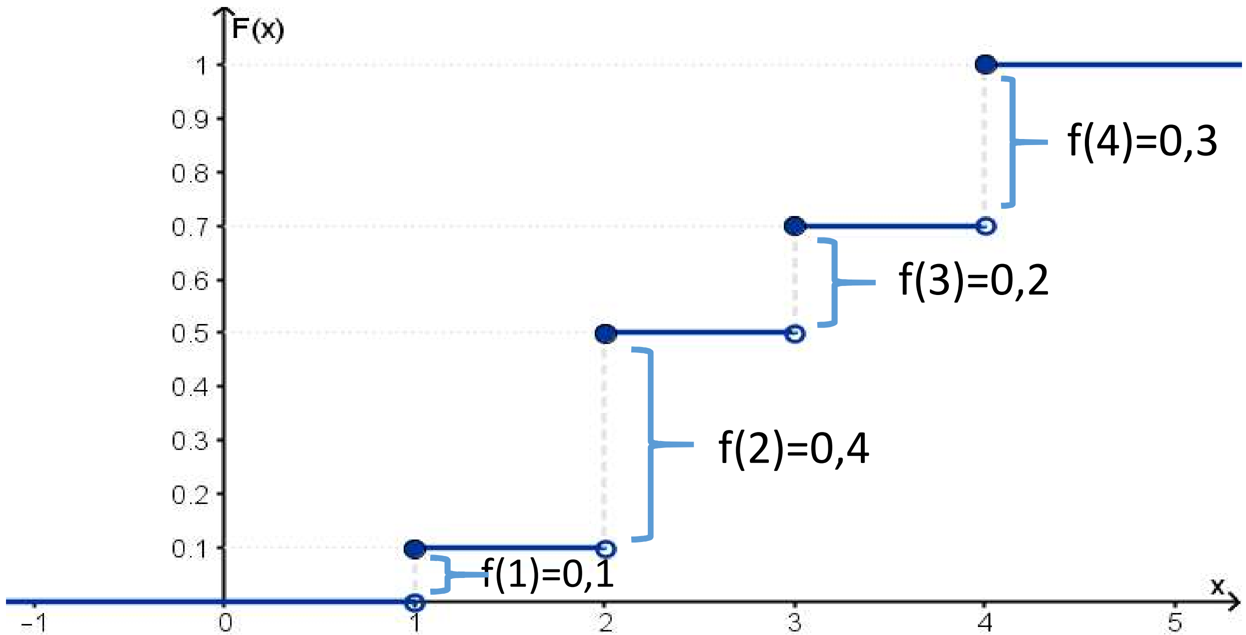
Necesitamos al menos un símbolo “menor”, trabajamos con complemento.

Lo convertimos a “menor o igual” llevando la probabilidad al anterior valor discreto posible.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{-100}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{50}$	$\boldsymbol{100}$	$\boldsymbol{150}$	$\boldsymbol{200}$
$\mathbf{F}(\boldsymbol{x})$	0.10	0.30	0.60	0.85	0.95	1

Ejercicio 6

Sea la variable aleatoria discreta X, cuya distribución acumulada de probabilidad se encuentra graficada a continuación. Determine:



Recordar:
$\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}$
$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 0{,}7$

b) $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = F(3) - F(2) = 0{,}2$

Cuando queremos obtener una probabilidad puntual calculamos la diferencia entre la acumulada en ese valor y la acumulada del anterior valor discreto.

Notar que la magnitud del salto en la función acumulada para x=3 es igual a la probabilidad en ese punto.

Ejercicio 6

Recordar:
$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$

c) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Necesitamos al menos un símbolo "menor", trabajamos con complemento.

Lo convertimos a "menor o igual" llevando la probabilidad al anterior valor discreto posible.

e) $P(X < 3) = P(X \leq 2) = F(2) = 0{,}5$

f) $P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$

Cuando queremos obtener una probabilidad puntual calculamos la diferencia entre la acumulada en ese valor y la acumulada del anterior valor discreto.

g) $P(2 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = F(3) - F(2) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$

Veamos qué pasaría si queremos calcular $P(2 \leq X \leq 3)$:

$P(2 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 2) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) = F(3) - F(1) =$

$= 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}6$

Lo convertimos a "menor o igual" llevando la probabilidad al anterior valor discreto.

Ejercicio 7

X v.a.c. /X: "tiempo anual de uso de la aspiradora" (unidades de 100 h)

$$f(x) = \begin{cases} x \; si \; 0 < x < 1 \\ 2 - x \;\; si \;\; 1 \leq x < 2 \\ 0 \; en \; c.o.c \end{cases}$$

a) Tiempo de uso de menos de 120 h → X<1,2

$$P(X < 1{,}2) = \int_{-\infty}^{1{,}2} f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{1{,}2} (2-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{1{,}2} = \frac{17}{25} = 0{,}68$$

b) Tiempo de uso entre 50 y 100 h → 0,5< X<1

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0{,}5}^{1} f(x)\,dx = \int_{0{,}5}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0{,}5}^{1} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Ejercicio 8

X v.a.c. /X: "volumen diario de producción de fichas USB" (unidades de 1000)

$$f(x) = c\ (6+2x)\ con\ 0 \leq x \leq 1$$

a) Para que f sea una función de densidad de probabilidad debe cumplir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

$$\int_0^1 c(6+2x)dx = c\left[6x + 2.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = c.(6+1) = 7c = 1 \rightarrow \boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

$$\therefore f(x) = \frac{6+2x}{7} con\ 0 \leq x \leq 1$$

b) Función de probabilidad acumulada.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{7}(6+2t)dt = \frac{1}{7}\left[6t + 2.\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{7}(6x + x^2)$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0\ si\ \ x < 0 \\ \frac{1}{7}(6x + x^2)\ si\ 0 \leq x < 1 \\ 1\ si\ x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P(0{,}1 < X < 0{,}5) = \int_{0,1}^{0,5} \frac{6+2x}{7} dx = \frac{1}{7}\left[6x + 2.\frac{x^2}{2}\right]_{0,1}^{0,5} = \frac{1}{7}\left(3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} - \frac{1}{100}\right) = \frac{66}{175} \cong 0{,}3771$

Representa la probabilidad de que en un día se produzcan entre 100 y 500 fichas USB.

d) Que se produzcan 700 unidades → X=0,7

$P(X = 0{,}7) = 0$ porque X es continua!!!

Ejercicio 9

X v.a.d./X: *Número de pilas defectuosas en una linterna que se vende con 3 pilas AA incluidas*

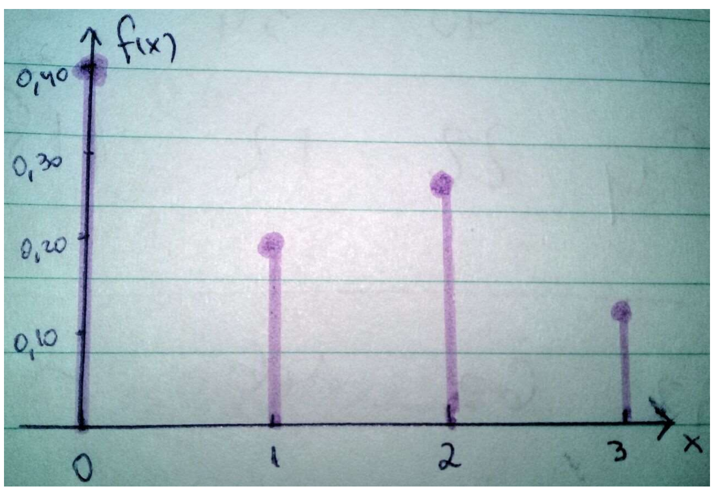
x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k$	$\frac{1}{3}k$	$\frac{1}{6}k$

a) Para que f sea una función de distribución debe cumplir $\sum_x f(x) = 1$

$$\sum_x f(x) = \frac{1}{2}\text{k} + \frac{1}{4}\text{k} + \frac{1}{3}\text{k} + \frac{1}{6} = \frac{5}{4}\text{k} = 1 \;\rightarrow \text{k} = \frac{4}{5}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0,40	0,20	0,27	0,13

b) Gráfica de f.



c) Al menos 1 defectuosa --> Como mínimo 1 defectuosa

$$P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) = 0{,}60$$

Ejercicio 10

X v.a.c. /X: "tiempo de fabricación de un perno en una máquina" (segundos)

$$f(x) = \frac{3x-1}{136} \; con \; 2 \leq x \leq 10$$

a) Para que f sea una función de densidad de probabilidad debe cumplir: (i) $f(x) \geq 0, \forall x$ (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

b) $P(X \geq 5) = \int_5^{10} \frac{3x-1}{136} dx = \frac{1}{136}\left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_5^{10} = \frac{1}{136}\left(\frac{3}{2}.100 - 10 - \frac{3}{2}.25 + 5\right) = \frac{215}{272} \cong 0{,}7904$

Representa la probabilidad de que el perno tarde al menos 5 minutos en la máquina para ser fabricado.

c) $P(X = 7) = 0$ porque X es continua!!!

d) Función de probabilidad acumulada.

$$F(x) = \int_2^x \frac{3t-1}{136} dt = \frac{1}{136}\left[\frac{3t^2}{2} - t\right]_2^x = \frac{1}{136}\left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.4 + 2\right) = \frac{1}{136}\left(\frac{3}{2}x^2 - x - 4\right)$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x < 2 \\ \frac{1}{136}\left(\frac{3}{2}x^2 - x - 4\right) \; si \; 2 \leq x < 10 \\ 1 \;\; si \; x \geq 10 \end{cases}$$

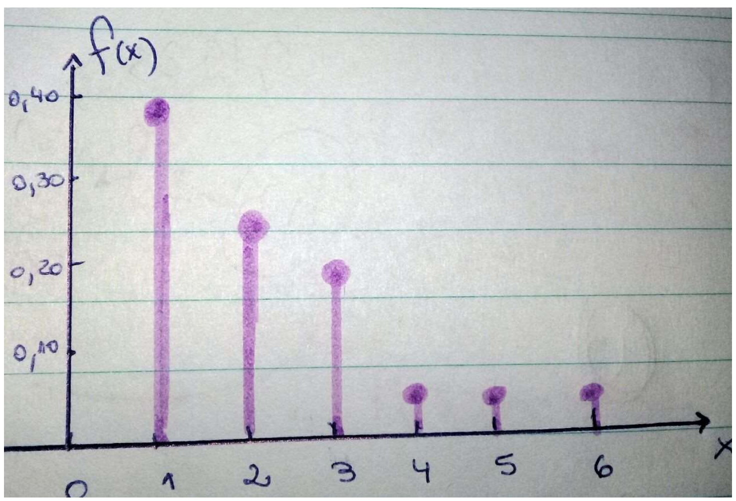
Ejercicio 11

a) X v.a.d./X: *Número de pestañas que abren en simultáneo los usuarios de un navegador Web*
Es discreta ya que corresponde a datos de conteo, o bien su recorrido es un conjunto finito de valores.

b) Distribución de probabilidades de X:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{48}{120}=0{,}40$	$\frac{30}{120}=0{,}25$	$\frac{24}{120}=0{,}20$	$\frac{6}{120}=0{,}05$	$\frac{6}{120}=0{,}05$	$\frac{6}{120}=0{,}05$

c) Gráfica de f.



d) $$F(x)=\begin{cases} 0 \ \ si\ x<1 \\ 0.40 \ \ si\ 1\le x<2 \\ 0.65 \ \ si\ 2\le x<3 \\ 0.85 \ \ si\ 3\le x<4 \\ 0.90 \ \ si\ 4\le x<5 \\ 0.95\ si\ 5\le x<6 \\ 1 \ \ si\ x\ge 6 \end{cases}$$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,40	0,25	0,20	0,05	0,05	0,05
F(x)	0,40	0,65	0,85	0,90	0,95	1

e) $P(X=2)=f(2)=0.25$

f) $P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=0.6$