目录

1 first

[题目] 设n阶可逆矩阵A有特征值λ,对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$,证明$\boldsymbol{\alpha}$也是A^-1对应于λ^{-1}的

特征向量

[证明] 由题设$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,两边同乘$A^{-}1$,则

$(A^{-1}A)\boldsymbol{\alpha}=\lambda(A^{-1}\boldsymbol{\alpha})\Rightarrow E\boldsymbol{\alpha}=\lambda(A^{-1}\boldsymbol{\alpha})\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\lambda(A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$ 因为A可逆，则$|A|\neq 0$. 由$|A|$等于特征值之积，故$\lambda\neq 0$. 综上，$A^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$. 故$\alpha$也是$A^{-}1$对应于$\lambda^{-1}$的特征向量。

$A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha$

$$A=\alpha\alpha^T \qquad A\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)$$

$$\alpha\alpha^t=k$$

1.1 和差化积

和差化积公式：$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

[帮助记忆]

方法 1.可以只记第一个公式，将其它公式用诱导公式化成$\sin(\alpha)+\sin(\beta)$的形式。 方法 2.找规律。前两个公式是 sin和cos异名函数乘积，后两个公式是同名函数乘积。

口诀:

正加正，正在前,

余加余，余并肩。

正减正，余在前，

余减余，负正弦。

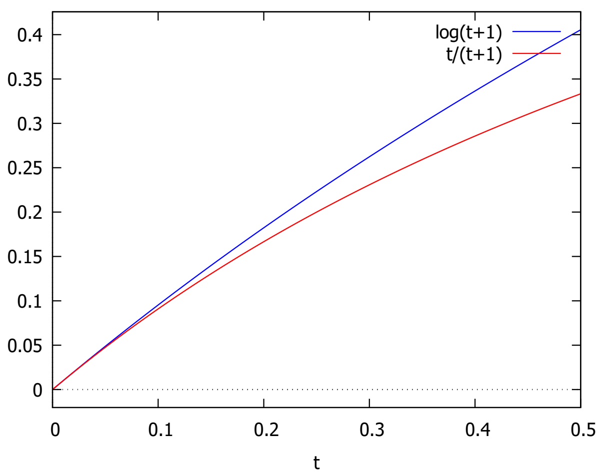
1.2 ♡some easy replace

$$x\in(0,+\infty)\text{时,有}0<\frac{x}{x+1}<\ln(x+1).\text{故}\frac{x^3}{x+1}<\ln(x+1)\,x^2.$$

$$\text{故}\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x<\int_0^1\ln(x+1)\,x^2\mathrm{d}x,\text{即}I_2<I_1.$$

故选A.

```
(%i14) tm_plot2d([log(1+t),t/(1+t)],[t,0,0.5])
```



(%o14) **true**

2 线性表出

[2003年真题]设向量组I:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_t$可由向量组$II$: $\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots\beta_s$线性表示，则

$\mathcal{A}$. 当$t<s$时，向量组II必线性相关

B. 当$t>s$时，向量组II必线性相关

C. 当$t<s$时，向量组I 必线性相关

D. 当$t>s$时，向量组I必线性相关

[简解] 根据定理："若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$可有$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，且$t>s$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$ α_t必线性相关

即若多数向量可以由少数向量线性表出，则此多数向量必线性相关，故选 D.

若A 为$m\times n$ 矩阵，则以下哪个选项是正确的?

A. 若$n>m$,由A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$, 则$r(A)=m$ B. 由A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$=$行向量组的总向量个数$=m$, 则$r(A)\leq m$ C. A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$=$列向量组的总向量个数$=n$,则 $r(A)=n$ D. A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$\leq$列向量组的总向量个数$=n$,则$r(A)\leq$ n

因为$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩，而A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$\leq$列向量组的总向量个数$=n$. 同理A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$. 综上，$r(A)\leq\ \min\ (m,n)$,即有$r(A)\leq n$. 选D.

其余选项:

A:只能得出$r(A)\leq m$.

B:A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$

2.1 线性相关

由特征值的定义

有$[A(\lambda_2\alpha_1), A(\lambda_1\alpha_2)] = [\lambda_1\lambda_2\alpha_1, \lambda_1\lambda_2\alpha_2]$ 极大线性无关组中所含向量的个数r称为向量组的秩，因此需判定$[\lambda_1\lambda_2\alpha_1, \lambda_1\lambda_2\alpha_2]$中的线性无关向量。

由互不相同的特征值对应的特征向量线性无关，则α_1与α_2线性无关。

当$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 \neq 0$,则$\lambda_1\lambda_2\alpha_1 \neq 0, \lambda_1\lambda_2\alpha_2 \neq 0$, 故$\lambda_1\lambda_3\alpha_1$与$\lambda_1\lambda_3\alpha_3$线性无关，向量组$A(\lambda_2\alpha_1), A(\lambda_1\alpha_3)$的秩为 2.

♡α_1 和 $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$。 这是因为 α_1 和 α_2 是不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2)=2$。要使 $r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$，必须保证 $\lambda_2 \neq 0$，这样矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 的秩才能为 2。Z

♡ 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是三阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$(0,2,1)^{\mathrm{T}}$是方程组$A\mathbf{x}=0$的一个基础解系，则$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系可为

A. α_1 $B.$ α_1,α_2 $C.$ α_2,α_3 $\mathcal{D}.$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用$AB=O$ 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数： 因为$A\mathbf{x}=0$ 只有 1 个线性无关的解，即 $n-r(A)=1, n=3$,从而 $r(A)=2$. 由 $r(A)=2=n-1$, 则$r(A^*)=1$. 有$n-r(A^*)=3-1=2$,故$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系中有 2 个线性无关的解向量。

用$AB=O$来得到解向量： 由 $A\mathbf{x}=0$有非零解，则$|A|=0$. 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$, 有$A^*A=O$,则A 的列向量全是$A^*\mathbf{x}=0$ 的解。

而秩$r(A)=2$,故A的列向量中必有 2 个线性无关。 需找到这 2 个线性无关的列向量:

$$\text{由}A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=0, \text{即}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=0, \text{则}2\alpha_2+\alpha_3=0, \text{即}\alpha_2,\alpha_3\text{相关。}$$

综上，α_1,α_2无关，α_1,α_3无关。 选B.

♡[2011年真题)设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是四阶矩阵，A^*为A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $A\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系，则

$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系可为

$A.\ \alpha_1,\alpha_3\quad B.\ \alpha_1,\alpha_2\quad C.\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\quad \mathcal{D}.\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用$AB=O$ 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数：因为$\boldsymbol{A\mathbf{x}=0}$**只有 1** 个线性无关的解，即$\boldsymbol{n-r(A)=1,n=4}$,从而$r(A)=3$. 由 $r(A)=3=n-1$, 则 $r(A^*)=1$. 有$\boldsymbol{n-r(A^*)=4-1=3}$, 故$A^*\mathbf{x}=0$ 的基础解系中有 **3 个线性无关的解向量**。用$AB=O$来得到解向量：由$A\mathbf{x}=0$ 有非零解，则 $|A|=0$. 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$,有$A^*A=O$.则A 的列向量全是$A^*\mathbf{x}=0$ 的解。而秩$r(A)=3$,故A的列向量中必有 3 个线性无关。

需找到这 3 个线性无关的列向量:

由 $A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 则 $\alpha_1+\alpha_3=0$, 即 α_1,α_3相关。

综上

综上，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$无关。

选D.

3 两个方程同解

线性无关的解的个数相同=>系数矩阵的秩相同

基础解系相同

Ar

令方程组()的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&a&1\end{bmatrix}$.

令方程组(II)的系数矩阵为$B=\begin{bmatrix}b&2&c\\b^2&3&c\end{bmatrix}$.

由方程组同解，则 $n-r(B)=$ 方程 (Ⅱ) 线性无关解的个数 = 方程 (Ⅰ) 线性无关解的个数 = 方程 (Ⅰ) 线性无关解的个数 $=n-r(A)$, 即 $r(B)=r(A)$. 因为 $r(B)\le 2$,则 $r(A)\le 2$,即 $|A|=0$, 有

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & a & 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4(a-1)=0,\text{则} a=1.$$

$$AB=O \qquad r(A)+r(B)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$$

由于 A,B 均非零，故 $r(A)>0$,且 $r(B)>0$,即 $r(A)\ge 1, r(B)\ge 1$. 由于 $AB=O$,且 A 是 5×4, B 是 4×6 矩阵，则 $r(A)+r(B)\le 4$. 代入 $r(A)\ge 1$,有 $r(B)\le 4-r(A)\le 3$.因为已得出 $r(B)\ge 1$,则 $1\le r(B)\le 3$.

过 D.

AB=O时的秩:若 A是 m×n矩阵,B是 n×s矩阵,AB=O,则 r(A)+r(B)≤n.

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 则 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 可逆, 又有 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的表达式, 想到相似, 即 $AP=PB \Leftrightarrow P^{-1}AP=B$.

1 2 3 4 5

$$\text{列向量线性无关，可逆，} AP=PB \Leftrightarrow P^{-1}AP=B$$

$$A\sim B;\ A_\lambda = B_\lambda$$

$$|\lambda E - A| = O$$

3.1 已知特征值，求特征向量 ♡

$\lambda \quad \to \quad A,$ 系数矩阵，行最简形矩阵，自由未知量$x_x = 1,$ 0；得到基础解系即属于特征值λ_x的特征向量

- 代入每个 λ_i,得到线性方程组 (λ_iE-A)$\mathbf{x}$=0,通解即对应 λ_i的全体特征向量(除去 0向量)

-

-

-

1. 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时， 由 $(E-B)\mathbf{x}=0$,系数矩阵$E-B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 令 x_2, x_3 为自由未知量，x_1 为独立未知量。令 x_2, x_3 为自由未知量，x_1 为独立未知量。 令 $x_2=1, x_3=0$,则 $x_1=-1$. 令 $x_2=0, x_3=1$,则 $x_1=-2$. 故$\eta_1=(-1,1,0)^T$, $\eta_2=(-2,0,1)^T$ 是一个基础解系，即属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量。 2. 当$\lambda_3=4$时，由$(4E-B)\mathbf{x}=0$,系数矩阵 $4E-B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 令x_3 为自由未知量，x_1, x_2 为独立未知量。 令$x_3=1$,则$x_2=1, x_1=0$.故$\eta_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是一个基础解系，即属于特征值 $\lambda_3=4$ 的一个特征向量。 综上，η_1, η_2, η_3为三个线性无关的特征向量。 选D.

3.2 [分析]矩阵的对角化：

令A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,设$A$有$n$个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$,

取$P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,则有$P^{-1}AP=\Lambda$,其中$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

[解答] 注意P的每一列为一个特征向量，且P中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,$⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩$,\boldsymbol{\alpha}_n$ 排列次序应与 Λ 中 $\lambda_1,\lambda_2,$⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩$,\lambda_n$ 的排列次序 一致。

<with|color|red|[解答]>

4 A; 特征值；求可逆矩阵P ， 相应的对角矩阵 Λ

[1999年真题]设矩阵$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$,已知$A$ 的特征值

为1，-1,-1.求可逆矩阵P,使得P^{-1}AP$=\Lambda$为对角矩阵?

并求出相应的对角矩阵。

4.1 实对称矩阵A（含参数），求可逆矩阵P，求对角矩阵Λ

[2002年真题 设实对称矩阵$A=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}$,求可逆矩阵$P$,使$P^{-1}AP$为对角阵。

$|\lambda E-A|=O$;求特征值 λ_n Λ ✓;代入A，化最简阶梯形矩阵，自由未知数X_n:q1→得到基础解系(特征向量) P

1. 求特征值:

立特征方程:$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-a-1 & \lambda-a-1 & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 0 & a+1-\lambda & \lambda-a-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-a-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-a+1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$

4.2 实对称矩阵的正交规范化

对矩阵 A 执行特征值分解。

- 将得到的特征向量作为矩阵 Q 的列。

- 对 Q 的每一列向量 q_i 执行归一化：$q_i = \frac{q_i}{\|q_i\|}$，其中 $\|q_i\|$ 是向量 q_i 的欧几里得范数。

4.3 $f(A)$的特征值 及对应的特征向量

矩阵	A	kA	A^k	f(A)
特征值	λ	kλ	λ^k	f(λ)
对应特征向量	α	α	α	α

A的特征值已知? $f(A)$的特征值是?对应的特征向量变了吗?/

相似矩阵的性质 对应的特征向量是变的.

矩阵	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	λ^{-1}	$\|A\|\lambda^{-1}$	$\lambda^{-1}+f(\lambda)$
对应特征向量	α	α	α

运用相似矩阵的性质,有 矩阵	A	A^*	$B=P^{-1}A^*P$ B	B+kE
特征值	λ	$\|A\|\lambda^{-1}$	$\|A\|\lambda^{-1}$	$\|A\|\lambda^{-1}+k$
对应特征向量	α	α	$P^{-1}\alpha$	$P^{-1}\alpha$

4.3.1 实对称矩阵必可对角化

注意:特征值相同是任意矩阵相似的必要条件,但只当矩阵实对称时,才是充分条件。即:
矩 阵 相 似 $\Rightarrow$ 特征值相同

$$\left.\begin{array}{l}\text{特征值相同}\\ \text{实对称矩阵}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{矩阵相似.}$$

A与B(实对称矩阵) 相似的充分必要条件is A和B的特征值相同 $\rightarrow |\lambda_{b_n}E-A|=O$

5 最最最易错的分解

5.1 $\dfrac{x^2+c}{(x+a)(x+b)^2}$

$$\frac{x^2+5}{(x-2)\,(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.(1)$$

注意拆项时要写成 $\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ 两项, 如果只有$\dfrac{B}{x+1}$, 可能不存在满足条件的 B.

$x^2+5=A\,(x+1)^2+B\,(x-2)\,(x+1)+C\,(x-2)$

使用留数法:令$x=2$,得$A=1$. 同理,令$x=-1$, 可得$C=-2$.

使用赋值法:令 $x=0$, 解得 $B=0$

即 $\dfrac{x^2+5}{(x-2)\,(x+1)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

有理分式：分母能因式分解，含二次式的高次幂，则拆成分子为一次式的项

$$\frac{x^2-2\,x+2}{(2+x^2)^2}=\frac{A\,x+B}{2+x^2}+\frac{C\,x+D}{(2+x^2)^2}.$$

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}\cdot\frac{\mathrm{x}^2\text{-}2\mathrm{x}+2}{(2+\mathrm{x}^2)^2}\mathrm{dx}$$

```
(dbm:17.) kill(all)
```

done

(dbm:18.) eq1: $\dfrac{x^2-2\,x+2}{(2+x^2)^2}$;

$$\frac{x^2.-2.\,x+2.}{(x^2.+2.)^2.}$$

(dbm:18.) eq2: $\frac{a\,x+b}{2+x^2}+\frac{c\,x+d}{(2+x^2)^2}$

$$\frac{a\,x+b}{x^2.+2.}+\frac{c\,x+d}{(x^2.+2.)^2.}$$

(dbm:18.) solve(eq1 − eq2 = 0, $\left[a=-\frac{2}{3}, b, c, d\right]$)

$$\left[\left[a=-\left(\frac{2.}{3.}\right)=\%R26, b=\%R28, c=\%R27, d=-(a\,x^3.)+(1.-\%R28)\,x^2.+(-(2.\,a)-\%R27-2.)\,x-2.\%R28+2.\right]\right]$$

```
(dbm:18.) eq1: 'frac(x^2 - 2*x + 2, (2 + x^2)^2);
```

$$\mathrm{frac}(x^2.-2.\,x+2., (x^2.+2.)^2.)$$

```
(dbm:18.) eq2: 'frac(ax + b, 2 + x^2) + 'frac(cx + d, (2 + x^2)^2);
```

$$\mathrm{frac}(d+\mathrm{cx}, (x^2.+2.)^2.)+\mathrm{frac}(b+\mathrm{ax}, x^2.+2.)$$

```
(dbm:18.) sol: linsolve([eq1 - eq2], [a, b, c, d]);
```

[]

♡含 $\sqrt{\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}}$的积分,命 $\sqrt{\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}}$=t.

原式 $=\int_2^8\sqrt{\frac{\text{x-2}}{\text{3x}}}\,\text{dx} = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{12\text{t}^2}{(3\text{t}^2\text{-1})^2}\,\text{dt}.$

$\frac{t^2}{(3\,t^2-1)^2}=\frac{t^2}{(\sqrt{3}\,t-1)^2\,(1+\sqrt{3}\,t)^2}$是有理分式,分母能因式分解$\frac{t^2}{(3\,t^2-1)^2}=\frac{A}{\sqrt{3}\,t-1}+\frac{B}{(\sqrt{3}\,t-1)^2}+\frac{C}{\sqrt{3}\,t+1}+\frac{D}{(\sqrt{3}\,t+1)^2}$.

```
(dbm:3.) f(a):=sqrt((a-2)/(3*a))
```

$$f(a):=\sqrt{\frac{a-2.}{3.\,a}}$$

(dbm:3.) $\mathrm{jf}(a):=\mathrm{integrate}(f(a), a, 2, 8)$

$$\mathrm{jf}(a):=\mathrm{integrate}(f(a), a, 2., 8.)$$

(dbm:3.) jf(a)

$$\frac{-\log\left(\sqrt{2.}\,\sqrt{6.}+4.\right)+\log\left(\sqrt{2.}\,\sqrt{6.}-4.\right)-\log\left(-1.\right)+2.^{\frac{3.}{2.}}\,\sqrt{6.}}{\sqrt{3.}}$$

(dbm:3.) zk(a):=integrate(f(a),a)

$$\mathrm{zk}(a):=\mathrm{integrate}(f(a),a)$$

(dbm:3.) expand(zk(a))

$$\frac{\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}\,a}{\sqrt{3.}}-\frac{\log\left(\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}+1.\right)}{\sqrt{3.}}+\frac{\log\left(\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

(dbm:3.) factor(zk(a))

$$\frac{\sqrt{\frac{a-2.}{a}}\,a-\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}+1.\right)+\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

(dbm:3.) fullratsimp(zk(a))

$$\frac{\sqrt{\frac{a-2.}{a}}\,a-\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}+1.\right)+\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

```
(dbm:3.) \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{12t^2}{\left(3t^2-1\right)^2} \
         mathrm{d}t.

incorrect syntax: { is not an infix operator

\int_0^{\frac{
               ^
```

(dbm:3.) $\mathrm{hy}(t):=\frac{12\,t^2}{(3\,t^2-1)^2}$

$$\mathrm{hy}(t):=\frac{12.\,t^{2}.}{(3.\,t^{2}.-1.)^{2}.}$$

(dbm:3.) $\mathrm{jf}(t):=\mathrm{integrate}(\mathrm{hy}(t),t,0,1/2)$

$$\mathrm{jf}(t):=\mathrm{integrate}\left(\mathrm{hy}(t),t,0.,\frac{1.}{2.}\right)$$

(dbm:3.) $\mathrm{fullratsimp}(\mathrm{jf}(t))$

$$\frac{\sqrt{3.}\log(7.-4.\sqrt{3.})+12.}{3.}$$

(dbm:3.) $\mathrm{trace}(\mathrm{hy}(t))$

`trace: argument is apparently not a function or operator:` $\mathrm{hy}(t)$

[]

(dbm:3.) `step(hy(t))`

```
incorrect syntax: ; is an unknown keyword in a do statement.

step(hy(t));

           ^
```

求系数A,B,C,D.(1) 两侧同乘$(\sqrt{3}\,t-1)^2\,(\sqrt{3}\,t+1)^2$,得
$t^2=A\cdot(\sqrt{3}\,t-1)\,(\sqrt{3}\,t+1)^2+B\cdot(\sqrt{3}\,t+1)^2+C\cdot(\sqrt{3}\,t+1)\,(\sqrt{3}\,t-1)^2+D\cdot(\sqrt{3}\,t-1)^2$.

使用留数法：令$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可得 $B=\frac{1}{12}$;令$t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可得$D=\frac{1}{12}$. 使用赋值法：分别令$t=0$和$t=\sqrt{3}$,并代入B和D的值，解得：$A=\frac{1}{12},C=-\frac{1}{12}$

5.2 arccos的区间

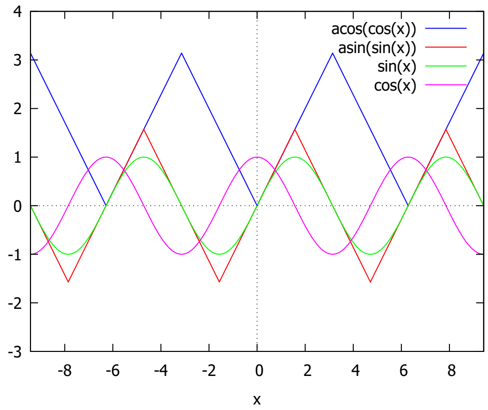
(dbm:5) $\mathrm{ac}(x):=\mathrm{acos}(\cos(x))$

$\mathrm{as}(x):=\mathrm{asin}(\sin(x))$

$$\mathrm{ac}(x):=\arccos(\cos(x))$$

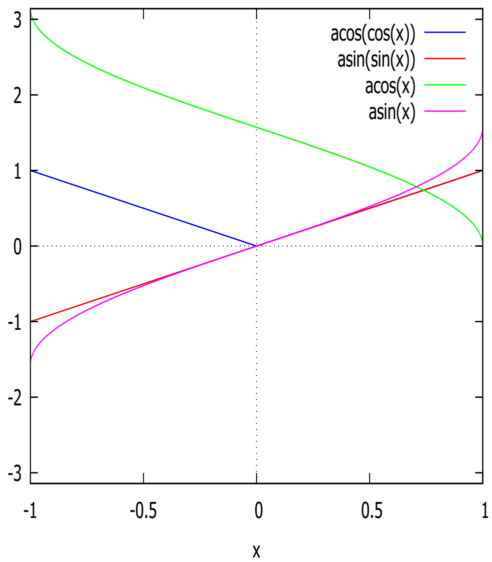
(dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x),\mathrm{as}(x),\sin(x),\cos(x)],[x,\frac{7\,\pi}{2},4\,\pi],[y,-2,3])$

⟨image|⟨tuple|⟨raw-data⟩|pdf⟩|0.618par|||⟩true (dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x), \mathrm{as}(x), \sin(x), \cos(x)], [x, -3\,\pi, 3\,\pi], [y, -3, 4])$



true

(dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x), \mathrm{as}(x), \mathrm{acos}(x), \mathrm{asin}(x)], [x, -1, 1], [y, -\pi, \pi])$



true

(dbm:5) $\mathrm{as}(x) := \mathrm{asin}(\sin(x));$

$$\mathrm{as}(x) := \arcsin\left(\sin\left(x\right)\right)$$

(dbm:5)

arcsin 的性质:$(\arcsin(\sin x)) = (2\,k-1)\,\pi - x, \arcsin(\sin(x)) = x - 2\,k\,\pi$
arcsin x 的值域是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x)$等价于在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 中均到一点 x_0 使得$\sin x_0 = \sin x$
对$\frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{kx} \leq x \leq \frac{3\,\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \pi)$ 最$\arcsin(\sin(x)) = (2\,k+1)\,\pi - x$对$-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k \in \mathbb{Z})$,有$\arcsin(\sin(x)) = x - 2\,k\,\pi$特

别对: $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\arcsin(\sin x)=x$.
类似的 $\arccos x$ 的值域是$[0,\pi]$对$-\pi+2k\pi\le x\le 2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ 有$\arccos(\cos(x))=2k\pi-x$ 对 $2k\pi\le x\le\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$有
$\arccos(\cos(x))=x-2\pi$(x特别的, 对于 $x\in[0,\pi]$ 对于 $x\in[0,\pi]$的, 对于 $x\in[0,\pi]$的, 有
$\arccos(\cos(x))=2k\pi-x$ 对 $2k\pi\le x\le\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$有

二重积分$\int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{8\pi}{3}}\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}}^{\cos x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 对应的积分区域为$D=\left\{(x,y)|\frac{5\pi}{2}\le x\le\frac{8}{3}\pi,-\frac{1}{2}\le y\le\cos x\right\}$ 如图所示， 是$y=-\frac{1}{2}$ 上方，$y=\cos x$下方，$x=\frac{5\pi}{2}$右侧的区域。交换积分顺序，将区域D 写为$a\le y\le b,\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)$的形式： 求$x$ 右边界.在边界上 $y=\cos x$.因为 $\frac{5\pi}{2}\le x\le\frac{8}{3}\pi$,故$\arccos(\cos(x))=x-2\pi$.即$\boldsymbol{x=\arccos(y)+2\pi}$.则

$$D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{5\pi}{2}\le x\le\arccos(y)+2\pi,\ -\frac{1}{2}\le y\le 0\right\}$$

++

因为B可以由A经行变换得到，$B=$(矩阵左乘A)

已知A 为$n\,(n\ge 2)$阶可逆矩阵，为书写简洁，不妨设A 为三阶矩阵。

根据题设：将A的第 1 行加到第 2 行得矩阵B,则$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=E_{21}(1)\,A$.

因此 $B^{-1}=A^{-1}E_{21}(1)^{-1}$,其中$E_2 1(1)$ 为 倍加初等矩阵。

利用倍加初等矩阵的逆矩阵，有$E_2 1(1)^{-1}=E_{21}(-1)$,则$B^-1=A^{-1}E_{21}(-1)$.

根据定义，有$A^-1=\frac{A^*}{|A|},B^{-1}=\frac{B^*}{|B|}$,从而$\frac{B^*}{|B|}=\frac{A^*}{|A|}E_{21}(-1)$.

因为将一行（或列）的k倍加到另一行（或列),行列式的值不变，则$|B|=|A|$.

故$B^*=A^*E_{21}(-1)$,即将A^*的第 2 列从第 1 列中减去得B^*,答案选 D

[分析]因为所求行列式中含 $\beta_1+\beta_2$,想到$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$. 试着将题设转化成等式右边的两项。

6 方程组同解

[2005年真题] 已知齐次线性方程组

$$(1)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, 和(11)\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases} \end{cases} 同解,$$

则$a+b+c=$

$A.3$ $B.5$ C. 3或 5 D. 2或 5

[分析]方程组同解，则 1.线性无关解的个数相同⇒系数矩阵的秩相同；2.基础解系相同 [解答] 令方程组(1)的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

令方程组(II)的系数矩阵为$B=\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{bmatrix}$中十印如同知则的$(x)=(x,y)=(x,y)$

由方程组同解，则$n-r(B)=$方程 (II)线性无关解的个数$=$方程 (II)线性无关解的个数$=n-r(A)$,即$r(B)=r(A)$. 因 为 $r(B)\leq 2$,则 $r(A)\leq 2$,即 $|A|=0$,有

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = 2-a=0, 则 a=2.$$

代入$a=2$,则可以求方程组(1)的解。对A 高斯消元: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则令x_1, x_2为独立未知量，x_3为自由未知量。

令$x_3=1$,解得$x_2=-1, x_1=-1$.

则方程组(1)的通解是$k(-1,-1,1)^\top$, k 为任意常数。

以下由方程组(II)的通解也是$k(-1,-1,1)^\top$,求出b 和c.

注意有两部分:

1. $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是方程组 (II)的解；2.方程组 (II) 只有 1 个线性无关解，即$r(B)=2$.

第1部分:

因为$(-1,\ -1,\ 1)^{\top}$应当是方程组 (II)的解， 代入则得到 b, c 的方程组: $\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -2-b^2+c+1=0 \end{cases}$,解得$b=1,c=2$ 或$b=0,c=1$.

第2部分:

情况一：当$b=0,c=1$,方程组(ll)为$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \end{cases}$ 有 $r(B)=1$,从而(I)与(II)不同解，故$b=0,c=1$ 应舍去。情况二：当$b=1,c=2$时，方程组(|l)为$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 有$r(B)=2$,从而方程组 (II) 只有 1 个线性无关解，即通解是$k(-1,-1,1)^{\top}$, k为任意常数，(I) 与 (II) 同解。

故$a+b+c=2+1+2=5$.选B

7 函数极限

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则下列选项哪个是律误的?

A $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能为 1

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能小于 1

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能大于 1

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$时,$\dfrac{0}{0}$为不定式,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能存在,可能不存在。故 D正确。

令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,当$a\neq 0$时,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_{n\to\infty}}{\lim_{n\to\infty} x_n}=\dfrac{a}{a}=1$故 A正确。

令$x_n=a^n$, $(|a|<1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a<1$,故 B正确。

【证明 C错误】

反证:若$\left|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$,由保号性,存在 N 使得当 $n>N$时,$\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$,故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$,极限不存在,与条件矛盾。

$\lim_{x \to 0^-} - \dfrac{\int_0^1 \sqrt{2\text{-}2\cos\ (2xt)}\ dt}{x}$

则左导数 $\varphi'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} - \dfrac{\int_0^1 \sqrt{2 - 2\cos(2\,\mathrm{xt})}\,\mathrm{d}t}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} - \dfrac{\int_0^{2x} \sqrt{2 - 2\cos u}\,\mathrm{d}u}{2\,x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{2 - 2\cos(2\,x)}}{4\,x} = \lim\limits_{x \to 0^-} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{4\sin^2 x}}{4\,x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} - \dfrac{|\sin x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

其中倒数第一个等号使用了$\sin x$的等价无穷小。

♡[2022年真题] 当$x \to 0$ 时，$\alpha(x), \beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

(1)若$\alpha(x) \sim \beta(x)$,则$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$;

(2)若$\alpha^2(x) \sim \beta^2(x)$,则$\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(3)若$\alpha(x) \sim \beta(x)$,则$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$;

(4)若$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x))$,则$\alpha(x) \sim \beta(x)$

1. $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1, \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = 1 \times 1 = 1$

2. $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = 1 \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = \pm 1$

3 $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1 \quad \dfrac{a - \beta}{\alpha} = 1 - \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$ yes

4 $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0 \qquad 1 - \dfrac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 0 \quad \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$

♡wrong usually

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x 2\,t^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t}} - 1\right) - t\,\mathrm{d}t}{\int_1^{x^2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) - x}{2\,x \cdot \arcsin \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) - x}{2\,x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[2\,x^2\left(\frac{1}{2\,x}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\,x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{4}+o(1)-x\right]\\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

7.1 复合函数]

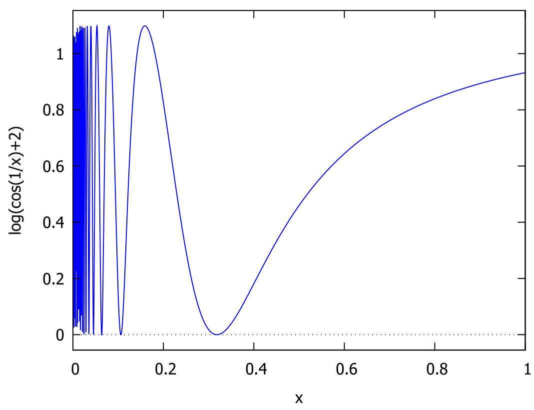
因为$\ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2\right]$是复合函数，故利用复合函数的单调性质，“同增异减”。

[解答]

又因为$x+2$单调增加，故$\cos(1)$

因为$\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上单调减少， 其值域范围是$(0,1)$，且$\cos\, x$在$(0,1)$上单调减少， 故$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$在$(1,+\infty)$上单调增加.

$+2$ 单调增加；因为 $\ln\, x$ 单调增加，故$\ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2\right]$单调增加。



true

8 数列极限

下列条件中有几个是$\lim\limits_{n} \to \infty\, x_n = A$ 的充分条件，几个是必要条件?

$$
\begin{aligned}
&(1)\ *lim_{n\to\infty}\ x_{2n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{2n-1} = A.\\
&(2)\ *lim_{n\to\infty}\ x_{3n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{3n+1} = *lim_{n\to\infty}\ x_{3n-1} = A.\\
&(3)\ *lim_{n\to\infty}\ x_{4n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-1} = A.\\
&(4) *lim_{n\to\infty}\ x_{4n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-1} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-2} = A.
\end{aligned}
$$

(1)(2)是充要条件,包含了全部子数列, 命题 (4)中,未出现的子数列 $\{x_{4n-3}\}$可能发散,故原数列可能发散。故不是充分条件。

8.1　极限存在证明　设 $f(x)$是区间$[0,\ +\infty)$上单调减少且非负的连续函数， $a_n = \sum_k =1^n f(k) - \int_1^n f(x)\ \mathrm{d}x (n=1,2,\cdots)$ 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。 [解析] 1.证明极限存在，想到用单调有界定理，需要证明 $\{x_n\}$ 单调且有界。 2.证明数列$\{x_n\}$的单调性，需证明对于任意n,都有$x_n \ge x_{n+1}$或$x_n \le x_{n+1}$. 3. $f(x)$ 单调减，则有 $f(k+1) \le \int_k^k +1\ f(x)\mathrm{d}x \le f(k)$

9　连续与可导

设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 1, & x=\pi\\ -1, & \pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 则

$A.\ x=\pi$ 是函数 $F(x)$的跳跃间断点
$A.\ x=\pi$ 是函数 $F(x)$的跳跃间断点

$B.$　$x=\pi$ 是函数 $F(x)$的可去间断点
$C.$　$F(x)$ 在 $x=\pi$处连续但不可导
$D.$　$F(x)$ 在 $x=\pi$处可导

[分析] $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ 是变上限积分，利用变上限积分的性质判断。 [知个]

[解

判断连续性：因为 $f(x)$ 除有限个第一类间断点 $(x=\pi)$ 外处处连续，故 $f(x)$ 可积。则 $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ 为连续函数

判断可导性：变上限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某一点的左右导数等于被积函数 $f(x)$ 在这一点的左右极限。 由于$\lim_x \to \pi^-\ f(x)=\cos\pi=-1$　$*l\,i\,m_{x\to\pi^+}\ f(x)=-1$,即$\lim_x \to \pi^-\ f(x)=\lim_{x\to\pi^+} f(x)$,故$\boldsymbol{F'_{\pi^-1}(x)=F'_{\pi^+}(x)}$. 左右导数相等，故$F(x)$在$x=\pi$处可导。 综上，$F(x)$在$x=\pi$处连续可导，故选$D$

10 |A|

[2013年真题]$A=(\ a_{ij}\ )$是三阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式A_{ij}为$a_i j$的代数余子式，若$a_i j+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$,则 $|A|=$

$\mathrm{a_{ij}}+A_{\mathrm{ij}}=O,\mathrm{a_{ij}}=-A_{\mathrm{ij}},|A|=0,-1;A\neq O;|A|=-1.$

10.1 克拉默法则

设 n 元线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$,其中

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 4 & 4 & 1 & & & \\ & 4 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 4 & 4 & 1 \\ & & & & 4 & 4 \end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

已知行列式$|A|=(n+1)\,2^n$,则

A.方程组有唯一解,且 $x_1=\dfrac{n}{2\,(n+1)}$

B.方程组有一解,且 $x_1=\dfrac{n}{n+1}$

C.方程组有无穷解,且 $\mathbf{x}=k(1,0,0,...,0)^{\top}$,其中 k为任意常数

D.方程组有无穷解,且 $\mathbf{x}=k(0,1,0,...,0)^{\top}$,其中 k为任意常数

由克拉默法则,$|A|\neq 0$时,n元线性方程组有唯一解。
由题这$|A|=(n+1)\cdot 2^n$,故方程组有唯−解。
又由ke拉默法则,将 A的第一列替换为 $\mathbf{b}$,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 4 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$x_1=\dfrac{|a|}{|A|}$

令n 阶行列式 $D_n=|A|=(n+1)\cdot 2^n$,则按第 1列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 1 & & \\ 0 & 4 & 4 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 4 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot D_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

则$\mathrm{x_1}=\dfrac{\mathrm{n\cdot 2^{n-1}}}{\mathrm{(n+1)\cdot 2^n}}=\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{2(n+1)}}$

11 方程实根数

[2011年真题]设k为参数，则关于方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数，说法正确的是:

(注：考试中本题型为证明题，选择正确后需要对比详细过程)

A. 若$k>0$,则方程有 2 个实根；若$k\leq 0$,则方程有 1 个实根

B. 若$k\geq 0$,则方程有 1 个实根；若$k<0$,则方程有 2 个实根

C. 若$k>1$,则方程有 3 个实根；若$k\leq 1$,则方程有 1 个实根

D. 若$k\geq 1$,则方程有 1 个实根；若$k<1$,则方程有 3 个实根

[分析]

判定方程根的个数，一般通过求导判断函数形态，利用单调性和介值定理判定。题目中函数的单调性受到k的影响。此类问题有两种解法：1.分情况讨论：对于不同的k,判断单调区间的情况；2.分离参数法：先将方程化为$g(x)=k$的形式，再讨论$g(x)$的形态。如果可以分离参数，则尝试分离参数法。如果不能分离参数，或分离参数后$g(x)$的导数不易分析，则使用分情况讨论的方法。本题参数可以分离，得到$g(x)=k$的形式，但$g'(x)$不容易分析，故建议分情况讨论。

11.1 分情况讨论

$f(x)$的无定义点,$+f'(x)$的无定义点$+f'(x)=0$的点(驻点)

$f(x)$是否为奇函数,偶函数,对称区间,$f(0)=0$?

实数解$\rightarrow x=g(k)\rightarrow$划分单调区间$\rightarrow$

通过单调区间判断函数零点,

先考察各单调区间的端点是否为零点,再考察每个区间内部的零点:

11.2 参数分离

$g(x)=k$ 的根个数$\rightarrow$对$g(x)$求导$\rightarrow$大致绘制$g(x)$的图像(主要$g(x)$在区间的单调情况)

和$g(x)_{\min}$和$g(x)_{\max}$或者$\lim_{x\rightarrow ?} g(x)=$

$\lim_{x\rightarrow 2} f(x)=5$

$\sum_{i=1}^{n} \lim_{x\rightarrow x\rightarrow\infty} \lim$

12 绝对值|X|

判断绝对值函数在一点是否可导， 有两个重要推论， 做选择题时可以直接应用:

1. $\varphi(x_0)=0$ 且 $\varphi'(x_0)\neq 0\Leftrightarrow x_0$ 是$|\varphi(x)|$的不可导点;

2. $f(x)=|\varphi(x)|\ g(x)$, $|\varphi(x)|$在$x=x_0$处不可导但$\varphi(x)$可导， 且$g(x)$在$x=x_0$处连续, 则综上， 令$\varphi(x)=x^2-1$, $g(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)\,(x-3)}$,找$f(x)$的不可导点， 即 1.找$\varphi(x)=0$, $\varphi'(x)\neq 0$且$g(x)\neq 0$的点。2.找$g(x)=0$, $g'(x)\neq 0$且$\varphi(x)\neq 0$的点。$f(x)$在$x=x_0$处可导的充要条件是$g(x_0)=0$.

```
loadfile: loading C:\Program Files\XmacsLabs\MoganResearch-1.2.9.5\plugins\
maxima\lisp\texmacs-maxima.lisp.
Loading C:/Users/admin/maxima/maxima-init.mac


Maxima 5.47.0 https://maxima.sourceforge.io
using Lisp SBCL 2.3.2
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

(%i12) `h:sin(x);`

(%o12) $\sin\left(x\right)$

(%i13) `h_abs:abs(h);`

(%o13) $\left|\sin\left(x\right)\right|$

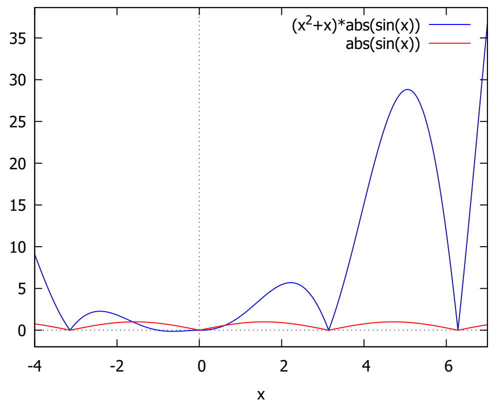
(%i20) $g\colon x^2+x$

(%o21) x^2+x

(%i22) `f:g*h_abs;`

(%o22) $\left(x^2+x\right)\left|\sin\left(x\right)\right|$

(%i28) `tm_plot2d([f,h_abs],[x,-4,7])`



(%o28) **true**

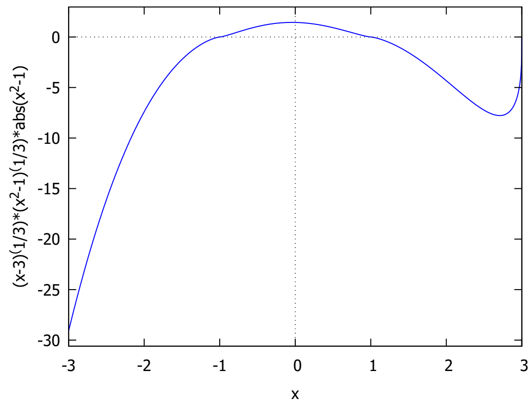
(dbm:4) `kill(all)`

done

(dbm:4) $f\colon \mathrm{abs}(x^2-1)\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)\left(x-3\right)}$

$\left(x-3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\left|x^2-1\right|$

(dbm:4) $\mathrm{tm\_plot2}d(f,[x,-3,3])$

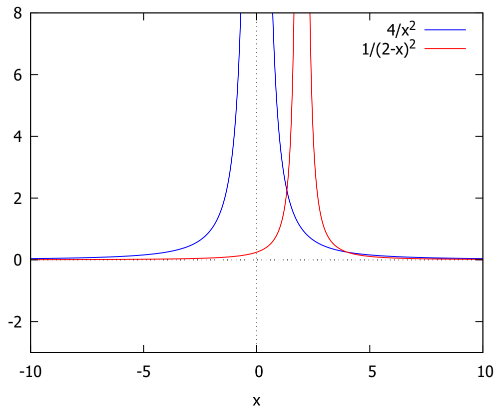


true

(dbm:4)

13 中值定理

设 $f(x)$在[0,2]上连续，在(0,2) 内存在二阶导数，并设 $f(0)=3, f(2)=\dfrac{3}{2}, \min\limits_{[0,2]} f(x)=1.$ 可以证明存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $f''(\xi)\leq c$, (c 为常数)求c 的最小值，使不等式对任意满足条件的$f(x)$ 都成立。



true

14 已知两个方程组的通解，求公共解。

则令通解相等，解关于常数k_1, k_2, l_1, l_2 的新方程组

[解答]

设η是方程组(I)与(II)的非零公共解，则

$\eta = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2.$

那么$k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 - l_1 \alpha_1 - l_2 \alpha_2 = 0$ 再代入题设给出的$\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$,由此得齐次方程组

(III) $(-k_2 + l_2 = 0$ $|k_2 - l_1 + l_2 = 0$对系数矩阵高斯消元.

$k_1 - l_1 = 0$

$$(\ k_2 - l_2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则令 $k_1 \cdot k_2 \cdot l_1 \cdot$ 为独立已知　$l_2 \cdot$ 为自由未知

令$l_2 = 1$,则$l_1 = 2, k_1 = 2, k_2 = 1$. 即通解为$h\,(2, 1, 2, 1)^{\top}, h$为任意常数。

则$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,h \\ h \\ 2\,h \\ h \end{bmatrix}.$

则方程组的公共解为$\eta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 = 2\,h\,\alpha_1 + h\,\alpha_2 = h\,(2\,\alpha_1 + \alpha_2) = h\,(-1, 1, 2, 1)^{\top}, h$为任意常数。

15　sinx与cosx

n项同类函数乘积，分母包含2^n,添起始项，来达到连锁消项的目的。

使用公式：$2\sin x \cos x = \sin 2\,x$

[解答] 令 $A = \cos(x) \cos(2\,x) \cdots \cos(2^n\,x).$

1.若$\sin x \neq 0$,添一项$\sin x$,则

$$\begin{aligned} &\sin(x)\,A \\ =&\sin(x) \cos(x) \cos(2\,x) \cdots \cos(2^n\,x) \\ =&\frac{1}{2} \sin(2\,x) \cos(2\,x) \cdots \cos(2^n\,x) \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2^2}\sin(4x)\cdots\cos(2^n x)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}x)$$

$$故A=\frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}.$$

$n\to\infty$时，$\sin(2^n+1x)$ 振荡但有界，即$-1\leq\sin(2^{n+1}x)\leq 1$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma^{n+1}}=0$,而$\sin x\neq 0$ 为常数

故 $\lim\limits_{n\to\infty}A=0$.

2.若$\sin x=0$,分两种情况，$x=2k\pi$ 或$x=(2k+1)\pi$,其中$k=0,1,2,\cdots$.

若$x=2k\pi$,

则$\lim A=\cos(2k\pi)\cos(2k\pi)\cdot\cdots\cdot\cos(2k\pi)=1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=1$.

$n\to\infty$

若$x=(2k+1)\pi$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}A=\cos(\pi)\cos(2k\pi)\cdot\cdots\cdot\cos(2k\pi)=(-1)\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=-1$.

$n\to\infty$

综上，极限存在，可能为 0,1 或-1.

16 微分方程

16.1 二阶，少y

【分析】

$y''-\frac{x+3}{x+1}y'=0$,可化为可分离变量的一阶微分方程,令 $t=y'$.

【解答答】

令 $t=y'$,有 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$.原方程化为 $t'-\frac{x+3}{x+1}t=0$,即$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x+3}{x+1}t$.

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x+3}{x+1}t$满足 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f(x)\,g(t)$的形式,是可分离变量的一阶微分方程。分离变量,两边积分求解。

16.2 $y(x)=u(x)g(x)$的二阶微分方程

[2016年真题]$_i$设$y(x)=u(x)\,e^x$是二阶微分方程$(2\,x-1)\,y'\prime-(2\,x+1)\,y'+2\,y=0$的解，已知$u\,(-1)=e, u(0)=-1$,已知 $y(1)=a\,e+\frac{b}{e}+c$,且a,b,c 为有理数， 求$a-b+c$.

[分析] 将$y(x)=u(x)\,e^x$代入微分方程，得到关于$u(x)$的关系式，由此求出$u(x)$的表达式。

[解答] 由$y(x)=u(x)\,e^x$,得$y'(x)=u'(x)\,e^x+u(x)\,e^x=[u'(x)+u(x)]\,e^x$.

♡得到 $(2\,x-1)\,u''(x)+(2\,x-3)\,u'(x)=0$ 为不显含u 的微分方程,

令$t=u'(x)$,有$u''(x)=\frac{\mathrm{d}u'(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$.

原方程化为$(2\,x-1)\,t'+(2\,x-3)\,t=0$.

化为标准形式，除以t'的系数$(2\,x-1)$得$t'+\frac{2\,x-3}{2\,x-1}t=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{2\,x-3}{2\,x-1}t$

16.3 一个简单的倒带换

[2007年真题]令微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解为$y(x)$,求$y(4)$的值

[分析] 不显含y的微分方程，令$t=y'(x)$,将y的二阶微分方程转化为t的一阶微分方程。

[解答] 令 $t=y'(x)$, 有 $y''(x)=\frac{\mathrm{d}y'(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$. 原 方 程 变 为 $t'(x+t^2)=t$, 即 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x+t^2)=t$.

此时将t作为未知函数， x作为自变量， 化为标准形式为$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{(x+t^2)}$, 不便于求解。故将$x$作为未知函数， 将上式转化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{t}+t$, 即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{x}{t}=t$. 令$x'+p(t)\,x=q(t)$, 其中$p(t)=-\frac{1}{t}, q(t)=t$,代入一阶线性微分方程的通解公式：[1]

1. $\mathrm{x=e^{-\int p(t)dt}*\left|\int q(t)*e^{\int p(t)dt}dt+C_1\right|}$

16.4 高阶K重根

k重复数根：通解中的$2k$项

$e^{\alpha} x[(A_1+A_2 x+\cdots+A_k x^{k-1})\cos\beta x+(B_1+B_2 x+\cdots+B_k x^{k-1})\sin\beta x]$

若$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\beta>0$为特征方程

$r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1} r+a_n=0$的$k$重复数根,

则对应的齐次方程通解中的 $2k$项

$e^{\alpha} x[(A_1+A_2 x\ +\cdots+A_k x^{k-1})\cos\beta x+(B_1+B_2 x+\cdots+B_k x^{k-1})\sin\beta x]$

求高阶齐次方程的通解：将n个特征根对应的项相加得到通解

求n阶常系数线性齐次微分方程$y^(n)+a_1(x) y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x) y'+a_n(x) y=0$的通解:

1 写出特征方程$r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1} r+a_n=0$,求出其特征根$r_i(i=1,2,...,n)$

2 对每一个根，判断对应形式： 单重实根r,对应一项$C e^{\alpha} x$;

♡k重实根r,对应k项$(C_1+C_2 x+\cdots+C_k x^{k-1}) e^{\alpha x}$;

♡单重复数根 $r_1.2=\alpha\pm\beta i,\beta>0$,对应两项 $e^{\alpha} x(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

♡k重复数根$r_1.2=\alpha\pm\beta i,\beta>0$,对应$2k$项$e^{\alpha} x[(A_1+A_2 x+\cdots+A_k x^{k-1})\cos\beta x+(B_1+B_2 x+\cdots+B_k x^{k-1})\sin\beta x]$.

例 1. K重

已知以 y=(C_1x+C_2)cos 2x+(C_3x+C_4)sin 2x, (C_1,C_2,C_3,C_4为任意常数)为通解的微分方程是 y''''+ay'''+by''+cy'+dy=0,求 a+b+c+d.

3 将n个根对应的所有项相加便得通解，其中C, C_i, A_i, B_i为任意常数。

17 定积分应用

17.1 旋转体体积，非y轴，$V=V_1-V_2$

17.2 积分比大小

$\mathrm{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+2\sin x)\cot x\,\mathrm{d}x, \mathrm{I}_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\cot x\,\mathrm{d}x, \mathrm{I}_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$,则

$x\in(0,+\infty)$时有$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

对$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$有

(1) $0<\sin x<x$ 即 $\frac{\sin x}{1+x}<\frac{\sin x}{1+\sin x}<\ln(1+\sin x)<\ln(1+2\sin x)$. 又因为在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上

$\sin x>0,\cos x>0$则 $\frac{\sin x}{1+x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}<\ln(1+2\sin x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$,

即$\frac{\cos x}{1+x}<\ln(1+2\sin x)\cot x$

(2)在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上$\cos x>\sin x$,所以$\ln(1+2\sin x)<2\sin x<2\cos x$,

即$\ln(1+2\sin x)\cot x<2\cos x\cot x$.

根据积分的保序性,有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+2\sin x)\cot x\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\cot x\,\mathrm{d}x,$$

即$I_3<I_1<I_2$.

18 重积分

[2003年真题 设$f(x)=g(x)=\begin{cases}3, & 若\ 0\leq x\leq 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 而D 表示全平面，则$\iint_D f(x)\,g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

[分析] 由于$f(x)$和$g(x)$为分段函数，所以被积函数$f(x)\,g(y-x)$为分块函数，将积分区域按照被积函数拆分，分别积分。

[解答] 又在$0\leq x\leq 1$时$f(x)=3$;仅在$0\leq y-x\leq 1$时$g(y-x)=3$.则仅当$0\leq x\leq 1,0\leq y-x\leq 1$时，被积函数不为0. 令此区域为$D_1$,则$D_1=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1,0\leq y-x\leq 1\}=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1,x\leq y\leq 1+x\}$. ‖

有$f(x)\,g(y-x)=\begin{cases}3\cdot 3, & (x,y)\in D_1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

18.1 分段区间

令

$$A = \iint_D \max\left(\frac{1}{x^2\,y+2\,x},\frac{1}{3\,x}\right)$$

d$x$dy,其中$D=\{(x,y)|\,1\le x\le 2,0\le y\le 1\}$.已知$A=a+b\ln\,2+c\ln\,3$,其中$a,b,c$

为有理数，求$a+b+c$.

[分析] 被积函数中 $\max\left(\frac{1}{x^2\,y+2\,x},\frac{1}{3\,x}\right)$是分块函数，先将积分区域拆分，去掉 max 符号。[解答]

被积函数在区域D 的分界线为$\frac{1}{x^2\,y+2\,x}=\frac{1}{3\,x}$, 即$y=\frac{1}{x}$. 将$D$拆分为$D_1\cup D_2$. 如图所示。$y=\frac{1}{x}$ 与$x=2$ 相交于$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,与 $y=1$ 相交于

(1,1).

$D_1=\left\{(x,y)|\,1\le x\le 2,0\le y\le 1,y\ge\frac{1}{x}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)|\,1\le x\le 2,0\le y\le 1,0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$

区域D_1中 $\max\left(\frac{1}{x^2\,y+2\,x},\frac{1}{3\,x}\right)=\frac{1}{3\,x}$, D_2中 $\max\left(\frac{1}{x^2\,y+2\,x},\frac{1}{3\,x}\right)=\frac{1}{x^2\,y+2\,x}$.

18.2 区间相同，二重积分保序性

已知$f(x,y)=x+y,g(x,y)=x-y$.区域$D=\{0\le y\le 3,h(y)\le x\le h(y)+1\}$,其中 $h(x)$ 为某函数。以下选项正确的是:

A.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma>$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

B.可能有⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

C.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma<$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+3$

D.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

在积分区域D上有$y\geq 0$,故$f(x,y)\geq g(x,y)$.

$f(x,y)=x+y$ 和$g(x,y)=x-y$ 在积分区域D 上连续，且不恒相等，

所以$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}\sigma>\iint_D g(x,y)\ \mathrm{d}\sigma$

综上选A.

eg二重积分保序性:$f(x,y)\geq g(x,y)\Rightarrow\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

若在区域D内$f(x,y)\geq g(x,y)$,则$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

【证明】

令$h(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$.则有$h(x,y)\geq 0$,则$\iint_D f(x,y)-g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D h(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq 0$.

即$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

2005年真题

$I_3=\iint_D\cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$则

$A.I_3>I_2>I_1$♡

B. $I_1>I_2>I_3$

$\mathbb{C}.I_2>I_1>I_3$

$D.I_3>I_1>I_2$

18.3 二重积分存在

♡设二元函数f(x,y)=$xy^{\frac{3}{2}}\ln(x^4+y^6)$,则$\lim_{(x,y)\to(0,0)}$f(x,y)=

[分析]二重极限存在，需证明点(x,y)以 任何方式 趋于点(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都无限趋近于同一常数A. |.运用$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leq 1$,来证明对任何$(x,y)$,不等式都成立；

常用方法： 2. 夹逼定理； 3. 将重极限转化为一元函数极限。 这里用 1,2, 3.

[解答] 由$\left|\frac{2x^2y^3}{x^4+y^6}\right|\leq 1$,有$|x^2y^3|\leq\underline{\frac{x^4+y^6}{2}}$,则

$$0\leq\left|xy^{\frac{3}{2}}\ln(x^4+y^6)\right|\leq\sqrt{\frac{x^4+y^6}{2}}\left|\ln(x^4+y^6)\right|.$$

令$t=x^4+y^6$,则$(x,y)\to(0,0)$时，$t\to 0^+$,有

$0 \le \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{\frac{t}{2}} |\ln t| = 0,$

最后一个等式用了$\lim\limits_{x} \to 0^+ x^{\delta}(\ln x)^k = 0$, (常数 $\delta > 0, k > 0$).

故由夹逼定理$\lim\limits_{\prime} (x,y) \to (0,0)$ $|f(x,y)|$ =0,即$\lim\limits_{(} x,y) \to (0,0)' f(x,y) = 0$

♡

(分析]判断二重极限是否存在，关键在于构建不同路径，看是否存在：1.两种不同路径，点(x,y) 沿不同路径趋向于点 (x_0,y_0)时，$f(x,y)$ 趋于 不同常数， 2.某一路径，点(x,y)沿此路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限不存在， 若1或2成立，则极限不存在。

构建路径的常用方法:

1. 常见函数：$f(x,y) = \frac{x^n y^m}{x^{2n} + y^{2m}}$, 令$y^m = k x^n$, 则$k$不同时， 极限不同。 2. 坐标轴方向：令$y = y_0$, 或$x = x_0$, 即沿平行于$x$轴或$y$轴的方向趋于$(x_0,y_0)$, 得到一个极限； 3.归零：分子分母有相同项，则构建路径使分子分母上的其他项为0； 4.分子低阶：构建路径使分母只余一项，如x^k, 选择k使分子为x^k的低阶无穷小，则极限为∞

这里用 4 即可.

19 积分表

$$\int x^n \ln(x)\; d x = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\int \text{ln (sin x) dx=xln (sin x)-ln (cos x)+C}$$

平 方 根 函 数 积 分 ：

- $\int \sqrt{a^2 - x^2}\; d x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\; d x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

2.立方根函数积分:

$$\int \sqrt[3]{x}\ d\,x=\frac{3}{4}x^{4/3}+C$$

3.其他根号函数积分:

$$\bullet \int \sqrt{x^2+a^2}\ d\,x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

$\bullet \displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\ d\,x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

4. 含有根号的三角函数积分:

$$\bullet \int \sqrt{1-\sin^2 x}\ d\,x=\int \cos x\ d\,x=\sin x+C$$

$$\bullet \int \sqrt{1-\cos^2 x}\ d\,x=\int \sin x\ d\,x=-\cos x+C$$

5. 含有根号和指数的函数积分:

$\bullet \displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,d\,x$ (这类积分通常需要换元法)

6. 含有根号和有理函数的积分:

$\bullet \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,d\,x$ (可能需要分部积分法)

1.有理函数积分(部分分式分解):

$$\int \frac{1}{(x-a)\,(x-b)}\,d\,x=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$$

2.根式函数积分:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,d\,x=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

3.指数函数与三角函数的积分:

$$\int e^{ax}\sin b\,x\ \ d\,x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin b\,x-b\cos b\,x)+C$$

$$\int e^{ax}\cos b\,x\ \ d\,x=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos b\,x+b\sin b\,x)+C$$

三角函数的分式，按顺序思考:

1.凑微分,

2.化简成一次式，或可以直接积分/凑微分积分的形式,

3.拆项,

4.和差化积,

5.万能代换。

不能凑微分，拆项或和差化积，所以用万能代换：命$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$.

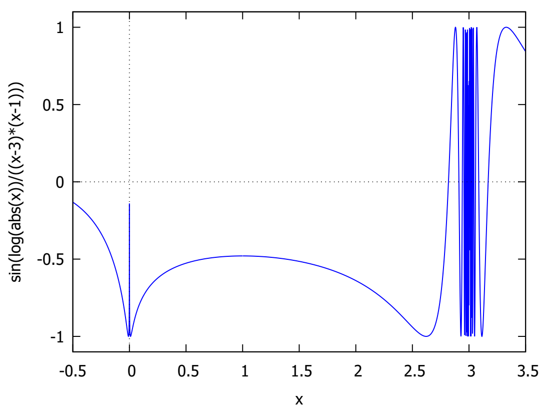
[解答]原式$=\int\frac{\mathrm{d}}{x}\sin\,(2\,x)+2\sin\,x=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\,(\cos x+1)}$

命$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$. 则有$\sin x=\frac{2\,t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(%i11) $\mathrm{ds}:\sin\left(\frac{\log(\mathrm{abs}(x))}{(x-1)\,(x-3)}\right)$

(%o11) $\sin\left(\frac{\log\,(|x|)}{(x-3)\,(x-1)}\right)$

(%i12) $\mathrm{tm\_plot2}d(\mathrm{ds},[x,-0.5,3.5])$



(%o12) **true**