

Suavização Exponencial

Julia coelho da Silva

13 de Dezembro de 2023

Este trabalho visa explorar o modelo de suavização exponencial, uma técnica estatística amplamente utilizada na previsão de valores futuros em séries temporais. Fundamentado na premissa de que os dados recentes possuem maior relevância na predição do que dados mais antigos, o modelo emprega diversas abordagens que se adaptam a diferentes cenários.

Apesar de sua eficácia em muitos contextos, o modelo apresenta limitações, especialmente quando há com padrões complexos ou mudanças abruptas nos dados. Esta análise fornece uma visão abrangente do modelo, destacando sua utilidade, variações e desafios associados, contribuindo assim para a compreensão aprofundada dessa ferramenta na análise de séries temporais.

1 Introdução

Uma sequência de observações de uma variável aleatória ao longo do tempo é denominada série temporal, caracterizando-se como uma possível realização de um processo estocástico. Sua modelagem permite identificar um padrão de comportamento para a variável aleatória, possibilitando a realização de previsões (Morettin e Toloi, 2006).

Os métodos para previsão de séries temporais baseiam-se na ideia de que as observações passadas da série contêm informações sobre o seu padrão de comportamento no futuro. A essência desses métodos consiste em identificar o padrão de comportamento da série, separando-o do ruído contido nas observações individuais, e utilizá-lo para prever os valores futuros (Henning et al., 2010).

Este trabalho visa esclarecer os fundamentos do modelo de suavização exponencial, mas também explorar a aplicabilidade prática de suas diversas formas, como Médias móveis simples (MMS), Suavização exponencial simples (SES), Suavização exponencial de Holt (SEH) e Suavização exponencial sazonal de Holt-Winters (HW). Cada uma dessas formas do modelo é apropriada para diferentes contextos, e a escolha depende da natureza específica da série temporal. A suavização exponencial é amplamente utilizada em previsões de curto prazo, e cada uma das formas são ajustadas para otimizar o desempenho em dados.

A seguir, apresenta-se o modelo de suavização exponencial e os métodos adequados para cada situação. Na subseção seguinte, destaca-se o método apropriado para o modelo de séries temporais localmente constantes, enquanto na subseção 2.2, discute-se o modelo para séries temporais com tendência, seguido pela 2.3, onde apresenta-se o modelo para séries temporais sazonais.

2 Referencial Teórico

Nesta seção serão abordados os modelos de suavização exponencial, a saber, para séries localmente constantes, séries que apresentam tendência e séries sazonais. Cada abordagem é particularmente eficaz ao lidar com conjuntos de dados nos quais padrões e tendências podem mudar ao longo do tempo. Essas características tornam o modelo capaz de se adaptar dinamicamente a cada tipo de condição, proporcionando previsões mais precisas. Desse modo, a suavização exponencial se torna uma boa ferramenta na antecipação de padrões temporais.

2.1 Modelo para séries localmente constantes

- Médias Móveis Simples (MMS)

O método é empregado em séries de dados que não apresentam padrões sazonais ou tendências. Nesse método, presume-se que todas as observações possuem igual importância, resultando em um peso uniforme atribuído a cada uma. Desse modo, torna-se adequada sua utilização quando lidamos com um número reduzido de observações. A média aritmética das r observações é dada por:

$$M_t = \frac{Z_t + Z_{t-1} + \dots + Z_{t-r+1}}{r}$$

Onde M_t é uma estimativa do nível de μ_t que não pondera as observações mais antigas, o que é razoável devido ao fato do parâmetro variar suavemente com o tempo. O nome Média Móvel é utilizado, por que, a cada período, a observação antiga é substituída pela mais recente, calculando-se uma média nova (Morettin e Toloí, 2006).

- Suavização Exponencial Simples (SES)

O método é empregado em séries de dados que não possuem tendência ou sazonalidade e adota uma abordagem que atribui pesos distintos às observações. Neste método, valores maiores são atribuídos às observações mais recentes, enquanto o peso das mais antigas decai de maneira exponencial. A variabilidade na atribuição de pesos implica que, à medida que o peso aumenta, a suavização diminui. A SES é descrita como:

$$\bar{Z}_t = \alpha Z_t + (1 - \alpha) \bar{Z}_{t-1}$$

onde Z_t é denominado o valor exponencialmente suavizado e α é a constante de suavização no intervalo (0,1) (Morettin e Toloí, 2006).

2.2 Modelo para séries que apresentam tendência

- Suavização Exponencial de Holt (SEH)

O método (Holt 1957) se assemelha ao método de Suavização Exponencial Simples, distinguindo-se pela inclusão da modelagem da tendência da série temporal. Dessa forma, ao realizar previsões, são atribuídos pesos tanto para a componente de nível quanto para a tendência. Essa ampliação da metodologia proporciona a capacidade de capturar variações no valor médio da série e também nas mudanças de direção ao longo do tempo, tornando-o mais robusto em cenários com tendências distintas. A SEH é definida como:

$$y_{t+h|t} = l_t + hb_t$$

$$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1}$$

Onde l_t é uma estimativa do componente de nível da série no período t e b_t corresponde a uma estimativa do componente de tendência. Assim como α , o parâmetro β também está definido no intervalo (0,1) (Hyndman e Athanasopoulos 2018).

2.3 Modelo para séries sazonais

Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters (HW)

O método (Holt, 1957; Winters, 1960) incorpora a sazonalidade da série temporal e é composto por três componentes principais: nível, crescimento e sazonalidade. A característica distintiva reside na natureza aditiva ou multiplicativa do fator sazonal. Segundo Morettin & Toloí (2004), os dois modelos diferem por:

- **Holt-Winters Aditivo:**

É utilizado quando a amplitude da variação sazonal se mantém constante, ou seja, a diferença entre o maior e o menor ponto nos ciclos permanece constante com o passar do tempo. Assim, assumindo a série, X_t , e considerando que ela possui um ciclo e sazonalidade aditiva, essa série pode ser modelada da seguinte forma:

$$Y_t = \mu_t + \theta_t + I_t + \varepsilon_t$$

onde, μ_t refere-se ao nível, θ_t à tendência, I_t ao fator sazonal e, por fim, ε_t ao resíduo aleatório. Estes parâmetros (nível, tendência e sazonalidade) devem ser atualizados a cada instante de tempo. Para eles, são utilizadas as seguintes equações:

$$\text{Nível } \mu_t = \alpha \cdot (Y_t - I_{t-\omega}) + (1 - \alpha) \cdot (\mu_{t-1} + \theta_{t-1})$$

$$\text{Tendência } \theta_t = \gamma \cdot (Y_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma) \cdot \theta_{t-1}$$

$$\text{Sazonalidade } I_t = \delta \cdot (Y_t - \mu_t) + (1 - \delta) \cdot I_{t-\omega(1-\delta)}$$

Onde α , γ , e δ são constantes de amortecimento compreendidas entre valores de 0 e 1.

- **Holt-Winters Multiplicativo:**

É utilizado quando a amplitude da variação sazonal aumenta com o tempo, ou seja, a diferença entre o maior e o menor ponto nos ciclos cresce com o passar do tempo. Assim, assumindo a série, X_t , e considerando que possui unicamente um ciclo e ainda sazonalidade multiplicativa, esta série pode ser modelada da seguinte forma:

$$Y_t = (\mu_t + \theta_t) \times I_t + \varepsilon_t$$

onde, μ_t refere-se ao nível, θ_t à tendência, I_t ao fator sazonal e, por fim, ε_t ao resíduo aleatório. Estes parâmetros (nível, tendência e sazonalidade) devem ser atualizados a cada instante de tempo. Para eles, são utilizadas as seguintes equações:

$$\text{Nível } \mu_t = \alpha (Y_t - \beta) + (1 - \alpha) (\mu_{t-1} + \theta_{t-1})$$

$$\text{Tendência } \theta_t = \gamma \cdot (Y_t - \mu_{t-1}) + (1 - \gamma) \cdot \theta_{t-1}$$

$$\text{Sazonalidade } I_t = \delta (Y_t - \mu_t) + (1 - \delta) \cdot I_{t-\omega}$$

3 Metodologia

O objetivo desse trabalho é compreender e avaliar a suavização exponencial e seus quatro métodos de previsão: Médias móveis simples (MMS), Suavização exponencial simples (SES), Suavização exponencial de Holt (SEH) e Suavização exponencial sazonal de Holt-Winters (HW). Desse modo, será realizado um estudo utilizando quatro obras de referência: "Time Series Analysis: Forecasting and Control" de Blockwell e Davis (2016), "Introductory Time Series with R" de Cowpertwait e Metcalfe (2009), "Análise de Séries Temporais" de Morettin e Toloi (2006) e "Modelagem e Análise de Decisão" de Cliff T. Ragsdale (2009).

Ao final, espera-se oferecer uma melhor compreensão dos métodos de previsão, da aplicabilidade e da eficácia de cada abordagem. O resultado final contribuirá para a escolha de métodos adequados em diferentes cenários de previsão.

4 Resultados e Discursões

Nessa seção, serão implementados e avaliados quatro modelos de suavização exponencial. Os modelos utilizados são o de Médias móveis simples, Suavização exponencial simples, Suavização exponencial de Holt e Suavização exponencial sazonal de Holt-Winters. Cada modelo foi aplicado a um conjunto de dados específico, e a partir dele, será ilustrada a aplicabilidade dos métodos. A discussão enfoca nos casos em que cada método se destaca e as situações em que são apropriados.

4.1 Médias Móveis Simples (MMS)

Na ausência de uma componente sazonal, o modelo tem a seguinte forma:

$$X_t = m_t + Y_t, \quad t = 1, \dots, n$$

A aplicação do método de Médias móveis simples foi conduzida na série referente ao Número anual de greves nos Estados Unidos para os anos 1951-1980. Os dados resultantes dessa aplicação são apresentados na Figura 1.

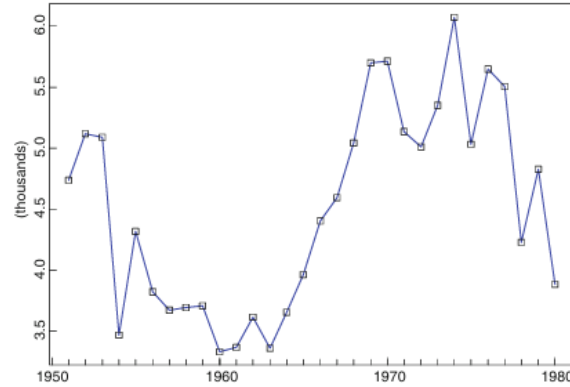


Figure 1: Número anual de greves nos Estados Unidos nos anos de 1951-1980.

O resultado da aplicação do filtro de média móvel com $q = 2$ aos dados é mostrado na Figura 2.

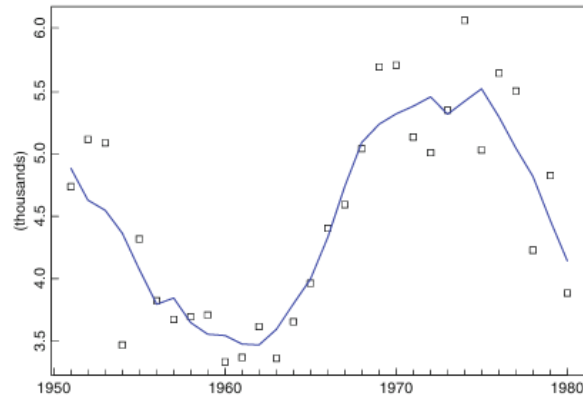


Figure 2: Resultado filtro de média móvel $q=2$.

Os termos de ruído estimados $\hat{Y}_t = X_t - \hat{m}_t$ são mostrados na Figura 3.

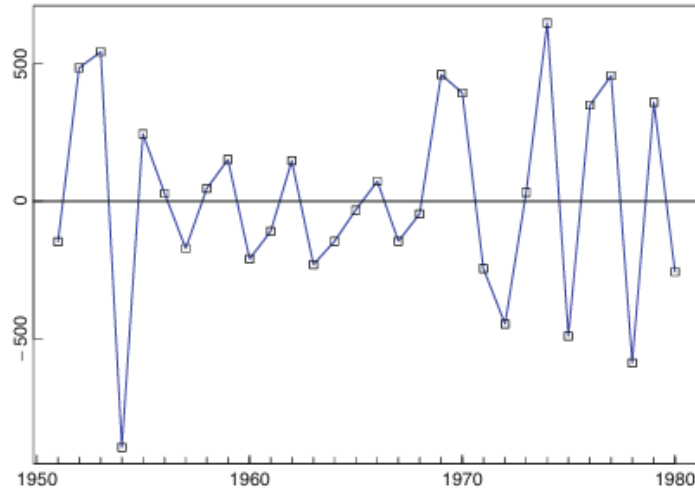


Figure 3: Ruídos estimados.

Como esperado, eles não apresentam uma tendência aparente. O filtro foi aplicado utilizando o pacote ITSM no software R-Studio, nele é preciso especificar a ordem do filtro e inserir os pesos (esses são automaticamente normalizados de modo que a soma dos pesos seja um). O filtro trabalha no sentido de receber os dados $\{X_t\}$ e remover deles o componente rapidamente oscilante (ou de alta frequência) $\{\hat{Y}_t\}$, deixando apenas o termo de tendência estimada que varia lentamente $\{\hat{m}_t\}$. Para um valor de q grande, o filtro não apenas atenuará o ruído, mas ao mesmo tempo permitirá que as funções de tendência linear $m_t = c_0 + c_1 t$ passem sem distorção (Blockwell e Davis, 2016).

4.2 Suavização Exponencial Simples (SES)

Nessa seção, foram adotados os dados mencionados anteriormente, mas agora no método de Suavização exponencial simples (SES). Na Figura 4, apresenta-se o resultado da suavização dos dados de greve utilizando a suavização exponencial com parâmetro $\alpha = 0.4$.

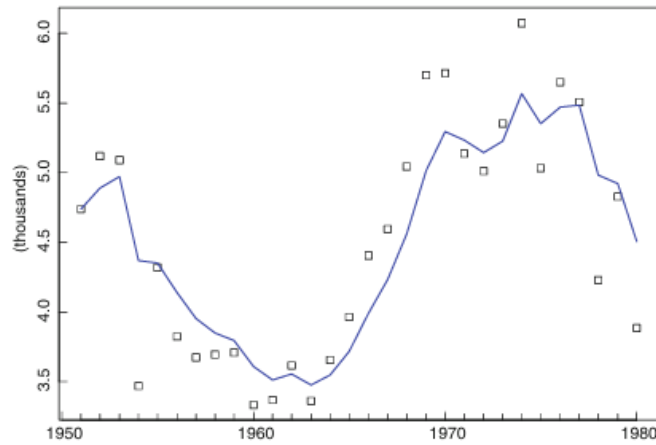


Figure 4: Resultado suavização exponencial simples $\alpha = 0.4$.

O filtro foi aplicado pelo pacote ITSM no software R-Studio ITSM. O valor suavizado exponencialmente da última observação é frequentemente utilizado para prever os próximos valores dos dados. O programa automaticamente seleciona um valor ótimo para α , para este propósito e esta finalidade, somente se α for especificado como [-1] na suavização exponencial, caso contrário, será necessário especificar o valor de α (Blockwell e Davis, 2016).

4.3 Suavização Exponencial de Holt (SEH)

A aplicação do modelo de Suavização Exponencial de Holt foi conduzida na série referente a evolução das vendas ao longo dos anos de 2008-2012. A série temporal das vendas está representada na Figura 5 e a partir dela observa-se que há a presença de tendência crescente nas vendas.

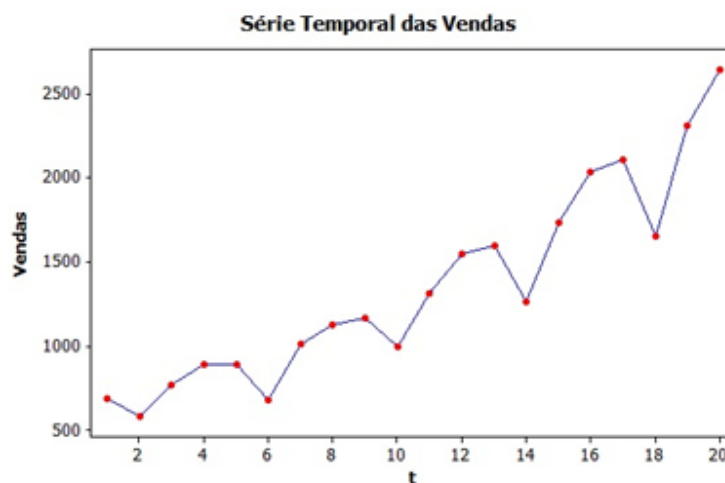


Figure 5: Evolução das vendas ao longo dos anos de 2008-2012.

Utilizando o Otimizador Solver do Excel é possível ajustar o modelo. Assim, os valores de $\alpha = 0.012$ e $\beta = 0.100$ minimizam o Erro Quadrático Médio (MSD) para o modelo de ajuste exponencial duplo. A partir dele, é possível realizar previsões para a série que apresenta tendência acentuada (Ragsdale, 2009).

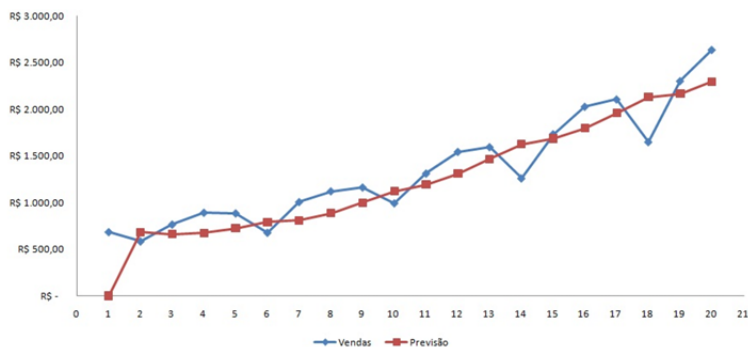


Figure 6: Evolução das vendas ao longo dos anos de 2008-2012 x Previsão.

4.4 Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters (HW)

A aplicação do método de Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters foi conduzida na série referente a vendas mensais de vinho australiano por categoria nos anos de 1980-1995. A série temporal do vinho branco está representada na Figura 6, e há um aumento nas vendas na segunda metade da década de 1980, seguida de uma redução para um nível. A variação sazonal parece que seria melhor modelado como multiplicativo.

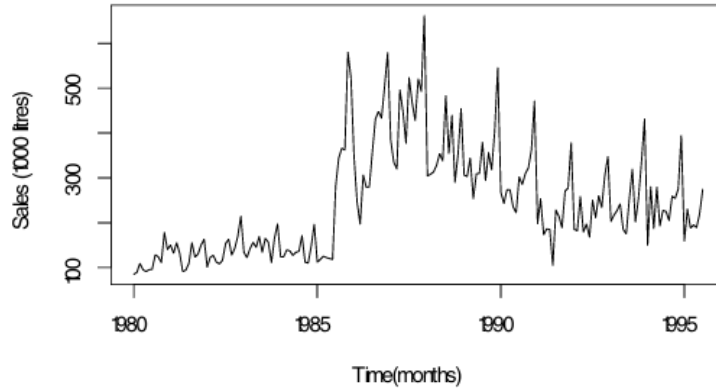


Figure 7: Vendas de vinho branco doce australiano nos anos de 1980-1995.

Os valores ideais para os parâmetros de suavização, com base na minimização dos erros de previsão de um passo à frente, são 0,4107, 0,0001516 e 0,4695 para α , β e γ , respectivamente. Na Figura 7, a função `decompose()` no software R-Studio mostra os componentes individuais da série, como tendência, sazonalidade e erro:

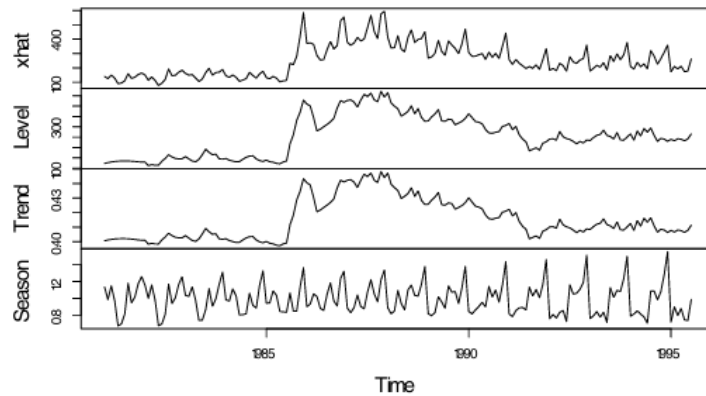


Figure 8: Função `decompose()` para Vendas de vinho branco doce australiano nos anos de 1980-1995.

Foi aplicada a função `HoltWinters()` na série e o parâmetro foi definido como multiplicativo. Ou seja, para o caso aditivo, a variação sazonal seria independente do nível. Em contraste, assume-se que se a componente sazonal é multiplicativa a variação sazonal é proporcional ao nível da série temporal. Ao ajustar um modelo, a função tenta capturar a tendência e a sazonalidade na série, ajustando adequadamente os parâmetros do modelo para minimizar os erros de previsão. Esses parâmetros incluem os coeficientes α , β e γ para controle da suavização exponencial (Cowpertwait e Metcalfe 2009).

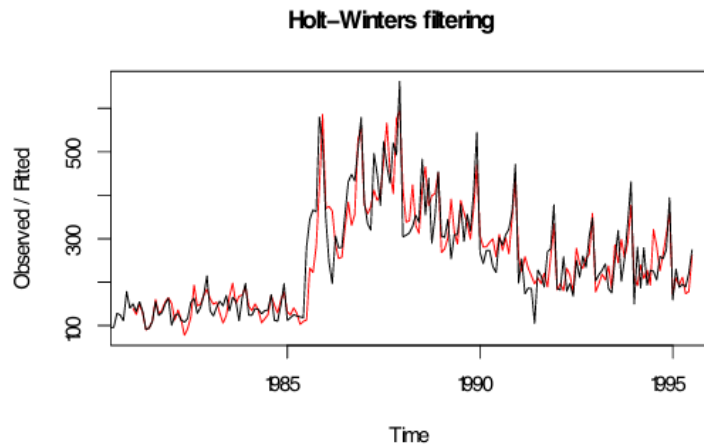


Figure 9: Vendas de vinho branco australiano e valores ajustados de Holt-Winters.

5 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi avaliar o desempenho dos modelos de suavização exponencial, e isso foi feito em quatro séries temporais distintas. Os modelos abordados proporcionam ferramentas para a previsão de séries temporais em diferentes contextos onde cada modelo é adaptado para lidar com padrões diferentes. Portanto, a escolha entre os métodos deve ser guiada pela natureza dos dados. Em resumo, a suavização exponencial é uma ferramenta para antecipação de padrões temporais, oferecendo métodos adaptáveis para cada tipo de situação. A seguir, apresenta-se o resumo de cada modelo e suas indicações.

- 1) Médias Móveis Simples: Indicado para séries de dados sem padrões sazonais ou tendências, a MMS assume igual importância para todas as observações, calculando uma média móvel que se adapta dinamicamente.
- 2) Suavização Exponencial Simples: Utilizado em séries sem tendência ou sazonalidade, atribui pesos exponenciais distintos às observações, priorizando valores mais recentes.
- 3) Suavização Exponencial de Holt: Incorpora a modelagem da tendência, atribuindo pesos para a componente de nível e para a tendência.
- 4) Suavização Exponencial Sazonal de Holt-Winters: Adapta-se à sazonalidade da série, considerando três componentes principais: nível, crescimento e sazonalidade. A abordagem aditiva é apropriada quando a amplitude da variação sazonal é constante, enquanto a multiplicativa é preferível quando essa amplitude varia ao longo do tempo.

6 Referências

1. Blockwell, P., & Davis, R. (2016). *Introdução para séries temporais e previsão* (Tradução do título original: *Introduction to Time Series and Forecasting*.) Editora: [Springer].
2. Cowpertwait, P., & Metcalfe, A. (2009). *Introdução à Análise de Séries Temporais com R*. (Tradução do título original: *Introductory Time Series with R*.) Editora: [Springer].
3. Morettin, P., & Toloi, C. (2006). *Análise de Séries Temporais*. Editora: [Blucher].
4. Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018). *Previsão: Princípios e Prática*. (Tradução do título original: *Forecasting: Principles and Practice*.) Editora: [OTexts].
5. Holt, C. C. (1957). *Previsão de tendências e sazonais por médias móveis ponderadas exponencialmente*. (Tradução do título original: *Forecasting trends and seasonal by exponentially weighted moving averages*.) ONR Research Memorandum, Carnegie Institute 52, 1957.
6. Ragsdale, C., 2009. Modelagem e Análise de Decisão. São Paulo: Cengage Learning.