

UNIDADE I

Matemática para Computação

Prof. Msc. Fábio Ferreira de Assis



- Operações aritméticas: existem quatro operações aritméticas fundamentais, que são: <u>adição</u>, <u>subtração</u>, <u>multiplicação</u> e <u>divisão</u>. Vamos descrevê-las brevemente a seguir.
 - Na adição, cada número a ser adicionado é chamado de parcela, e o resultado da adição é a soma.
 - Na subtração os números a serem subtraídos são chamados de subtraendo, e o resultado é o minuendo.

Operações Aritméticas		R	esultado
Adição	2 + 3 =	5	(soma)
Subtração	2 - 1 =	1	(minuendo)

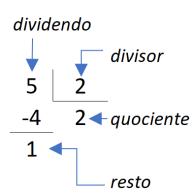


- Na adição, cada número a ser adicionado é chamado de parcela, e o resultado da adição é a soma.
- Na subtração os números a serem subtraídos são chamados de subtraendo, e o resultado é o minuendo.

Operações Aritméticas		R	esultado
Multiplicação	2 x 2 =	4	(produto)
Divisão	12 / 4 =	3	(quociente)

Termos da divisão:

Exemplo detalhado da divisão:



- Operações aritméticas: conceitos básicos de <u>potenciação</u>. Utilizado em cálculos computacionais.
 - Na potenciação, temos a seguinte definição: sendo a base a um número real e o expoente n um número inteiro, temos.

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$$

Podemos destacar:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Exemplos:

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$(-2)^2 = -2 \times -2 = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(-2)^3 = -2 \times -2 \times -2 = -8$$

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$$



- Operações aritméticas: conceitos básicos de <u>radiciação</u>. Utilizado em cálculos computacionais.
 - Na radiciação temos a seguinte definição: sendo a um número não negativo e n um inteiro positivo, temos.

$$\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$$

onde

n = indice $\sqrt{=radical}$ a = radicando b = raiz

Exemplos:

$$\sqrt[2]{9} = 3$$
, pois sabemos que $3^2 = 9$

$$\sqrt[1]{0} = 0$$
, pois sabemos que $0^1 = 0$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$
, pois sabemos que $2^3 = 8$

Podemos destacar:

Radiciação é a operação matemática inversa à potenciação.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

- Expressões algébricas são expressões matemáticas que utilizam as <u>letras</u> ou quaisquer símbolos não numéricos em sua composição, além de numerais e operadores aritméticos.
- São capazes de traduzir as situações cotidianas para a linguagem matemática.

Linguagem cotidiana	Linguagem matemática
O dobro de um número	Coeficiente $2x$ Parte literal
Um número acrescido de 5 unidades	x + 5

 Expressões algébricas podem incluir letras chamada de parte literal, para representar um número desconhecido. Essas letras, representam variáveis e podem assumir valores numéricos.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

Acompanhe os exemplos de identificação do coeficiente e da parte literal de termos algébricos:

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$\frac{5x}{2}$	$\frac{5}{2}$	\boldsymbol{x}
$-x^2$	-1	x^2

- Apenas, podemos somar ou subtrair os termos que sejam semelhantes, ou seja, que apresentam a mesma parte literal;
- Uma expressão algébrica composta por mais de um termo pode ser chamada de <u>polinômio</u>.

Revisão de conceitos – Expressões algébricas

 <u>Exemplo</u>: o perímetro de um polígono é definido como a soma dos comprimentos de seus lados. Encontre uma expressão algébrica que represente o perímetro do triângulo da figura a seguir, em que x representa um número real maior do que 1.

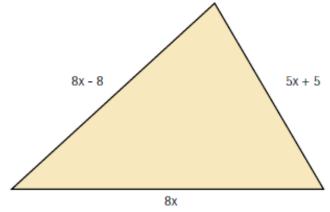


Figura 1 – Triângulo escaleno

<u>Solução</u>:

semelhantes

Para representar algebricamente o perímetro *P*, devemos somar as medidas dos três lados do triângulo.

Portanto, podemos somar ou subtrair os termos que sejam

$$P = (8x - 8) + (5x + 5) + 8x$$

$$P = 8x - 8 + 5x + 5 + 8x$$

$$P = 21x - 3$$

Logo, a expressão algébrica P = 21x-3 representa o perímetro do triângulo.

Revisão de conceitos – Razão, proporção e regra de três

Podemos definir a <u>razão</u>, no contexto da Matemática, como o quociente entre dois números.
 Exemplo: a razão entre 1 e 2, pode ser expressa na forma de:

Fração	Decimal
1	٥٢
$\overline{2}$	0,5

• Uma <u>proporção</u> pode ser definida como a igualdade entre as razões. A proporção pode ser expressa como mostrado a seguir, em que $x \neq 0$ e $z \neq 0$. Lemos, "w está para x, assim como y está para z".

$$\frac{w}{x} = \frac{y}{z} \to \frac{w}{x} \times \frac{y}{z} \to xy = wz$$

- As variáveis w, x, y e z são os termos da proporção. Onde w e z são chamados de extremos, e os termos x e y de meios.
- Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Nesse caso, ficamos com: xy = wz.

Revisão de conceitos – Razão, proporção e regra de três

<u>Exemplo</u>: em um escritório de contabilidade, 12 colaboradores são capazes de gerar 50 relatórios, durante um expediente de 9 horas. Com 36 colaboradores, quantas horas seriam necessárias para gerar esses mesmos 50 relatórios, mantidas as devidas proporções?

Solução:

	1 ^a grandeza (nº de colaboradores)		2 ^a grandeza (tempo, em ho	
1º caso	12		9	
2º caso	36		x	

Temos a seguinte proporção:

$$\frac{12}{36} \times \frac{x}{9} \implies 36x = 12 \times 9 \qquad x = \frac{108}{36}$$
$$36x = 108 \qquad x = 3$$

Portanto, são necessárias 3 horas de trabalho.

Interatividade

(UEPB/2014) A razão entre o peso de uma pessoa na Terra e o seu peso em Netuno é 5/7. Dessa forma, o peso de uma pessoa que na terra pesa 60 kg, em Netuno, está no intervalo?

- a) [40 kg; 45 kg]
- b)]45 kg; 50 kg]
- c) [55 kg; 60 kg]
- d)]75 kg; 80 kg[
- e) [80 kg; 85 kg]

Resposta

(UEPB/2014) A razão entre o peso de uma pessoa na Terra e o seu peso em Netuno é 5/7. Dessa forma, o peso de uma pessoa que na terra pesa 60 kg, em Netuno, está no intervalo?

- a) [40 kg; 45 kg]
- b)]45 kg; 50 kg]
- c) [55 kg; 60 kg]
- d)]75 kg; 80 kg[
- e) [80 kg; 85 kg]

Solução:

Quanto maior a quantidade de dias de trabalho, menor o tempo necessário de trabalho por dia para produzir as peças.

Terra / Netu	ino	Kg	
5	1	60	ı
7	1	\boldsymbol{x}	\

$$\frac{5}{7} \times \frac{60}{x} \rightarrow 5x = 7 \times 60$$

$$5x = 420$$

$$x = \frac{420}{5} = 84$$

Portanto em Netuno esse peso equivale a 84 kg e está no intervalo [80 kg; 85 kg], conforme a letra e.

Porcentagem pode ser definida como a centésima parte de uma grandeza.

Se temos x%, podemos reescrever essa taxa percentual como uma razão na forma de <u>fração</u> ou na forma decimal:

$$x\% = \frac{x}{100} = \frac{1x}{100} = 0.01x$$

Vamos interpretar a situação apresentada a seguir:

"O preço aumentou em 10% em relação ao ano passado": a cada R\$ 100,00 gastos no ano passado, gastaremos R\$ 110,00 (R\$ 100 + R\$ 10), neste ano, para adquirir a mesma quantidade.

Exemplo: uma fábrica emprega, no total, 1500 pessoas. Dessas, 30% têm o Ensino Superior completo. Qual é o número de funcionários com diploma superior na fábrica?

Solução 1 – Regra de três:

Funcionários Taxa %
$$1500 \qquad \uparrow \qquad 100 \qquad \uparrow \qquad 100 \qquad \downarrow \qquad x$$

$$x \qquad 30 \qquad \uparrow \qquad 30 \qquad \uparrow \qquad 100 \qquad x = 1500 \times 30$$

Solução 2 — Expressar x% como fração:

$$x\% = \frac{x}{100}$$
 $\Rightarrow \frac{30}{100} \times 1500 = 0.3 \times 1500 = 450$

Logo, 450 funcionários da fábrica possuem o diploma superior.

Exemplo: uma disciplina universitária, cursada por 2205 alunos, reprovou 245 deles. Qual é a porcentagem de alunos reprovados nessa disciplina?

Solução 1 – Regra de três:

N° de alunos Taxa %

2205
100
$$x$$
 $\frac{2205}{245} \times \frac{100}{x}$
 $x = 11,11\%$

Solução 2 – Regra prática:

$$\frac{parte}{todo} \times 100 = x\%$$
 $\Rightarrow \frac{245}{2205} \times 100 = 11,11\%$

Portanto, a taxa de reprovação na disciplina foi de 11,11%.

<u>Exemplo</u>: uma mesa digitalizadora que, inicialmente, custava R\$ 500,00, teve o seu preço acrescido de 20%. Algum tempo depois, em uma liquidação, esse novo preço sofreu um desconto de 20%. Qual é o preço da mercadoria após a aplicação do desconto?

Solução:

Vamos analisar a tabela, para interpretar e entender a variação do preço ao longo do tempo.

Inicialmente	Após o acréscimo de 20%	Após o desconto de 20%
	$\frac{20}{100} \times 500 = 100$	$\frac{20}{100} \times 600 = 120$
Preço: R\$ 500,00	500 + 100 = 600	600 - 120 = 480
	Preço: R\$ 600,00	Preço: R\$ 480,00

Logo, o preço após a aplicação do desconto é R\$ 480,00.

Interatividade

(Vunesp – 2018) Uma empresa selecionou 160 candidatos para uma entrevista, visando ao preenchimento de algumas vagas. Dos candidatos selecionados, 5% não compareceram à entrevista, e 25% dos que compareceram foram contratados. Em relação ao número inicial de candidatos selecionados, aqueles que foram contratados representam:

- a) 24,25%.
- b) 23,75%.
- c) 23,25%.
- d) 22,50%.
- e) 22,25%.

Resposta

(Vunesp – 2018) Uma empresa selecionou 160 candidatos para uma entrevista, visando ao preenchimento de algumas vagas. Dos candidatos selecionados, 5% não compareceram à entrevista, e 25% dos que compareceram foram contratados. Em relação ao número inicial de candidatos selecionados, aqueles que foram contratados representam:

a) 24,25%.

Solução:

- b) 23,75%.
- 23,25%.
- 22,50%.
- e) 22,25%.

candidatos que compareceram:

$$100\% - 5\% = 95\%$$

Dos 152 que compareceram, 25% foram contratados.

$$\frac{100\%}{95\%} = \frac{160}{x} = 100x = 160 \times 95$$

$$x = \frac{152\%}{10\%} = 152$$

$$\frac{25}{100} \times 152 = 0,25 \times 152$$
$$= 38$$

$$\frac{100\%}{x} = \frac{160}{38} = 160x = 38 \times 100$$
$$x = \frac{380\%}{16\%} = 23,75\%$$

Teoria de conjuntos – Definições básicas

- Conjunto é uma coleção de elementos que possuem alguma característica em comum.
- Elemento é o nome dado a cada item que faz parte de um conjunto.

As principais formas de representar um conjunto são as apresentadas a seguir:

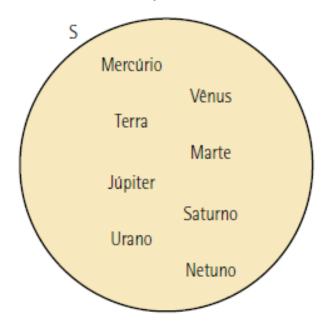
- 1. Entre chaves por extenso: listamos os elementos entre chaves separados por vírgula.
- 2. <u>Entre chaves por propriedade</u>: temos a apresentação de uma propriedade que determina que tipo de elemento pertence àquele conjunto.
- 3. <u>Graficamente</u>: utilizamos diagramas de *Venn-Euler*.

Geralmente, o nome de um conjunto é representado por uma letra maiúscula, mas isso pode variar dependendo da aplicação.

Teoria de conjuntos – Exemplo

Geralmente, o nome de um conjunto é representado por uma letra maiúscula, mas isso pode variar dependendo da aplicação. Podemos citar os exemplos a seguir.

- 1. <u>Entre chaves por extenso</u>: S = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno}
- 2. Entre chaves por propriedade: $S = \{x \mid x \text{ \'e um planeta do Sistema Solar}\}$
- 3. Graficamente: temos o que se mostra na Figura 2.



Fonte: livro texto.

Figura 2 - Planetas

Teoria de conjuntos – Pertinência

• A <u>pertinência</u> é um tipo de relação entre um elemento e um conjunto. Ela indica a existência ou a ausência de um elemento dentro de um conjunto. Para isso, são utilizados dois símbolos de operadores relacionais:

Simbologia	Significado
€	Pertence
∉	Não Pertence

- No caso das relações de pertinência, quando queremos afirmar que um elemento x pertence a um conjunto A qualquer, utilizamos o símbolo ∈, ou seja, x ∈ A.
- Porém, se o elemento x não pertence ao conjunto A, utilizamos o símbolo ∉, ou seja, x ∉ A.

Teoria de conjuntos – Pertinência

• A <u>pertinência</u> é um tipo de relação entre um elemento e um conjunto. Ela indica a existência ou a ausência de um elemento dentro de um conjunto. Para isso, são utilizados dois símbolos de operadores relacionais:

Simbologia	Significado
1 ∈ A	Lê-se: "1 pertence a A", ou seja, o elemento 1 pertence ao conjunto A.
3 ∉ A	Lê-se: "3 não pertence a A", ou seja, o elemento 3 não pertence ao conjunto A.

Teoria de conjuntos – Subconjuntos e relação de inclusão

Um subconjunto é um conjunto que integra outro.

O diagrama a seguir, mostra o relacionamento entre um conjunto universo **U** com os seus dois

subconjuntos (A e B): nesse contexto, existem

quatro principais símbolos de operadores relacionais:

⊂, que significa "está contido em".

⊄, que significa "não está contido em".

⊃, que significa "contém".

⊄, que significa "não contém".

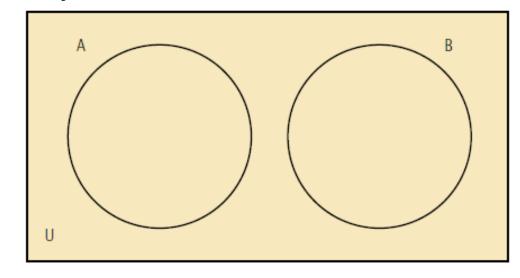


Figura 3 – Um conjunto universo U que tem dois subconjuntos (A e B)

Simbologia	Significado
$A \subset U$	Lê-se: "A está contido em U", ou seja, A é
	subconjunto de U.
B⊄A	Lê-se: "B não está contido em A".

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

• <u>União</u>: Se A e B são conjuntos, a **união** de A com B é denotada A ∪ B que representa o conjunto formado por todos os elementos de A e por todos os elementos de B. Na linguagem simbólica, podemos definir que: A ∪ B = {x | x ∈ A ou x ∈ B}. Graficamente:

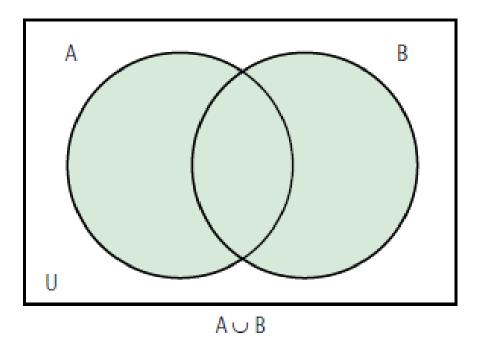


Figura 4 – União entre os conjuntos A e B

Seja A = $\{2, 4, 6, 8\}$ e B = $\{1, 3\}$, então, A \cup B = $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

■ Intersecção: A intersecção de dois conjuntos A e B é descrita por A \cap B, e é formada pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B, simultaneamente. A definição simbólica pode ser dada da seguinte forma: A \cap B = {x | x ∈ A e x ∈ B}. Graficamente:

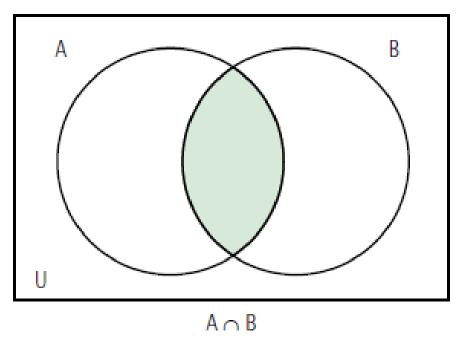


Figura 5 – Interseção entre os conjuntos A e B

Seja A =
$$\{2, 4, 6, 8\}$$
 e B = $\{2, 4\}$; então, A \cap B = $\{2, 4\}$

Teoria de conjuntos – Operações (união, intersecção e diferença)

■ <u>Diferença</u>: A intersecção de dois conjuntos A e B é descrita por A \cap B, e é formada pelos elementos que pertencem tanto a A quanto a B, simultaneamente. A definição simbólica pode ser dada da seguinte forma: A \cap B = {x | x ∈ A e x ∈ B}. Graficamente:

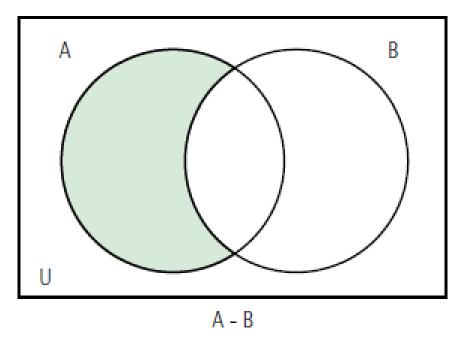


Figura 6 – Diferença entre A e B

Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2,4\}$; então, $A - B = \{6, 8\}$

Teoria de conjuntos – Operações (complementar)

Operação complementar de A em B: se tivermos B como o subconjunto de A, o complementar de B, em relação à A, resulta em um conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem à B. Trata-se de uma diferença entre conjuntos (A - B), mas com a restrição da

necessidade de inclusão entre eles.

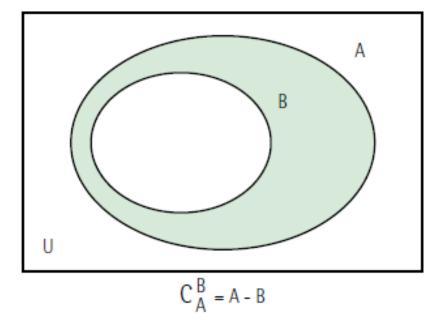


Figura 7 – Complementar do conjunto B em relação ao conjunto A

A operação complementar costuma ser utilizada em relação ao próprio universo do contexto.

Interatividade

(Adaptado de: Ameosc – 2019) Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $B = \{6, 8, 10\}$, obtenha o complementar de B em relação à A e assinale a alternativa correta:

- a) {2, 4, 6}.
- b) {3, 4, 5}.
- c) {2, 4, 12}.
- d) $\{-6, -8, -10\}$.
- e) $\{-6, -8, -11\}$.

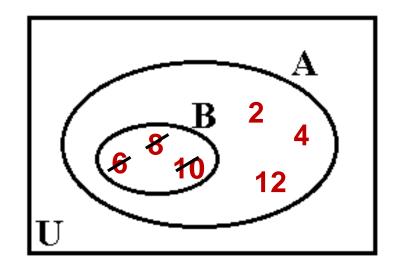
Resposta

(Adaptado de: Ameosc – 2019) Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 2, 3, 10, 12\}$ e $B = \{3, 3, 10\}$, obtenha o complementar de B em relação à A e assinale a alternativa correta:

- a) {2, 4, 6}.
- b) {3, 4, 5}.
- c) {2, 4, 12}.
- d) $\{-6, -8, -10\}$.
- e) $\{-6, -8, -11\}$.

Solução:

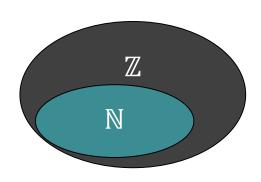
Para facilitar a visualização do problema, vamos representar graficamente os dois conjuntos com os seus elementos.



$$C_A^B = A - B = \{2, 4, 12\}$$

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

 O sistema decimal de numeração que utilizamos, é formado apenas por 10 algarismos, de 0 a 9, para representar quantidades. Esses números podem ser classificados por tipo e divididos em conjuntos numéricos, abaixo temos alguns exemplos.



■ Conjunto dos números naturais (N): inteiros não negativos, começando pelo zero.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

 $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, conjunto dos naturais não nulos

 Conjunto dos números inteiros (Z): abriga os números que podem ser representados sem casas decimais ou frações.

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

 $\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\}$, inteiros não nulos

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

 O sistema decimal de numeração que utilizamos, é formado apenas por 10 algarismos, de 0 a 9, para representar quantidades. Esses números podem ser classificados por tipo e divididos em conjuntos numéricos, abaixo temos alguns exemplos.

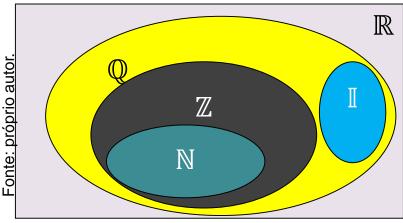


Figura 8 – Representação dos conjuntos numéricos

 Conjunto dos números racionais (Q): tem os números que podem ser expressos como fração entre os inteiros.

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \ \mathbf{e} \ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

- Conjunto dos números irracionais (I): Reúne os números decimais não exatos com uma representação infinita e não periódica, por exemplo: 3,141592... ou 1,203040...
- Conjunto dos números reais (R): união entre Q e I.

$$\mathbb{R} = \{x | x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}$$

Teoria de conjuntos – Conjuntos numéricos

Exemplo dos números dos conjuntos numéricos.

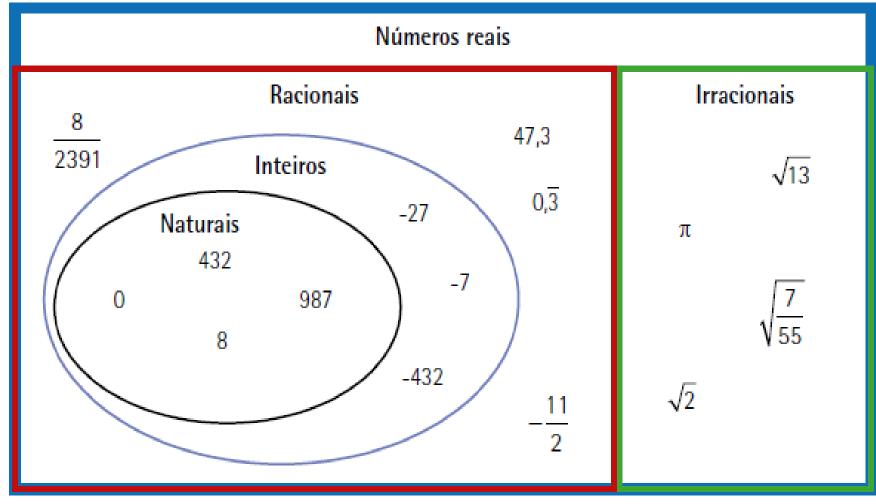


Figura 9 – Representações de exemplos de números reais Fonte: livro texto.

Teoria de conjuntos – Número de elementos de conjuntos

Exemplo: Em uma empresa de tecnologia, 18 funcionários dominam a linguagem de programação Python e 27 dominam a linguagem Java, sendo que 10 deles dominam ambas as linguagens. Sabe-se, também, que há 15 funcionários que trabalham em outras áreas e que não conhecem linguagens de programação. Quantos funcionários trabalham nessa empresa?

Solução: vamos definir os conjuntos.

P = conjunto funcionários que dominam Python.

J = conjunto funcionários que dominam Java.

E = conjunto funcionários da empresa.

Temos, n(P) = 18, n(J) = 27, $n(P \cap J) = 10$

$$n(P) - n(P \cap I) = 18 - 10 = 8$$

8 pessoas dominas exclusivamente Python

$$n(J) - n(P \cap J) = 27 - 10 = 17$$

17 pessoas dominas exclusivamente Java

Restam 15 pessoas que são funcionários mas não participam nem de P e nem de J, ou seja, estão na região $(P \cup J)^c$:

$$((P \cup J)^c) = 15$$

Portanto iremos montar um diagrama e posicionar os elementos.

Teoria de conjuntos – Número de elementos de conjuntos

Exemplo: Em uma empresa de tecnologia, 18 funcionários dominam a linguagem de programação Python e 27 dominam a linguagem Java, sendo que 10 deles dominam ambas as linguagens. Sabe-se, também, que há 15 funcionários que trabalham em outras áreas e que não conhecem linguagens de programação. Quantos funcionários trabalham nessa empresa?

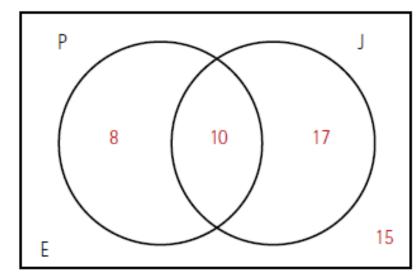
Solução: diagrama com o número de elementos de cada região.

8 pessoas dominam exclusivamente Python;

17 pessoas dominam exclusivamente Java;

10 pessoas dominam ambas as linguagens;

15 pessoas não dominam qualquer uma delas.

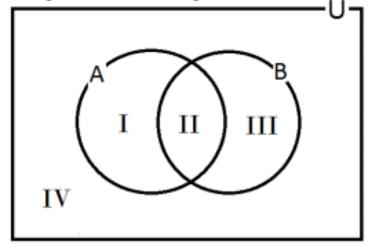


$$n(E) = 8 + 17 + 10 + 15 = 50$$

Portanto, 50 funcionários trabalham nessa empresa.

Interatividade

(AOCP – 2020) A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama a seguir:

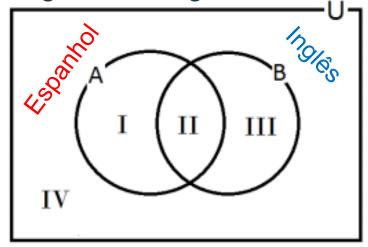


Com base nessas informações, é correto afirmar que:

- a) A região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.
- b) A região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
- c) A região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
- d) A região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
- e) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Resposta

(AOCP – 2020) A é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol e B é o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, conforme representado no diagrama a seguir:



Com base nessas informações, é correto afirmar que:

- a) A região I representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma inglês, mas não dominam o idioma espanhol.
- b) A região II representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
- c) A região III representa o conjunto de todas as pessoas que dominam o idioma espanhol, mas não dominam o idioma inglês.
- d) A região IV representa o conjunto de todas as pessoas que dominam os dois idiomas.
- e) U representa o conjunto de todas as pessoas que não dominam nenhum desses dois idiomas.

Referências

- ALBERTO, J. Matemática para concursos públicos e vestibulares. São Paulo: Digerati Books, 2008.
- CASTANHEIRA, N. P. Noções básicas de Matemática Comercial e Financeira.
 Curitiba: IBPEX, 2008.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. Matemática: contexto e aplicações. Volume único.
 São Paulo: Ática, 2018.
- JACQUES, I. *Matemática para Economia e Administração*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- OLIVEIRA, C. A. M. Matemática [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2016.
 - ROCHA, A.; MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P. Tópicos de Matemática Aplicada [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2013.
 - WAGNER, E. Matemática 1. Rio de Janeiro: FGV, 2013.

ATÉ A PRÓXIMA!