目录

第 1 章

预览[1]

1.1 first

[题目] 设n阶可逆矩阵A有特征值λ,对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$,证明$\boldsymbol{\alpha}$也是A^-1对应于λ^{-1}的特征向量

[证明] 由题设$A\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda\,\boldsymbol{\alpha}$,两边同乘$A^-1$,则

$(A^{-1}\,A)\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda\,(A^{-1}\,\boldsymbol{\alpha})\Rightarrow E\,\boldsymbol{\alpha}=\lambda\,(A^{-1}\,\boldsymbol{\alpha})\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\lambda\,(A^{-1}\,\boldsymbol{\alpha})$ 因为A可逆，则$|A|\neq0$. 由$|A|$等于特征值之积，故$\lambda\neq0$. 综上，$A^{-1}\,\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{\alpha}$. 故$\alpha$也是$A^-1$对应于$\lambda^{-1}$的特征向量。

$A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{\lambda}\alpha$

$$A=\alpha\alpha^T \qquad A\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)$$

$$\alpha\alpha^t=k$$

1.1.1 和差化积

和差化积公式：$\sin(\alpha)+\sin\,(\beta)=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\sin\,(\alpha)+\sin\,(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$\sin\,(\alpha)-\sin\,(\beta)=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\,(\alpha)+\cos\,(\beta)=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\,(\alpha)-\cos\,(\beta)=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

[帮助记忆]

方法 1.可以只记第一个公式，将其它公式用诱导公式化成$\sin\,(\alpha)+\sin\,(\beta)$的形式。 方法 2.找规律。前两个公式是 $\sin$和$\cos$异名函数乘积，后两个公式是同名函数乘积。

口诀:

正加正，正在前,

余加余，余并肩。

正减正，余在前，

余减余，负正弦。

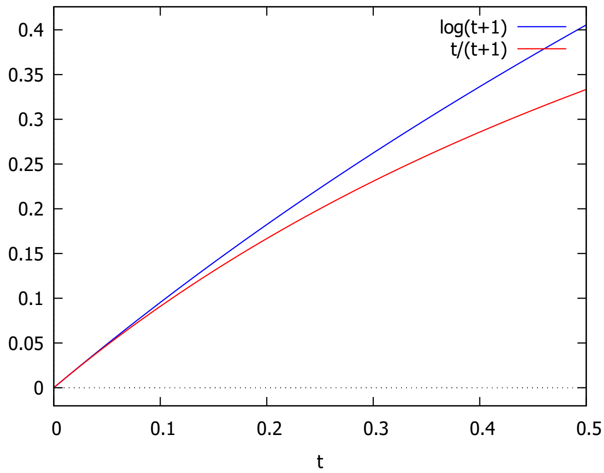
1.1.2 ♡some easy replace

$x \in (0,+\infty)$ 时,有$0<\dfrac{x}{x+1}<\ln(x+1)$. 故$\dfrac{x^3}{x+1}<\ln(x+1)\,x^2$.

故$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x<\int_0^1 \ln(x+1)\,x^2\mathrm{d}x$, 即$I_2<I_1$.

故选A.

```
(%i14) tm_plot2d([log(1+t),t/(1+t)],[t,0,0.5])
```



(%o14) **true**

第 2 章

线性代数

2.1 线性表出

[2003年真题]设向量组I:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_t$可由向量组$II$: $\beta_1,\beta_2,\ldots\ldots\beta_s$线性表示，则

$\mathcal{A}$. 当$t<s$时，向量组II必线性相关

B. 当$t>s$时，向量组II必线性相关

$\mathbb{C}$. 当$t<s$时，向量组I 必线性相关

D. 当$t>s$时，向量组I必线性相关

[简解] 根据定理："若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$可有$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，且$t>s$,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$必线性相关

即若多数向量可以由少数向量线性表出，则此多数向量必线性相关，故选 D.

若A 为$m\times n$ 矩阵，则以下哪个选项是正确的?

A. 若$n>m$,由A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$,则$r(A)=m$ B. 由A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$=$行向量组的总向量个数$=m$,则$r(A)\leq m$ $\mathbb{C}$. A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$=$列向量组的总向量个数$=n$,则$r(A)=n$ D. A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$\leq$列向量组的总向量个数$=n$,则$r(A)\leq n$

因为$r(A)=A$的行秩$=A$的列秩， 而A的列秩是列极大线性无关组的向量个数$\leq$列向量组的总向量个数$=n$. 同理A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$. 综上，$r(A)\leq\min(m,n)$,即有$r(A)\leq n$. 选D.

其余选项:

$\mathbb{A}$:只能得出$r(A)\leq m$.

B:A的行秩是行极大线性无关组的向量个数$\leq$行向量组的总向量个数$=m$

2.1.1 线性相关

由特征值的定义

有$[A(\lambda_2\alpha_1), A(\lambda_1\alpha_2)]=[\lambda_1\lambda_2\alpha_1, \lambda_1\lambda_2\alpha_2]$ 极大线性无关组中所含向量的个数r称为向量组的秩，因此需判定$[\lambda_1\lambda_2\alpha_1, \lambda_1\lambda_2\alpha_2]$中的线性无关向量。

由互不相同的特征值对应的特征向量线性无关，则α_1与α_2线性无关。

当$\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\neq 0$,则$\lambda_1\lambda_2\alpha_1\neq 0, \lambda_1\lambda_2\alpha_2\neq 0$, 故$\lambda_1\lambda_3\alpha_1$与$\lambda_1\lambda_3\alpha_3$线性无关，向量组$A(\lambda_2\alpha_1)$, $A(\lambda_1\alpha_3)$的秩为 2.

♡α_1 和 $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$。 这是因为 α_1 和 α_2 是不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，即 $r(\alpha_1,\alpha_2)=2$。要使 $r(\alpha_1, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$，必须保证 $\lambda_2\neq 0$，这样矩阵 $\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ 的秩才能为 2。Z

♡ 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是三阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$(0,2,1)^{\mathrm{T}}$是方程组$A\mathbf{x}=0$的一个基础解系，则$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系可为

A. α_1 *B*. α_1,α_2 *C*. α_2,α_3 *D*. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用$AB=O$ 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数：因为$A\mathbf{x}=0$ 只有 1 个线性无关的解，即 $n-r(A)=1, n=3$,从而$r(A)=2$. 由 $r(A)=2=n-1$, 则 $r(A^*)=1$. 有$n-r(A^*)=3-1=2$,故$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系中有 2 个线性无关的解向量。

用$AB=O$来得到解向量：由 $A\mathbf{x}=0$有非零解，则$|A|=0$. 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$,有$A^*A=O$,则A 的列向量全是$A^*\mathbf{x}=0$ 的解。

而秩$r(A)=2$,故A的列向量中必有 2 个线性无关。需找到这 2 个线性无关的列向量：

$$\text{由}A\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=0, \text{即}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=0, \text{则}2\alpha_2+\alpha_3=0, \text{即}\alpha_2,\alpha_3\text{相关。}$$

综上，α_1,α_2无关，α_1,α_3无关。选B.

♡[2011年真题)设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是四阶矩阵，A^*为A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $A\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系，则

$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系可为

A. α_1,α_3 *B*. α_1,α_2 *C*. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ *D*. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用$AB=O$ 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数：因为$\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$**只有 1** 个线性无关的解，即$\boldsymbol{n-r(A)=1,n=4}$,从而$r(A)=3$. 由 $r(A)=3=n-1$, 则 $r(A^*)=1$. 有$\boldsymbol{n-r(A^*)=4-1=3}$,故$A^*\mathbf{x}=0$ 的基础解系中有 **3 个线性无关的解向量**。用$AB=O$来得到解向量：由$A\mathbf{x}=0$ 有非零解，则 $|A|=0$. 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$,有$A^*A=O$.则A 的列向量全是$A^*\mathbf{x}=0$ 的解。而秩$r(A)=3$,故A的列向量中必有 3 个线性无关。

需找到这 3 个线性无关的列向量:

由 $A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 则 $\alpha_1+\alpha_3=0$, 即 α_1,α_3相关。

综上

综上，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$无关。

选D.

2.1.2 向量组等价

例 2.1.

若向量组(I) 是向量组(II) 的权大线性无关组, 向量组(III) 是向量组(IV)的极大线性无关组, 向量组(I) 与(III)等价,则

A、由量组(II) 与(IV)不等价,且(I) 不一定可由(IV)线性表出

B、由重组(II) 与(IV)等价,且(I) 不一定可由(IV)线性表出

C、向量组(II) 与(IV) 等价,且(IV) 可由(IV)线性表出

D、向量组(IV) 与(IV) 不等价,但(IV) 可由(IIV)线性表出

解】

向量组完它的极大线性无关组等价,且等价具有递性,则$(I)\sim(II)\sim(III)\sim(IV)$,且两两可以且相线性表出。

选C.

等价向量组的定义是可以互相线性表出

例 2.2.

[2022 年真题 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$,

若 向量组 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 向量组 (II): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价,

则 λ的取值范围为

A.$\{\lambda|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

B.$\{\lambda|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1\}$

C.$\{\lambda|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$

D.$\{\lambda|\,\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-2\}$

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$B(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ A|B 求解λ

2.2 两个方程同解

线性无关的解的个数相同=>系数矩阵的秩相同

基础解系相同

Ar

令方程组()的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&3&5\\2&4&6\\1&a&1\end{bmatrix}$.

令方程组(ll)的系数矩阵为$B=\begin{bmatrix}b&2&c\\b^2&3&c\end{bmatrix}$.

由方程组同解，则 $n-r(B)=$ 方程(ll)线性无关解的个数 = 方程(l)线性无关解的个数 $=n-r(A)$, 即 $r(B)=r(A)$. 因为 $r(B)\leq 2$,则 $r(A)\leq 2$,即 $|A|=0$, 有

$$\begin{matrix}1&3&3\\2&4&6\\1&a&1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&3&3\\0&-2&-4\\0&-1&0\end{vmatrix}=4(a-1)=0,\text{则}a=1.$$

$$AB=O\qquad r(A)+r(B)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$$

由于A,B均非零，故$r(A)>0$,且$r(B)>0$,即$r(A)\geq 1, r(B)\geq 1$. 由于$AB=O$,且A 是5×4, B 是4×6 矩阵，则 $r(A)+r(B)\leq 4$. 代入$r(A)\geq 1$,有$r(B)\leq 4-r(A)\leq 3$.因为已得出$r(B)\geq 1$,则$1\leq r(B)\leq 3$.

过 D.

AB=O时的秩:若 A是 $m\times n$矩阵,B是 $n\times s$矩阵,AB=O,则 $r(A)+r(B)\leq n$.

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,则$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$可逆,又有$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的表达式,想到相似,即$AP=PB\Leftrightarrow P^{-1}AP=B$.

1 2 3 4 5

$$\text{列向量线性无关，可逆，} \mathrm{AP}=\mathrm{PB}\Leftrightarrow P^{-1}\mathrm{AP}=B$$

$$A\sim B; A_\lambda=B_\lambda$$

$$|\lambda E-A|=O$$

2.2.1 已知特征值，求特征向量 ♡

$\lambda\to A$, 系数矩阵，行最简形矩阵，自由未知量$x_x=1,0$；得到基础解系即属于特征值λ_x的特征向量

- 代入每个 λ_i,得到线性方程组 $(\lambda_i E-A)\mathbf{x}=0$,通解即对应 λ_i的全体特征向量(除去 0向量)

-

-

-

1. 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 由 $(E-B)\mathbf{x}=0,$ 系数矩阵$E-B=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-2\\-1&-1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 令 x_2,x_3 为自由未知量, x_1 为独立未知量。令 x_2,x_3 为自由未知量, x_1 为独立未知量。令 $x_2=1,x_3=0,$则 $x_1=-1.$ 令 $x_2=0,x_3=1,$则 $x_1=-2.$ 故$\eta_1=(-1,1,0)^T,\eta_2=(-2,0,1)^T$ 是一个基础解系, 即属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量。 2. 当$\lambda_3=4$时, 由$(4\,E-B)\mathbf{x}=0,$ 系数矩阵 $4\,E-B=\begin{bmatrix}3&0&0\\-1&2&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 令x_3 为自由未知量, x_1,x_2 为独立未知量。 令$x_3=1,$则$x_2=1,$ $x_1=0.$故$\eta_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是一个基础解系, 即属于特征值 $\lambda_3=4$ 的一个特征向量。 综上, η_1,η_2,η_3为三个线性无关的特征向量。 选D.

2.2.2 [分析]矩阵的对角化:

令A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,$设$A$有$n$个线性无关的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,

取$P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n],$则有$P^{-1}\,A\,P=\Lambda,$其中$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}.$

[解答] 注意P的每一列为一个特征向量, 且P中$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,$⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩$,\boldsymbol{\alpha}_n$ 排列次序应与 Λ 中 $\lambda_1,$ $\lambda_2,$⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩$,\lambda_n$ 的排列次序 一致。

<with|color|red|[解答]>

2.3 A; 特征值; 求可逆矩阵P , 相应的对角矩阵 Λ

[1999年真题]设矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\4&2&-3\end{bmatrix}$,已知$A$ 的特征值

为1, -1,-1.求可逆矩阵P,使得$P^{-1}\,\mathrm{AP}=\Lambda$为对角矩阵?

并求出相应的对角矩阵。

2.3.1 相似的必要条件

[1992年真题]设矩阵A 与B 相似,其中$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix},$求$x+y$的值。

[分析]由相似求未知参数，用相似的必要条件：1.迹相等；2.行列式相等；3.特征值相等

[解答]

相似矩阵的迹相等，则$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\Rightarrow -2+x+1=y+2-1\Rightarrow y=x-2.$

相似矩阵的行列式相等，则$|A|=|B|\Rightarrow(-2)\,(x-2)=-2\,y\Rightarrow y=x-2.$

所以“1.迹相等”与“2.行列式相等”得到的等式相同，需要使用”3.特征值相等”．

因为对角矩阵 B 的特征值为$-1,2,y$,所以矩阵 A 的特征值也为$-1,2,y$.

用特征方程$|\lambda\,E-A|=0$的根来求A的特征值:

$$由|\lambda\,E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-x & -2\\ -3 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\,[\lambda^2-(x+1)\,\lambda+(x-2)].$$

的

知$\lambda=-2$是A的特征值，因此必有$y=-2$. 综上，$x=y+2=0$,则答案为$x+y=-2$.

2.3.2 实对称矩阵A（含参数），求可逆矩阵P，求对角矩阵Λ

[2002年真题 设实对称矩阵$A=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}$,求可逆矩阵$P$,使$P^{-1}\,A\,P$为对角阵。

$|\lambda E-A|=O$; 求特征值 λ_n Λ $\checkmark$; 代入A， 化最简阶梯形矩阵， 自由未知数X_n: q1→得到基础解系(特征向量) P

1. 求特征值:

$$立特征方程:|\lambda\,E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\color{red}{\lambda-a-1} & \lambda-a-1 & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 0 & a+1-\lambda & \lambda-a-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-a+1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)^2\,(\lambda-a+2)$$

2.3.3 实对称矩阵的正交规范化

对矩阵 A 执行特征值分解。

- 将得到的特征向量作为矩阵 Q 的列。

- 对 Q 的每一列向量 q_i 执行归一化：$q_i=\frac{q_i}{\|q_i\|}$，其中 $\|q_i\|$ 是向量 q_i 的欧几里得范数。

2.3.4 $f(A)$的特征值 及对应的特征向量

矩阵	A	kA	A^k	f(A)
特征值	λ	kλ	$λ^k$	f(λ)
对应特征向量	α	α	α	α

A的特征值已知? $f(A)$的特征值是? 对应的特征向量变了吗? /

相似矩阵的性质 对应的特征向量是变的.

矩阵	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	$λ^{-1}$	$\|A\|λ^{-1}$	$λ^{-1}+f(λ)$
对应特征向量	α	α	α

运用相似矩阵的性质,有 矩阵	A	A^*	$B=P^{-1}A^*P$ B	B+kE
特征值	λ	$\|A\|λ^{-1}$	$\|A\|λ^{-1}$	$\|A\|λ^{-1}+k$
对应特征向量	α	α	$P^{-1}α$	$P^{-1}α$

2.3.4.1 实对称矩阵必可对角化

注意:特征值相同是任意矩阵相似的必要条件,但只当矩阵实对称时,才是充分条件。即:

矩 阵 相 似 $\Rightarrow$ 特征值相同

$$\left.\begin{array}{l}\text{特征值相同}\\ \text{实对称矩阵}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{矩阵相似.}$$

A与B(实对称矩阵) 相似的充分必要条件is A和B的特征值相同 $\rightarrow |\lambda_{b_n}E-A|=O$

2.3.5 $A[x_1, x_2] = [b_1, b_2]$

[分析】求矩阵方程$A[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2]=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2]$, 即求2个线性方程组的解:$A\mathbf{x}_1=\mathbf{b}_1, A\mathbf{x}_2=\mathbf{b}_2$.
由 题 设, 这 两 个 方 程 组 的 通 解 为
$k_1\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1$,
$k_2\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_2$,
k_1, k_2为任意常数。
则所求矩阵 $X=[\ k_1\,\xi+\eta_1, k_2\,\xi+\eta_2\ ]$

[2014年真题]设$A=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵。求满足$AB=E$ 的所有矩阵 B.

$$[A|E]=\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

先求 $A\mathbf{x}=0$ 的基础解系：令$x_4=1$,解得$x_3=3,x_2=2,x_1=-1$. 则基础解系为$\xi=(-1,2,3,1)^{\top}$.
再分别求三个方程组的特解:
令 $x_4=0$.由增广矩阵的第一列得
$x_3-3x_4=-1\Rightarrow x_3=-1$,
$x_2-2x_4=-1\Rightarrow x_2=-1$,
$x_1-2x_2+5x_4=4\Rightarrow x_1=4+2x_2=2$.
则第一个方程组的特解为 $(2,-1,-1,0)^{\top}$.
同理,第二个方程组的特解为 $(6,-3,-4,0)^{\top}$,第三个方程组的特解为 $(-1,1,1,0)^{\top}$.
由此得三个方程组的通解
$(2,-1,-1,0)^{\top}+k_1\xi$
$(6,-3,-4,0)^{\top}+k_2\xi$
$(-1,1,1,0)^{\top}+k_3\xi$
注意 k_1,k_2,k_3 为三个不同的任意常数。常见错误为 $k_1=k_2=k_3=k$.

故所求矩阵为 $B=\begin{bmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, k_1,k_2,k_3为任意常数。

例 2.3.

设$\alpha=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$,$\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$,$\gamma=\begin{bmatrix}0\\0\\64\end{bmatrix}$,$A=\alpha\beta^{\top}$,$B=\beta^{\top}\alpha$其中$\beta^{\top}$是$\beta$的转置,求解方程$A^3\mathbf{x}+A^2B\mathbf{x}=8B^2\mathbf{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

代入原方程得，$16\ A\mathbf{x}+16A\mathbf{x}=8\cdot16\mathbf{x}+\boldsymbol{\gamma}$ 即 $32\ (A-4E)\mathbf{x}$=$\boldsymbol{\gamma}$.

解线性方程组:$(A-4E)\mathbf{x}=\dfrac{\gamma}{32}$.对增广矩阵用高斯消元法:

2.4 行列变换

因为B可以由A经行变换得到，$B=$(矩阵左乘A)

已知A 为$n\,(n\geq2)$阶可逆矩阵，为书写简洁，不妨设A 为三阶矩阵。

根据题设：将A的第 1 行加到第 2 行得矩阵B,则$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=E_{21}(1)\,A$.

因此 $B^{-1}=A^{-1}E_{21}(1)^{-1}$,其中$E_21(1)$ 为 倍加初等矩阵。

利用倍加初等矩阵的逆矩阵，有$E_21(1)^{-1}=E_{21}(-1)$,则$B^-1=A^{-1}E_{21}(-1)$.

根据定义，有$A^-1=\dfrac{A^*}{|A|}$,$B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}$,从而$\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{A^*}{|A|}E_{21}(-1)$.

因为将一行（或列）的k倍加到另一行（或列）,行列式的值不变，则$|B|=|A|$.

故$B^*=A^*E_{21}(-1)$,即将A^*的第 2 列从第 1 列中减去得B^*,答案选 D

[分析]因为所求行列式中含 $\beta_1+\beta_2$,想到$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$. 试着将题设转化成等式右边的两项。

例 2.4.

[2021年真题]设A,B为 n阶实矩阵,下列不成立的是

A. $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^\top A \end{bmatrix} = 2\,r(A)$

B. $r\begin{bmatrix} A & AB \\ O & A^\top \end{bmatrix} = 2\,r(A)$

$\mathbb{C}$. $r\begin{bmatrix} A & BA \\ O & AA^\top \end{bmatrix} = 2\,r(A)$

D. $r\begin{bmatrix} A & O \\ BA & A^\top \end{bmatrix} = 2\,r(A)$

选 项 D:
广义高斯消元:
BA为 A的行变换(左乘行变换),故将分块矩阵行变换。
将行$[\,A \;\; O\,]$的$(-B)$倍,行$[\,-BA \;\; O\,]$,加在行$[\,BA \;\; A^\top\,]$上,得到
$r\begin{bmatrix} A & O \\ BA & A^\top \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^\top \end{bmatrix} = r(A) + r(A^\top) = 2\,r(A).$

错误操作:

将列$\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$的$(-B)$倍加在 列$\begin{bmatrix} BA \\ AA^\top \end{bmatrix}$上。

将列变换写成完整的矩阵相乘形式,即看出错误所在:

$\begin{bmatrix} A & BA \\ O & AA^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -B \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -AB+BA \\ O & AA^\top \end{bmatrix}$,不能消去。

$r\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^\top A \end{bmatrix} = r(A) + r\,(A^\top A) = 2\,r(A)$,故A正确。

选 项 B:
广义高斯消元:
AB为 A的列变换(右乘列变换),故将分块矩阵列变换。

将列$\begin{bmatrix} A \\ O \end{bmatrix}$的$B$倍$\begin{bmatrix} AB \\ O \end{bmatrix}$,从列$\begin{bmatrix} AB \\ A^\top \end{bmatrix}$中减去,得到

$r\begin{bmatrix} A & AB \\ \\ O & A^\top \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} A & O \\ \\ O & A^\top \end{bmatrix} = r(A) + r(A^\top) = 2\,r(A)$,故B正确。

注: 写 成 矩 阵 相 乘 形 式,

$\begin{bmatrix} A & AB \\ O & A^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -B \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -AB+AB \\ O & A^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A^\top \end{bmatrix}.$

2.5 方程组同解

2.5.1 x1=x2

例 2.5.

已知线性方程组的通解为$k_1(1,-3,1,0)^\top + k_2(0,-1,0,1)^\top$,其中$k_1,k_2$为任意常数，求该方程组满足 $2x_1 = x_2$ 的全部解。

A. $k_1(1,2,1,-5)^\top + k_2(1,2,1,-2)^\top$,其中$k_1,k_2$为任意常数

B. $(1,2,1,-5)^\top$

C. $k(1,2,1,-5)^\top$,其中k 为任意常数

D. $k(1,2,1,-2)^\top$,其中k 为任意常数

[分析]即求原方程组与$2\,x_1=x_2$的公共解。 原方程组未给出, 不能联立方程。 则将已知通解代入$2\,x_1=x_2$中。 [解答] 从 通 解 可 得 , $x_1=k_1, x_2=-3\,k_1-k_2$. 若 $2x_1=x_2$,则 $2\,k_1=-3\,k_1-k_2\Rightarrow k_2=-5\,k_1$. 代 入 通 解 , 得 $x=k_1(1,-3,1,0)^\top-5\,k_1(0,-1,0,1)^\top=k_1(1,2,1,-5)^\top$. 则通解为$k(1,2,1,-5)^\top$,其中$k$ 为任意常数。

[2005年真题] 已知齐次线性方程组

(1)$\begin{cases} x_1+2\,x_2+3\,x_3=0 \\ 2\,x_1+3\,x_2+5\,x_3=0, \end{cases}$和(11)$\begin{cases} x_1+b\,x_2+c\,x_3=0 \\ 2\,x_1+b^2\,x_2+(c+1)\,x_3=0 \end{cases}$ 同解,

则$a+b+c=$

$A.3$ $B.5$ C. 3或 5 D. 2或 5

[分析]方程组同解, 则 1.线性无关解的个数相同⇒系数矩阵的秩相同; 2.基础解系相同 [解答] 令方程组(l)的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

令方程组(II)的系数矩阵为$B=\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{bmatrix}$中十印如同知则的$(x)=(x,y)=(x,y)$

由方程组同解, 则$n-r(B)=$方程 (II)线性无关解的个数$=$方程 (II)线性无关解的个数$=n-r(A)$,即$r(B)=r(A)$. 因 为 $r(B)\leq 2$,则 $r(A)\leq 2$,即 $|A|=0$,有

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}=2-a=0$,则$a=2$.

代入$a=2$,则可以求方程组(1)的解。 对A 高斯消元: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$则令$x_1, x_2$为独立未知量, x_3为自由未知量。

令$x_3=1$,解得$x_2=-1, x_1=-1$.

则方程组(l)的通解是$k(-1,-1,1)^\top, k$ 为任意常数。

以下由方程组(II)的通解也是$k(-1,-1,1)^\top$,求出b 和c.

注意有两部分:

1. $(-1,-1,1)^\mathrm{T}$是方程组 (II)的解; 2.方程组 (II) 只有 1 个线性无关解, 即$r(B)=2$.

第1部分:

因为$(-1,-1,1)^\top$应当是方程组 (II)的解, 代入则得到 b,c 的方程组: $\begin{cases} -1-b+c=0 \\ -2-b^2+c+1=0 \end{cases}$,解得$b=1$, $c=2$ 或$b=0, c=1$.

第2部分:

情况一: 当$b=0, c=1$,方程组(ll)为$\begin{cases} x_1+x_3=0 \\ 2\,x_1+2\,x_3=0 \end{cases}$ 有 $r(B)=1$,从而(I)与(II)不同解, 故$b=0, c=1$ 应舍去。情况二: 当$b=1, c=2$时, 方程组$\Big($|l)为$\begin{cases} x_1+x_2+2\,x_3=0 \\ 2\,x_1+x_2+3\,x_3=0 \end{cases}$ 有$r(B)=2$,从而方程组 (II) 只有 1 个线性无关解, 即通解是$k(-1,-1,1)^\top, k$为任意常数, (I) 与 (II) 同解。

故$a+b+c=2+1+2=5$.选B

例 2.6.

设四元齐次线性方程组()的基础解系为 $\beta_1=(0,0,1,0)^\top,\beta_2=(-1,1,0,1)^\top$,而另一四元齐次线性方程组 (II) 的基础解系为
$\alpha_1=(0,1,1,0)^\top,\alpha_2=(-1,-1,0,1)^\top$.
则方程组()与(II)的公共解为

[分析]已知两个方程组的通解，求公共解。则令通解相等，解关于常数k_1,k_2,l_1,l_2的新方程组。

[解答]

设η是方程组(I)与(II)的非零公共解，则

$\eta=k_1\,\beta_1+k_2\,\beta_2=l_1\,\alpha_1+l_2\,\alpha_2\,.$

那么$k_1\,\beta_1+k_2\,\beta_2-l_1\,\alpha_1-l_2\,\alpha_2=0$

再代入题设给出的$\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2$,由此得齐次方程组(III)

$\{-k_2+l_2=0$

$k_2-l_1+l_2=0$对 系 数 矩 阵 高 斯 消 元

$k_1-l_1=0$

$k_2-l_1=0$

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则 令k_1,k_2,l_1为 独 立 未 知 量,l_2为 自 由 未 知 量。 令$l_2=1$,则$l_1=2,k_1=2,k_2=1$.

即 通 解 为$h(2,1,2,1)^\top,h$为 任 意 常 数。 则
$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\l_1\\l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2h\\h\\2h\\h\end{bmatrix}$.则 方 程 组 的 公 共 解 为
$\eta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2=2h\alpha_1+h\alpha_2=h(2\alpha_1+\alpha_2)=h(-1,1,2,1)^\top,h$为 任 意 常 数。

2.6 |A|

[2013年真题]$A=(\ a_{ij}\ )$是三阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式A_{ij}为$a_i\,j$的代数余子式，若$a_i\,j+A_{ij}=0\ \ (i,$

$j=1,2,3)$,则 $|A|=$

$a_{\text{ij}}+A_{\text{ij}}=O,a_{\text{ij}}=-A_{\text{ij}},|A|=0,-1;A\neq O;|A|=-1.$

例 2.7.

$r(A)=3,|A|=2,|A^{-1}-E|=3,|A-E|=?$

$|A-E|=|A|\,|E-A^{-1}|=2\,|-1(A^{-1}-E)|=2\times(-1)^3\,|A^{-1}-E|=-6$

例 2.8.

[2008年真题](本题请写出计算过程)已

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$$

则$|A|=$

A. $n\ a^n$ 3. $(n+1)\ a^n$ D. $(n+1)\,u$ C. $\dfrac{a^n+a^{2n}}{2}$ $=(2-1)^n$ D. $(2\,a)^n-(n-1)\,a^{2(n-1)}$

$U_n=2a\,U_{n-1}+(-1)^{n+n-1}\,a^2\times 1\times U_{n-2}$

$U_n=2\,a\,U_{n-1}-a^2\,U_{n-2}$

$x^2-2\,a\,x+a^2=0$

$U_n=(c_1\,n+c_2)a^n$
代入$U_1,U_2,\rightarrow c_1,c_2$

2.6.1 克拉默法则

设 n元线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$,其中

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 4 & 4 & 1 & & & \\ & 4 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 4 & 4 & 1 \\ & & & & 4 & 4 \end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

已知行列式$|A|=(n+1)\,2^n$,则

A.方程组有唯一解,且 $x_1=\dfrac{n}{2\,(n+1)}$

B.方程组有一解,且 $x_1=\dfrac{n}{n+1}$

C.方程组有无穷解,且 $\mathbf{x}=k(1,0,0,...,0)^\top$,其中 k为任意常数

D.方程组有无穷解,且 $\mathbf{x}=k(0,1,0,...,0)^\top$,其中 k为任意常数

由克拉默法则,$|A|\neq 0$时,n元线性方程组有唯一解。
由题这$|A|=(n+1)\cdot 2^n$,故方程组有唯–解。
又由ke拉默法则,将 A的第一列替换为 $\mathbf{b}$,有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 4 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_1=\frac{|a|}{|A|}$$

令n阶行列式 $D_n=|A|=(n+1)\cdot 2^n$,则按第 1列展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 4 & 1 & & \\ 0 & 4 & 4 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 4 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot D_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

则$\mathrm{x}_1=\frac{\mathrm{n}\cdot 2^{\mathrm{n}-1}}{(\mathrm{n}+1)\cdot 2^{\mathrm{n}}}=\frac{\mathrm{n}}{2(\mathrm{n}+1)}$

克拉默法则

$A\mathbf{x}=0$有非零解，根据克拉默法则，有$|A|=0$ 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$,有$A^*A=O$.则A 的列向量全是 $A^*\mathbf{x}=0$ 的解。

设齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=0$. 已知 $(1,1,\cdots,1)^\top$ 是方程组的解, A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，令 $\boldsymbol{\alpha}_i=[A_{i1},A_{i2},\cdots A_{in}]^\top$ $(i=1,2,\cdots,n)$ ，则

A. $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $A\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系

B. $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $A\mathbf{x}=0$ 的解向量，并两两线性相关

C. $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为零向量，故为 $A\mathbf{x}=0$ 的解向量

D. $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 包含 $A\mathbf{x}=0$ 的解向量，但不能表出所有解向量

[分析]由A_{ij}是A中元素α_{ij}的代数余子式，则[$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,$⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩⟨cdotp⟩$,\boldsymbol{\alpha}_n$]为伴随矩阵$A^*$. [解答] 已知$(1,1,\cdots,1)^\mathsf{T}$是方程组的解，根据克拉默法则，有$|A|=0$. 由$AA^*=|A|E$,且$|A|=0$,则$AA^*=O$,即$A^*$的列向量为$A\mathbf{x}=0$的解向量。 因为$|A|=0$,则$r(A)<n$,有$r(A^*)\leq 1$,分两种情况： 若 $r(A^*)=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$都为零向量，显然两两线性相关。 若$r(A^*)=1$,则$A^*$的列向量的极大线性无关组只有 1 个向量，则两两线性相关。

例 2.9.

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是三阶矩阵， A^*为A 的伴随矩阵， 若 $(0,2,1)^\mathsf{T}$是方程组$A\mathbf{x}=0$的一个基础解系，则 $A^*\mathbf{x}=0$的

基础解系可为(a_1,a_2) (a1,a3)

例 2.10.

[2011年真题]设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是四阶矩阵， A^*为A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^\mathsf{T}$ 是方程组 $A\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系，则

$A^*\mathbf{x}=0$的基础解系可为

$A.\ \alpha_1,\alpha_3\quad B.\ \alpha_1,\alpha_2\quad C.\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\quad \mathcal{D}.\ \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

用秩来决定线性无关解的个数： 因为$A\mathbf{x}=0$只有 1 个线性无关的解，即$n-r(A)=1,n=4$,从而$r(A)=3$. 由$r(A)=3=n-1$,则$r(A^*)=1$. 有$n-r(A^*)=4-1=3$,故$A^*\mathbf{x}=0$ 的基础解系中有 3 个线性无关的解向量。 用$AB=O$来得到解向量： 由 $A\mathbf{x}=0$ 有非零解，则$|A|=0$. 由$A^*A=|A|E$,及$|A|=0$,有$A^*A=O$.则A的列向量全是$A^*\mathbf{x}=0$ 的解。 而秩$r(A)=3$,故A的列向量中必有 3 个线性无关。

需找到这 3 个线性无关的列向量:

由 $A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=0$, 则 $\alpha_1+\alpha_3=0$, 即 α_1,α_3相关。

综上，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$无关。

选D.

2.7 已知两个方程组的通解，求公共解。

则令通解相等，解关于常数k_1,k_2,l_1,l_2 的新方程组

[解答]

设η是方程组(I)与(II)的非零公共解，则

$\eta=k_1\,\beta_1+k_2\,\beta_2=l_1\,\alpha_1+l_2\,\alpha_2.$

那么$k_1\,\beta_1+k_2\,\beta_2-l_1\,\alpha_1-l_2\,\alpha_2=0$ 再代入题设给出的$\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2$,由此得齐次方程组 (III) $(-k_2+l_2=0$ $|k_2-l_1+l_2=0$对系数矩阵高斯消元.

$k_1-l_1=0$

$(\ k_2-l_2=0$

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则令 $k_1\cdot k_2\cdot l_1\cdot$为独立已知　$l_2\cdot$为自由未知

令$l_2=1$,则$l_1=2,k_1=2,k_2=1$. 即通解为$h\,(2,1,2,1)^{\top},h$为任意常数。

则$\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\l_1\\l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\,h\\h\\2\,h\\h\end{bmatrix}$.

则方程组的公共解为$\eta=l_1\,\alpha_1+l_2\,\alpha_2=2\,h\,\alpha_1+h\,\alpha_2=h\,(2\,\alpha_1+\alpha_2)=h\,(-1,1,2,1)^{\top},h$ 为任意常数。

例 2.11. $A\,x=O,B\,x=O$同解

[2022年真题 设矩阵 A,B 均为 n阶方阵,若$A\mathbf{x}=0$与 $B\mathbf{x}=0$同解,则

A.$\begin{pmatrix}A&O\\E&B\end{pmatrix}\mathbf{x}=0$仅有零解

B.$\begin{pmatrix}A\,B&B\\O&A\end{pmatrix}\mathbf{x}=0$仅有零解

C.$\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix}\mathbf{x}=0$与$\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix}\mathbf{x}=0$同解

D.$\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix}\mathbf{x}=0$与$\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix}\mathbf{x}=0$同解

(2.1)

【分析】题设为方程组,选项为分块矩阵方程,故将选项写成方程组:

令 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$,其中 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$为 n维列向量,则

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\mathbf{x}=0$等价于$\begin{cases} A\mathbf{x}_1+B\mathbf{x}_2=0 \\ C\mathbf{x}_1+D\mathbf{x}_2=0 \end{cases}$.

(2.2)

选项等价于下列2个方程组同解:

方程组一: $\begin{cases} AB\mathbf{x}_1+B\mathbf{x}_2=0 \\ A\mathbf{x}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB\mathbf{x}_1=0 \\ A\mathbf{x}_2=0 \end{cases}$

方程组二: $\begin{cases} BA\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2=0 \\ B\mathbf{x}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BA\mathbf{x}_1=0 \\ B\mathbf{x}_2=0 \end{cases}$

以 上 等 价 应 用 了 题 设 条 件 : 若 $A\mathbf{x}_2=0$,则 $B\mathbf{x}_2=0$,反 之 亦 然 。 由 $AB\mathbf{x}_1=0$ 与 $BA\mathbf{x}_1=0$ 不 一 定 同 解 (注 : 只 能 得 出 $B\mathbf{x}_1$ 是

只能得出$B\mathbf{x}_1$是$A\mathbf{x}=0$的基础解系，及$A\mathbf{x}_1$是$B\mathbf{x}=0$的基础解系，不能得出同解

2.8 相似对角化

例 2.12.

例2(22数一):下述四个条件中,3阶矩阵A可对

角化的一个充分但不必要条件是()

(A)A有3个互不相等的特征值

(B)A有3个线性无关的特征向量

(C)A有3个两两线性无关的特征向量

(D)A的属于不同特征值的特征向量正交

A $\Rightarrow$
B $\Leftrightarrow$ A可相似对角化
C $\Leftarrow$
D $\not\Leftrightarrow$

评注:数学定理的表述中有一些默认的潜台词,例
如定理中说“p是q的充分条件”,潜台词就是告诉
你“p不是q的必要条件”,因为否则的话他会表述
为“p是q的充要条件”!这样的例子有很多,回忆
高数中的“ “偏导数连续是可微的充分条件”,潜台
词就是有些可微的二元函数,偏导数并不连续!

例 2.13.

例3(22数三):设A为3阶矩阵,A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则A

的特征值为1,-1,0的充分必要条件是()

(A)存在可逆矩阵P,P,使得 $A = P\Lambda Q$

(B)存在可逆矩阵P,使得 $A = P\Lambda P^{-1}$

(C)存在正交矩阵Q,使得 $A = Q\Lambda Q^{-1}$

(D)存在可逆矩阵P,使得 $A = P\Lambda P^{T}$

A	A, 矩阵等价的定义，AB相似则AB一定等价	$\Leftarrow$	
B	A and Λ 相似(可对角化)的定义	$\Leftrightarrow$	A的特征值为$1,-1,0$
C	A不是实对称矩阵的时候, Q不一定存在	$\Rightarrow$	
D	矩阵合同的定义	$\not\Leftrightarrow$	

2.9 实对称可相似对角化$\Leftrightarrow$特征值相等

注意:特征值相同是任意矩阵相似的必要条件,但只当矩阵实对称时,才是充分条件。即:
矩 阵 相 似 $\Rightarrow$ 特征值相同.

$$\left.\begin{array}{l}\text{特征值相同}\\ \\ \text{实对称矩阵}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{矩阵相似}.$$

2.10 $A\alpha = 0$; $A\beta = 3\beta$

设 A 为 4 阶矩阵,0 是A的特征值,α 是满足$A\,\alpha = 0$的
非零向量。已知对所有满足$\alpha^\top\beta = 0$的 4 维列向量 β,都
有 $A\beta = 3\,\beta$, 则

所有满足$\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta} = 0$的 4 维列向量$\beta$,即方程$\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta} = 0$的解。

因为$\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量，则 $r(\boldsymbol{\alpha}) = 1$, 故$\boldsymbol{\alpha}^\top\boldsymbol{\beta} = 0$ 线性无关解的个数 $= 4 - r(\boldsymbol{\alpha}) = 4 - 1 = 3$.

由于$A\,\boldsymbol{\beta} = 3\,\boldsymbol{\beta}$,由特征向量定义，则$\boldsymbol{\beta}$为$A$对应特征值 3 的特征向量。

综上，A对应特征值 3 有 3 个线性无关的特征向量，即特征值 3 为三重根。

由于α是满足$A\,\alpha = 0$的非零向量，则α为A对应特征值0的特征向量。

综上，A有特征值0，3,3,3,且重根 3 有 3 个线性无关的特征向量，故A可以相似对角化。

2.11 $(A+E)^n$

展开$(A+E)^n = A^n + \mathrm{n}\mathrm{A}^{n-1} + \cdots + \mathrm{nA} + E$.
先求A^n:
利用矩阵乘法的结合律,有$A^n \;= (\alpha\,\beta^\top)\,(\alpha\,\beta^\top)\cdots(\alpha\,\beta^\top) = \alpha\,(\beta^\top\alpha)\cdots(\beta^\top\alpha)\,\beta^\top$
由条件,$\beta^\top\alpha = 0 - 1 + 1 = 0$, 故当 $n > 1$ 时,$A^n = O$
则$(A+E)^n = \mathrm{nA} + E = n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}[\,0 \;\; 1 \;\; 1\,] + E = \begin{bmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1-n & -n \\ 0 & n & n+1 \end{bmatrix}$

2.12 AB=BA $A(Bx)=\lambda(Bx)$

设A,B 为n 阶矩阵，且$AB=BA$,矩阵A 有 n 个不相等的特征值。已知 $\mathbf{x}$ 为A 的特征向量，则

A. $B\mathbf{x}$ 是A 的特征向量，$\mathbf{x}$ 是B 的特征向量

B. $B\mathbf{x}$是A的特征向量，但$\mathbf{x}$不一定是B的特征向量

C. $\mathbf{x}$ 是B 的特征向量，但$B\mathbf{x}$ 不一定是A 的特征向量

$\mathcal{D}$. $B\mathbf{x}$不一定是A的特征向量，$\mathbf{x}$不一定是B的特征向量

$\mathrm{Bx}\neq 0\,\mathrm{Bx}=\mathrm{kx}$

$\mathrm{Bx}=0=0\cdot x$

1.若 $B\mathbf{x}\neq 0$,则由特征向量的定义,$B\mathbf{x}$是A对应 λ的特征向量。
由于 A的特征值不符等,则 A对应 λ只有一个线性无关的特征向量,
由于 $\mathbf{x}$是A对应 λ的特征向量,则 $B\mathbf{x}$与 $\mathbf{x}$线性相关,即 $B\mathbf{x}=k\mathbf{x},k\neq 0$,
由特征向量的定义,即 $\mathbf{x}$是 B对应 k的特征向量。
2.若 $B\mathbf{x}=0$,由特征向量的定义,$B\mathbf{x}$不是A对应 λ的特征向量。
由 $B\mathbf{x}=0=0\cdot\mathbf{x}$,由特征向量的室的,$\mathbf{x}$是 B对应 0的特征向量。
综上,无论 $B\mathbf{x}$是否为 0都得到 $\mathbf{x}$是 B的特征向量。
但只有 $B\mathbf{x}\neq 0$时,$B\mathbf{x}$才是 A的特征向量。因为 $B\mathbf{x}$可能为 0,故 $B\mathbf{x}$不一定是 A的特征向量。

2.13 细节点

2)当$\lambda_3=-3$时,由$(-3E-A)\mathbf{x}=0$,系数矩阵

$$-3E-A=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

同上解得 $\alpha_3=(1,0,-2)^\top$是一个基础解系,即属于特征值$\lambda_3=-3$的一个特征向量。

第 3 章

最最最易错的分解

3.1 导函数的零点存在性

【导函数的零点存在性】

设$f'(x)$存在,如果$f(x)$有 k 个零点,则$f'(x)$至少有 $k-1$ 个零点 $\cdots$, $f^{(k-1)}(x)$至少有 1 个零点。

“至多有几个零点“定理:若$f'(x)$至多有 k 个零点,则$f(x)$至多有 $k+1$个零点。

至少有几个零点:导数多一阶,零点个数 少 1.(记住罗尔,则记住导数多一阶)

至 多 有 几 个 零 点: 导 数 少 一 阶, 零 点 个 数 多 1.

3.2 周期T

反例$f(x)=1$. 则$f(x)$可以任意有理数为周期。$F(x)=x+C$不是周期函数。

3.3 隐函数的存在定理

例 3.1. 有三元方程$\dfrac{x}{y}+y\,z-e^z=1$,根据隐函数存在定理，存在点(2,1,0)的一个邻域，在此邻域内该方程

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y\,(x,z)$和$z=z(x,y)$

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y\,(x,z)$

分别对x,y,z求偏导，有:

代入目标点的坐标$x=2,y=1,z=0$,有：$F_x'(2,1,0)=1,F_y'(2,1,0)=-2,F_z'(2,1,0)=0$.

根据隐函数存在定理，因为F_x'连续且$F_x'(2,1,0)\neq 0$,故存在点(2,1,0)的一个邻域，可以确定隐函数$x=x(y,$

$z)$存在.同理可以确定隐函数

$y=y(x,z)$ 存在.

因为$F_z'(2,1,0)=0$,故不能确定隐函数$z=z(x,y)$的存在性。

故选 D.

注意 3.2.

隐函数存在定理为充分条件，即无法判定$z=z(x,y)$不存在。

3.3.1 $\dfrac{x^2+c}{(x+a)(x+b)^2}$

$$\frac{x^2+5}{(x-2)\,(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.(1)$$

注意拆项时要写成 $\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ 两项，如果只有$\dfrac{B}{x+1}$，可能不存在满足条件的 B.

$x^2+5=A\,(x+1)^2+B\,(x-2)\,(x+1)+C\,(x-2)$

使用留数法:令$x=2$,得$A=1$.同理,令$x=-1$,可得$C=-2$.

使用赋值法:令 $x=0$,解得 $B=0$

即 $\dfrac{x^2+5}{(x-2)\,(x+1)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

有理分式：分母能因式分解，含二次式的高次幂，则拆成分子为一次式的项

$$\frac{x^2-2\,x+2}{(2+x^2)^2}=\frac{A\,x+B}{2+x^2}+\frac{C\,x+D}{(2+x^2)^2}.$$

$$\int \mathrm{e^x}\cdot\frac{\mathrm{x^2\text{-}2x+2}}{\mathrm{(2+x^2)^2}}\mathrm{dx}$$

```
(dbm:17.) kill(all)
```

done

(dbm:18.) eq1: $\dfrac{x^2-2\,x+2}{(2+x^2)^2}$;

$$\frac{x^2.-2.\,x+2.}{(x^2.+2.)^2.}$$

(dbm:18.) eq2: $\dfrac{a\,x+b}{2+x^2}+\dfrac{c\,x+d}{(2+x^2)^2}$

$$\frac{a\,x+b}{x^2.+2.}+\frac{c\,x+d}{(x^2.+2.)^2.}$$

(dbm:18.) $\mathrm{solve}\left(\mathrm{eq1}-\mathrm{eq2}=0,\left[a=-\frac{2}{3},b,c,d\right]\right)$

$$\left[\left[a=-\left(\frac{2.}{3.}\right)=\%R26,b=\%R28,c=\%R27,d=-(a\,x^3.)+(1.-\%R28)\,x^2.+(-(2.\,a)-\%R27-2.)\,x-2.\%R28+2.\right]\right]$$

```
(dbm:18.) eq1: 'frac(x^2 - 2*x + 2, (2 + x^2)^2);
```

$\mathrm{frac}(x^2. - 2.\,x + 2., (x^2. + 2.)^2.)$

```
(dbm:18.) eq2: 'frac(ax + b, 2 + x^2) + 'frac(cx + d, (2 + x^2)^2);
```

$\mathrm{frac}(d + \mathrm{cx}, (x^2. + 2.)^2.) + \mathrm{frac}(b + \mathrm{ax}, x^2. + 2.)$

```
(dbm:18.) sol: linsolve([eq1 - eq2], [a, b, c, d]);
```

[]

♡含 $\sqrt{\frac{\mathrm{ax+b}}{\mathrm{cx+d}}}$的积分,命 $\sqrt{\frac{\mathrm{ax+b}}{\mathrm{cx+d}}}=\mathrm{t}$.

原式 $= \int_2^8 \sqrt{\frac{\text{x-2}}{\text{3x}}}\,\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{12\mathrm{t}^2}{(3\mathrm{t}^2\text{-}1)^2}\,\mathrm{dt}$.

$\frac{t^2}{(3\,t^2-1)^2} = \frac{t^2}{(\sqrt{3}\,t-1)^2\,(1+\sqrt{3}\,t)^2}$是有理分式, 分母能因式分解$\frac{t^2}{(3\,t^2-1)^2} = \frac{A}{\sqrt{3}\,t-1} + \frac{B}{(\sqrt{3}\,t-1)^2} + \frac{C}{\sqrt{3}\,t+1} + \frac{D}{(\sqrt{3}\,t+1)^2}$.

```
(dbm:3.) f(a):=sqrt((a-2)/(3*a))
```

$f(a) := \sqrt{\frac{a-2.}{3.\,a}}$

(dbm:3.) $\mathrm{jf}(a) := \mathrm{integrate}(f(a), a, 2, 8)$

$\mathrm{jf}(a) := \mathrm{integrate}(f(a), a, 2., 8.)$

```
(dbm:3.) jf(a)
```

$$\frac{-\log(\sqrt{2.}\,\sqrt{6.}+4.) + \log(\sqrt{2.}\,\sqrt{6.}-4.) - \log(-1.) + 2.^{\frac{3.}{2.}}\,\sqrt{6.}}{\sqrt{3.}}$$

```
(dbm:3.) zk(a):=integrate(f(a),a)
```

$\mathrm{zk}(a) := \mathrm{integrate}(f(a), a)$

```
(dbm:3.) expand(zk(a))
```

$$\frac{\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}\,a}{\sqrt{3.}} - \frac{\log\left(\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}+1.\right)}{\sqrt{3.}} + \frac{\log\left(\sqrt{1.-\frac{2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

```
(dbm:3.) factor(zk(a))
```

$$\frac{\sqrt{\frac{a-2.}{a}}\,a - \log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}+1.\right) + \log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

(dbm:3.) fullratsimp(zk(a))

$$\frac{\sqrt{\frac{a-2.}{a}}\,a-\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}+1.\right)+\log\left(\sqrt{\frac{a-2.}{a}}-1.\right)}{\sqrt{3.}}$$

(dbm:3.) \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{12t^2}{\left(3t^2-1\right)^2} \mathrm{d}t.

```
incorrect syntax: { is not an infix operator

\int_0^{\frac{

                ^
```

(dbm:3.) $\mathrm{hy}(t):=\frac{12\,t^2}{(3\,t^2-1)^2}$

$$\mathrm{hy}(t):=\frac{12.\,t^{2.}}{(3.\,t^{2.}-1.)^{2.}}$$

(dbm:3.) $\mathrm{jf}(t):=\mathrm{integrate}(\mathrm{hy}(t),t,0,1/2)$

$$\mathrm{jf}(t):=\mathrm{integrate}\left(\mathrm{hy}(t),t,0.,\frac{1.}{2.}\right)$$

(dbm:3.) $\mathrm{fullratsimp}(\mathrm{jf}(t))$

$$\frac{\sqrt{3.}\log\left(7.-4.\sqrt{3.}\right)+12.}{3.}$$

(dbm:3.) $\mathrm{trace}(\mathrm{hy}(t))$

trace: argument is apparently not a function or operator: $\mathrm{hy}(t)$

[]

(dbm:3.) step(hy(t))

```
incorrect syntax: ; is an unknown keyword in a do statement.

step(hy(t));

             ^
```

求系数A,B,C,D.(1) 两侧同乘$(\sqrt{3}\,t-1)^2\,(\sqrt{3}\,t+1)^2$,得
$t^2=A\cdot(\sqrt{3}\,t-1)\,(\sqrt{3}\,t+1)^2+B\cdot(\sqrt{3}\,t+1)^2+C\cdot(\sqrt{3}\,t+1)\,(\sqrt{3}\,t-1)^2+D\cdot(\sqrt{3}\,t-1)^2$.

使用留数法：令$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可得 $B=\frac{1}{12}$;令$t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 可得$D=\frac{1}{12}$. 使用赋值法：分别令$t=0$和$t=\sqrt{3}$,并代入B和D的值，解得：$A=\frac{1}{12},C=-\frac{1}{12}$

3.3.2 arccos的区间

(dbm:5) $\mathrm{ac}(x)\colon=\mathrm{acos}(\cos(x))$

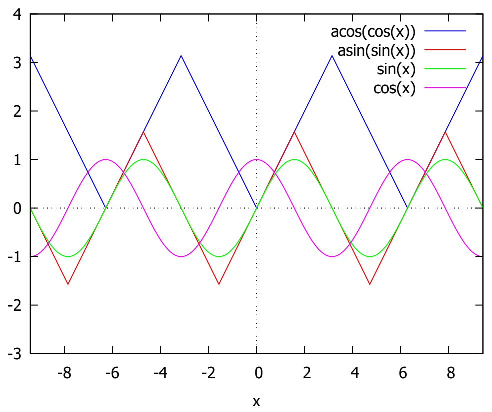
$\mathrm{as}(x) := \mathrm{asin}(\sin(x))$

$\mathrm{ac}(x) := \arccos\left(\cos\left(x\right)\right)$

(dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x), \mathrm{as}(x), \sin(x), \cos(x)], [x, \frac{7\,\pi}{2}, 4\,\pi], [y, -2, 3])$

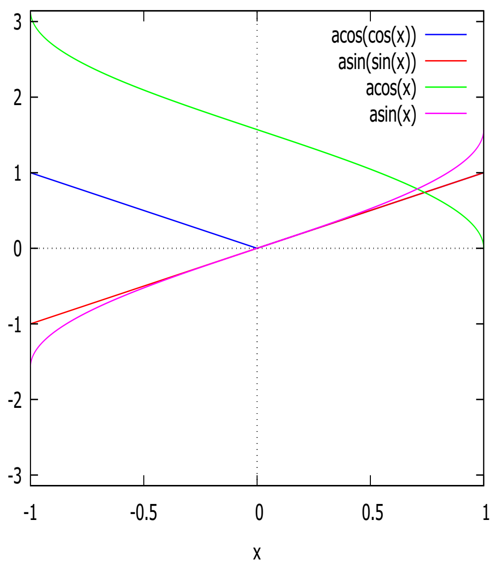
⟨image|⟨tuple|⟨raw-data⟩|pdf⟩|0.618par|||⟩true

(dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x), \mathrm{as}(x), \sin(x), \cos(x)], [x, -3\,\pi, 3\,\pi], [y, -3, 4])$



true

(dbm:5) $\mathrm{tm\_plot2}d([\mathrm{ac}(x), \mathrm{as}(x), \mathrm{acos}(x), \mathrm{asin}(x)], [x, -1, 1], [y, -\pi, \pi])$



true

(dbm:5) $\mathrm{as}(x) := \mathrm{asin}(\sin(x));$

$\operatorname{as}(x) := \arcsin(\sin(x))$

(dbm:5)

arcsin 的性质:$(\arcsin(\sin x)) = (2k-1)\pi - x, \arcsin(\sin(x)) = x - 2k\pi$
$\arcsin x$ 的值域是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin x)$等价于在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 中均到一点 x_0 使得$\sin x_0 = \sin x$
对$\frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{kx} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \pi)$ 最$\arcsin(\sin(x)) = (2k+1)\pi - x$对$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$, 有$\arcsin(\sin(x)) = x - 2k\pi$特
别对: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \arcsin(\sin x) = x$.
类似的 $\arccos x$ 的值域是$[0, \pi]$对$-\pi + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ 有$\arccos(\cos(x)) = 2k\pi - x$ 对 $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$有
$\arccos(\cos(x)) = x - 2\pi$($x$特别的, 对于 $x \in [0, \pi]$ 对于 $x \in [0, \pi]$的, 对于 $x \in [0, \pi]$的, 有 $\arccos(\cos(x)) = 2k\pi - x$对 $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$有

二重积分$\int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{8\pi}{3}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{1}{2}}^{\cos x} f(x, y)\mathrm{d}y$ 对应的积分区域为$D = \left\{(x, y) | \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}\pi, -\frac{1}{2} \leq y \leq \cos x\right\}$ 如图所示，是$y = -\frac{1}{2}$ 上方，$y = \cos x$下方，$x = \frac{5\pi}{2}$右侧的区域。交换积分顺序，将区域D 写为$a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)$的形式： 求$x$ 右边界. 在边界上 $y = \cos x$. 因为 $\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}\pi$, 故$\arccos(\cos(x)) = x - 2\pi$. 即 $\boldsymbol{x = \arccos(y) + 2\pi}$.则

$$D = \left\{(x, y) \mid \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \arccos(y) + 2\pi,\ -\frac{1}{2} \leq y \leq 0\right\}$$

3.4 曲率圆

曲率圆的导数性质：曲线L与曲率圆C在切点处的y, y', y''均相等。同理，x, x', x''也相等

曲线L: $y = f(x)$上点$(x_0, f(x_0))$处的曲率圆C: $y = c(x)$有如下性质:

1.过$(x_0, f(x_0))$,即$c(x_0) = f(x_0)$;

2.与L 在$(x_0, f(x_0))$ 处相切，即$c'(x_0) = f'(x_0)$;

3.与L 在$(x_0, f(x_0))$ 处有相同的曲率，根据曲率公式$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$可知$c''(x_0) = f''(x_0)$

即曲线L与曲率圆C在切点处的y, y', y''均相等。

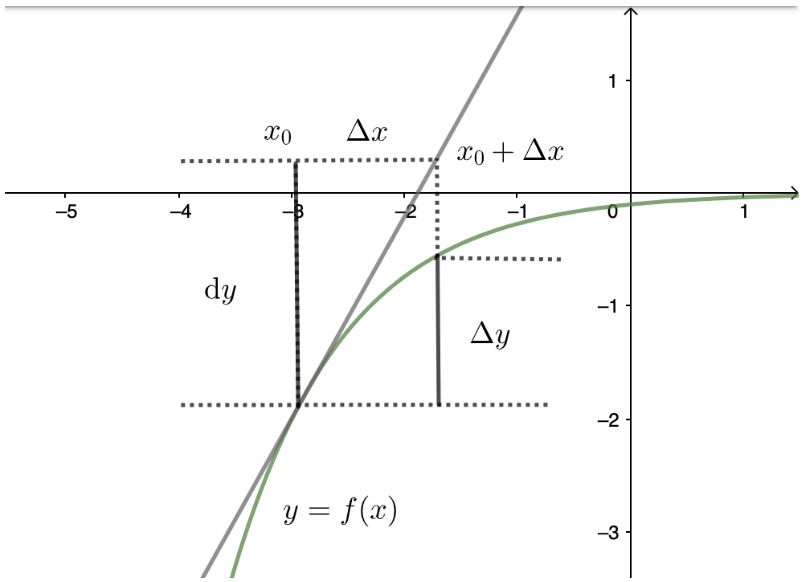
[常见题型]

题目给出L: $y = f(x)$上某一点的曲率圆，求$f(x)$表达式中的待定系数。 求解方法为：计算$c(x_0), c'(x_0)$,

$c''(x_0)$ 得到$f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,进而求解函数表达式。

[拓展] 同理，曲线L与曲率圆C在切点处的x,x',x''均相等。当$y'=\infty$无法求解系数时，用x,x',x''求解。

3.5 判断函数的凹凸性，并根据凹凸函数的图像性质求解



例 3.3.

设$f(x)=3^x+x$,且$f(x)=g(x)+h(x)$,其中 $g(x)$ 是奇函数，$h(x)$ 是偶函数，则 $h(1)=$

[分析] $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则$f(x)$ 可以写成奇函数和偶函数的和。

即$f(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

[解答]

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

则$h(1)=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{3^1+1+(3^{-1}-1)}{2}=\dfrac{5}{3}$

3.5.1 定积分计算

例 3.4.

求不定积分$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}\mathrm{d}x\\
=&-\int\frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}(\cot x)\\
=&-\int\sec^4 x\mathrm{d}(\cot x)\\
=&-\int(1+\tan^2 x)^2\mathrm{d}(\cot x)\\
=&-\int\left(1+\frac{1}{\cot^2 x}\right)^2\mathrm{d}(\cot x)\\
=&-\int 1+\frac{1}{\cot^4 x}+\frac{2}{\cot^2 x}\mathrm{d}(\cot x)\\
=&-\cot x+\frac{1}{3\cot^3 x}+\frac{2}{\cot x}+C\\
=&-\frac{1}{\tan x}+\frac{\tan^3 x}{3}+2\tan x+C
\end{aligned}$$

3.6 洛必达

例 3.5.

$\frac{2}{\pi}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[2f(x)+2]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[1+2f(x)+1]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f'(x)}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{\lim_{x\to 1}f'(x)}{-\frac{\pi}{4}}$,

故$\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi}=-\frac{1}{2}$.第三个等号用了$\ln(1+x)$的等价无穷小,第四个等号用了洛必达法则。由$f(x)$二阶可导,故$f'(x)$连续,则$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=-\frac{1}{2}$.

——————————————————————————————————————

++

第 4 章

高数基础

4.1 函数极限

4.1.1 极限的定义

[1996年真题]设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leq x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

A. 间断点 B. 连续而不可导的点 C. 可导的点，且 $f'(0)=0$ D. 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$

由 $|f(x)|\leq x^2$ 可知， $f(0)=0$. 由 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\frac{x^2}{|x|}=\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|$, 则 $\lim\limits_{x}\to 0\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0$. 又 $-\left|\frac{f}{(}x\right)x\right|\leq\frac{f(x)}{x}\leq\left|\frac{f(x)}{x}\right|$,由夹逼定理， $\lim\limits_{x}\to 0\,\frac{f(x)}{x}=0$,即 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

C 选项正确。

4.1.2 极限的证明题

$$\text{已知}\lim_{x\to 0}f(x)=0,\text{且}f(x)-f(2x)=o(x),\text{则}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$$

由无穷小的定义, $f(x)-f(2x)=o(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(2x)}{x}=0$
联系以上条件与结论 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 试将 $f(x)$ 裂项求和,写为
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})+f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})+\cdots}{x}$.
注意不能直接得出 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{4})}{x}+\cdots=0$, 因为有无穷多项。无穷个极限为 0 的项的和不一定为 0, 例如
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$.
所以用极限定义进一步得出: 每一项不但趋于0, 而且无穷小量在变小。

【证明】

由极限定义,对于任意 ε ,存在 δ使得当 $|x|<\delta$时,$\left|\frac{f(x)-f(2x)}{x}\right|<\varepsilon$,

即$|f(x)-f(2x)|=|f(2x)-f(x)|<\varepsilon|x|$

代入 $\frac{x}{2}$,则$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|<\varepsilon\left|\frac{x}{2}\right|=\frac{\varepsilon}{2}|x|$.

同理,有

$$\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4}|x|,$$
$$\left|f\left(\frac{x}{4}\right)-f\left(\frac{x}{8}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8}|x|,$$

主意 x是任意一个满足 $|x|<\delta$的数,将它看为常数。即 x 不变,令 $n\to\infty$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0$, 则

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= *l\,i\,m_{n\to\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \\
&=\lim_{n\to\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)+f\left(\frac{x}{4}\right)-\cdots+f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \\
&\le\lim{}_{n\to\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)\right|+\cdots+\left|f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \\
&\le\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon}{2}|x|+\frac{\varepsilon}{4}|x|+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^n}|x| \\
&=\varepsilon|x|\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon|x|
\end{aligned}$$

综上,当$|x|<\delta$时,$\frac{|f(x)|}{|x|}<\varepsilon$,

由极限定义,即$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.证毕。

4.1.3 一些写错的极限计算

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,则下列选项哪个是律误的?

A $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能为 1

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能小于 1

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能大于 1

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$时,$\frac{0}{0}$为不定式,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在,可能不存在。故 D正确。

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,当$a\neq0$时,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_{n\to\infty}}{\lim_{n\to\infty}x_n}=\frac{a}{a}=1$ 故 A正确。

令$x_n=a^n$, $(|a|<1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a<1$,故 B正确。

【证明 C错误】

反证:若$\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$, 由保号性,存在 N 使得当 $n>N$时,$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 极限不存在,与条件矛盾。

$$\lim_{x\to0^-}-\frac{\int_0^1\sqrt{2\text{-}2\cos\,(2xt)}\ dt}{x}$$

则左导数 $\varphi'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{\int_0^1\sqrt{2-2\cos(2\,\mathrm{xt})}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{\int_0^{2x}\sqrt{2-2\cos u}\,\mathrm{d}u}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{2\cdot\sqrt{2-2\cos(2x)}}{4x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{2\cdot\sqrt{4\sin^2x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}-\frac{|\sin x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

其中倒数第一个等号使用了$\sin x$的等价无穷小。

♡[2022年真题] 当$x\to 0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量，给出以下四个命题

(1)若$\alpha(x)\sim\beta(x)$,则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$;

(2)若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$,则$\alpha(x)\sim\beta(x)$;

(3)若$\alpha(x)\sim\beta(x)$,则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$;

(4)若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$,则$\alpha(x)\sim\beta(x)$

1. $\frac{\alpha}{\beta}=1,\frac{\alpha^2}{\beta^2}=1\times 1=1$

2. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=1\quad\frac{\alpha}{\beta}=\pm 1$

3 $\frac{\alpha}{\beta}=1\quad\frac{a-\beta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}=0$ yes

4 $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}=0\qquad 1-\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=0\quad\frac{\alpha}{\beta}=1$

♡wrong usually

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x 2t^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}-1\right)-t\,\mathrm{d}t}{\int_1^{x^2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)-x}{2x\cdot\arcsin\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)-x}{2x\cdot\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left[2x^2\left(\frac{1}{2x}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{4}+o(1)-x\right]\\
=&-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

例 4.1. $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{\ln|1+(x+1)|}{|x^3-x|}$,跳跃间断点。

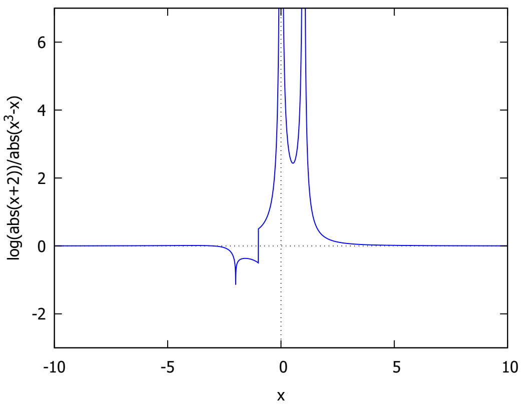
$x=-1$时,

右极限：$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(x+2)(x-1)\ln|1+(x+1)|}{x(x-1)(x+1)}$ = - $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+1}{x+1}$ = - 1左极限: $\lim\limits_{x}\to -1^-\ f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{(x+2)(x-1)\ln|1+(x+1)|}{x(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x+1}{1+x}=1$ 因为左、右极限存在但不相等，所以 $x=\pm 1$ 是$f(x)$的跳跃间断点

(%i1) $f(x):=\frac{\log(\mathrm{abs}(1+(x+1)))}{\mathrm{abs}(x^3-x)}$

(%o1) $f(x):=\frac{\log(|1+(x+1)|)}{|x^3-x|}$

(%i2) tm_plot2$d([f(x)],[x,-10,10],[y,-3,7])$



(%o2) **true**

(%i3)

4.1.4 极限的判定

设函数$f(x)$在(0,1]上连续，在(0,1)上可导，又设$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(1)=0$,用下列哪些定理可以证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=0$.

(1)费马定理;

(2)极限定义;

(3)夹逼定理;

(4)闭区间上连续函数的最值定理;

(5)函数可导，则区间内的最值为极值。

(原题为证明题，请写下完整证明，再作选择)

A. 1,4,5

B. 1，2，4，5

C. 1,3,5

D. 2, 3, 4

[分析]通常证明$f'(\xi)=0$,用罗尔定理。但这里的条件为$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(1)$,不符合罗尔定理，故用费马定理。 用费马定理证明$f'(\xi)=0$,只需证明 $(0,1)$区间内存在极值。

[证明]

分两种情况讨论:

1.函数$f(x)=0$,则$f(x)$ 在(0,1]上处处有$f'(x)=0$,命题得证。

2. 函数$f(x)$不恒为0，故存在$f(c)\neq 0$ 不失一般性，设$f(c)>0$.（如果设$f(c)<0$, 证法完全类似）由$\lim\limits_{0^+} f(x)=0$,根据极限定义，存在δ,使得当$\boldsymbol{0<x\leq\delta}$时，$|f(x)-0|<f(c)$ 由于在区间$(0,\delta]$上$|f(x)|<f(c)$,故c不在区间$(0,\delta]$上，即$\boldsymbol{c\in(\delta,1]}$ **由$\boldsymbol{f(x)}$在 $\boldsymbol{[\delta,1]}$ 上连续**，**根据闭区间上连续函数的最值定理**，$f(x)$在$[\delta,1]$ 上必取到它的最大值$f(\xi)$ 因为$f(\xi)$ 是最大值，故$f(\xi)\geq f(c)>f(\delta)>0$,则$\xi\neq\delta$且$\xi\neq 1$,即$\xi\in(\delta,1)$,在区间内。 因为$f(x)$ 在 $(\delta,1)$ 上可导，则区间内的最值为极值，故$f(\xi)$ 为极大值。 根据费马定理，如果极值点可导，则导数为 0,故$f'(\xi)=0$.

证毕。

(注：此命题是罗尔定理的推广)

以上证明依次用到了

(2)极限定义;

(4)闭区间上连续函数的最值定理;

(5)函数可导，则区间内的最值为极值。

(1)费马定理;

4.1.5 复合函数的奇偶性

例 4.2.

[2022年真题]设$-\frac{n}{2}\leq x_n\leq\frac{n}{2}$,则
A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.
B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在
C.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不一定存在.
D.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不一定存在.

判断复合函数奇偶性：内偶则止于偶，内奇则穿至外

意思是，内部函数为偶函数，则该复合函数就为偶函数。

内部函数为奇函数，则看外面的函数，

外面的函数为奇函数，则为奇函数，外面的函数为偶函数，则为偶函数

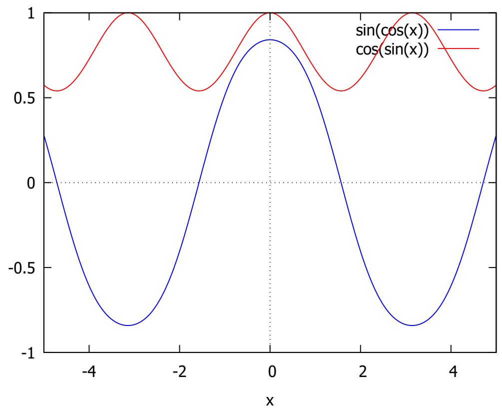
[分析]数列极限不存在的常见例子，1.反复横跳，2.趋于无穷。

由$-\frac{\pi}{2}\leq x_n\leq\frac{\pi}{2}$,则考虑$\{x_n\}$反复横跳，最常用的例子是：$x_n=\begin{cases}1 & n\text{为奇数},\\ -1, & n\text{为偶数。}\end{cases}$

若$f(x)$为偶函数，且$f(1)=f(-1)=c$存在，则$\{f(x_n)\}$为常数数列，即$\{f(x_n)\}$收敛。

由于$\cos x,\cos(\sin x),\sin(\cos x)$都是偶函数,
则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$均为常数数列,故存在。
但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在。
而$\sin x$为奇函数,$\sin 1\neq\sin(-1)$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$不存在。

```
(%i3) tm_plot2d([sin(cos(x)),cos(sin(x))],[x,-5,5],[y,-1,1])
```



(%o3) **true**

(%i4)

原理很简单，以图像的方式来说就是，正常画图时我们默认的x是从负无穷到正无穷，可以把x本身看做一个奇函数，然后此时y该是什么函数就是什么函数，也就是内奇同外，然后看内层函数为偶函数的函数，可以使坐标轴横轴左右对称，让x为偶函数，也就是从左到右依次为正无穷，0，正无穷，也就是说，此坐标图上的右侧不变，左侧对称过去，此时无论外层函数为奇函数还是偶函数，对称过去都是偶函数，也就是内偶则偶。

4.1.6 复合函数的极限定理

设$f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义。若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 且存在$\delta_0>0$, 当$x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有$g(x)\neq u_0$,(条件 (1)) 则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

若不存在一个去心邻域使得$g(x)\neq u_0$, 则任何去心邻域里都可能有无穷多个无定义的点，由它们组成的子数列必然无极限，故原数列极限不存在。例如：令 $g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(u)=\frac{\sin u}{u}$, 有 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=1$.

[为什么需要条件(1)?]

因为$f(u_0)$可能无定义。条件中只给出$\lim\limits_{u} \to u_0\, f(u)=A$, 而极限存在不代表$f(u_0)$ 有定义。但复合函数$f(g(x))=\frac{\sin\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$在$g(x)=0$时无定义。而当$x=\frac{1}{n\pi}$时，$g(x)=x\sin(n\pi)=0$.故无论 δ多么小，在 $x=0$ 的 δ 去心邻域$\mathring{U}(0,\delta)$ 内，$g(x)$ 在无穷多个点上为 0,而$f(g(x))$ 在这些点上无定义。

题目 4.1.

若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=c$, 其中 c 为常数或 ∞, $\lim\limits_{u\to c} f(u)=1$, 则下列哪个选项是正确的?
A. 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$必不存在
B. 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$必存在
C. 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$必存在
D. 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 趋于无穷,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$可能不存在

选项 C 中,因为 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=c$, 其中 c 为常数或 ∞, 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 不存在,则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty$
则在 $x=0$ 的任何去心邻域内,都有 $g(x)\neq\infty$, 满足条件 (1), 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=1$, 极限存在
选 C.
【其余选项】
B: 与定理比较,缺少条件(1),故错误。
D. 若 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 趋于无穷,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 必存在。故 D错误。

4.1.7 重要极限∞^0

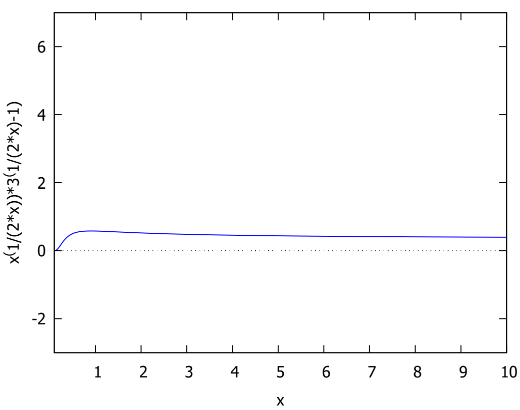
例 4.3. 令 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+e^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\ln(1+2\sin x)}=C$, 求$\ln C$.

$$*lim_{x\to 0^+}\ln\left[\left(1+e^{\frac{1}{\sin x}}\right)^{\ln(1+2\sin x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+2\sin x)\cdot\ln\left(1+e^{\frac{1}{\sin x}}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to 0^+}2(\sin x)\ln\left(1+e^{\frac{1}{\sin x}}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{2\ln(1+e^u)}{u}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{2\ln(1+e^u)}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2\ln[e^u(e^{-u}+1)]}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u+2\ln(e^{-u}+1)}{u}=2+\lim_{u\to+\infty}\frac{2\ln(e^{-u}+1)}{u}=2+0=2.$$
所以$C=e^2$, 即$\ln C=2$.

例 4.4.

(%i2) $\mathrm{tm\_plot2}d([\frac{(3x)^{\frac{1}{2x}}}{3}],[x,0.1,10],[y,-3,7])$



(%o2) **true**

(%i3)

4.1.8 $\dfrac{\infty}{\infty}$

题目 4.2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{n^2+n+1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{2}-1)=$$

首先化简。

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{n^2+n+1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{2}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}(\sqrt[n]{2}-1)$

第三步用了 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$,并上下同除 n^n.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}(\sqrt[n]{2}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}(\sqrt[n]{2}-1)$,即数列极限 =函数极限。

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}(\sqrt[n]{2}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e}\left(e^{\frac{\ln 2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e}\left(\frac{\ln 2}{x}\right)=\frac{\ln 2}{e}$

第一步用了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$,第二步用了$e^x-1$的等价无穷小。

4.1.9 1^∞

例 4.5. 令$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\arctan x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=C$,求$\ln C$. $=\frac{2}{3}$

[分析]

首先检验，由$\tan x$ 和 arctan$x$ 的等价无穷小，有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$, 又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\frac{1}{0}=\infty$, 故这是 1^∞ 的类型三极限。 最常用的方法是将给定函数写成$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的形式，然后使用重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

也可以直接使用结论，设$\lim\limits_{x}\to x_0\,\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\,\beta(x)=A$,

则

$$\lim{}_{x->x_0}(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim{}_{x->x_0}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\beta(x)}=e^A$$

4.1.10 复合函数

]

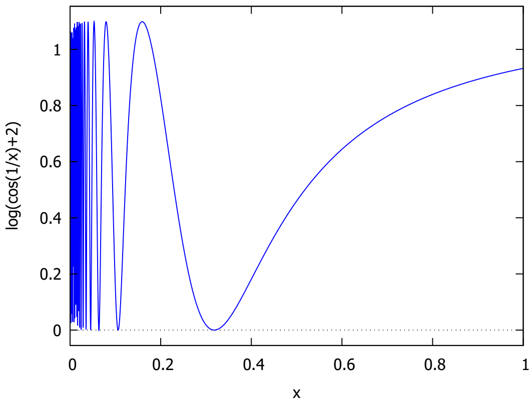
因为$\ln\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2\right]$是复合函数，故利用复合函数的单调性质，“同增异减”。

[解答]

又因为$x+2$单调增加，故$\cos(1)$

因为$\dfrac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上单调减少，其值域范围是(0,1),且$\cos x$在(0,1)上单调减少，故$\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$在$(1,+\infty)$上单调增加.

$+2$ 单调增加；因为 $\ln x$ 单调增加，故$\ln\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+2\right]$单调增加。



true

4.2 $f(x,y)$在$f(0,0)$处

连续?偏导数存在?偏导数连续?可微分?

二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \qquad\qquad\quad ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ $=$上

在点(0,0)处

A. 不连续

B. 连续但偏导数不存在

C. 连续且偏导数存在但不可微

D. 可微

$\pm\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leq 1$,则 $\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\leq\dfrac{1}{4}$,即 函 数 有 界 , $=\dfrac{1}{4}$,即 函 数 有 界 , 而$\lim_{x}\to 0\, y=0$,故与有界函数的积为 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot y=0$. 则$*l\,i\,m_{(x,v)\to(0,0)}\,f(x,y)=f(0,0)$,即在点 (0,0) 处连续。

偏导数本质上是一元函数的导数。定义一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$, 则$f_x'(x_0,y_0)=\varphi'(x_0)$. 易见当$x,y\neq 0$时，$f(x,0)=f(0,y)=0$,则对应的一元函数连续且恒等于0. 故$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$,偏导数存在。

判定可微:

令$u=[f(x,y)-f(0,0)]-[f'_x(0,0)\,x+f'_y(0,0)\,y|=f(x,y)$,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

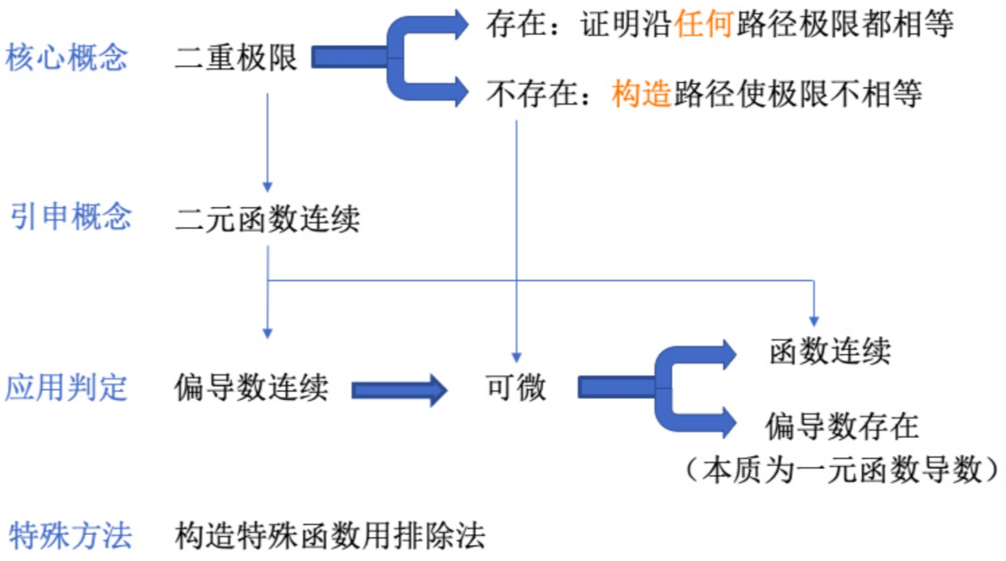
则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{u}{\rho}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

令$y=k\,x$,则 $\lim\limits_{y\to y\to 0}\dfrac{x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^3\,x^5}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\,x^5}=\dfrac{k^3}{(1+k^2)^{\frac{5}{2}}}$,

与k的取值有关,故极限 $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\dfrac{u}{\rho}$不存在,

则$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微。

综上,$f(x,y)$在$(0,0)$处连续且偏导数存在但不可微。



4.3 数列极限

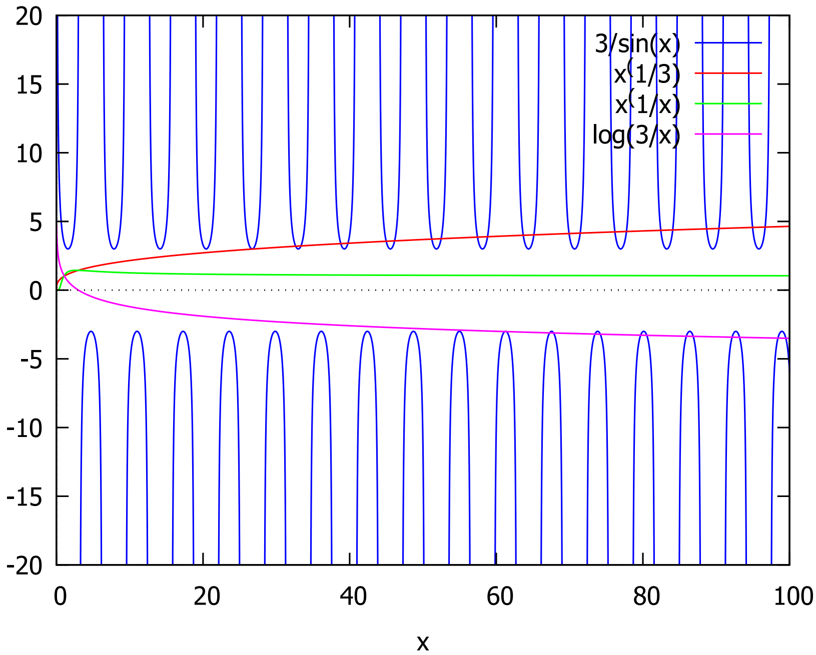
下列条件中有几个是$\lim\limits_{n}\to\infty\, x_n=A$ 的充分条件，几个是必要条件?

(1) $*lim_{n\to\infty}\ x_{2n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{2n-1} = A.$
(2) $*lim_{n\to\infty}\ x_{3n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{3n+1} = *lim_{n\to\infty}\ x_{3n-1} = A.$
(3) $*lim_{n\to\infty}\ x_{4n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-1} = A.$
(4) $*lim_{n\to\infty}\ x_{4n} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-1} = *lim_{n\to\infty}\ x_{4n-2} = A.$

(1)(2)是充要条件,包含了全部子数列，命题 (4)中,未出现的子数列 $\{x_{4n-3}\}$可能发散,故原数列可能发散。故不是充分条件。

例 4.6.

(%i4) $\mathrm{tm\_plot2}d([\dfrac{3}{\sin(x)},x^{\frac{1}{3}},x^{\frac{1}{x}},\log\left(\dfrac{3}{x}\right)],[x,0,100],[y,-20,20])$



(%o4)

true

3.926 sec

(%i5)

4.3.1 极限存在证明

设$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_k =1^n f(k)-\int_1^n f(x)$ $\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$ 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。[解析] 1. 证明极限存在，想到用单调有界定理，需要证明 $\{x_n\}$ 单调且有界。 2. 证明数列$\{x_n\}$的单调性，需证明对于任意n, 都有$x_n\geq x_{n+1}$或$x_n\leq x_{n+1}$. 3. $f(x)$ 单调减，则有$f\,(k+1)\leq\int_k^k +1\ f(x)\mathrm{d}x\leq f(k)$

4.3.2 极限的最值问题

例 4.7.

已知 $a_n=n\ln{(1+n)}-n\ln{n}, n=1,2,\cdots$, 则数列 $\{a_n\}$
A. 有 最 大 值, 有 最 小 值
B. 有最大值,没有最小值
C. 没有最大值,有最小值
D. 没有最大值,没有最小值

【分析】将数列分成两部分考虑: 有限的前N项，与n>N的无限项。

前N项是有限数列，则必是有界数列，则这N项的最大值与最小值存在。

对于后面的无限项，有以下情况:

1. 数列极限不存在。若 $\lim\limits_{n\to n^+}=+\infty$, 则最大值不存在; 若 $\lim\limits_{n\to n^+}=-\infty$, 则最小值不存在。

2. 数列极限 $\lim\limits_{n\to n^+}=A$存在, 则由极限定义, 后面的无限项都在极限的ε范围内。

(2.a) 若数列中存在 a_i 使得 $a_i<A$, 则最小值存在。同理若存在 a_j 使得 $a_j>A$, 则最大值存在。

(2.b) 若数列中不存在 a_i 使得$a_i<A$, 则最小值不存在。同理若不存在 a_i 使得 $a_i>A$, 则最大值不存在。

例如 $\frac{1}{n}$, 其极限是 0 , 但是任意 $a_i>0$, 则最小值不存在。

先求数列极限:
$n\ln(1+n)-n\ln n=n\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
由海涅定理, $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1.$
故由极限定义,对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 恒有$|\alpha_n-1|<\varepsilon$. 即 $n>N$时, a_n 和 1 的差距最大不超过 ε.

判断最大值是否存在:
对于$x>0$, 有$\ln(1+x)<x$, 即$\frac{\ln(1+x)}{x}<1$. 令$x=\frac{1}{n}$,则有$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$. 即$a_n<1$.
则对于任意 a_i,总能找到一个 a_n,使得 $a_n>a_i$.
证明如下 取足够小的 ε,使得 $\alpha_i<1-\varepsilon$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|\alpha_n-1|<\varepsilon$. 因为 $\alpha_n<1$, $|\alpha_n-1|=1-a_n<\varepsilon\Rightarrow a_n>1-\varepsilon>a_i$.
证毕。
即数列中不存在最大值。

for this 因此我们将数列分成了两部分(1) 有限的前N项;与(2) $n>N$ 的无限项,其中所有 a_n 都大于 a_1.

4.3.3 极限的不等式性质（保号性的推广）

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$.

1. **若** $A>B$,则存在$N>0$,使得当$n>N$时，有$a_n>b_n$.

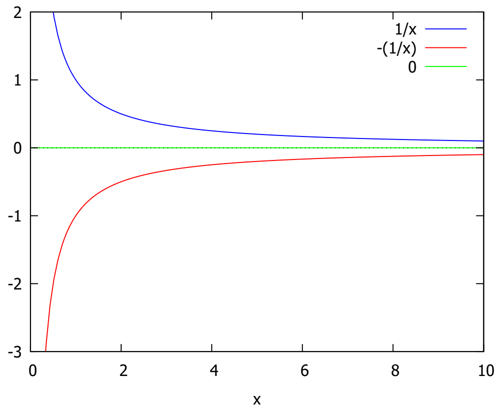
2. **若 存 在** $N>0$, **使 得 当** $n>N$时，有$a_n\geq b_n$, **则** $A\geq B$.

[注意]

1.若$A\geq B_1$,不能得出存在$N>0$,使得当$n>N$时，有$a_n\geq b_n$. 反例：$a_n=0$,$b_n=\frac{1}{n}$,则$A=B=0$,但$\forall n$,有$a_n<b_n$.

2.若存在$N>0$,使得当$n>N$时，有$a_n>b_n$,不能得出$A>B$. 反例：$a_n=0$, $b_n=-\frac{1}{n}$,则 $\forall n$,有$a_n>b_n$,但$A=B=0$.

(%i8) tm_plot2$d([\frac{1}{x},\frac{-1}{x},0],[x,0,10],[y,-3,2])$



(%o8) **true**

1.022 sec

(%i9)

[拓展]

1.令$b_n=0$,则得到收敛数列的保号性：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,若$A>0$,则存在$N>0$,使得当$n>N$时，有$a_n>b_n$.

2.类似的，有函数极限的不等式性质：设$\lim\limits_{x}\to x_0\, f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

1)若$A>B$,则存在 $\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>g(x)$.

2) 若存在 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)\geq g(x)$,则$A\geq B$.

4.4 斜渐近线

4.4.1 一阶线性微分方程

例 4.8.

45

设 $y=y(x)$ 满足 $y'+y=\frac{2}{\pi}\arctan(e^x)$, 且 $y(0)=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{\pi}$.
设 $y(x)$ 有 n 条渐近线,除了铅直渐近线以外,其余所有渐近线的斜率的和为 A,所有渐近线与 y 轴交点的纵坐标的和为 B,求
$A+B+n$.

$$y=e^{-x}\left(\int\frac{2}{\pi}\arctan(e^x)\cdot e^x\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}e^{-x}\left(e^x\arctan(e^x)-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}(2\arctan(e^x)-e^{-x}\ln(1+e^{2x})+C_1)$$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan(e^x)-e^{-x}\ln(1+e^{2x})}{x}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan(e^x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\ln(1+e^{2x})}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\ln(e^{2x}\cdot(e^{-2x}+1))}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(0-\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}(\ln(e^{2x})+\ln(e^{-2x}+1))}{x}\right)$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\cdot(2x+e^{-2x})}{x}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\cdot 2x}{x}$$
$$=0.$$
$$b=*lim_{x\to+\infty}y(x)-ax$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi}(2\arctan(e^x)-e^{-x}\ln(1+e^{2x}))-0\cdot x$$
$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}(2\arctan(e^x)-e^{-x}\ln(1+e^{2x}))$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(1+e^{2x})\right)$$
$$=1-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(e^{2x}(e^{-2x}+1))$$
$$=1-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(\ln(e^{2x})+\ln(e^{-2x}+1))$$
$$=1-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}e^{-x}(2x+e^{-2x})$$
$$=1-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot 2x=1-\frac{1}{\pi}\cdot 0$$
$$=1\ .$$
则 $x\to+\infty$ 时的渐近线方程为 $y=1$.

令 $x\to-\infty$ 时的渐近线方程为 $y=cx+d$,有

$y=0$

4.5 连续与可导

设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 1, & x=\pi\\ -1, & \pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 则

$A.\ x=\pi$ 是函数 $F(x)$的跳跃间断点

$A.\ x=\pi$ 是函数 $F(x)$的跳跃间断点

$B.\ \ x=\pi$ 是函数 $F(x)$的可去间断点
$C.\ \ F(x)$ 在 $x=\pi$处连续但不可导
$D.\ \ F(x)$ 在 $x=\pi$处可导

[分 析] $\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ 是 变 上 限 积 分 , 利 用 变 上 限 积 分 的 性 质 判 断 。 [知 个]

[解

判断连续性：因为$f(x)$ 除有限个第一类间断点 $(x=\pi)$ 外处处连续，故$f(x)$ 可积。则$\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$ 为连续函数

判断可导性：变上限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在某一点的左右导数等于被积函数$f(x)$ 在这一点的左右极限。由于$\lim_x\to\pi^-\ f(x)=\cos\pi=-1\ \ *l\,i\,m_{x\to\pi^+}\,f(x)=-1$, 即$\lim_x\to\pi^-\ f(x)=\lim_{x\to\pi^+}f(x)$, 故$\boldsymbol{F'_{\pi^{-1}}(x)}=\boldsymbol{F'_{\pi^+}(x)}$.左右导数相等，故$F(x)$在$x=\pi$处可导。 综上，$F(x)$在$x=\pi$处连续可导，故选$D$

例 4.9. 已知$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,则$f(x)$

A. 在 $x=1,x=-1$处都连续

B. 在$x=1$处连续，$x=-1$处不连续

C. 在$x=1,x=-1$ 处都不连续。

D. 在$x=1$处不连续，$x=-1$处连续

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{当}|x|<1\\ 0 & \text{当}|x|>1\\ 0 & \text{当}x=-1\\ 1 & \text{当}x=1\end{cases}$$

2.分析$f(x)$在$x=1$处的连续性：左 极 限 : $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}1+x=1+1=2$, 但$f(1)=1$,故$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq f(1)$, 因此，函数在$x=1$处不连续。

3. 分 析 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处 的 连 续 性 : 因 为 当 $x\to-1^-$,即 $x<-1$,此 时 $|x|>1$,所 以 $f(x)=0$, 则左极限：$\lim_{x\to-1^-}f(x)=0$, 右 极 限 : $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}1+x=1+(-1)=0$, 函数值：$f(-1)=0$,

综上

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=0$$

因此，函数在$x=-1$处连续。

4. 最终结论：$f(x)$在$x=1$处不连续。$f(x)$在$x=-1$处连续。

例 4.10.

[2001 年 真 题] 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$处 可 导 的 充 要 条 件 为

$\mathbb{A}.\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在

$\mathbb{B}.\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在

$\mathbb{C}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在

$\mathbb{D}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在

【其余选项】
选项 A:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}.$$

由于当$h\to 0$时,$1-\cos h\to 0^+$,则$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在$\Leftrightarrow f'_+(0)$(右导数)存在。

选项 C:

若取$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$,显然$f(x)$在$x=0$处不可导

但$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{(h-\sin h)^{\frac{2}{3}}}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h-\sin h}{h^3}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$存在。

故选项 C 错误。

选 项 D:

若取$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,显然$f(x)$在$x=0$处不可导,因为$f(x)$在$x=0$处不连续,

但$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$存在。

故选项 D 错误。

4.5.1 导数无定义

已知$f(x)$连续,且$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+(\Delta x)^2)-f(x_0-(\Delta x)^2)}{(\Delta x)^2}=6$,则关于$f'(x_0)$正确的是:

$f'(0^+)+f'(0^-)=6$不能得出$f'(0)=6$

4.5.2 $\lim_{n\to\infty}(a_1^n+\cdots a_m^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\le i\le m}\{a_i\},(a_i>0)$

例 4.11.

[2005年真题]设函数$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内不可导点的个数为.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1.\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$

4.6 方程实根数

[2011年真题]设k为参数,则关于方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数,说法正确的是:

(注:考试中本题型为证明题,选择正确后需要对比详细过程)

A. 若$k>0$,则方程有 2 个实根;若$k\le 0$,则方程有 1 个实根

B. 若$k\ge 0$,则方程有 1 个实根;若$k<0$,则方程有 2 个实根

C. 若$k>1$,则方程有 3 个实根;若$k\le 1$,则方程有 1 个实根

D. 若$k\ge 1$,则方程有 1 个实根;若$k<1$,则方程有 3 个实根

[分析]

判定方程根的个数，一般通过求导判断函数形态，利用单调性和介值定理判定。 题目中函数的单调性受到k的影响。此类问题有两种解法： 1.分情况讨论：对于不同的k,判断单调区间的情况； 2.分离参数法：先将方程化为$g(x)=k$的形式，再讨论$g(x)$的形态。 如果可以分离参数，则尝试分离参数法。如果不能分离参数，或分离参数后$g(x)$的导数不易分析，则使用分情况讨论的方法。 本题参数可以分离，得到$g(x)=k$的形式，但$g'(x)$不容易分析，故建议分情况讨论。

4.6.1 分情况讨论

$f(x)$的无定义点,$+f'(x)$的无定义点$+f'(x)=0$的点(驻点)

$f(x)$是否为奇函数,偶函数,对称区间,$f(0)=0$?

实数解$\rightarrow x=g(k)\rightarrow$划分单调区间$\rightarrow$

通过单调区间判断函数零点,

先考察各单调区间的端点是否为零点,再考察每个区间内部的零点:

4.6.2 参数分离

$g(x)=k$ 的根个数$\rightarrow$对$g(x)$求导$\rightarrow$大致绘制$g(x)$的图像(主要$g(x)$在区间的单调情况)

和$g(x)_{\min}$和$g(x)_{\max}$或者$\lim\limits_{x\rightarrow ?}g(x)=$

$\lim\limits_{x\rightarrow 2}f(x)=5$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\rightarrow}\lim\limits_{x\rightarrow\infty}$

4.7 绝对值|X|

判断绝对值函数在一点是否可导，有两个重要推论，做选择题时可以直接应用： 1. $\varphi(x_0)=0$ 且 $\varphi'(x_0)\neq 0\Leftrightarrow x_0$ 是$|\varphi(x)|$的不可导点；

2. $f(x)=|\varphi(x)|\,g(x),|\varphi(x)|$在$x=x_0$处不可导但$\varphi(x)$可导，且$g(x)$在$x=x_0$处连续，则综上，令$\varphi(x)=x^2-1,g(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)\,(x-3)}$,找$f(x)$的不可导点，即 1.找$\varphi(x)=0,\varphi'(x)\neq 0$且$g(x)\neq 0$的点。2.找$g(x)=0$, $g'(x)\neq 0$且$\varphi(x)\neq 0$的点。$f(x)$在$x=x_0$处可导的充要条件是$g(x_0)=0$.

```
loadfile: loading C:\Program Files\XmacsLabs\MoganResearch-1.2.9.5\plugins\maxima\lisp\
texmacs-maxima.lisp.
Loading C:/Users/admin/maxima/maxima-init.mac


Maxima 5.47.0 https://maxima.sourceforge.io
using Lisp SBCL 2.3.2
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

(%i12) `h:sin(x);`

(%o12) $\sin(x)$

(%i13) `h_abs:abs(h);`

(%o13) $|\sin(x)|$

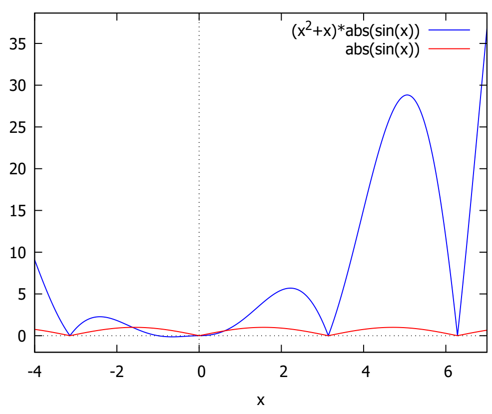
(%i20) $g: x^2 + x$

(%o21) $x^2 + x$

(%i22) `f:g*h_abs;`

(%o22) $(x^2 + x)\,|\sin(x)|$

(%i28) `tm_plot2d([f,h_abs],[x,-4,7])`



(%o28) **true**

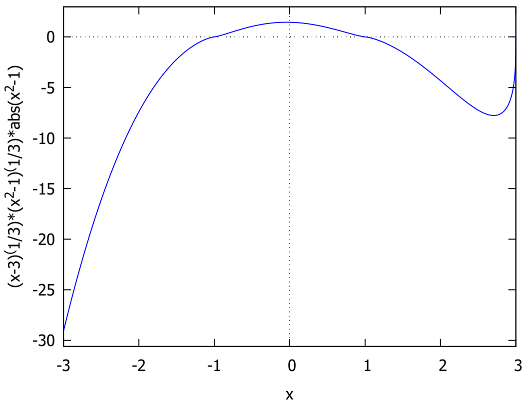
(dbm:4) `kill(all)`

done

(dbm:4) $f\colon \mathrm{abs}(x^2-1)\sqrt[3]{(x^2-1)\,(x-3)}$

$(x-3)^{\frac{1}{3}}\,(x^2-1)^{\frac{1}{3}}\,|x^2-1|$

(dbm:4) $\mathrm{tm\_plot2}d(f,[x,-3,3])$



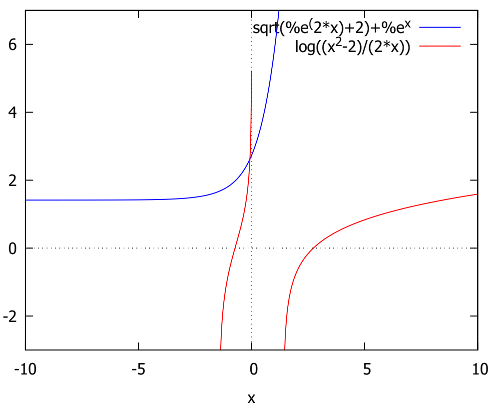
true

(dbm:4)

(%i7) `kill(all)`

(%o0) **done**

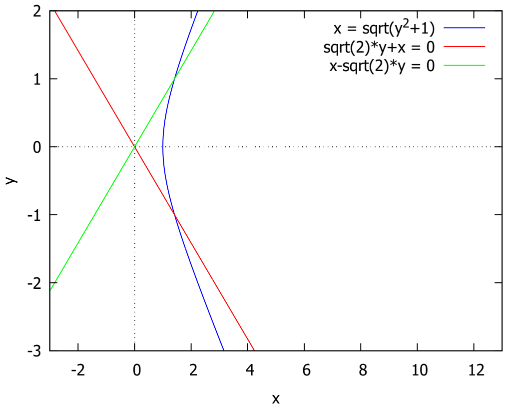
(%i3) $\mathrm{tm\_plot2}d([(\%e^{2x}+2)^{\frac{1}{2}}+\%e^{x},\log\left(\frac{x^2-2}{2\,x}\right)],[x,-10,10],[y,-3,7])$



(%o3) **true**

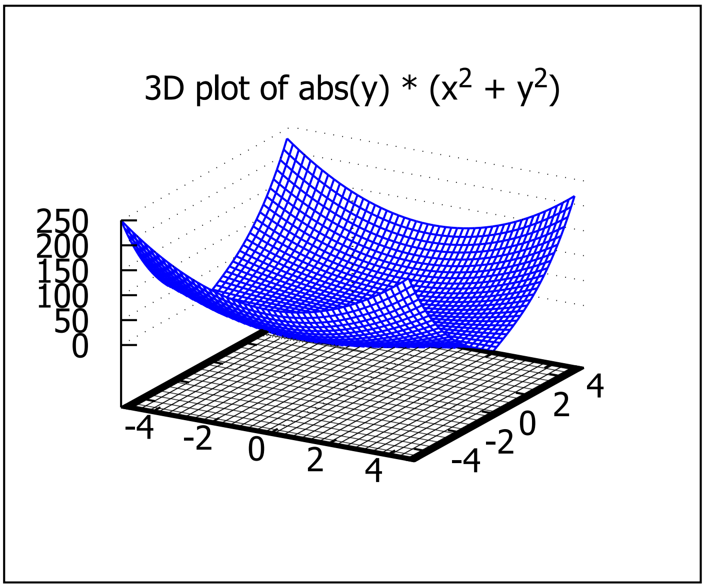
[2010年真题]计算二重积分$\iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D$ 由曲线$x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线$x+\sqrt{2}\,y=0$ 及$x-\sqrt{2}\,y=0$ 所围成。

(%i7) $\mathrm{tm\_plot2}d([x=(1+y^2)^{\frac{1}{2}}, x+\sqrt{2}\,y=0, x-\sqrt{2}\,y=0],[x,-3,13],[y,-3,2])$



(%o7) **true**

(%i26)
```
tm_draw3d(
surface_hide = true,
explicit(abs(y)*(x^2+y^2), x,-5,5,y,-5,5),grid = [50, 50], xaxis = true, yaxis =
true, zaxis = true,title = "3D plot of abs(y) * (x^2 + y^2)" );
```



(%o26) **true**

(%i27)

4.7.1 区间再现与绝对值

$$\text{设} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\cos t|\,dt = A, \text{求 } 7\,A\cdot\pi.$$

思路一：积分$\int_0^x t|\cos t|\ \mathrm{d}t$ 中有绝对值号，先根据积分区域脱去绝对值号。由$\cos t$ 在$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ 变号，故先考虑$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$.此思路也适用于其

[分析]由$\cos t$ 是周期函数，先考虑x 为特殊值时的极限，如$x=n\pi$,或$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$,再考虑任意x. 它函数，例如$\int_0^x t^3|\cos t|\mathrm{d}t$.

思路二：利用函数$t|\cos t|$的特殊性质，即t为一次幂，结合区间再现公式简化计算：$\int_0^{n\pi} t|\cos t|\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\cos t|\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi} n\pi|\cos t|\mathrm{d}\ -\int_0^{n\pi} t|\cos t|\mathrm{d}t$.注意区间再现对其它函数，例如$\int_0^x t^3|\cos t|\mathrm{d}t$ 无法简化计算。

2. 任 意 , x. 若 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x t|\cos t|\ \mathrm{d}t$ 极 限 存 在 , 则 任 意 x 的 极 限 与 x 在 特 殊 值 的 极 限 相 同 。

1） $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$,那么上下限区间取，$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right]$ 化简积分，$\cos(k\pi)=(-1)^k$代入，$\sum_{k=0}^{n-1}$，$\frac{n(n-1)}{2}$.

2) 区间再现，取上下区间 $[n\pi,0]$ $f(a+b-x)$ （首先尝试）

3) 夹逼定理，大题必须有，小题忽略。

4.8 中值定理

4.8.1 构建辅助函数

[注：]以下用标准方法构建辅助函数。用罗尔定理证明复杂函数的等式，先构建辅助函数。将上式写成$h'(\xi)+\phi(\xi)\,h(\xi)=0$的形式，则$h(\xi)=f(\xi),\phi(\xi)=\frac{g''(\xi)}{g'(\xi)}$,辅助函数$F(x)=e^{\int\phi(x)\mathrm{d}x}\,h(x)=e^{\ln g'(x)}\,f(x)=g'(x)\,f(x)$.

4.8.2 罗尔

设奇函数$f(x)$ 在$[-a,a]$上具有二阶导数，且$f(a)=ka$. 求常数k 的值，使得对于任何满足条件的$f(x)$,都存在$\eta\in(-a,a)$,使得 $2f'\prime(\eta)+f'(\eta)=5$

$F'(x)=2f''(\eta)+f'(\eta)-5$

$F(x);F(a)=F(-a);\qquad f(a)=-f(-a),f'(a)=f'(-a)$

4.8.3 拉格朗日与递推不等式

例 4.12.

已知函数$f(x)$可导,且$\frac{1}{6}<f'(x)<\frac{1}{3}$,设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=2f(x_n)-a,(n=1,2,\ldots n,a\in\mathbb{Z})$,则

$x_{n+1}=2\,f(x_n)-a$ 为递推数列,则 $x_{n+1}-x_n=2\,[f(x_n)-f(x_{n-1})]$.

因为题设给定$f'(x)$,想到用拉格朗日中值定理,得到递推不等式。

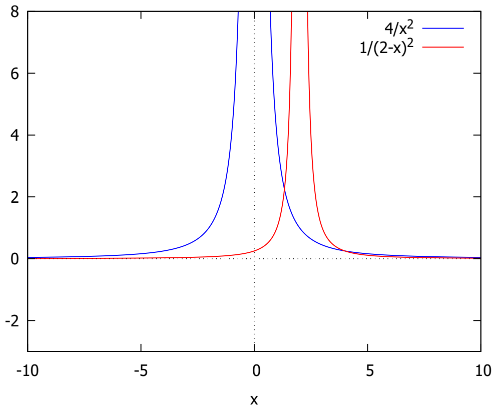
$$\begin{aligned}
&\text{由 } x_{n+1}=2\,f(x_n)-a, \text{得到 } x_{n+1}-x_n=2\,[f(x_n)-f(x_{n-1})]\\
&f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi)\,(x_n-x_{n-1}),\\
&\text{故 } x_{n+1}-x_n=2\,[f(x_n)-f(x_{n-1})]=2\,f'(\xi)\,(x_n-x_{n-1}),\\
&\text{即 } \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=2\,f'(\xi).
\end{aligned}$$

$\frac{1}{3}<\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n-x_{n-1}|}<\frac{2}{3}$ $|x_{n+1}-x_n|>\frac{1}{3}|x_n-x_{n-1}|$,得到递推不等式。

$$\begin{aligned}
&|x_{n+1}-x_n|>\frac{1}{3}|x_n-x_{n-1}|>\left(\frac{1}{3}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}|>\cdots>\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|x_2-x_1|.\\
&\text{则}|x_{n+1}-x_n|>\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}|x_4-x_3|=\frac{27}{3^n}|x_4-x_3|.
\end{aligned}$$

4.8.4 图像与中值定理

设$f(x)$在$[0,2]$上连续, 在$(0,2)$ 内存在二阶导数, 并设$f(0)=3$, $f(2)=\frac{3}{2}$, $\min\limits_{[0,2]} f(x)=1$. 可以证明存在$\xi\in(0,2)$,使得 $f''(\xi)\leq c$, (c 为常数)求c 的最小值, 使不等式对任意满足条件的$f(x)$ 都成立。



true

4.8.5 不同区间上的拉氏

题目 4.3.

已知函数$f(x)$在 $[0,1]$上连续,在 $(0,1)$ 上可导,且$f(0)=0$, $f(1)=1$.

证明:对任意的 $a>0,b>0$, 存在 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $\frac{a}{f'(\eta)}+\frac{b}{f'(\zeta)}=a+b$.

【分析】题目没有明确要求 $\eta\neq\zeta$, 但$\frac{a}{f'(\eta)}+\frac{b}{f'(\zeta)}$为相加的形式,故这是不同区间上的双中值问题。

题目没有给出区间,需要自选区间。因为$f'(\eta)$, $f'(\zeta)$在分母中,$\frac{a}{f'(\eta)}+\frac{b}{f'(\zeta)}=\frac{1}{\frac{f'(\eta)}{a}}+\frac{1}{\frac{f'(\zeta)}{b}}$,将$f(x)$的值在 $(0,1)$ 上分为长度为 a: b的两个区间,即选 ξ 使得 $f(\xi)=\frac{a}{a+b}$.

Q: $f'(\eta)$, $f'(\zeta)$在分子呢?

A: 将$[a,b]$区间分为a: b的两个区间 $\xi=\frac{a}{a+b}$ 令拉式分母相等。

首先证明存在一点 ξ 使得$f(\xi)=\frac{a}{a+b}$

因为$a>0,b>0$,有$a+b>0$.所以$\frac{a}{a+b}>0$ 因为$a<a+b$,所以$\frac{a}{a+b}<1$. 令函数$f(x)$ 在[0,1] 的最大值为 M,最小值为 m.因为$f(0)=0, f(1)=1$,有$m\leq 0, 1\leq M$ 综上

$m\leq 0<\frac{a}{a+b}<1\leq M.$

根据连续函数介值定理，存在$\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)=\frac{a}{a+b}$

在$(0,\xi)$上用拉格朗日中值定理，则存在$\eta\in(0,\xi)$,使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{\frac{a}{a+b}}{\xi}$$

在$(\xi,1)$上用拉格朗日中值定理，则存在$\zeta\in(\xi,1)$,使

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\frac{a}{a+b}}{1-\xi}=\frac{\frac{b}{a+b}}{1-\xi}$$

故$\frac{a}{f'(\eta)}+\frac{b}{f'(\zeta)}=\frac{\xi}{\frac{1}{a+b}}+\frac{1-\xi}{\frac{1}{a+b}}=a+b$. （注意，$f'(\eta)$为什么要取$f(\xi)-f(0)$ not $f(1)-f(\xi)$？你经常错）

4.8.6 $f''=g''$

例 4.13. 设函数$f(x), g(x)$ 在$[a,b]$ 上连续，在(a,b) 内具有二阶导数，$f(a)-g(a)=a, f(b)-g(b)=b$.以下哪个条件可以证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=g''(\xi)$?

$\mathcal{A}$. 存在 $\beta\in(a,b)$,使$f(\beta)=g(\beta)$

B. $f(x)-x$, g(x)在(a,b)内存在相等的最大值

C. 存在 $\eta\in(a,b)$,使$f'(\eta)-g'(\eta)=1$

D. $f(x)$, $g(x)$ 在(a,b) 内存在相等的最大值

【分析】

1.证明 $f''(\xi)=g''(\xi)$,等价于证明 $f''(\xi)-g''(\xi)=0$,所以构建辅助函数$F''(\xi)=f''(\xi)-g''(\xi)$.

2.通常,证明二阶导数 $F''(\xi)$ 有零点,在 $F(x)$上找三点相等,然后质复使用罗尔定理。

3.由 $f(a)-g(a)=a, f(b)-g(b)=b$ 可知,若 $F(x)=f(x)-g(x)-x$,则 $F(a)=F(b)=0$.只需找到第三个点 η,证明存在 $\eta\in(a,b)$,使

$F(\eta)=0$.

4.8.7 N-L定理

牛顿-莱布尼兹定理:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$.

怎么考?

$F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{dx}+F(a)$

设$G'(x)=e^{(x-3)^2}(x-3)^2, G(2)=0$, 求$\int_2^3 G(x)\mathrm{d}x$.

4.8.8 高阶莱布尼兹公式

题目 4.4.

已知$f(x)=(x^2-1)^n$, 求$f^{(n+1)}(-1)$
A.$(n+1)!n(-2)^{n+1}$
B. $(n-1)!(-2)^{n-1}$
C. $(n+1)!n(-2)^{n-1}$
D. $(n+1)!(-2)^{n-1}$

[分析]求高阶导数在$x\neq 0$的值，运用常见初等函数的n阶导数公式。

因为$f(x)=(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$,求乘积的高阶导数，一般用高阶导数的莱布尼兹公式:

$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$

[解答] $f^{(n+1)}(x)=[(x+1)^n]^{(n+1)}(x-1)^n+C_{n+1}^1[(x+1)^n]^{(n)}[(x-1)^n]^{(1)}+C_{n+1}^2[(x+1)^n]^{(n-1)}[(x-1)^n]^{(2)}+\cdots+C_{n+1}^{n+1}(x+1)^n[(x-1)^n]^{(n+1)}$.

注意一个常用的性质：令$f(x)=(x-x_0)^n$,则$f^{(n)}(x_0)=n!$, $f^{(k)}(x_0)=0,(k\neq n)$.

所以$x=-1$时，只有第 2项不为 0, 则

$f^{(n+1)}(-1)=(n+1)\cdot n!n(-2)^{n-1}=(n+1)!n(-2)^{n-1}$

答案为C.

4.8.9 泰勒

设函数$f(x)$在闭区间[-1,1]上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0, f(1)=2, f'(0)=0$,在开区间(-1,1)内至少存在一点 ξ,使$f'''(\xi)=c$, (c 为常数),求c 的值。

本题需要求三阶导数的值。通常，证明高阶导数的不等式，或等于非0非1的常数，试用泰勒公式。

由于$f'(0)=0$,应在$x_0=0$处展开泰勒公式： $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\eta)}{3!}x^3$ (η在0与x之间).

在上式中分别取$x=1$ 和$x=-1$,根据连续函数介值定理,存在 $\xi\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$, 使$f'''(\xi)=6$.

4.8.10 $f'(x)$与$\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$

(注意$f'(\xi)$ 是$\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$的三阶导,而不是一阶导,故不能直接用微分方程法构建辅助函数)

对$f'(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t+g'(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$的两项分别分部积分,得到:

$\varphi(x)=\int\left[f'(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t+g'(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$

$=\int\left[f'(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x+\int\left[g'(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$

$=\left[f(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t-\int f(x)\Big]-g(x)]\,\mathrm{d}x\right]+\left[g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int g(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right]$

$=f(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t+g(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

证明.

令 $\varphi(x)=f(x)\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$

有 $\varphi(0)=f(0)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+g(0)\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t+0=f(0)\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t,$

同理 $\varphi(1)=g(1)\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$

对 $\varphi(x)$ 使用罗尔定理,则存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$

所以 $\varphi'(\xi)=f'(\xi)\int_\xi^1 g(t)\mathrm{d}t+g'(\xi)\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t=0,$

即$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t}{\int_\xi^1 g(t)\mathrm{d}t}=0.$

□

4.8.11 积分的几何意义（证明题）

积分的几何意义：对AB线段积分，得到下方梯形的面积。

例 4.14.

设$f(x)$在$[a,b]$ 上有二阶连续导数,且$f''(x)>0$. 证明:$\dfrac{f(a)+f(b)}{2}>\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

1. 包含 积分的 不 等 式 , 想 到 积 分 保 序 性 : $f(x)\geq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$

2. 由$f''(x)>0$, 为凹函数， 则区间内任意一点的切线在函数下方， 任意两点的连线在函数上方。 注意 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$ 为两点连线下方梯形的面积，所以用两点连线的性质证明。

过点A: $(a,f(a))$, B: $(b,f(b))$ 的直线方程为:$y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

由$f''(x)>0$, 则AB线段在$f(x)$上方,故

$f(x)\leq f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$, 且等号只在$A,B$成立。

对不等式两端分别积分,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\mathrm{d}x=\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$

最后一步用了积分的几何意义:对AB线段积分,得到下方梯形的面积。

故 $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}>\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,证毕。

4.9 sinx与cosx

n项同类函数乘积，分母包含2^n,添起始项，来达到连锁消项的目的。

使用公式：$2\sin x\cos x=\sin 2x$

[解答] 令 $A=\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x).$

1.若$\sin x \neq 0$,添一项$\sin x$,则

$$\begin{aligned}&\sin(x)A\\ =&\sin(x)\cos(x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x)\\ =&\frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x)\cdots\cos(2^n x)\\ =&\frac{1}{2^2}\sin(4x)\cdots\cos(2^n x)\\ =&\frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}x)\\ &\text{故}A=\frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}.\end{aligned}$$

$n\to\infty$时，$\sin(2^n+1x)$ 振荡但有界，即$-1\leq\sin(2^{n+1}x)\leq 1$ 又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma^{n+1}}=0$,而$\sin x\neq 0$ 为常数

故$\lim\limits_{n\to\infty}A=0$.

2.若$\sin x=0$,分两种情况，$x=2k\pi$ 或$x=(2k+1)\pi$,其中$k=0,1,2,\cdots$.

若$x=2k\pi$,

则$\lim A=\cos(2k\pi)\cos(2k\pi)\cdot\cdots\cdot\cos(2k\pi)=1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=1.$

$n\to\infty$

若$x=(2k+1)\pi$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}A=\cos(\pi)\cos(2k\pi)\cdot\cdots\cdot\cos(2k\pi)=(-1)\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1=-1.$

$n\to\infty$

综上，极限存在，可能为 0,1 或-1.

4.10 函数图像与根

判定方程根的个数，一般通过求导判断函数形态，利用单调性和介值定理判定。 不易判断导数的单调区间时： 1.通过特殊点的值，由介值定理得出$f(x)$ 至少有几个零点2.通过求高阶导数的零点个数，得出$f(x)$ 至多有几个零点3.*若 “ 至 少 ”* ＝“ 至 多 ”, 则 得 到 零 点 个 数。

例 4.15. $f(x)=3^x-3x^2$

[解答] 对$f(x)$ 求导考察单调性：$f'(x)=\ln 3\cdot 3^x-6x$.不易判断单调区间，故考察特殊点的函数值:

$$\text{对}\int(\lambda)\ \text{小寺ち奈丰响田:}\int(\lambda)=\mathrm{m}\,3\cdot 3\ =\ 0$$

$$\begin{aligned}&f(-1)=3^{-1}-3\cdot(-1)^2=-\frac{8}{3}<0;\\ &f(0)=3^0-3\cdot 0^2=1>0;\\ &f(1)=3^1-3\cdot 1^2=0;\\ &f(3)=3^3-3\cdot 3^2=0.\end{aligned}$$

$x \in (-1,0)$时，因为$f(x)$连续，且$f(-1)<0, f(0)>0$,根据介值定理，$f(x)$在(-1,0) 上存在至少一个零点。因为$x=1$和$x=3$ 也是零点，故$f(x)$至少存在 3个零点。考察二阶导数：$f''(x)=(\ln 3)^2 \cdot 3^x - 6$.其唯一零点为$x=\log_3\left(\frac{6}{(\ln 3)^2}\right)$. 则$f(x)$ 至多有 3 个零点。

故$f(x)$ 有且仅有 3 个零点。

第 5 章

高数下

5.1 微分方程

5.1.1 二阶，少 y

【分析】

$y''-\frac{x+3}{x+1}y'=0$,可化为可分离变量的一阶微分方程,令 $t=y'$.

【解答答】

令 $t=y'$,有 $y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$.原方程化为 $t'-\frac{x+3}{x+1}t=0$,即$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x+3}{x+1}t$.

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x+3}{x+1}t$满足 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f(x)\,g(t)$的形式,是可分离变量的一阶微分方程。分离变量,两边积分求解。

5.1.2 高阶4阶

高阶常系数齐次线性方程的特征方程中,2 重复数根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$对应通解中的 4 项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x)\cos\beta x+(C_3+C_4x)\sin\beta x]$

对比通解表达式 $y=e^{-x}[(C_1x+C_2)\cos3x+(C_3x+C_4)\sin3x]=e^{\alpha x}[(C_1+C_2x)\cos\beta x+(C_3+C_4x)\sin\beta x]$对应2 重复数根

$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i=-1\pm3i$.

故其特征方程为 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)=0$, 即

$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$

$=(\lambda+3i+1)(\lambda-3i+1)(\lambda+3i+1)(\lambda-3i+1)$

$=((\lambda+1)^2-(3i)^2)((\lambda+1)^2-(3i)^2)$

$=(\ \lambda^2+2\lambda+10\ )(\ \lambda^2+2\lambda+10\ )$

$=\lambda^4+4\lambda^3+24\lambda^2+40\lambda+100$.

5.1.3 $y(x)=u(x)g(x)$的二阶微分方程

[2016年真题]$_i$设$y(x)=u(x)\,e^x$是二阶微分方程$(2x-1)\,y''-(2x+1)\,y'+2y=0$的解，已知$u(-1)=e$, $u(0)=-1$,已知 $y(1)=a\,e+\frac{b}{e}+c$,且a,b,c 为有理数，求$a-b+c$.

[分析] 将$y(x)=u(x)\,e^x$代入微分方程，得到关于$u(x)$的关系式，由此求出$u(x)$的表达式。

[解答] 由$y(x)=u(x)\,e^x$,得$y'(x)=u'(x)\,e^x+u(x)\,e^x=[u'(x)+u(x)]\,e^x$.

♡得到 $(2x-1)\,u''(x)+(2x-3)\,u'(x)=0$ 为不显含u 的微分方程,

令$t=u'(x)$,有$u''(x)=\frac{\mathrm{d}u'(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$.

原方程化为$(2x-1)\,t'+(2x-3)\,t=0$.

化为标准形式，除以t'的系数$(2x-1)$得$t'+\frac{2x-3}{2x-1}t=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x-3}{2x-1}t$

5.1.4 一个简单的倒带换

[2007年真题]令微分方程$y''(x+y'^2)=y'$满足初始条件$y(1)=y'(1)=1$的特解为$y(x)$,求$y(4)$的值

[分析] 不显含y的微分方程，令$t=y'(x)$,将y的二阶微分方程转化为t的一阶微分方程。

[解答] 令 $t=y'(x)$, 有 $y''(x)=\frac{\mathrm{d}y'(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=t'$. 原 方 程 变 为 $t'(x+t^2)=t$, 即 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x+t^2)=t$.

此时将t作为未知函数，x作为自变量，化为标准形式为$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{t}{(x+t^2)}$, 不便于求解。 故将$x$作为未知函数，将上式转化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{t}+t$,即$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{x}{t}=t$. 令$x'+p(t)x=q(t)$,其中$p(t)=-\frac{1}{t}$, $q(t)=t$,代入一阶线性微分方程的通解公式：[5.1]

5.1.5 $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}=\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dx}}$

用变量代换 $x=2\cos t\,(0<t<\frac{\pi}{2})$ 将微分方程$(4-x^2)\,y''-(x+\sqrt{4-x^2})\,y'+y=0$ 化为 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+By=0$, 求$A+B$.

$$
\begin{aligned}
&y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\\
&y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{\mathrm{d}(-\frac{1}{2\sin t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\
&=[\frac{\mathrm{d}(-\frac{1}{2\sin t})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t}\cdot(-\frac{1}{2\sin t})]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\
&=\left[\frac{\cos t}{2\sin^2 t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2\sin t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2\sin t}\right).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

5.1.6 倾斜角$\boldsymbol{\alpha}$, $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{dx}}$, $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}$, $\mathbf{tan}\boldsymbol{\alpha}=-\frac{1}{\boldsymbol{y'_x}}$

例 5.1. 设非负函数$y(x)$具有二阶导数，记α为曲线l: $y=y(x)$在点(x,y)处法线的倾角，若$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$,且$l$: $y=y(x)$与x轴及直 线$x=0, x=6$ 围成平面区域D 的面积为 36,且 $y'(1)=1$.求$y(2)$.

设法线斜率为 k,则 $k=-\frac{1}{y'}=\tan\alpha$. 即 $\alpha=\arctan\left(-\frac{1}{y'}\right)$,所以$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\arctan\left(-\frac{1}{y'}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+\frac{1}{(y')^2}}\cdot\frac{y''}{(y')^2}=\frac{y''}{(y')^2+1}$.

由已知条件 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$ 有 $\frac{y''}{1+(y')^2}=\frac{1}{1+x^2}$, 即 $y''=\frac{1+(y')^2}{1+x^2}$.

不显含 y 的微分方程,令 $t=y'(x)$, 将 y 的二阶微分方程转化为 t的一阶微分方程。

5.1. $\mathrm{x=e^{-\int p(t)dt}*\left|\int q(t)^*e^{\int p(t)dt}dt+C_1\right|}$

令$t=y'(x)$, 有$y''(x)=\frac{\mathrm{d}y'(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$. 原方程变为 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1+t^2}{1+x^2}$.

分离变量得:$\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

两边积分得:$\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.\Rightarrow \arctan t=\arctan x+C_1$

略。

5.2 解的叠加性

$y'+p(x)\,y=q(x)$是线性微分方程,利用其解的叠加性求解。

由$y_1=(3+x^2)^3-e^{2x}, y_2=(3+x^2)^3+e^{2x}$ $\underset{\text{是非齐次线性微分方程}\ y}{**=}$ $y'+p(x)\,y=q(x)$ 的两个解,

可知: $y=y_2-y_1$ $=[(3+x^2)^3+e^{2x}]-[(3+x^2)^3-e^{2x}]$ $=2\,e^{2x}$

是齐次线性方程 $y'+p(x)\,y=0$ 的解;

y_1+y_2 = $(3+x^2)^3-e^{2x}+[(3+x^2)^3+e^{2x}]$ $=2\,(3+x^2)^3$是

线性方程$y'+p(x)\,y=q(x)+q(x)$的解。

5.2.1 高阶K重根

k重复数根:通解中的$2\,k$项

$e^{\alpha}\,x\,[(A_1+A_2\,x+\cdots+A_k\,x^{k-1})\cos\,\beta x+(B_1+B_2\,x+\cdots+B_k\,x^{k-1})\sin\,\beta x]$

若$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i, \beta>0$为特征方程

$r^n+a_1\,r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,r+a_n=0$的$k$重复数根,

则对应的齐次方程通解中的 $2k$项

$e^{\alpha}\,x[(A_1+A_2\,x\ +\cdots+A_k\,x^{k-1})\cos\,\beta x+(B_1+B_2\,x+\cdots+B_k\,x^{k-1})\sin\,\beta x]$

求高阶齐次方程的通解:将n个特征根对应的项相加得到通解

求n阶常系数线性齐次微分方程$y^(n)+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=0$的通解:

1 写出特征方程$r^n+a_1\,r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,r+a_n=0$,求出其特征根$r_i(i=1,2,...,n)$

2 对每一个根,判断对应形式: 单重实根r,对应一项$C\,e^{\alpha}\,x$;

♡k重实根r,对应k项$(C_1+C_2\,x+\cdots+C_k\,x^{k-1})\,e^{\alpha x}$;

♡单重复数根 $r_1.2=\alpha\pm\beta i,\beta>0$,对应两项 $e^{\alpha}x\,(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

♡k重复数根$r_1.2=\alpha\pm\beta i,\beta>0$,对应$2k$项$e^{\alpha}x\,[(A_1+A_2x+\cdots+A_kx^{k-1})\cos\beta x+(B_1+B_2x+\cdots+B_kx^{k-1})\sin\beta x]$.

例 5.2. K重

已知以 y=(C$_1$x+C$_2$)cos 2x+(C$_3$x+C$_4$)sin 2x, (C$_1$, C$_2$, C$_3$, C$_4$为任意常数)为通解的微分方程是 y''''+ay'''+by''+cy'+dy=0,求 a+b+c+d.

3 将n个根对应的所有项相加便得通解，其中C,C_i,A_i,B_i为任意常数。

5.3 定积分应用

5.3.1 参数方程的积分

$$\text{参数方程积分:}\int_{x(t_0)}^{x(t_1)}y\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t_1}y(t)\,x'(t)\mathrm{d}t$$
$$\text{设曲线 }L\text{由参数方程}\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases},t_0\leq t\leq t_1\text{确定。则:}$$
$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)}g(y)\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t_1}g(y(t))\mathrm{d}x(t)=\int_{t_0}^{t_1}g(y(t))\,x'(t)\mathrm{d}t$$
$$\int_{y(t_0)}^{y(t_1)}h(x)\mathrm{d}y=\int_{t_0}^{t_1}h(x(t))\mathrm{d}y(t)=\int_{t_0}^{t_1}h(x(t))\,y'(t)\mathrm{d}t$$

例 5.3.

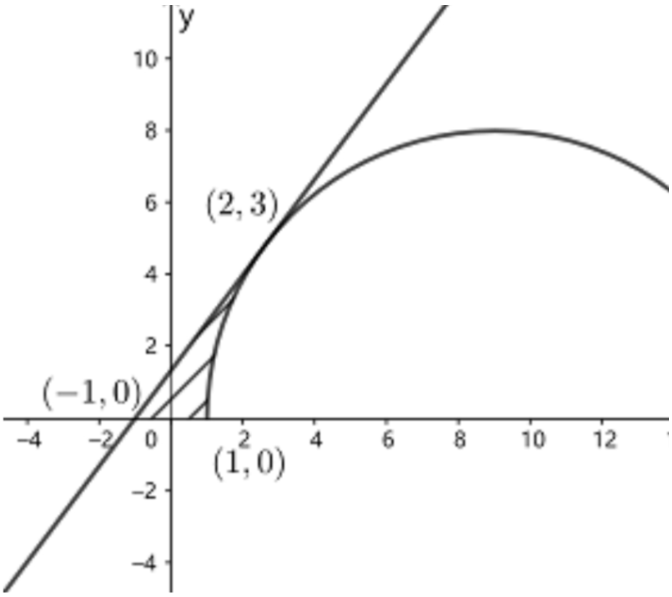
$:\begin{cases}x=t^2+1,\\y=4t-t^2,\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$. $y=x+1$为其一条切线,切点为$(2,3)$.求此切线与L（对应于$x\leqslant 2$的部分)及x轴所围成的平面 图形的面积。

令$x(t)=t^2+1,y(t)=4t-t^2$.

先由参数方程判断曲线形态:

曲线端点：$t=0$时，$x=0^2+1=1,y=4\cdot 0-0^2=0;t=+\infty$时，$x=+\infty,y=-\infty$.

故两端点为$(1,0),(+\infty,-\infty)$. 曲线走向：对于$t>0,x'(t)=2t>0;y'(t)=4-2t$.故随着$t$ 增加，有x 增加；在$0<t<2$时y 增加，在$t>2$时y减少。$t=2$时 y取最大 值，此时$x=2^2+1=5$,$y=4\cdot 2-2^2=4$.故曲线由(1,0)向右上延伸至 (5,4),再向右下延伸至 $(+\infty,-\infty)$. 曲线及其切线如图所示，切线与x轴的交点为(-1,0),与L的切点为(2,3).



例 5.4.

设曲线L: $\begin{cases} x = 2t^3 + t^2, \\ y = \frac{1}{t} + \ln t - 1, \end{cases} (0 < t \leq 1).$

求以曲线L, x 轴和y轴为边界的区域面积。

根据积分的几何意义:$S = \int_0^{+\infty} x\mathrm{d}y.$

利用参数方程,将关于 y 的积分转变成关于 t的积分,则:

$\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}y = \int_1^0 x(t)\mathrm{d}y(t) = \int_1^0 x(t)\cdot y'(t)\mathrm{d}t = \int_1^0 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)(2t^3 + t^2)\mathrm{d}t = \int_1^0 2t^2 - t - 1\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2} - t|_1^0 = \frac{5}{6}.$

注:本题也可关于 $\mathrm{d}x$ 求积分。$\int_0^1 y(t)\mathrm{d}x(t)$. 但对被积函数中的$\ln x$需要使用分部积分。

5.3.2 旋转体体积,非y轴,$V = V_1 - V_2$

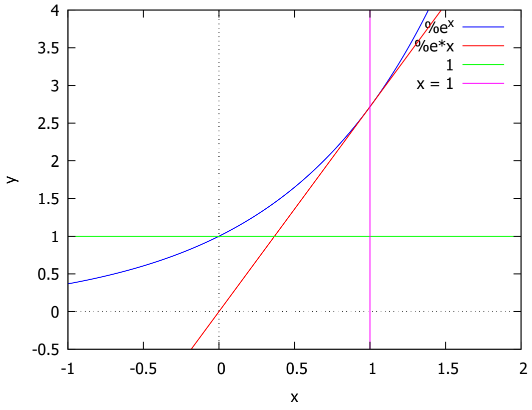
D 是由 $y = e^x$ 和其切线 $y = e\,x$ 以及 y 轴所围成的平面区域。D 绕 $x = 1$ 旋转而成的旋转体体积为 V,已知 $\frac{V}{\pi} = a\,e^b + c$,其中
a, b, c 为有理数,求 $a + b + c$.

故 D 绕 x 轴的旋转体体积 V,为上述正方形绕 $x = 1$ 的旋转体体积 V_1,加上曲边三角形绕 $x = 1$ 的旋转体体积 V_2,减去上述直角三角形绕 $x = 1$

的旋转体体积 V_3.

(%i12)

(%i6) tm_plot2d([%e^x, %e x, 1, $x=1$], [x, -1, 2], [y, -0.5, 4])



(%o6) **true**

(%i7)

5.3.3 积分比大小

$\mathrm{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\ (1+2\sin\ x)\cot x\ dx,\mathrm{I}_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos\ x\ \cot\ x\ dx,\mathrm{I}_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\ x}{1+x}dx$,则

$x\in(0,\ +\infty)$ 时有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

对$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$有

(1) $0<\sin x<x$ 即 $\frac{\sin x}{1+x}<\frac{\sin x}{1+\sin x}<\ln(1+\sin x)<\ln(1+2\sin x)$. 又因为在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上$\sin x>0,\cos x>0$则

$\frac{\sin x}{1+x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}<\ln(1+2\sin x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$,

即$\frac{\cos x}{1+x}<\ln(1+2\sin x)\cot x$

(2)在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上$\cos x>\sin x$,所以$\ln(1+2\sin x)<2\sin x<2\cos x$,

即$\ln(1+2\sin x)\cot x<2\cos x\cot x$.

根据积分的保序性,有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+x}dx\ <\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+2\sin x)\cot x\,dx\ <\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\cot x\,dx,$$

即$I_3<I_1<I_2$.

例 5.5.

[2012年真题] 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin\ x\ dx$, $(k=1,2,3)$, 则有

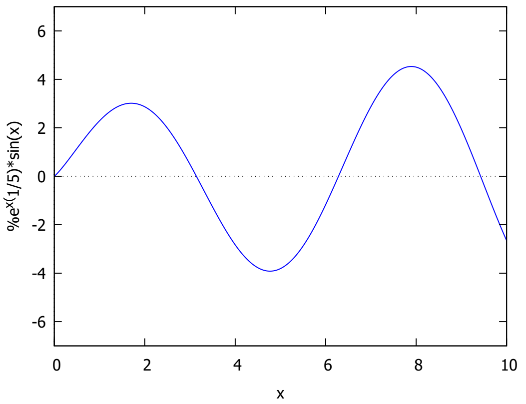
(%i7) $f(x):=\sin(x)$;

$g(x):=\%e^{x^{\frac{1}{5}}}$;

(%o7) $f(x):=\sin(x)$

(%o8) $g(x):=\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{5}}}$

(%i10) tm_plot2d([$f(x)$ $g(x)$], [x, 0, 10], [y, −7, 7])



(%o10) **true**

(%i11) quit()

The end

(%i11)

5.4 反常积分

1.同敛散:若 $\lim\limits_{x\to s^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l,(0<|l|<+\infty)$, 则 $\displaystyle\int_s^h f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_s^h g(x)\mathrm{d}x$同敛散。

2. 充分条件:若 $\lim\limits_{x\to s^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则 $\displaystyle\int_s^h g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_s^h f(x)\mathrm{d}x$收敛。

命题 1. 若 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

令 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f^2(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, 得到一类函数$f(x)=\dfrac{1}{x^p}, p>0$

想到性质: $\displaystyle\int_s^{+\infty}\frac{1}{x^P}dx$ 在 $P>1$时收敛,在 $P\le 1$时发散。

则选择 p, 使得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}dx$ 收敛,而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散,

即 $2p>1$ 且 $p\le 1$, 故令 $p=1$, 得到一个反例$f(x)=\dfrac{1}{x}$.

由于$f(x)$ 在 $x=0$ 连续,修改反例,令 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

故命题 1 错误。

命题 2. 若存在 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在,则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

认出 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = l$, 即定理 1 与 2 中的条件形式,

有 $p>1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$收敛,则:

若 $0<|l|<+\infty$, 则由定理 1, 得到 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$收敛,

若 $l=0$, 则由定理 2, 得到 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$收敛。

故命题 2 正确。

命题 3. 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛,则存在 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$存在.

常见错误:只考虑$f(x)=\frac{1}{x^k}$, 则令 $p=k$, 得到命题正确。

一类重要的函数是 $\frac{1}{x\ln^m x}$, $m\geq 1$, 注意 $x\ln^m x$ 比 x 增长快,但比任意 $x^p, p>1$增长慢。

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln^m x}\mathrm{d}\ln x$$

当 $m=1$ 时, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x = \ln\ln x|_e^{+\infty}$不存在,

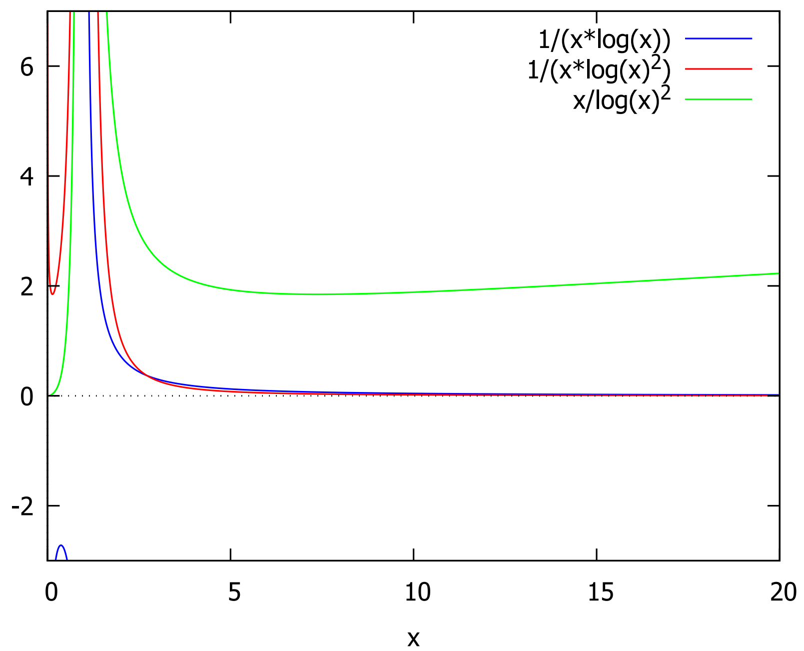
当$m>1$时, $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^m x}\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{(1-m)\ln^{m-1} x}|_e^{+\infty} = \frac{1}{m-1}$.

由于$f(x)$ 在$x=0$连续,修改反例,令$f(x)=\frac{1}{(x+e)\ln^m(x+e)}$, $m>1$,

则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^p}{(x+e)\ln^m(x+e)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{p-1}}{\ln^m(x+e)} \to +\infty$.

故命题 3 错误。

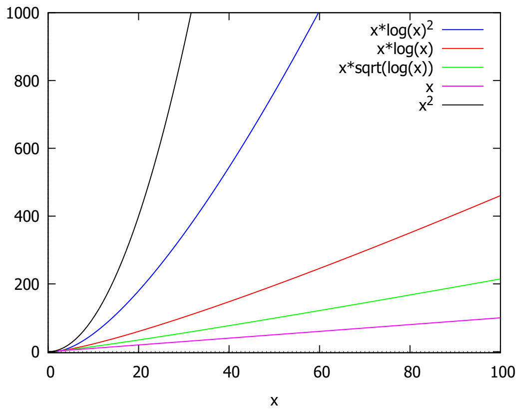
(%i3) $\mathrm{tm\_plot2}d([\frac{1}{x(\log(x))}, \frac{1}{x((\log(x))^2)}, x^2\frac{1}{x((\log(x))^2)}], [x,0,20], [y,-3,7])$



(%o3) **true**

(%i24) $\mathrm{tm\_plot2}d([x((\log(x))^2), x(\log(x)), x\left((\log(x))^{\frac{1}{2}}\right), x, x^2], [x,0,100], [y,-3,1000])$

.



(%o24) **true**

(%i25)

5.5 对称区间的积分

例 5.6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

求对称区间上的定积分,将积分$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$,拆成两项之和,然后并项处理:

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{1-\sin t}(-\mathrm{d}t)+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

5.6 重积分

[2003年真题 设$f(x)=g(x)=\begin{cases}3, & 若\ 0\leq x\leq 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 而D 表示全平面,则$\displaystyle\iint_D f(x)\,g\,(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

[分析] 由于$f(x)$和$g(x)$为分段函数,所以被积函数$f(x)\,g\,(y-x)$为分块函数,将积分区域按照被积函数拆分,分别积分。

[解答] 又在$0\leq x\leq 1$时$f(x)=3$;仅在$0\leq y-x\leq 1$时$g\,(y-x)=3$.则仅当$0\leq x\leq 1,0\leq y-x\leq 1$时,被积函数不为0. 令此区域为$D_1$,则$D_1=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1,0\leq y-x\leq 1\}=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1,x\leq y\leq 1+x\}$. ‖

有$f(x)\,g\,(y-x)=\begin{cases}3\cdot 3, & (x,y)\in D_1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

5.6.1 分段区间

令

$$A=\iint_D \max\left(\frac{1}{x^2 y+2 x},\frac{1}{3 x}\right)$$

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)|\,1\leq x\leq 2,0\leq y\leq 1\}$.已知$A=a+b\ln 2+c\ln 3$,其中$a,b,c$

为有理数，求$a+b+c$.

[分析] 被积函数中 $\max\left(\frac{1}{x^2 y+2 x},\frac{1}{3 x}\right)$是分块函数，先将积分区域拆分，去掉 max 符号。[解答]

被积函数在区域D 的分界线为$\frac{1}{x^2 y+2 x}=\frac{1}{3 x}$,即$y=\frac{1}{x}$.将$D$拆分为$D_1\cup D_2$.如图所示。$y=\frac{1}{x}$ 与$x=2$ 相交于$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,与 $y=1$ 相交于

(1,1).

$D_1=\left\{(x,y)|\,1\leq x\leq 2,0\leq y\leq 1,y\geq\frac{1}{x}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)|\,1\leq x\leq 2,0\leq y\leq 1,0\leq y\leq\frac{1}{x}\right\}$

区域D_1中 $\max\left(\frac{1}{x^2 y+2 x},\frac{1}{3 x}\right)=\frac{1}{3 x}$, D_2中 $\max\left(\frac{1}{x^2 y+2 x},\frac{1}{3 x}\right)=\frac{1}{x^2 y+2 x}$.

5.6.2 区间相同，二重积分保序性

已知$f(x,y)=x+y,g(x,y)=x-y$.区域$D=\{0\leq y\leq 3,h(y)\leq x\leq h(y)+1\}$,其中 $h(x)$ 为某函数。以下选项正确的是:

A.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma>$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$
B.可能有⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$
C.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma<$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+3$
D.⟨iint⟩$_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leq$⟨iint⟩$_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

在积分区域D上有$y\geq 0$,故$f(x,y)\geq g(x,y)$.

$f(x,y)=x+y$ 和$g(x,y)=x-y$ 在积分区域D 上连续，且不恒相等,

所以$\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}\sigma>\iint_D g(x,y)\ \mathrm{d}\sigma$

综上选A.

eg二重积分保序性:$f(x,y)\geq g(x,y)\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

若在区域D内$f(x,y)\geq g(x,y)$,则$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

【证明】

令$h(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$.则有$h(x,y)\geq 0$,则$\iint_D f(x,y)-g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D h(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\geq 0$.

即$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

2005年真题

$I_3=\iint_D \cos{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$则

$A.I_3>I_2>I_1$♡

B. $I_1>I_2>I_3$

$\mathbb{C}.I_2>I_1>I_3$

$D.I_3>I_1>I_2$

5.6.2.1 区间极坐标换元

题目 5.1.

令 $I=\iint_D \frac{r^2\sin\theta}{(1+r^2\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,其 中 $D=\left\{(r,\theta)|\,0\leq r\leq \sec\theta, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right\}$ 一 点 时 已知$I=a+b\ln{(\sqrt{2}+1)}$,其中a,b 为有理数, 求$a-b$.

注意 5.7. $0\leqslant r\leqslant \sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ How?

使用直角坐标计算二重积分,令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.
计算直角坐标下的积分区域:
$r\leq\sec\theta\Rightarrow x=r\cos\theta\leq 1$;
$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\theta\geq 0, \sin\theta\geq 0, \frac{x}{y}=\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}=\cot\theta\geq\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, 即$x\geq y$.
故积分区域的直角坐标解析式为 $D=\{(x,y)|\,0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x\}$.

5.6.3 二重积分存在

♡设二元函数$f(\mathrm{x,y})=\mathrm{xy}^{\frac{3}{2}}\ln(\mathrm{x}^4+\mathrm{y}^6)$,则$\lim_{(\mathrm{x,y})\to(0,0)}\mathrm{f(x,y)}=$

[分析]二重极限存在, 需证明点(x,y)以 任何方式 趋于点(x_0,y_0)时, 函数$f(x,y)$都无限趋近于同一常数A. |.运用$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leq 1$,来证明对任何$(x,y)$,不等式都成立;

常用方法: 2. 夹逼定理; 3. 将重极限转化为一元函数极限。 这里用 1,2, 3.

[解答] 由$\left|\frac{2x^2y^3}{x^4+y^6}\right|\leq 1$,有$|x^2y^3|\leq\frac{x^4+y^6}{2}$,则

$$0\leq\left|xy^{\frac{3}{2}}\ln{(x^4+y^6)}\right|\leq\sqrt{\frac{x^4+y^6}{2}}\left|\ln{(x^4+y^6)}\right|.$$

令$t=x^4+y^6$,则$(x,y)\to(0,0)$时, $t\to 0^+$,有

$0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|\leq\lim_{t\to 0^+}\sqrt{\frac{t}{2}}|\ln\, t|=0$,

最后一个等式用了$\lim_x\to 0^+\, x^\delta(\ln\, x)^k=0$, (常数 $\delta>0, k>0$).

故由夹逼定理$\lim_{\prime}(x,y)\to(0,0)\ |\,f(x,y)|$=0,即$\lim_{(} x,y)\to(0,0)'\,f(x,y)=0$

♡

(分析]判断二重极限是否存在，关键在于构建不同路径，看是否存在：1.两种不同路径，点(x,y) 沿不同路径趋向于点 (x_0,y_0)时，$f(x,y)$ 趋于 不同常数，2.某一路径，点(x,y)沿此路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限不存在，若1或2成立，则极限不存在。

构建路径的常用方法：

1.常见函数：$f(x,y)=\dfrac{x^n y^m}{x^{2n}+y^{2m}}$,令$y^m=kx^n$,则$k$不同时，极限不同。2.坐标轴方向：令$y=y_0$,或$x=x_0$,即沿平行于$x$轴或$y$轴的方向趋于$(x_0,y_0)$,得到一个极限；3.归零：分子分母有相同项，则构建路径使分子分母上的其他项为0；4.分子低阶：构建路径使分母只余一项，如x^k,选择k使分子为x^k的低阶无穷小，则极限为∞

这里用 4 即可.

5.6.4 轮换对称性

例 5.8.

[2008年真题]设$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}, A=\iint_D (x^2-y)\,dx dy$, 已知$A=a+b\pi$, 其中$a,b$为有理数,求$a-b$.

积分区域D 为半径为1的圆。相对于x 轴对称，且 y 是关于 y 的奇函数，则 $\iint_D y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

$$\text{则}\iint_D (x^2-y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

调换x,y,区域D_{cr}的形状不变，则利用 x,y 的轮换对称性进一步化简。

$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{dy}=\frac{1}{2}\iint_D x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

积分区域为圆形，使用极坐标计算二重积分，令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$.则$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=r^2$.故

$D=\{(r,\theta)|\,0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$\frac{1}{2}\iint_D x^2+y^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\ \ \mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} r^4|_0^1\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.$

即$A=\frac{\pi}{4}$.则$a=0, b=\frac{1}{4}, a-b=-\frac{1}{4}$

5.7 二元函数最值问题

题目 5.2.

[2022年真题]设 $x\geq 0, y\geq 0$, 满足 $x^2+y^2\leq k\,e^{x+y}$.
若 k 的最小值为 $a\,e^b+c$, 其中 a,b,c 为有理数,求 $a+b+c$.

先求函数在区域内的驻点：即求所有偏导数为 0 的点

再求函数在边界线上可能的最值点：边界线由 $x=0\ (y\geq 0)$ 和 $y=0\ (x\geq 0)$ 两部分组成，分别求两段边界的极值，和两段边界的分界点。

将区域内驻点和边界上的极值点分别代入目标函数$f(x,y)$

设 k 在 $y\geq|x|$ 上满足 $(1-x)\,(y-1)\geq k\,e^{y}$,求 k能取到的最大值。

$$f(1,1)=(1-1)\,(1-1)\,e^{-1}=0,$$
$$f(3,3)=(1-3)\,(3-1)\,e^{-3}=-4\,e^{-3},$$
$$f(-1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})=(1-(-1-\sqrt{2}))\,(1+\sqrt{2}-1)\,e^{-1-\sqrt{2}}=(2+2\,\sqrt{2})\,e^{-1-\sqrt{2}},$$
$$f(0,0)=(0-1)\,(1-0)\,e^{-0}=-1,$$

5.8 多元函数极值问题

由 $\lim\limits_{x\to0,\,y\to0}\dfrac{f(x,y)-x^2\,y+2\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^2}=1$ 可知,$x\to0,\,y\to0$ 时 $f(x,y)\sim x^2\,y-2\,x\,y^2+(x^2+y^2)^2$. 构建路径,通过多元极值定义判定$(0,0)$是否为极值?

$y=kx$

当 x 与 y 沿 $x=k\,y$ 趋向于 $(0,0)$ 时, $f(x,y)\sim k^2\,y^3-2\,k\,y^3+(k^2+1)^2\,y^4$.

当$k^2-2\,k>0$ 时,对于 $y>0$ 的点 $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)\sim k^2\,y^3-2\,k\,y^3+(k^2+1)^2\,y^4\sim k^2\,y^3-2\,k\,y^3=(k^2-2\,k)\,y^3>0$; 对于

$y<0$ 的点,$f(x,y)-f(0,0)\sim k^2\,y^3-2\,k\,y^3=(k^2-2\,k)\,y^3<0$

若存在$(0,0)$ 的某邻域,此邻域内任意点均满足$f(x,y)\geq f(0,0)$ (或$f(x,y)\leq f(0,0)$)时,$(0,0)$为极值点。根据以上分析,对任意邻域,均存在

不满足条件的路径。故点$(0,0)$ 不是$f(x,y)$的极值点。

第 6 章

积分表

$$\int x^n \ln(x)\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\int \text{ln (sin x) dx=xln (sin x)-ln (cos x)+C}$$

平方[6.1]

- $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
- $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

2.立方根函数积分:

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

3.其他根号函数积分:

- $\int \sqrt{x^2 + a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$
- $\int \sqrt{x^2 - a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

4. 含有根号的三角函数积分:

- $\int \sqrt{1 - \sin^2 x}\ dx = \int \cos x\ dx = \sin x + C$
- $\int \sqrt{1 - \cos^2 x}\ dx = \int \sin x\ dx = -\cos x + C$

5. 含有根号和指数的函数积分:

- $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx$ (这类积分通常需要换元法)

6. 含有根号和有理函数的积分:

- $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}\, dx$ (可能需要分部积分法)

1.有理函数积分(部分分式分解):

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\, dx = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$$

6.1. 通常要用

2.根式函数积分:

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,d\,x=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,d\,x=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

3.指数函数与三角函数的积分:

$$\int e^{a\,x}\sin b\,x\;\;d\,x=\frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}(a\sin b\,x-b\cos b\,x)+C$$

$$\int e^{a\,x}\cos b\,x\;\;d\,x=\frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}(a\cos b\,x+b\sin b\,x)+C$$

三角函数的分式，按顺序思考:

1.凑微分,

2.化简成一次式，或可以直接积分/凑微分积分的形式,

3.拆项,

4.和差化积,

5.万能代换。

不能凑微分，拆项或和差化积，所以用万能代换：命$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$.

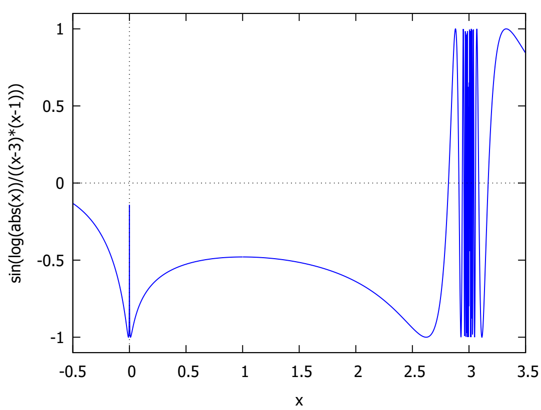
[解答]原式$=\int\frac{\mathrm{d}}{x}\sin\,(2\,x)+2\sin\,x=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\,(\cos x+1)}$

命$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$. 则有$\sin x=\frac{2\,t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(%i11) $\mathrm{ds}\colon \sin\left(\frac{\log(\mathrm{abs}(x))}{(x-1)\,(x-3)}\right)$

(%o11) $\sin\left(\frac{\log\,(|x|)}{(x-3)\,(x-1)}\right)$

(%i12) $\mathrm{tm\_plot2}d(\mathrm{ds},[x,-0.5,3.5])$



(%o12) **true**

索引

参考文献

[1] J. van der Hoeven. *The Jolly Writer. Your Guide to GNU TeXmacs*. Scypress, 2020.