No title

## 目录

1first [2](#auto-1)

1.1和差化积 [3](#auto-2)

1.2♥some easy replace [4](#auto-3)

2线性表出 [4](#auto-4)

2.1线性相关 [5](#auto-5)

3两个方程同解 [7](#auto-6)

3.1已知特征值，求特征向量 ♥ [9](#auto-7)

3.2[分析]矩阵的对角化： [9](#auto-8)

4A; 特征值；求可逆矩阵P ，相应的对角矩阵 [10](#auto-9)

4.1实对称矩阵A（含参数），求可逆矩阵P，求对角矩阵 [10](#auto-10)

4.2实对称矩阵的正交规范化 [11](#auto-11)

4.3的特征值 及对应的特征向量 [11](#auto-12)

4.3.1实对称矩阵必可对角化 [11](#auto-13)

5最最最易错的分解 [12](#auto-14)

5.1 [12](#auto-15)

5.2arccos的区间 [15](#auto-16)

6A的行列变换 [18](#auto-17)

7方程组同解 [19](#auto-18)

8函数极限 [21](#auto-19)

8.1复合函数 [21](#auto-20)

9数列极限 [22](#auto-21)

9.1极限存在证明 [22](#auto-22)

10连续与可导 [23](#auto-23)

11|A| [23](#auto-24)

11.1克拉默法则 [24](#auto-25)

12方程实根数 [24](#auto-26)

12.1分情况讨论 [25](#auto-27)

12.2参数分离 [25](#auto-28)

13绝对值|X| [27](#auto-29)

14中值定理 [27](#auto-30)

15已知两个方程组的通解，求公共解。 [28](#auto-31)

16sinx与cosx [29](#auto-32)

17微分方程 [29](#auto-33)

17.1二阶，少y [30](#auto-34)

17.2的二阶微分方程 [30](#auto-35)

17.3一个简单的倒带换 [31](#auto-36)

17.4高阶K重根 [32](#auto-37)

18定积分应用 [32](#auto-38)

18.1旋转体体积，非 [32](#auto-39)

18.2积分比大小 [32](#auto-40)

19重积分 [33](#auto-41)

19.1分段区间 [33](#auto-42)

19.2区间相同，二重积分保序性 [34](#auto-43)

19.3二重积分存在 [35](#auto-44)

20积分表 [?](#auto-45)

## 1first

[题目] 设阶可逆矩阵有特征值,对应的特征向量为,证明也是对应于的特征向量

[证明] 由题设,两边同乘,则

因为可逆，则. 由等于特征值之积，故. 综上，. 故也是对应于的特征向量。

### 1.1和差化积

和差化积公式：sin

[帮助记忆]

方法 1.可以只记第一个公式，将其它公式用诱导公式化成的形式。 方法 2.找规律。前两个公式是 和异名函数乘积，后两个公式是同名函数乘积。

口诀：

正加正，正在前，

余加余，余并肩。

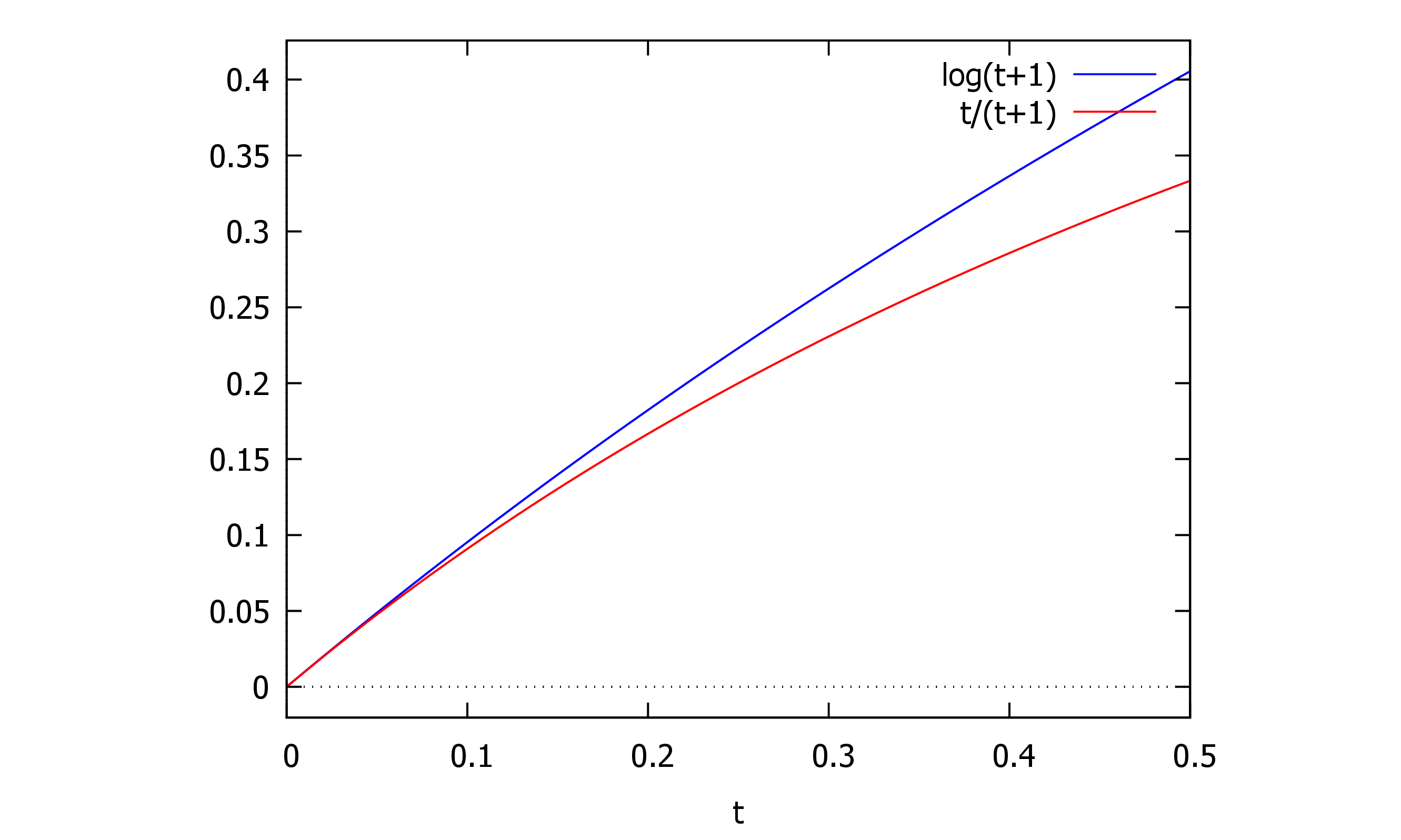
正减正，余在前，

余减余，负正弦。

### 1.2♥some easy replace

<||

|  |  |
| --- | --- |
| (%i14) | tm\_plot2d([log(1+t),t/(1+t)],[t,0,0.5]) |



>

## 2线性表出

[2003年真题]设向量组:可由向量组线性表示，则

. 当时，向量组必线性相关

B. 当时，向量组必线性相关

. 当时，向量组 必线性相关

D. 当时，向量组必线性相关

[简解] 根据定理："若可有线性表出，且,则必线性相关

即若多数向量可以由少数向量线性表出，则此多数向量必线性相关，故选 D.

若 为 矩阵，则以下哪个选项是正确的？

A. 若,由的行秩是行极大线性无关组的向量个数行向量组的总向量个数,则 B. 由的行秩是行极大线性无关组的向量个数=行向量组的总向量个数,则 的列秩是列极大线性无关组的向量个数=列向量组的总向量个数,则 D. 的列秩是列极大线性无关组的向量个数列向量组的总向量个数,则

因为的行秩的列秩， 而的列秩是列极大线性无关组的向量个数列向量组的总向量个数. 同理的行秩是行极大线性无关组的向量个数行向量组的总向量个数. 综上， min ,即有. 选D.

其余选项：

:只能得出.

B:的行秩是行极大线性无关组的向量个数行向量组的总向量个数

### 2.1线性相关

由特征值的定义

有 极大线性无关组中所含向量的个数称为向量组的秩，因此需判定中的线性无关向量。

由互不相同的特征值对应的特征向量线性无关，则与线性无关。

当,则, 故与线性无关，向量组的秩为 2.

♥ 和 线性无关 。 这是因为 和 是不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，即 。要使 ，必须保证 ，这样矩阵 的秩才能为 2。Z

♥ 设是三阶矩阵，为的伴随矩阵，若是方程组的一个基础解系，则的基础解系可为

. . .

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数： 因为 只有 1 个线性无关的解，即 ,从而 . . 有,故的基础解系中有 2 个线性无关的解向量。

用来得到解向量： 有非零解，则. 由,及,有,则 的列向量全是 的解。

而秩,故的列向量中必有 2 个线性无关。 需找到这 2 个线性无关的列向量：

综上，无关，无关。 选B.

♥[2011年真题)设 是四阶矩阵，为 的伴随矩阵，若 是方程组 的一个基础解系，则

的基础解系可为

. .

[分析]没有具体的线性方程组，先用秩来决定线性无关解的个数，再用 来得到解向量。

[解答] 用秩来决定线性无关解的个数： 因为**只有 1** 个线性无关的解，即,从而. . 有,故 的基础解系中有 **3 个线性无关的解向量**。 用来得到解向量： 由 有非零解，则 . 由,及,有.则 的列向量全是 的解。 而秩,故的列向量中必有 3 个线性无关。

综上，无关。

选D.

## 3两个方程同解

线性无关的解的个数相同=>系数矩阵的秩相同

基础解系相同

由 方 程 组 同 解 , 则 方 程 ( ll) 线 性 无 关 解 的 个 数 = 方 程 ( l) 线 性 无 关 解 的 个 数 = 方 程 ( l) 线 性 无 关 解 的 个 数 , 即 . 因 为 ,则 ,即 , 有

,则.

由于均非零，故,且,即. 由于,且 是 是 矩阵，则 . 代入,有.因为已得出,则.

.

AB=O时的秩:若 A是 m×n矩阵,B是 n×s矩阵,AB=O,则 r(A)+r(B)≤n.

已知 α1,α2,α3线性无关,则[α1,α2,α3]可逆,又有Aα1,Aα2,Aα3的表达式,想到相似,即AP=PB⇔P-1AP=B.

### 3.1

已知特征值，求特征向量 ♥

- 代入每个 λi,得到线性方程组 (λiE-A)**x**=0,通解即对应 λi的全体特征向量(除去 0向量)

-

-

-

,系数矩阵 令 为 自 由 未 知 量 , 为 独 立 未 知 量 。 令 为 自 由 未 知 量 , 为 独 立 未 知 量 。 令 ,则 . 令 ,则 . 故 是一个基础解系，即属于特征值 的两个线性无关的特征向量。 2.当时，由,系数矩阵 令 为自由未知量， 为独立未知量。 令,则.故 是一个基础解系，即属于特征值 的一个特征向量。 综上，为三个线性无关的特征向量。 选.

### 3.2[分析]矩阵的对角化：

令的特征值为,设有个线性无关的特征向量 ,

取,则有,其中.

[解答] 注意的每一列为一个特征向量，且中 排列次序应与 中 的排列次序 一致。

<with|color|red|[解答]>

## 4

A; 特征值；求可逆矩阵P ，相应的对角矩阵

[1999年真题]设矩阵,已知 的特征值

为1，-1,-1.求可逆矩阵,使得为对角矩阵？

并求出相应的对角矩阵。

### 4.1实对称矩阵A（含参数），求可逆矩阵P，求对角矩阵

[2002年真题 设实对称矩阵,求可逆矩阵,使为对角阵。

;求特征值 ✓;代入A，化最简阶梯形矩阵，自由未知数:q1得到基础解系

### 4.2实对称矩阵的正交规范化

对矩阵 执行特征值分解。

- 将得到的特征向量作为矩阵 的列。

- 对 的每一列向量 执行归一化：，其中 是向量 的欧几里得范数。

### 4.3的特征值 及对应的特征向量

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 矩阵 | A | kA | Ak | f(A) |
|  |  |  |  |  |
| 特征值 | λ | kλ | λk | f(λ) |
|  |  |  |  |  |
| 对应特征向量 | α | α | α | α |

相似矩阵的性质 对应的特征向量是变的.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 矩阵 | A-1 | A\* | A-1+f(A) |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| 特征值 | λ-1 | |A|λ-1 | λ-1+f(λ) |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| 对应特征向量 | α | α | α |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 运用相似矩阵的性质,有 |  |  |  |  |
| 矩阵 | A | A\* | B | B+kE |
|  |  |  |  |  |
| 特征值 | λ | |A|λ-1 | |A|λ-1 | |A|λ-1+k |
|  |  |  |  |  |
| 对应特征向量 | α | α | P-1α | P-1α |

#### 4.3.1实对称矩阵必可对角化

## 5最最最易错的分解

### 5.1

有理分式：分母能因式分解，含二次式的高次幂，则拆成分子为一次式的项

∫ex⋅

|  |
| --- |
| x2-2x+2 |
| (2+x2)2 |

dx

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:17.) | kill(all) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | eq1:x2-2⁢x+2(2+x2)2; |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | eq2:a⁢x+b2+x2+c⁢x+d(2+x2)2 |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | solve(eq1-eq2=0,[a=-23,b,c,d]) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | eq1: 'frac(x^2 - 2\*x + 2, (2 + x^2)^2); |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | eq2: 'frac(ax + b, 2 + x^2) + 'frac(cx + d, (2 + x^2)^2); |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:18.) | sol: linsolve([eq1 - eq2], [a, b, c, d]); |

♥含 sqrt (

|  |
| --- |
| ax+b |
| cx+d |

)的积分,命 sqrt (

|  |
| --- |
| ax+b |
| cx+d |

)=t.

原式 =∫

|  |
| --- |
| 8 |
| 2 |

sqrt (

|  |
| --- |
| x-2 |
| 3x |

) dx = ∫

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | 1 | | 2 | |
| 0 |

|  |
| --- |
| 12t2 |
| (3t2-1)2 |

dt.

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | f(a):=sqrt((a-2)/(3\*a)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | jf(a)≔integrate(f(a),a,2,8) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | jf(a) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | zk(a):=integrate(f(a),a) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | expand(zk(a)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | factor(zk(a)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | fullratsimp(zk(a)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | \int\_0^{\frac{1}{2}}\frac{12t^2}{\left(3t^2-1\right)^2} \mathrm{d}t. |

incorrect syntax: { is not an infix operator

\int\_0^{\frac{

^

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | hy(t):=12⁢t2(3⁢t2-1)2 |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | jf(t)≔integrate(hy(t),t,0,1/2) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | fullratsimp(jf(t)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | trace(hy(t)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:3.) | step(hy(t)) |

incorrect syntax: ; is an unknown keyword in a do statement.

step(hy(t));

^

使用留数法：令 可得 ;令 可得. 使用赋值法：分别令和,并代入和的值，解得：

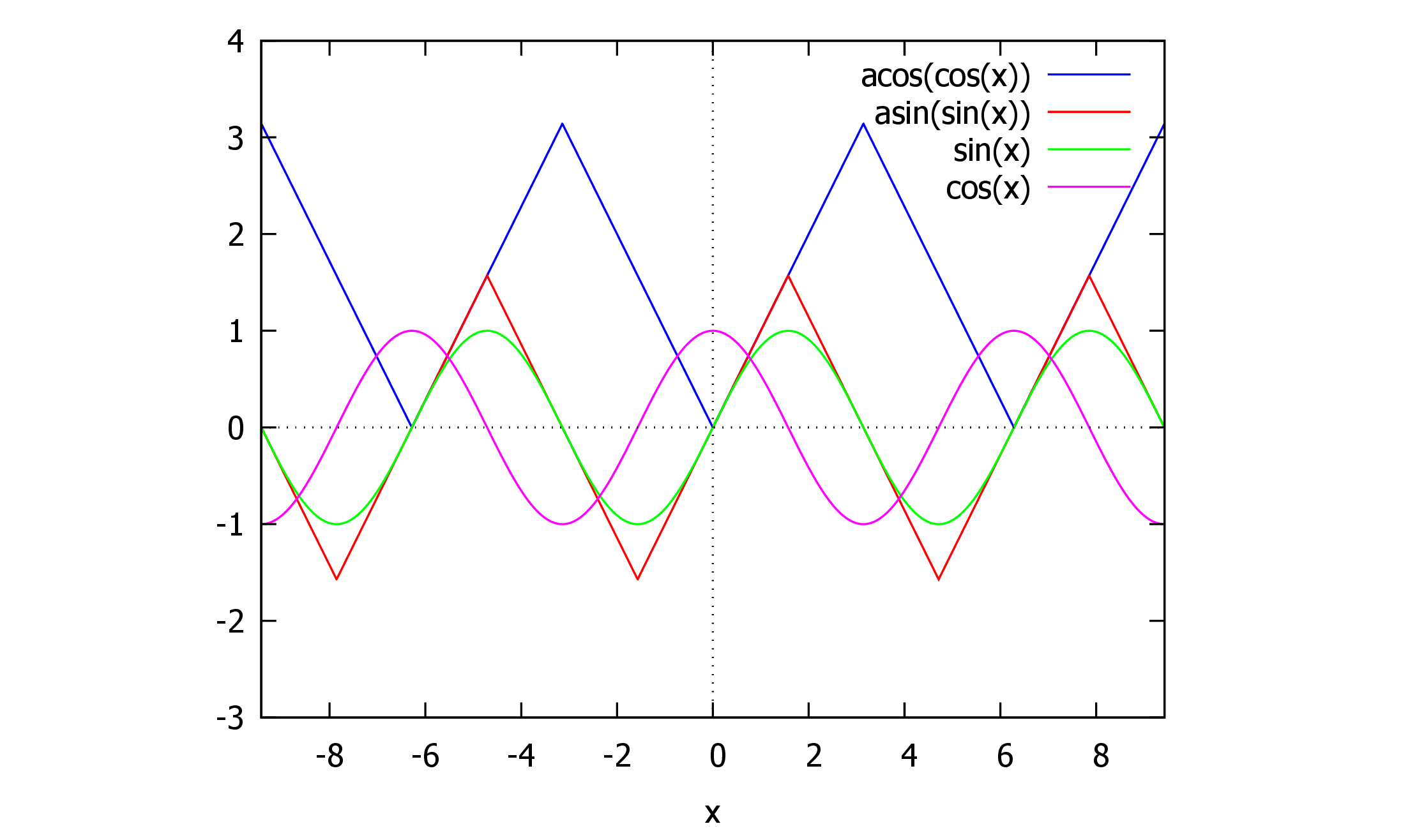
### 5.2arccos的区间

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) | ac(x):=acos(cos(x))as(x)≔asin(sin(x)) |

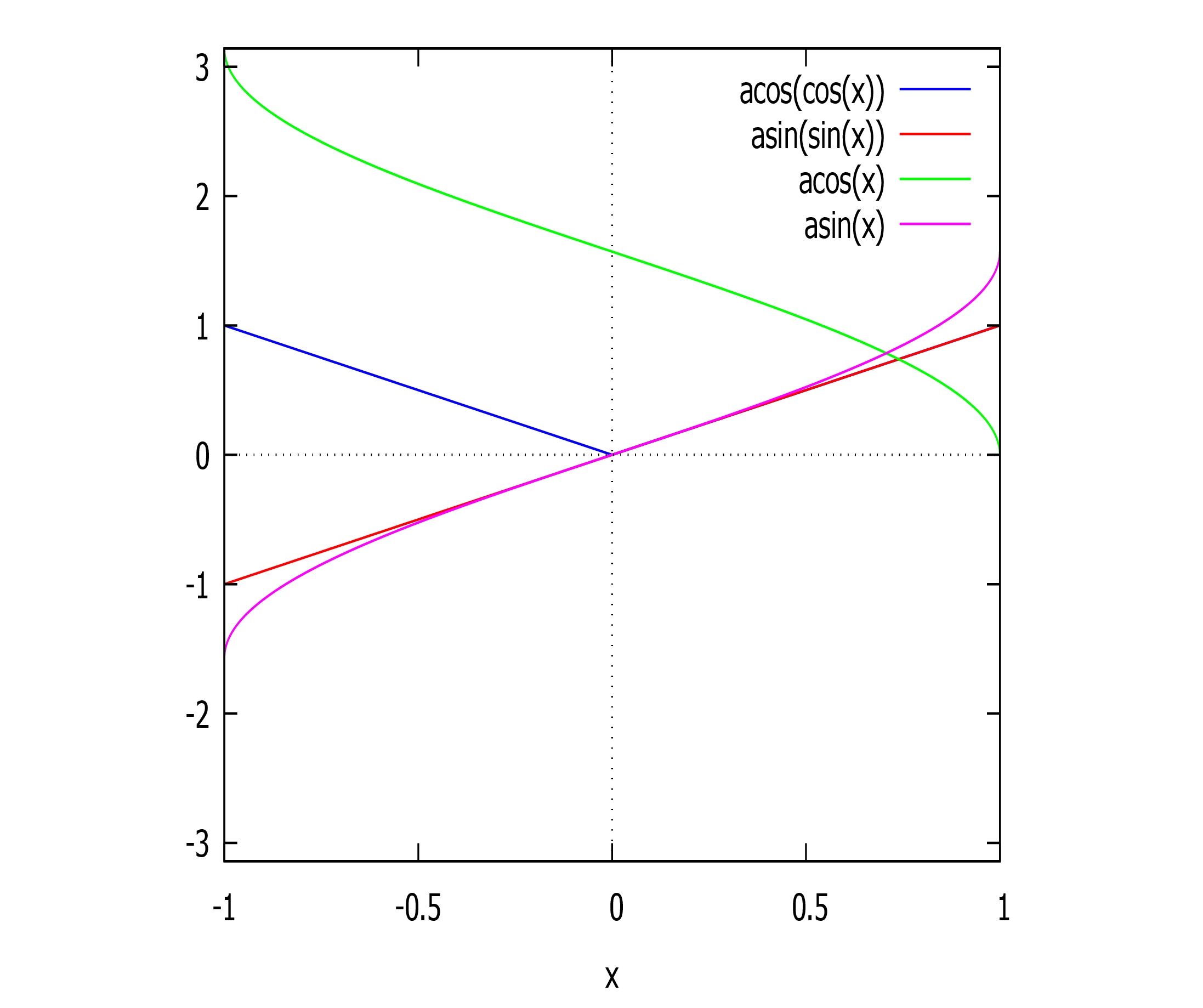
|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) | tm\_plot2d([ac(x),as(x),sin(x),cos(x)],[x,7⁢π2,4⁢π],[y,-2,3]) |

<image||0.618par|||>

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) | tm\_plot2d([ac(x),as(x),sin(x),cos(x)],[x,-3⁢π,3⁢π],[y,-3,4]) |



|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) | tm\_plot2d([ac(x),as(x),acos(x),asin(x)],[x,-1,1],[y,-π,π]) |



|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) | as(x)≔asin(sin(x)); |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:5) |  |

二重积分ddy 对应的积分区域为 如图所示，是 上方，下方，右侧的区域。交换积分顺序，将区域 写为的形式： 求 右边界.在边界上 .因为 ,故.即.则

—————————————————————————————————————

+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

——————————————————————————————————

因为可以由经行变换得到，矩阵左乘

已知 为阶可逆矩阵，为书写简洁，不妨设 为三阶矩阵。

根据题设：将的第 1 行加到第 2 行得矩阵,则.

因此 ,其中 为 倍加初等矩阵。

利用倍加初等矩阵的逆矩阵，有,则.

根据定义，有,从而.

因为将一行 (或列) 的倍加到另一行 (或列),行列式的值不变，则.

故,即将的第 2 列从第 1 列中减去得,答案选 D

[分析]因为所求行列式中含 ,想到. 试着将题设转化成等式右边的两项。

## 6方程组同解

[2005年真题] 已知齐次线性方程组

同解，

则

C. 3或 5 D. 2或 5

[分析]方程组同解，则 1.线性无关解的个数相同系数矩阵的秩相同；2.基础解系相同 [解答] 令方程组(l)的系数矩阵为.

令方程组(II)的系数矩阵为中十印如同知则的

由方程组同解，则方程 (II)线性无关解的个数=方程 (II)线性无关解的个数,即. 因 为 ,则 ,即 ,有

,则.

代入,则可以求方程组(1)的解。 对 高斯消元： 则令为独立未知量，为自由未知量。

令,解得.

则方程组(l)的通解是 为任意常数。

以下由方程组(II)的通解也是,求出 和.

注意有两部分：

是方程组 (II)的解；2.方程组 (II) 只有 1 个线性无关解，即.

第1部分：

因为应当是方程组 (II)的解，代入则得到 的方程组： ,解得 或.

第2部分：

情况一：当,方程组(ll)为 有 ,从而(I)与(II)不同解，故 应舍去。情况二：当时，方程组 有,从而方程组 (II) 只有 1 个线性无关解，即通解是为任意常数，(I) 与 (II) 同解。

故.选B

## 7函数极限

limx→0- -

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ∫   |  | | --- | | 1 | | 0 |   sqrt (2-2cos (2xt)) dt |
| x |

♥[2022年真题] 当 时， 是非零无穷小量，给出以下四个命题

(1)若,则;

(2)若,则;

(3)若,则;

(4)若,则

♥wrong usually

### 7.1复合函数

]

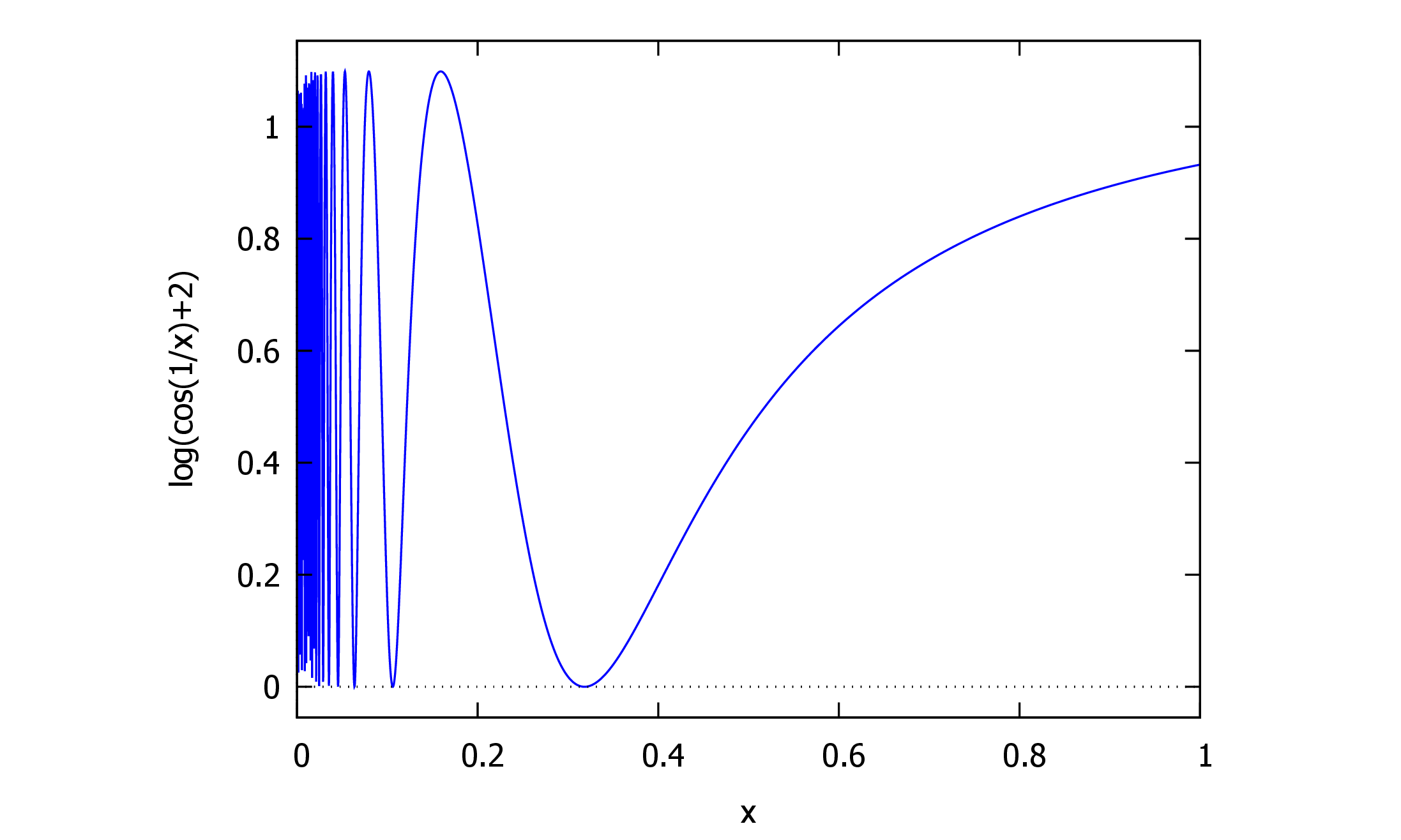
因为是复合函数，故利用复合函数的单调性质，“同增异减”。

[解答]

又因为单调增加，故

因为在上单调减少，其值域范围是(0,1),且在(0,1)上单调减少，故在上单调增加.

+2 单调增加；因为 单调增加，故单调增加。



## 8数列极限

下列条件中有几个是 的充分条件，几个是必要条件？

(1)(2)是充要条件,包含了全部子数列, 命题 (4)中,未出现的子数列 {x4n-3}可能发散,故原数列可能发散。故不是充分条件。

### 8.1极限存在证明

设是区间上单调减少且非负的连续函数， d 证明数列 的极限存在。 [解析] 1.证明极限存在，想到用单调有界定理，需要证明 单调且有界。 2.证明数列的单调性，需证明对于任意,都有或. 单调减，则有d

## 9连续与可导

设函数d 则

[ 分 析 ] d 是 变 上 限 积 分 , 利 用 变 上 限 积 分 的 性 质 判 断 。 [ 知 个 ]

[解

判断连续性：因为 除有限个第一类间断点 外处处连续，故 可积。则 d 为连续函数

判断可导性：变上限积分 在某一点的左右导数等于被积函数 在这一点的左右极限。由于 ,即,故.左右导数相等，故在处可导。 综上，在处连续可导，故选

## 10|A|

[2013年真题]是三阶非零矩阵，为的行列式为的代数余子式，若 ,则

### 10.1克拉默法则

则x1=

|  |
| --- |
| n⋅2n-1 |
| (n+1)⋅2n |

=

|  |
| --- |
| n |
| 2(n+1) |

## 11方程实根数

[2011年真题]设为参数，则关于方程不同实根的个数，说法正确的是：

(注：考试中本题型为证明题，选择正确后需要对比详细过程)

A. 若,则方程有 2 个实根；若,则方程有 1 个实根

B. 若,则方程有 1 个实根；若,则方程有 2 个实根

C. 若,则方程有 3 个实根；若,则方程有 1 个实根

D. 若,则方程有 1 个实根；若,则方程有 3 个实根

[分析]

判定方程根的个数，一般通过求导判断函数形态，利用单调性和介值定理判定。 题目中函数的单调性受到的影响。此类问题有两种解法： 1.分情况讨论：对于不同的,判断单调区间的情况； 2.分离参数法：先将方程化为的形式，再讨论的形态。 如果可以分离参数，则尝试分离参数法。如果不能分离参数，或分离参数后的导数不易分析，则使用分情况讨论的方法。 本题参数可以分离，得到的形式，但不容易分析，故建议分情况讨论。

### 11.1分情况讨论

### 11.2参数分离

## 12绝对值|X|

判断绝对值函数在一点是否可导，有两个重要推论，做选择题时可以直接应用： 且 是的不可导点；

在处不可导但可导，且在处连续，则综上，令,找的不可导点，即 1.找且的点。2.找且的点。在处可导的充要条件是.

loadfile: loading C:\Program Files\XmacsLabs\MoganResearch-1.2.9.5\plugins\maxima\lisp\texmacs-maxima.lisp.

Loading C:/Users/admin/maxima/maxima-init.mac

Maxima 5.47.0 https://maxima.sourceforge.io

using Lisp SBCL 2.3.2

Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.

Dedicated to the memory of William Schelter.

The function bug\_report() provides bug reporting information.

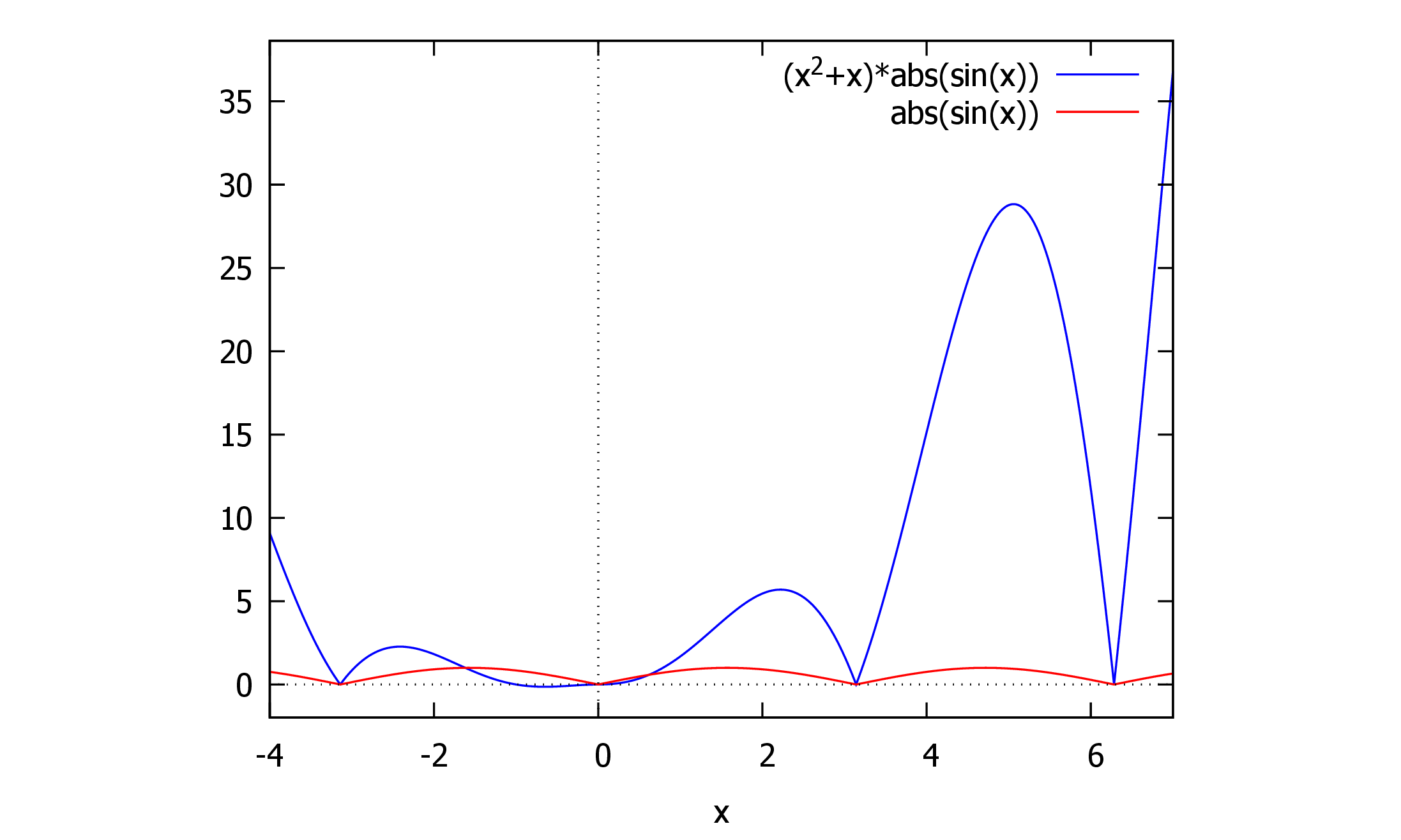
|  |  |
| --- | --- |
| (%i12) | h:sin(x); |

|  |  |
| --- | --- |
| (%i13) | h\_abs:abs(h); |

|  |  |
| --- | --- |
| (%i20) | g:x2+x |

|  |  |
| --- | --- |
| (%i22) | f:g\*h\_abs; |

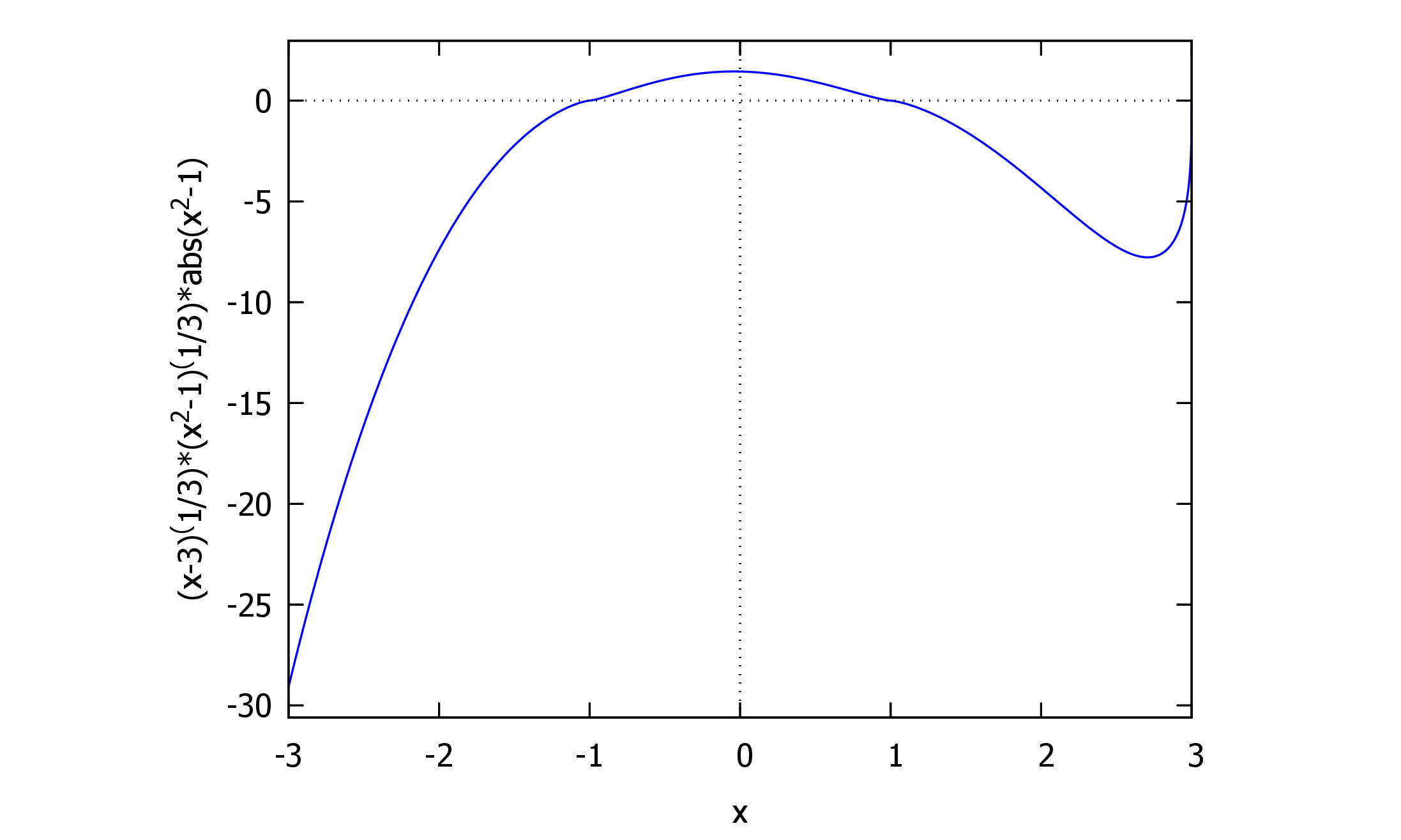
|  |  |
| --- | --- |
| (%i28) | tm\_plot2d([f,h\_abs],[x,-4,7]) |



|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:4) | kill(all) |

|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:4) | f:abs(x2-1)⁢(x2-1)⁢(x-3)3 |

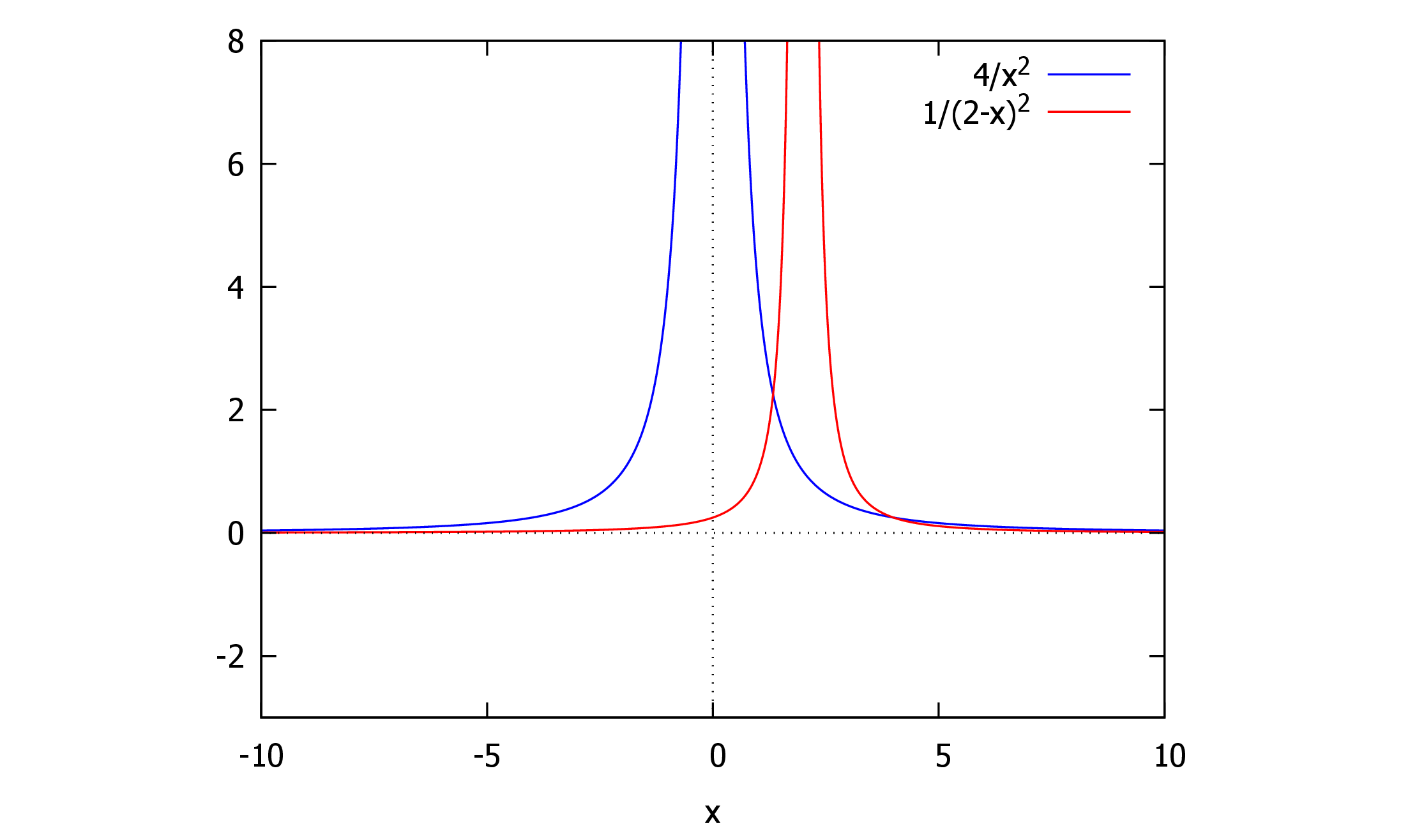
|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:4) | tm\_plot2d(f,[x,-3,3]) |



|  |  |
| --- | --- |
| (dbm:4) |  |

## 13中值定理

设在[0,2]上连续，在(0,2) 内存在二阶导数，并设.可以证明存在 ,使得 为常数)求 的最小值，使不等式对任意满足条件的 都成立。



## 14已知两个方程组的通解，求公共解。

则令通解相等，解关于常数 的新方程组

[解答]

设是方程组(l)与(ll)的非零公共解，则

.

那么 再代入题设给出的,由此得齐次方程组 (III) 对系数矩阵高斯消元.

令,则. 即通解为为任意常数。

则.

则方程组的公共解为 为任意常数。

## 15sinx与cosx

项同类函数乘积，分母包含,添起始项，来达到连锁消项的目的。

使用公式：2

[解答] .

1.若,添一项,则

时， 振荡但有界，即 又,而 为常数

故.

2.若,分两种情况， 或,其中.

若,

则.

若,

则.

综上，极限存在，可能为 0,1 或-1.

## 16

微分方程

### 16.1二阶，少y

### 16.2的二阶微分方程

[2016年真题设是二阶微分方程的解，已知,已知 ,且 为有理数，求.

[分析] 将代入微分方程，得到关于的关系式，由此求出的表达式。

[解答] 由,得.

♥得到 为不显含 的微分方程，

令,有.

原方程化为.

化为标准形式，除以的系数得

### 16.3一个简单的倒带换

[2007年真题]令微分方程满足初始条件的特解为,求的值

[分析] 不显含的微分方程，令,将的二阶微分方程转化为的一阶微分方程。

[解答] .

此时将 作为未知函数， 作为自变量，化为标准形式为 ,不便于求解。 故将 作为未知函数，将上式转化为 ,即 . 令 ,其中 ,代入一阶线性微分方程的通解公式：

1. x=e-∫p(t)dt\*|∫q(t)\*e∫p(t)dtdt+C1|

[1](#footnote-1)

### 16.4高阶K重根

重复数根：通解中的项

若为特征方程

的重复数根，

则对应的齐次方程通解中的 2项

求高阶齐次方程的通解：将个特征根对应的项相加得到通解

求阶常系数线性齐次微分方程的通解：

1 写出特征方程,求出其特征根

2 对每一个根，判断对应形式： 单重实根,对应一项;

♥重实根,对应项;

♥单重复数根 ,对应两项 ;

♥重复数根,对应项.

**例 1.** K重

已知以 y=(C1x+C2)cos 2x+(C3x+C4)sin 2x,(C1,C2,C3,C4为任意常数)为通解的微分方程是 y′′′′′+ay′′′+by′′+cy'+dy=0,求 a+b+c+d.

3 将个根对应的所有项相加便得通解，其中为任意常数。

## 17定积分应用

### 17.1旋转体体积，非

### 17.2积分比大小

I1=∫

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | π | | 4 | |
| 0 |

ln (1+2sin x)cotx dx,I2=∫

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | π | | 4 | |
| 0 |

2cos x cot x dx,I3=∫

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| |  | | --- | | π | | 4 | |
| 0 |

|  |
| --- |
| cos x |
| 1+x |

dx,则

即.

## 18重积分

[2003年真题 设 而 表示全平面，则dd

[分析] 由于和为分段函数，所以被积函数为分块函数，将积分区域按照被积函数拆分，分别积分。

[解答] 又在时;仅在时.则仅当时，被积函数不为0. 令此区域为,则.

有

### 18.1分段区间

令

ddy,其中.已知,其中

为有理数，求.

[分析] 被积函数中 是分块函数，先将积分区域拆分，去掉 max 符号。[解答]

被积函数在区域 的分界线为,即.将拆分为.如图所示。 与 相交于,与 相交于

(1,1).

区域中 中 max.

### 18.2区间相同，二重积分保序性

已知.区域,其中 为某函数。以下选项正确的是：

在积分区域上有,故.

和 在积分区域 上连续，且不恒相等，

所以 d d

综上选.

### 18.3二重积分存在

♥设二元函数(x,y)=xy

|  |
| --- |
| 3 |
| 2 |

ln(x4+y6),则lim(x,y)→(0,0)f(x,y)=

[分析]二重极限存在，需证明点以 任何方式 趋于点时，函数都无限趋近于同一常数. |.运用,来证明对任何,不等式都成立；

常用方法： 2. 夹逼定理； 3. 将重极限转化为一元函数极限。 这里用 1,2, 3.

[解答] ,有,则

令,则时，,有

,

最后一个等式用了常数 .

故由夹逼定理 ,即

♥

(分析]判断二重极限是否存在，关键在于构建不同路径，看是否存在： 1.两种不同路径，点 沿不同路径趋向于点 时， 趋于 不同常数， 2.某一路径，点沿此路径趋于时，的极限不存在， 若1或2成立，则极限不存在。

构建路径的常用方法：

1.常见函数：,令,则不同时，极限不同。 2.坐标轴方向：令,或,即沿平行于轴或轴的方向趋于,得到一个极限； 3.归零：分子分母有相同项，则构建路径使分子分母上的其他项为0； 4.分子低阶：构建路径使分母只余一项，如,选择使分子为的低阶无穷小，则极限为

这里用 4 即可.

## 19积分表

∫ln (sin x) dx=xln (sin x)-ln (cos x)+C

2.立方根函数积分：

3.其他根号函数积分：

4. 含有根号的三角函数积分：

5. 含有根号和指数的函数积分：

(这类积分通常需要换元法)

6. 含有根号和有理函数的积分：

(可能需要分部积分法)

1.有理函数积分(部分分式分解):

2.根式函数积分：

3.指数函数与三角函数的积分：

三角函数的分式，按顺序思考：

1.凑微分，

2.化简成一次式，或可以直接积分/凑微分积分的形式，

3.拆项，

4.和差化积，

5.万能代换。

不能凑微分，拆项或和差化积，所以用万能代换：命.

[解答]原式

|  |  |
| --- | --- |
| (%i11) | ds:sin(log(abs(x))(x-1)⁢(x-3)) |

|  |  |
| --- | --- |
| (%i12) | tm\_plot2d(ds,[x,-0.5,3.5]) |

