1 2016

\# 16

(3)反常积分 $1\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x, 2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$的敛散性为(

(B)1收 敛, 2 发 散.

因为$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\big|_{-\infty}^{0}=-(0-1)=1$

$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty$

$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}|_{-\infty}^{\circ}$=1,收敛

(7) 设A, B是可逆矩阵, 且A与 B相似, 则下列结论错误的是(

$A+A^{\mathrm{T}}$ 与$B+B^{\mathrm{T}}$相似

$P^{-1}(A+A^{\top})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{\top}P, \quad P^{-1}AP=B,$

而$P^{-1}A^{\mathrm{T}}P$未 必 等 于B^{T}

(11) 以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$和$y=x^2$为特解的一阶非齐次线性微分方程为

由线性微分方程解的结构得 $y_2-y_1=\mathrm{e}^x$为 $y'+p(x)y=0$的解 , 代人得 $p(x)=-1,$

将 $y_2=x^2$ 代人 $y'-y=q(x)$ 得 $q(x)=2x-x^2$

(13) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$上运动, 记坐标原点与点P 间的距离为l. 若点 P的横坐标对时间的
变化率为常数 v_0, 则当点 P 运动到点$(1,1)$时, l对时间的变化率是

设 t 时刻 P 点的坐标为$(x(t),y(t)), l=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}$

$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{2x(t)+6x^5(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x^6(t)}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

取 $x(t)=1, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$, 则$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{8}{2\sqrt{2}}\bullet v_0=2\sqrt{2}\,v_0$.

15）

$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+o(x^4)+2x\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-1}{x^4}=\frac{1}{3}$

(16) (本 题 满 分 10 分)
设函数$f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t\,(x>0)$,求$f'(x)$,并求$f(x)$的最小值.

当$0<x\leqslant 1$时

$f(x)=\int_0^x|\,t^2-x^2|\,\mathrm{d}t+\int_x^1|\,t^2-x^2|\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$

$x>1$

$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}.$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2$

$f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$

由 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$, 又 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$, 从而 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$的最小值点 , 最小值为$\frac{1}{4}$

S

$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}|y|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

(21)(本题满分11分)

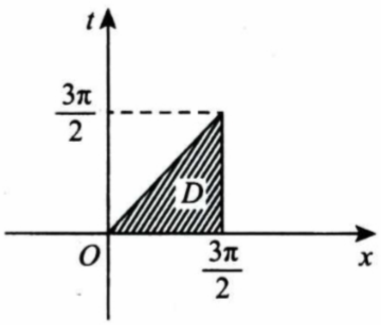
已知两数$f(x)$在$\left[0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$上连续, 在$\left(0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$内是函数$\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原两数, 且$f(0)=0$.

(1) 求$f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$上的平均值;

(II)证明$f(x)$在区间$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一零点.

$\bar{f}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{3\pi}$.



由题意,得$f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi},x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,因为 $f'(x)<0$,所以 $f(x)<f(0)=0$,故 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内无零点,且$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

由积分中值定理知,存在 $x_0\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$,使得 $f(x_0)=\bar{f}=\dfrac{1}{3\pi}>0$,由于当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时, $f(x)<0$,所以

$x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

根据连续函数介值定理知, 存在 $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{2},x_0\right)\subset\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$, 使得 $f(\xi)=0$. 又因为当$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$时,

$f'(x)>0$, 所以 $f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$内至多只有一个零点.

综上所述, $f(x)$在$\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$内存在唯一的零点.

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(**I**) 求A^{99};

(II) 设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 将$\beta_1,\beta_2,\beta_3$分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{则 } \boldsymbol{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{99}=\mathbf{P}\begin{pmatrix} (-1)^{99} & & \\ & (-2)^{99} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{99} & & \\ & (-2)^{99} & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^{99} & & \\ & (-2)^{99} & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(II) 因为 $B^2=BA$, 所以

$$B^{100}=B^{98}B^2=B^{99}A=B^{97}B^2A=B^{98}A^2=\cdots=BA^{99}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\,\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\,\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\,\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\,\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\,\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\,\boldsymbol{\alpha}_2. \end{cases}$$

本题可先通过求矩阵A的特征值和特征向量，将矩阵A相似对角化，然后利用相似矩阵的性质来计算A^{99}。

（一）求矩阵A的特征值

1. 计算矩阵A的特征多项式：
   对于矩阵$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，其特征多项式为：

$$
\begin{aligned}
|\lambda I-A|&=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}\\
&=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&1\\-2&\lambda+3\end{vmatrix}\\
&=\lambda(\lambda(\lambda+3)+2)\\
&=\lambda(\lambda^2+3\lambda+2)\\
&=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)
\end{aligned}
$$

2. 求解特征值：
   令$|\lambda I-A|=0$，即$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，解得特征值$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，$\lambda_3=-2$。

（二）求矩阵A的特征向量

1. 当$\lambda_1=0$时：
   将$\lambda_1=0$代入$(\lambda I-A)X=0$，即$\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。
   对增广矩阵$\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\-2&3&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$进行初等行变换：
   R_2+2R_1得$\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\-2&5&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步$R_1\leftrightarrow R_2$得$\begin{pmatrix}-2&5&-2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，再$R_1-5R_2$得$\begin{pmatrix}-2&0&3&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。
   可得方程组$\begin{cases}-2x_1+3x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$，令$x_3=2$，则$x_1=3$，$x_2=2$，所以特征向量$\xi_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$。
2. 当$\lambda_2=-1$时：
   将$\lambda_2=-1$代入$(\lambda I-A)X=0$，即$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。
   对增广矩阵$\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\-2&2&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$进行初等行变换：
   R_2-2R_1得$\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$，进一步$R_2\div 2$得$\begin{pmatrix}-1&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$，再$R_1+R_2$得$\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$。
   可得方程组$\begin{cases}-x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，令$x_1=1$，则$x_2=1$，所以特征向量$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。
3. 当$\lambda_3=-2$时：
   将$\lambda_3=-2$代入$(\lambda I-A)X=0$，即$\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$。
   $\begin{pmatrix}-2&1&-1&0\\-2&1&0&0\\ \ldots\end{pmatrix}$