UNIDADE I

Matemática e Estatística

Prof. Msc. Fábio Assis

Revisão de conceitos – Operações aritméticas

Operações aritméticas: existem quatro operações aritméticas fundamentais, que são: adição, subtração, multiplicação e divisão. Vamos descrevê-las brevemente a seguir.

- Na adição, cada número a ser adicionado é chamado de parcela, e o resultado da adição é a soma.

- Na subtração, os números a serem subtraídos são chamados de subtraendo, e o resultado é o minuendo.

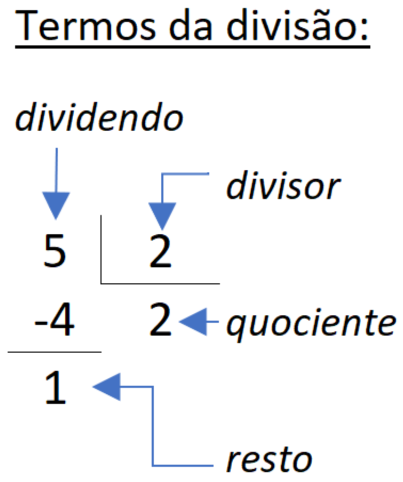
Operações Aritméticas		Resultado
Adição	2 + 3 =	5 (soma)
Subtração	2 - 1 =	1 (minuendo)

Revisão de conceitos – Operações aritméticas

- Na multiplicação, cada número a ser multiplicado é chamado de fator, e o resultado é o produto.
- Na divisão, temos como resultado o quociente entre números e cada número tem um nome diferente, como poder ser visto no exemplo abaixo:

Operações Aritméticas		Resultado
Multiplicação	2 x 2 =	4 (produto)
Divisão	12 / 4 =	3 (quociente)

Exemplo detalhado da divisão:



Revisão de conceitos – Operações aritméticas

a^n

Operações aritméticas: conceitos básicos de potenciação.

- Na potenciação, temos a seguinte definição: sendo a base a um número real e o expoente n um número inteiro, temos:

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$$

Podemos destacar:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exemplos:

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$(-2)^2 = -2 \times -2 = 4$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$(-2)^3 = -2 \times -2 \times -2 = -8$

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$

Revisão de conceitos – Operações aritméticas

$\sqrt[n]{a}$

Operações aritméticas: conceitos básicos de radiciação.

- Na radiciação, temos a seguinte definição: sendo a um número não negativo e n um inteiro positivo, temos.

$$\sqrt[n]{a} = b \;\rightarrow\; b^n = a$$

Em que

$n = índice$

$\sqrt{\cdot} = radical$

$a = radicando$

$b = raiz$

Exemplos:

$\sqrt[2]{9} = 3, pois\ sabemos\ que\ 3^2 = 9$

$\sqrt[1]{0} = 0, pois\ sabemos\ que\ 0^1 = 0$

$\sqrt[3]{8} = 2, pois\ sabemos\ que\ 2^3 = 8$

Podemos destacar:

- Radiciação é a operação matemática inversa à potenciação.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

- Expressões algébricas são expressões matemáticas que utilizam as letras ou quaisquer símbolos não numéricos em sua composição, além de numerais e operadores aritméticos.
- São capazes de traduzir as situações cotidianas para a linguagem matemática.

Linguagem cotidiana	Linguagem matemática
O dobro de um número	$\overset{\text{Coeficiente}}{2}\underset{\text{Parte literal}}{x}$
Um número acrescido de 5 unidades	$x - 5$

- Expressões algébricas podem incluir letras, chamadas de parte literal, para representar um número desconhecido. Essas letras representam variáveis e podem assumir valores numéricos.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

Acompanhe os exemplos de identificação do coeficiente e da parte literal de termos algébricos:

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$\frac{5x}{2}$	$\frac{5}{2}$	x
$-x^2$	-1	x^2

- Apenas podemos somar ou subtrair os termos que sejam <u>semelhantes</u>, ou seja, que apresentam a mesma parte literal;
- Uma expressão algébrica composta por mais de um termo pode ser chamada de <u>polinômio</u>.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

- Exemplo: o perímetro de um polígono é definido como a soma dos comprimentos de seus lados. Encontre uma expressão algébrica que represente o perímetro do triângulo da figura a seguir, em que x representa um número real maior do que 1.

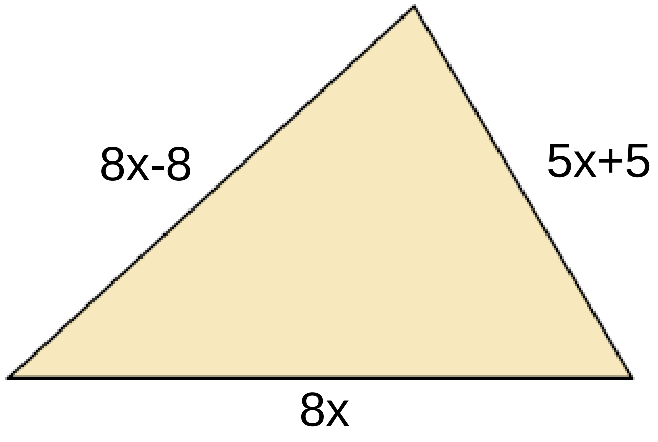


Figura 1 – Triângulo escaleno

Solução:

- Para representar algebricamente o perímetro P, devemos somar as medidas dos três lados do triângulo.
- Portanto, podemos somar ou subtrair os termos que sejam semelhantes

$$P = (8x - 8) + (5x + 5) + 8x$$

$$P = 8x - 8 + 5x + 5 + 8x$$

$$P = 21x - 3$$

Logo, a expressão algébrica $P = 21x - 3$ representa o perímetro do triângulo.

Fonte: livro-texto.

Revisão de conceitos – Razão, proporção e regra de três

- Podemos definir a razão, no contexto da matemática, como o quociente entre dois números.

Exemplo: a razão entre 1 e 2 pode ser expressa na forma de:

Fração	Decimal
$\frac{1}{2}$	0,5

- Uma proporção pode ser definida como a igualdade entre as razões. A proporção pode ser expressa como mostrado a seguir, em que $x \neq 0$ e $z \neq 0$. Lemos: "w está para x assim como y está para z".

$$\frac{w}{x} = \frac{y}{z} \rightarrow \frac{w}{x} = \frac{y}{z} \rightarrow xy = wz$$

- As variáveis w, x, y e z são os termos da proporção. Em que w e z são chamados de extremos, e os termos x e y de meios.
- Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Nesse caso, ficamos com: $xy = wz$.

Revisão de conceitos – Razão, proporção e regra de três

Exemplo: em um escritório de contabilidade, 12 colaboradores são capazes de gerar 50 relatórios, durante um expediente de 9 horas. Com 36 colaboradores, quantas horas seriam necessárias para gerar esses mesmos 50 relatórios, mantidas as devidas proporções?

Solução: Para grandezas inversas, temos, na prática, que trocar o posicionamento dos valores de uma dessas grandezas para podemos construir a proporção.

	1ª grandeza (nº de colaboradores)		**2ª grandeza** (tempo, em horas)	
1º caso	**12**	↓	**9**	↑
2º caso	**36**		x	

Temos a seguinte proporção:

$$\frac{12}{36} = \frac{x}{9} \Rightarrow 36x = 12 \times 9$$

$$36x = 108$$

$$x = \frac{108}{36}$$

$$x = 3$$

Portanto, são necessárias 3 horas de trabalho.

Interatividade

(UEPB/2014). A razão entre o peso de uma pessoa na Terra e o seu peso em Netuno é 5/7. Dessa forma, o peso de uma pessoa que, na Terra, pesa 60 kg, em Netuno, está no intervalo?

a) [40 kg; 45 kg].
b)]45 kg; 50 kg].
c) [55 kg; 60 kg].
d)]75 kg; 80 kg[.
e) [80 kg; 85 kg].

Resposta

(UEPB/2014). A razão entre o peso de uma pessoa na Terra e o seu peso em Netuno é 5/7. Dessa forma, o peso de uma pessoa que, na Terra, pesa 60 kg, em Netuno, está no intervalo?

a) [40 kg; 45 kg].
b)]45 kg; 50 kg].
c) [55 kg; 60 kg].
d)]75 kg; 80 kg[.
e) [80 kg; 85 kg].

Solução:

Terra / Netuno		Kg	
5	↓	60	↓
7		x	

$$\frac{5}{7} = \frac{60}{x} \rightarrow 5x = 7 \times 60$$

$$5x = 420$$

$$x = \frac{420}{5} = 84$$

Portanto, em Netuno, esse peso equivale a 84 kg e está no intervalo [80 kg; 85 kg], conforme a letra e.

Revisão de conceitos – Porcentagem

- Porcentagem pode ser definida como a centésima parte de uma grandeza.

Se temos $x\%$, podemos reescrever essa taxa percentual como uma razão na forma de fração ou na forma decimal:

$$x\% = \frac{x}{100} = \frac{1x}{100} = 0{,}01x$$

Vamos interpretar a situação apresentada a seguir:

- “O preço aumentou em 10% em relação ao ano passado”: a cada R$ 100,00 gastos no ano passado, gastaremos R$ 110,00 (R$ 100 + R$ 10) neste ano, para adquirir a mesma quantidade.

Revisão de conceitos – Porcentagem

Exemplo: uma fábrica emprega, no total, 1.500 pessoas. Dessas, 30% têm o ensino superior completo. Qual é o número de funcionários com diploma superior na fábrica?

Solução 1 – Regra de três:

Funcionários	Taxa %
1500	100
x	30

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{30} \Rightarrow 100x = 1500 \times 30$$

$$x = 450$$

Solução 2 – Expressar x% como fração:

$$\boxed{x\% = \frac{x}{100}} \Rightarrow \frac{30}{100} \times 1500 = 0{,}3 \times 1500 = 450$$

Logo, 450 funcionários da fábrica possuem o diploma superior.

Revisão de conceitos – Porcentagem

Exemplo: uma disciplina universitária, cursada por 2.205 alunos, reprovou 245 deles. Qual é a porcentagem de alunos reprovados nessa disciplina?

Solução 1 – Regra de três:

Nº de alunos	Taxa %
2205	100
245	x

$$\frac{2205}{245} = \frac{100}{x} \Rightarrow 2205x = 245 \times 100$$

$$x = 11{,}11\%$$

Solução 2 – Regra prática:

$$\boxed{\frac{parte}{todo} \times 100 = x\%} \Rightarrow \frac{245}{2205} \times 100 = 11{,}11\%$$

Portanto, a taxa de reprovação na disciplina foi de 11,11%.

Revisão de conceitos – Porcentagem

Exemplo: uma mesa digitalizadora que, inicialmente, custava R$ 500,00 teve o seu preço acrescido de 20%. Algum tempo depois, em uma liquidação, esse novo preço sofreu um desconto de 20%. Qual é o preço da mercadoria após a aplicação do desconto?

Solução:

- Vamos analisar a tabela, para interpretar e entender a variação do preço ao longo do tempo.

Inicialmente	**Após o acréscimo de 20%**	**Após o desconto de 20%**
Preço: $R\$\ 500{,}00$	$\frac{20}{100} \times 500 = 100$ $500 + 100 = 600$ Preço: $R\$\ 600{,}00$	$\frac{20}{100} \times 600 = 120$ $600 - 120 = 480$ Preço: $R\$\ 480{,}00$

Logo, o preço após a aplicação do desconto é R$ 480,00.

Interatividade

(Vunesp – 2018). Uma empresa selecionou 160 candidatos para uma entrevista, visando ao preenchimento de algumas vagas. Dos candidatos selecionados, 5% não compareceram à entrevista, e 25% dos que compareceram foram contratados. Em relação ao número inicial de candidatos selecionados, aqueles que foram contratados representam:

a) 24,25%.
b) 23,75%.
c) 23,25%.
d) 22,50%.
e) 22,25%.

Resposta

(Vunesp – 2018). Uma empresa selecionou 160 candidatos para uma entrevista, visando ao preenchimento de algumas vagas. Dos candidatos selecionados, 5% não compareceram à entrevista, e 25% dos que compareceram foram contratados. Em relação ao número inicial de candidatos selecionados, aqueles que foram contratados representam:

a) 24,25%.
b) 23,75%.
c) 23,25%.
d) 22,50%.
e) 22,25%.

Solução:

Candidatos que compareceram: 100% – 5% = 95%	$\frac{100\cancel{\%}}{95\cancel{\%}} = \frac{160}{x} =$ $100x = 160 \times 95$ $x = \frac{152\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 152$
Dos 152 que compareceram, 25% foram contratados.	$\frac{25}{100} \times 152 = 0{,}25 \times 152 = 38$
Qual é a taxa que o número 38 representa em relação ao total de 160 candidatos selecionados?	$\frac{100\%}{x} = \frac{160}{38} =$ $160x = 38 \times 100$ $x = \frac{380\cancel{0}}{16\cancel{0}} = 23{,}75\%$

Teoria de conjuntos – Definições básicas

- Conjunto é uma coleção de elementos que possuem alguma característica em comum.
- Elemento é o nome dado a cada item que faz parte de um conjunto.

As principais formas de representar um conjunto são as apresentadas a seguir:

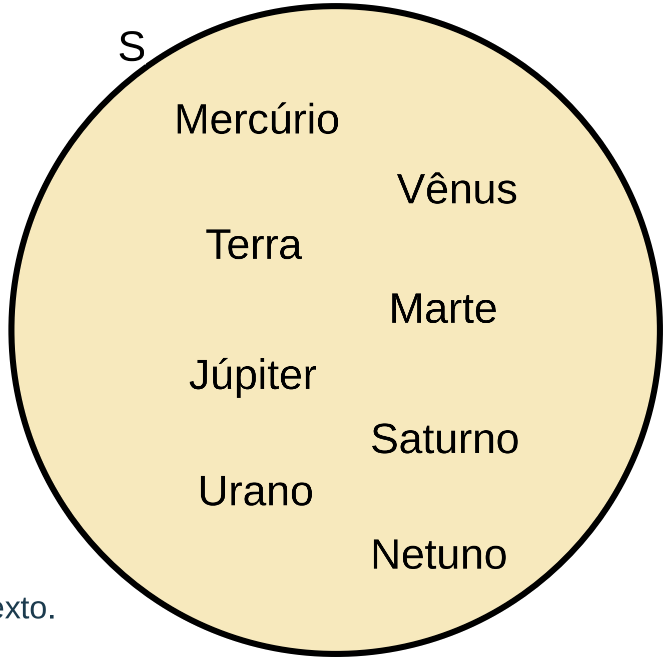
1. Entre chaves por extenso: listamos os elementos entre chaves, separados por vírgula.
2. Entre chaves por propriedade: temos a apresentação de uma propriedade que determina que tipo de elemento pertence àquele conjunto.
3. Graficamente: utilizamos diagramas de Venn-Euler.

- Geralmente, o nome de um conjunto é representado por uma letra maiúscula, mas isso pode variar, dependendo da aplicação.

Teoria de conjuntos – Exemplo

Geralmente, o nome de um conjunto é representado por uma letra maiúscula, mas isso pode variar dependendo da aplicação. Podemos citar os exemplos a seguir:

1. Entre chaves por extenso: S = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno}.
2. Entre chaves por propriedade: S = $\{x \mid x$ é um planeta do Sistema Solar$\}$.
3. Graficamente: temos o que se mostra na Figura 2.



Fonte: livro-texto.

Figura 2 – Planetas.

Teoria de conjuntos – Pertinência

A pertinência é um tipo de relação entre um elemento e um conjunto. Ela indica a existência ou a ausência de um elemento dentro de um conjunto. Para isso, são utilizados dois símbolos de operadores relacionais:

Simbologia	Significado
$\in$	Pertence
$\notin$	Não Pertence

- No caso das relações de pertinência, quando queremos afirmar que um elemento x pertence a um conjunto A qualquer, utilizamos o símbolo $\in$, ou seja, $x \in A$.
- Porém, se o elemento x não pertence ao conjunto A, utilizamos o símbolo $\notin$, ou seja, $x \notin A$.

Teoria de conjuntos – Pertinência

A pertinência é um tipo de relação entre um elemento e um conjunto. Ela indica a existência ou a ausência de um elemento dentro de um conjunto. Para isso, são utilizados dois símbolos de operadores relacionais:

Simbologia	Significado
$1 \in A$	Lê-se: “1 pertence a A”, ou seja, o elemento 1 pertence ao conjunto A.
$3 \notin A$	Lê-se: “3 não pertence a A”, ou seja, o elemento 3 não pertence ao conjunto A.

Teoria de conjuntos – Subconjuntos e relação de inclusão

- Um <u>subconjunto</u> é um conjunto que integra outro.

O diagrama a seguir mostra o relacionamento entre um conjunto universo **U** com os seus dois subconjuntos (**A** e **B**): nesse contexto, existem quatro principais símbolos de operadores relacionais:

- $\subset$, que significa “está contido em”.
- $\not\subset$, que significa “não está contido em”.
- $\supset$, que significa “contém”.
- $\not\supset$, que significa “não contém”.

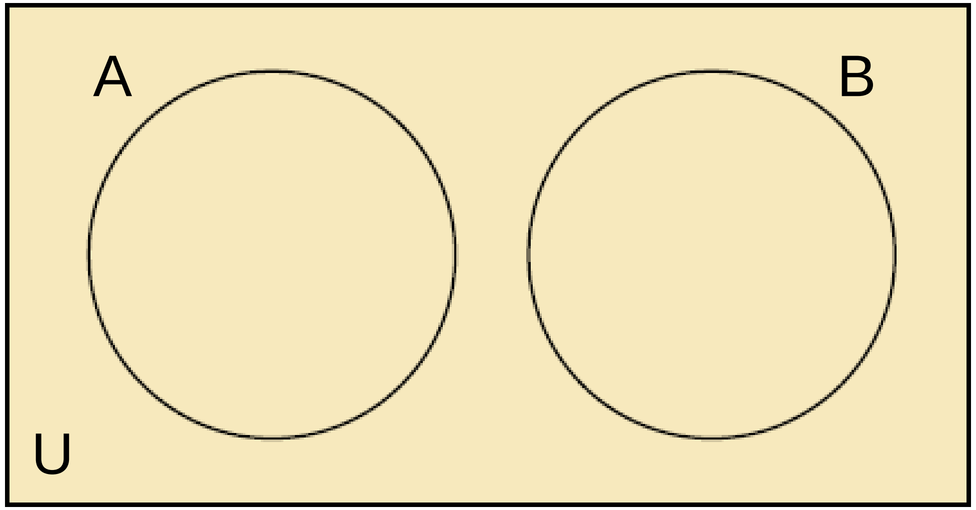


Figura 3 – Um conjunto universo U que tem dois subconjuntos (A e B)

Simbologia	Significado
$A \subset U$	Lê-se: “A está contido em U”, ou seja, A é subconjunto de U.
$B \not\subset A$	Lê-se: “B não está contido em A”.

Fonte: livro-texto.

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

União: Se A e B são conjuntos, a união de A com B é denotada $A \cup B$, que representa o conjunto formado por todos os elementos de A e por todos os elementos de B. Na linguagem simbólica, podemos definir que: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Graficamente:

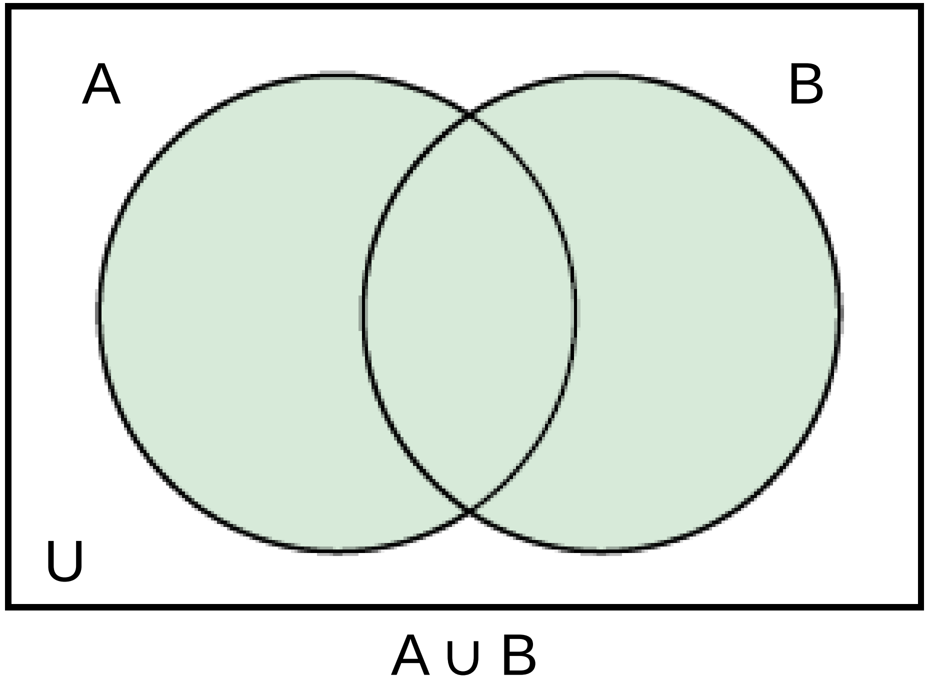


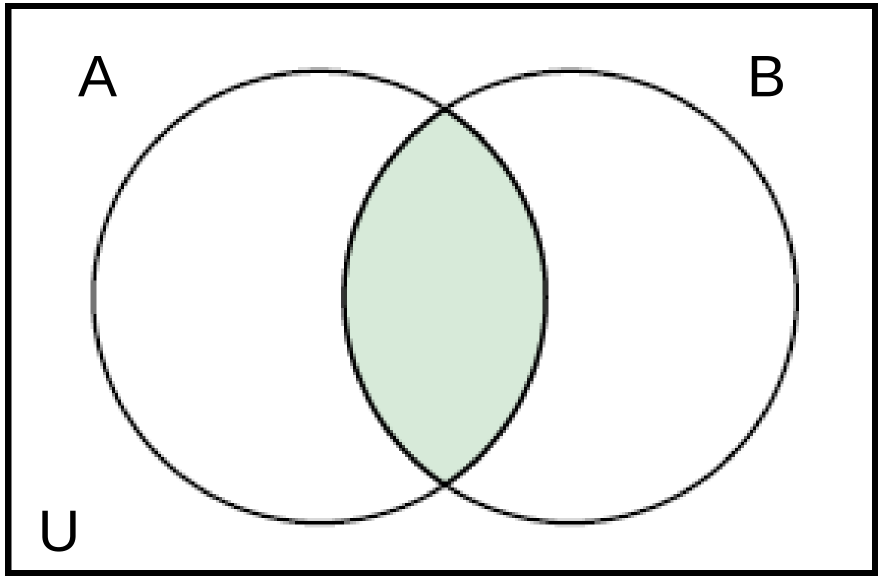
Figura 4 – União entre os conjuntos A e B

Seja $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1,3\}$, então, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Fonte: livro-texto.

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

Intersecção: A intersecção de dois conjuntos A e B é descrita por $A \cap B$, e é formada pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B, simultaneamente. A definição simbólica pode ser dada da seguinte forma: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. Graficamente:



$A \cap B$

Figura 5 – Interseção entre os conjuntos A e B

Seja $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2,4\}$; então, $A \cap B = \{2, 4\}$

Fonte: livro-texto.

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

<u>Diferença</u>: Se A e B são dois conjuntos, então a diferença entre A e B, expressa como A – B (lê-se: "A menos B"), é o conjunto de elementos que estão em A, mas não em B. Podemos definir o conjunto A – B desta forma: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \notin B\}$. Graficamente:

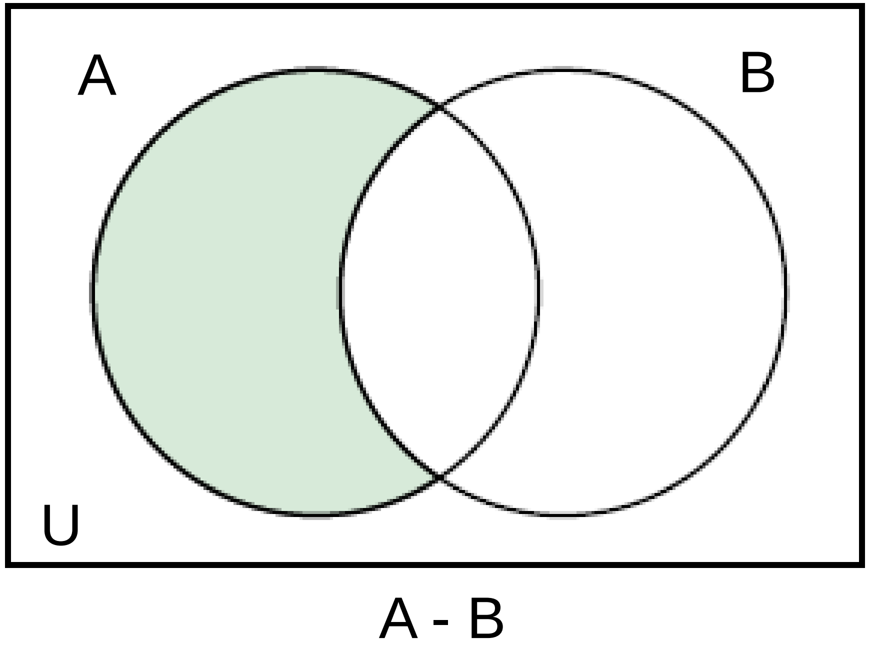


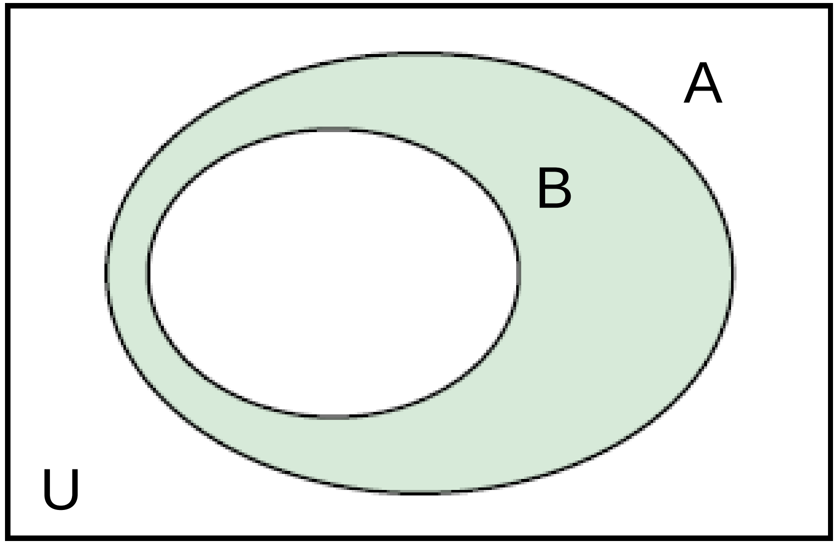
Figura 6 – Diferença entre A e B

Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2,4\}$;
então, $A – B = \{6, 8\}$

Fonte: livro-texto.

Teoria de conjuntos – Operações (complementar)

Operação complementar de A em B: se tivermos B como o subconjunto de A, o complementar de B, em relação à A, resulta em um conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem à B. Trata-se de uma diferença entre conjuntos (A – B), mas com a restrição da necessidade de inclusão entre eles.



$$C_A^B = A - B$$

Figura 7 – Complementar do conjunto B em relação ao conjunto A

A operação complementar costuma ser utilizada em relação ao próprio universo do contexto.

Fonte: livro-texto.

Interatividade

(Adaptado de: Ameosc – 2019). Dados os conjuntos A = {2, 4, 6, 8, 10, 12} e B = {6, 8, 10}, obtenha o complementar de B em relação à A e assinale a alternativa correta:

a) {2, 4, 6}.
b) {3, 4, 5}.
c) {2, 4, 12}.
d) {–6, –8, –10}.
e) {–6, –8, –11}.

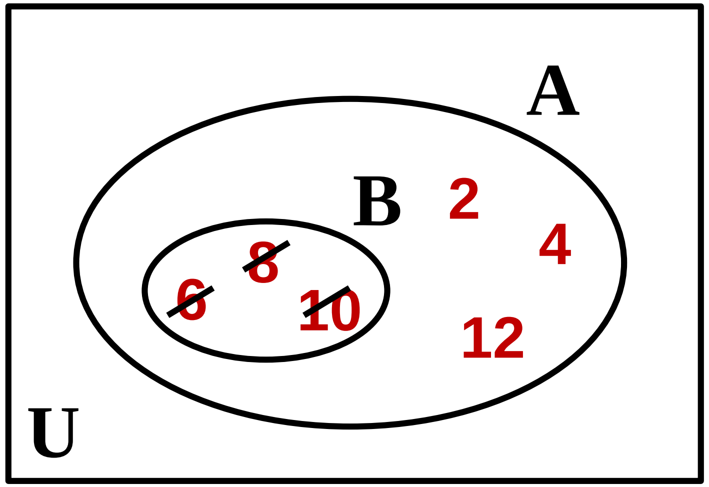
Resposta

(Adaptado de: Ameosc – 2019). Dados os conjuntos A = {2, 4, ~~6~~, ~~8~~, ~~10~~, 12} e B = {~~6~~, ~~8~~, ~~10~~}, obtenha o complementar de B em relação à A e assinale a alternativa correta:

a) {2, 4, 6}.
b) {3, 4, 5}.
c) {2, 4, 12}.
d) {–6, –8, –10}.
e) {–6, –8, –11}.

Solução:

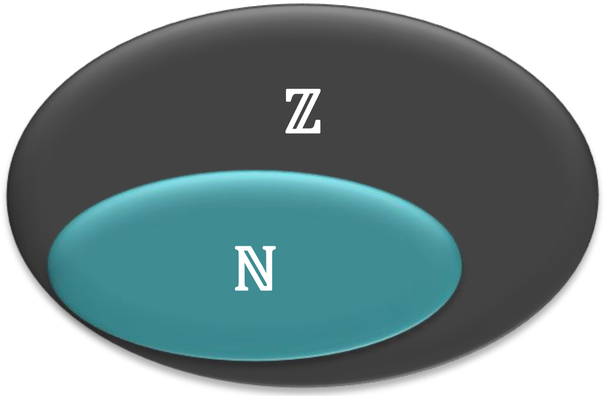
- Para facilitar a visualização do problema, vamos representar graficamente os dois conjuntos com os seus elementos.



$$C_A^B = A - B = \{2, 4, 12\}$$

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

- O sistema decimal de numeração que utilizamos é formado apenas por 10 algarismos, de 0 a 9, para representar quantidades. Esses números podem ser classificados por tipo e divididos em conjuntos numéricos. Abaixo temos alguns exemplos.



- Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$): inteiros não negativos, começando pelo zero.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, conjunto dos naturais não nulos

- Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$): abriga os números que podem ser representados sem casas decimais ou frações.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots\}$, inteiros não nulos

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

- O sistema decimal de numeração que utilizamos é formado apenas por 10 algarismos, de 0 a 9, para representar quantidades. Esses números podem ser classificados por tipo e divididos em conjuntos numéricos. Abaixo temos alguns exemplos.

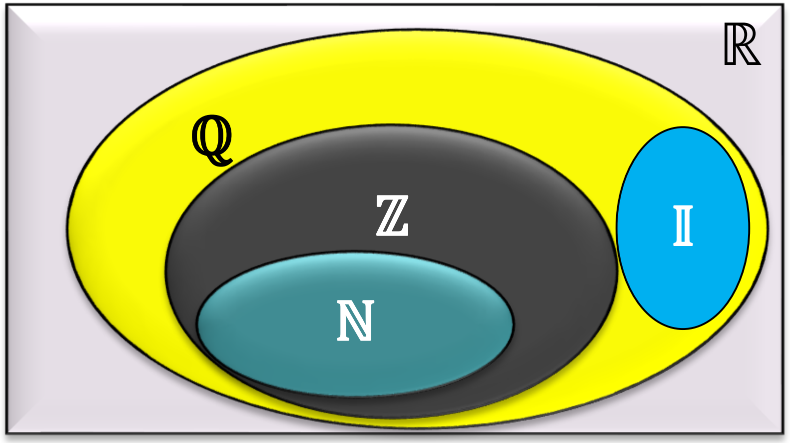


Figura 8 – Representação dos conjuntos numéricos

- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$): tem os números que podem ser expressos como fração entre os inteiros.

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$

- Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$): Reúne os números decimais não exatos com uma representação infinita e não periódica, por exemplo: 3,141592... ou 1,203040...

- Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$): união entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

$$\mathbb{R} = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$$

Fonte: autoria própria.

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

- Exemplo dos números dos conjuntos numéricos.

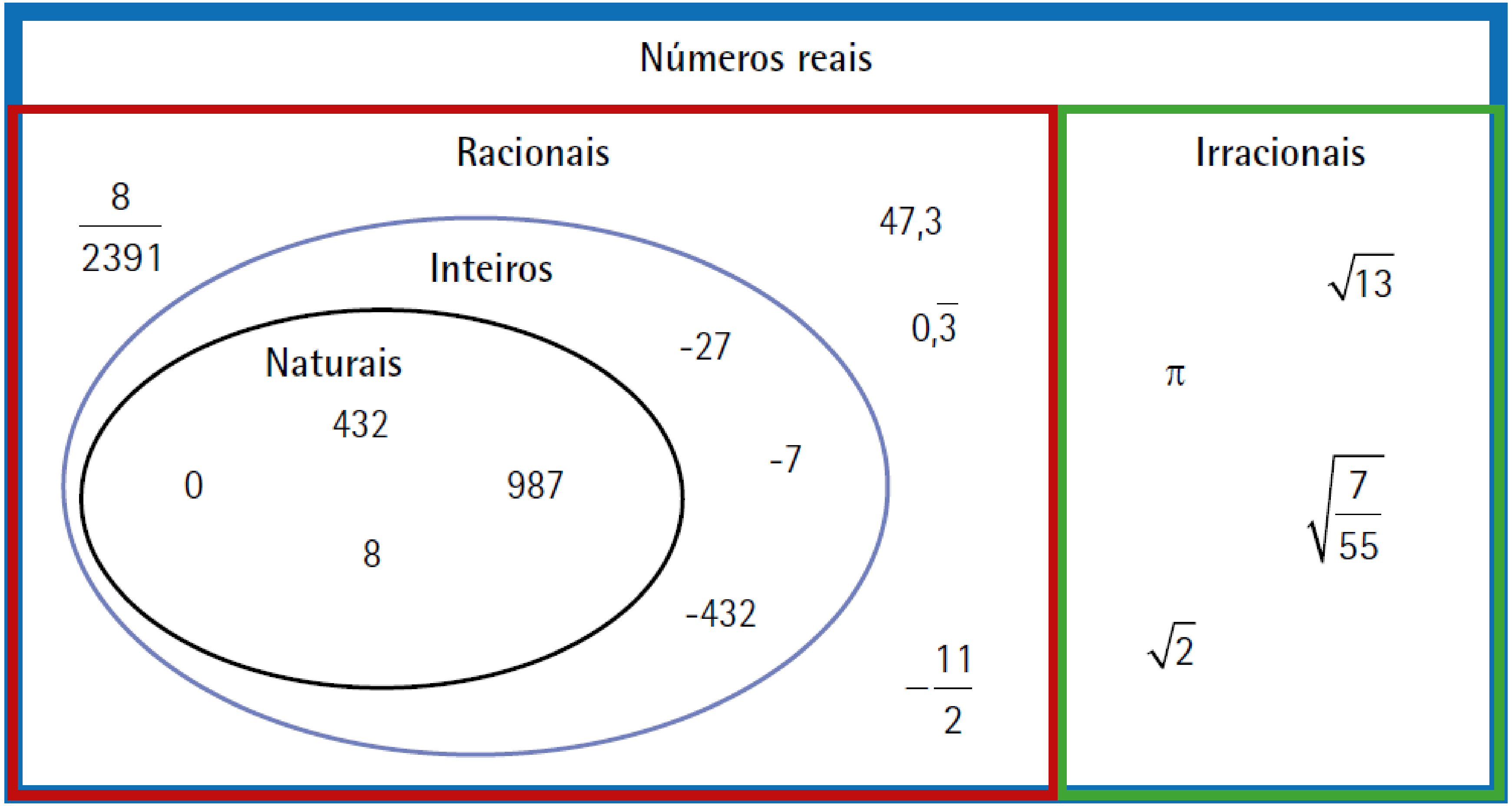


Figura 9 – Representações de exemplos de números reais.
Fonte: livro-texto.

Teoria de conjuntos – Número de elementos de conjuntos

<u>Exemplo</u>: Em uma empresa de tecnologia, 18 funcionários dominam a linguagem de programação Python e 27 dominam a linguagem Java, sendo que 10 deles dominam ambas as linguagens. Sabe-se também que há 15 funcionários que trabalham em outras áreas e que não conhecem linguagens de programação. Quantos funcionários trabalham nessa empresa?

<u>Solução</u>: vamos definir os conjuntos.

P = conjunto funcionários que dominam Python.

J = conjunto funcionários que dominam Java.

E = conjunto funcionários da empresa.

Temos, $n(P) = 18$, $n(J) = 27$, $n(P \cap J) = 10$

$$n(P) - n(P \cap J) = 18 - 10 = 8$$

8 pessoas dominas exclusivamente Python

$$n(J) - n(P \cap J) = 27 - 10 = 17$$

17 pessoas dominas exclusivamente Java

Restam 15 pessoas que são funcionários, mas não participam nem de P e nem de J, ou seja, estão na região$(P \cup J)^c$:

$$((P \cup J)^c) = 15$$

Portanto, iremos montar um diagrama e posicionar os elementos.

Teoria de conjuntos – Número de elementos de conjuntos

Exemplo: Em uma empresa de tecnologia, 18 funcionários dominam a linguagem de programação Python e 27 dominam a linguagem Java, sendo que 10 deles dominam ambas as linguagens. Sabe-se também que há 15 funcionários que trabalham em outras áreas e que não conhecem linguagens de programação. Quantos funcionários trabalham nessa empresa?

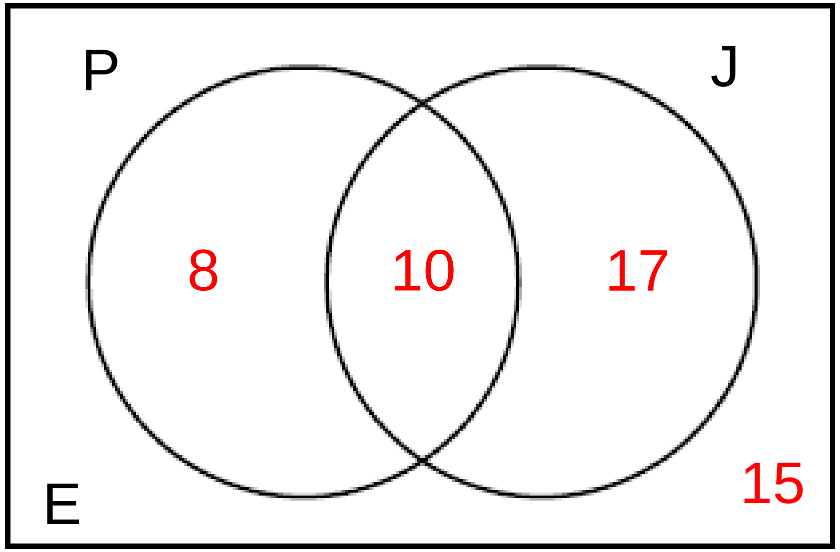
Solução: diagrama com o número de elementos de cada região.

8 pessoas dominam exclusivamente Python;

17 pessoas dominam exclusivamente Java;

10 pessoas dominam ambas as linguagens;

15 pessoas não dominam qualquer uma delas.

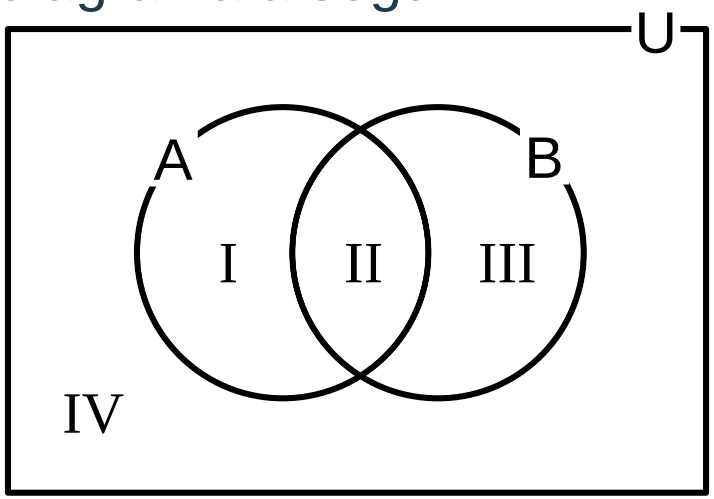


$$n(E) = 8 + 17 + 10 + 15 = 50$$

Portanto, 50 funcionários trabalham nessa empresa.

Interatividade

(AOCP – 2020). A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama a seguir:

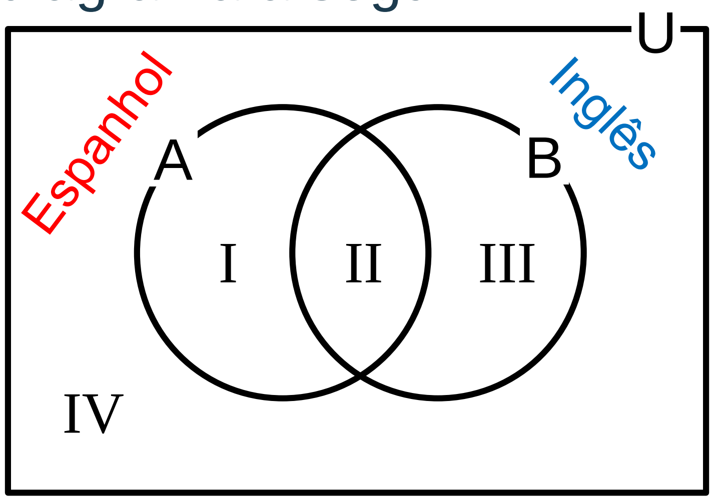


Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) A região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.
b) A região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
c) A região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
d) A região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
e) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Resposta

(AOCP – 2020). A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama a seguir:



Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) A região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.

b) A região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

c) A região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.

d) A região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.

e) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

ATÉ A PRÓXIMA!