EAD

EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UNIDADE II

Matemática para Computação

Prof. Msc. Fábio Ferreira de Assis

Funções – Introdução

- Dados dois conjuntos não vazios, **A** e **B**, considere x como uma variável que representa os elementos de **A** e y como uma variável que representa os elementos de **B**.
- Uma <u>função de **A** em **B**</u> é uma regra que determina como associar cada elemento $x \in$ **A** a um único elemento $y \in$ **B**. Essa função pode ser denotada por: $\mathrm{f}\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$. Podemos ler essa notação como, "f é função de A em B".
- x de variável independente.
- y de variável dependente.

$$\boxed{y = \mathrm{f}(x)}$$

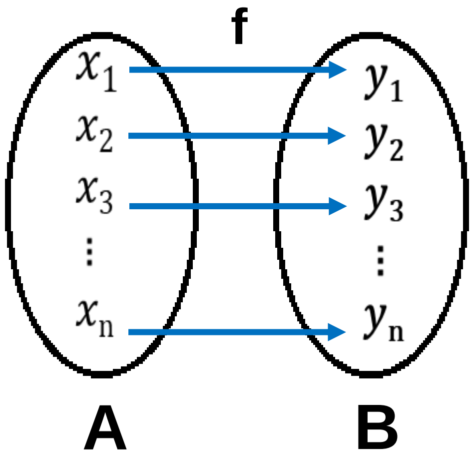


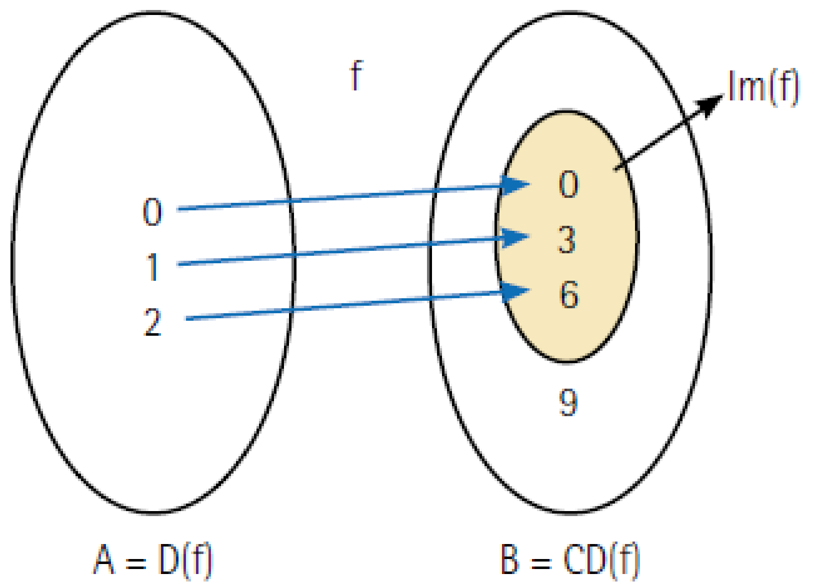
Diagrama de flechas que relaciona os elementos x do conjunto de partida A aos elementos y do conjunto de chegada B, de forma a constituir uma função f: A→B.

Para termos uma função, é necessário que:
- Todos os elementos x de A tenham um correspondente y em B.
- Cada elemento x de A tenha apenas um correspondente y em B.

Fonte: livro texto.

Funções – Domínio, Contradomínio e Imagem

- O conjunto **domínio** de uma função, denotado por D(f), é composto por todos os elementos que a variável x (variável independente) pode assumir em determinado contexto. Nessa situação, ele é igual ao próprio conjunto A.
- O conjunto **contradomínio** de uma função, denotado por CD(f), é composto por todos os elementos disponíveis para a variável y (variável dependente de x) dentro de um contexto.
- O conjunto imagem de uma função, denotado por Im(f), é composto por todos os elementos de B que de fato encontraram correspondência em A, ou seja, são todos os valores efetivamente assumidos pela variável y, uma vez aplicada a lei da função nos elementos de A. Im(f) é sempre um subconjunto de CD(f), ou seja, $Im(f) \subset CD(f)$.



Fonte: livro texto.

Funções – Domínio, Contradomínio e Imagem

- Para os conjuntos A = {0, 1, 2} e B = {0, 3, 6, 9}, considere a função $f: A \to B$ definida pela lei $y = 3x$, com $x \in$ **A** e $y \in$ **B**. podemos utilizar a lei da função para achar as correspondências entre os elementos de A e os elementos de B.

  - Para $x = 0$, temos: $y = 3 \times 0 = 0 \to (0, 0)$
  - Para $x = 1$, temos: $y = 3 \times 1 = 3 \to (1, 3)$
  - Para $x = 2$, temos: $y = 3 \times 2 = 6 \to (2, 6)$

Correspondência entre x de A e y de B pode ser expressa como **pares ordenados**, (x, y). Por exemplo, o par (2, 6) significa que, para x = 2, temos y = 6 nessa função.

Perceba que, utilizamos todos os elementos de A (cada um deles “achou” uma única correspondência em B, conforme esperado). Porém, nem todos os elementos de B participam da correspondência.

- Domínio: D(f) = A = {0, 1, 2}
- Contradomínio: CD(f) = B = {0, 3, 6, 9}
- Imagem: Im(f) = {0, 3, 6}

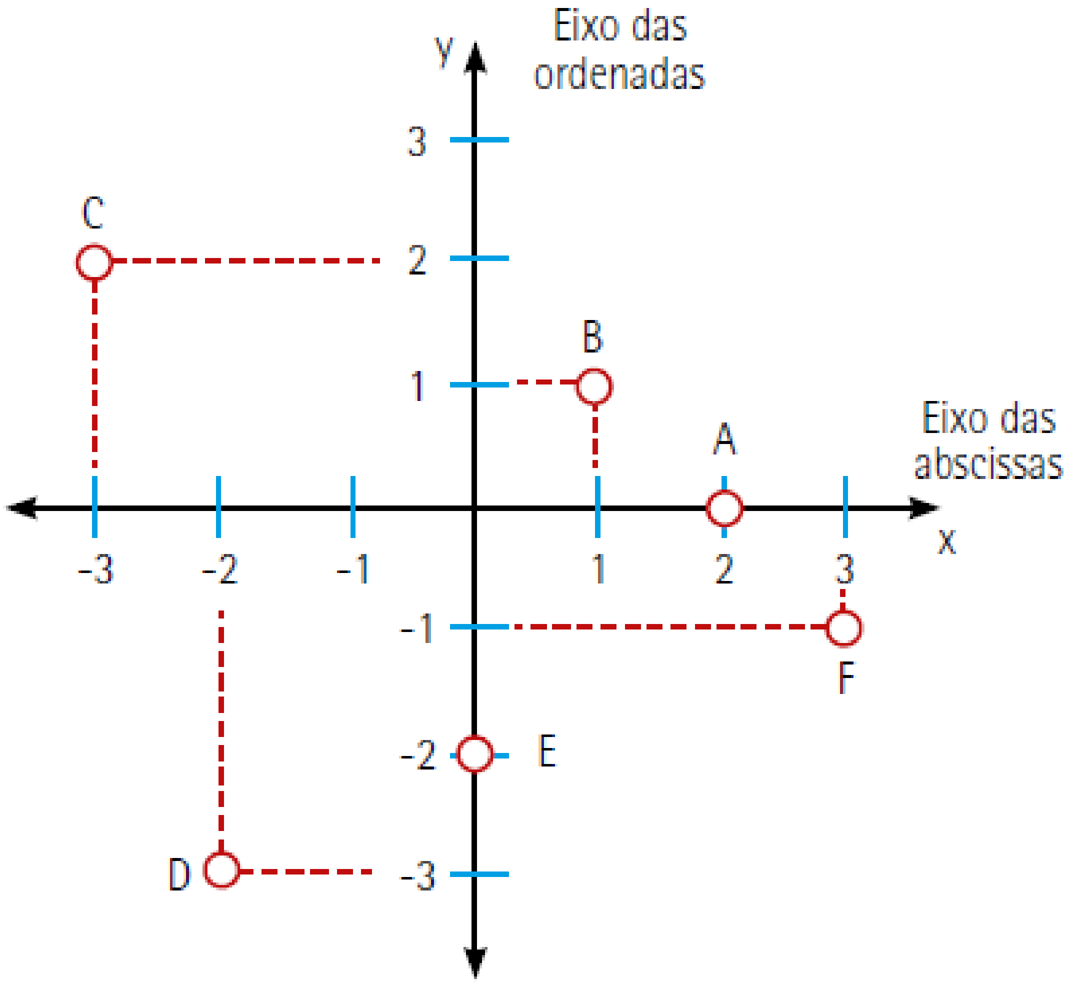
Fonte: livro texto.

Funções – Plano cartesiano

- Um <u>plano cartesiano</u> é um plano munido de dois eixos perpendiculares que abrigam os valores do domínio e da imagem, de forma a nos permitir representar graficamente a função.

- O eixo horizontal (das abscissas) abriga os valores da variável independente, x.
- O eixo vertical (das ordenadas) abriga os valores da variável dependente, $y = f(x)$.
- Cada ponto assume uma coordenada que podemos identificar por um par ordenado.

Pontos:
A(2, 0)
B (1, 1)
C (–3, 2)
D (–2, –3)
E (0, –2)
F (3, –1)



Fonte: livro texto.

Funções afim – Introdução

Uma função $\mathrm{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada de função afim quando a sua lei pode ser expressa no seguinte formato, com $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$$

- Temos a e b como coeficientes, a, denominado de coeficiente angular e b coeficiente linear, x como uma variável independente e $y = \mathrm{f}(x)$ como uma variável dependente.
- Quando $a = 0$, temos um tipo de função afim chamada de **função constante**, pois, nesse caso, temos $f(x) = b$.

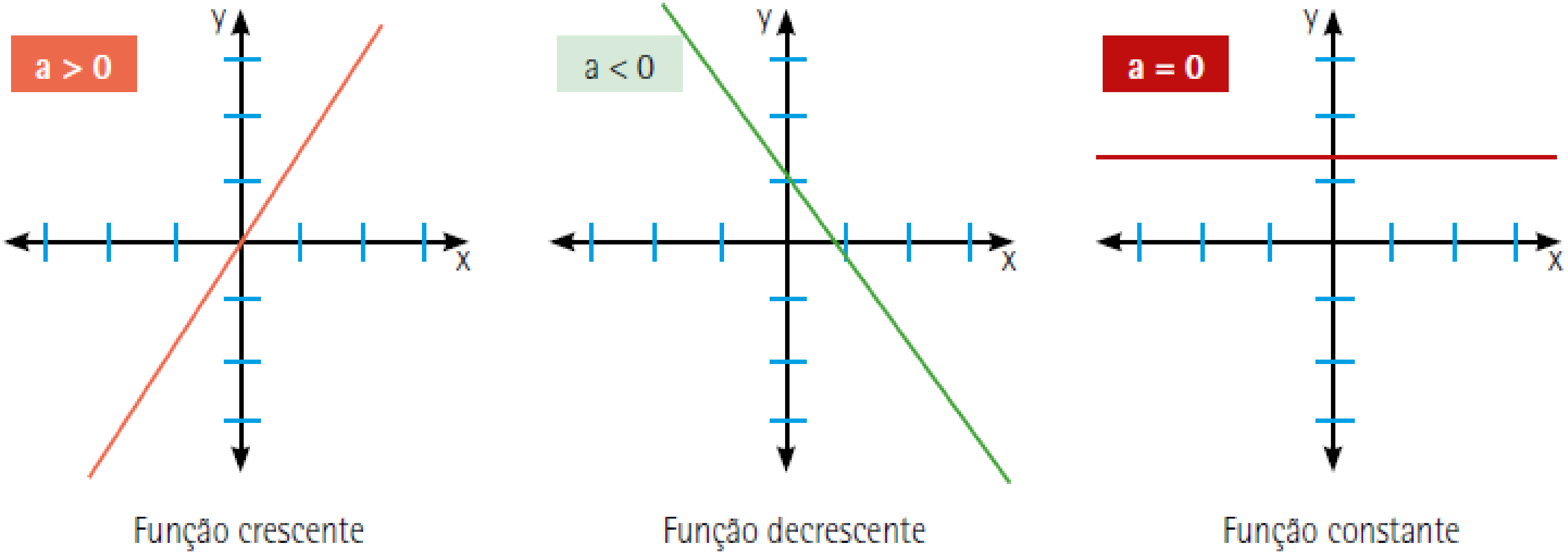
- Sempre que $a \neq 0$, temos a o tipo mais comum de função afim temos a função de 1º grau.

- Quando uma função de 1º grau apresenta $b = 0$, temos a função afim chamada de função linear.

Fonte: livro texto.

Funções afim – Coeficientes

- O coeficiente a, sempre acompanha a variável x. O coeficiente angular (a) é responsável pelo ângulo formado entre o gráfico da função e o eixo das abscissas.
- O coeficiente b, é um termo independente, ou seja, não multiplica qualquer variável.
- Para $a > 0$, **a função é crescente**.
- Para $a < 0$, **a função é decrescente**.
- Para $a = 0$, a **função é constante**.



Fonte: livro texto.

Funções afim – Função de 1º grau

Exemplo: Uma vendedora recebe da empresa em que trabalha um salário mensal composto de uma parte fixa, no valor de R$ 1.780,00, e uma parte variável, que corresponde a 8% sobre o total de vendas que ela fez ao longo do mês. Se chamarmos o total de vendas do mês (em reais) de x, responda.

1 Qual é a Lei da Função que representa o salário desta vendedora?

Solução: x = total de vendas do mês. Aplicando a taxa de 8% = 8/100 = 0,08 e adicionando a parte fixa, temos a Lei da Função: $\boxed{\mathrm{f}(x) = 0{,}08x + 1780}$

2 Qual será o salário dela no mês em que vender R$ 2000,00?

Solução: substituindo na função o valor de venda R$ 1000,00

$$\mathrm{f}(2000) = 0{,}08 \,.\, 2000 + 1780$$

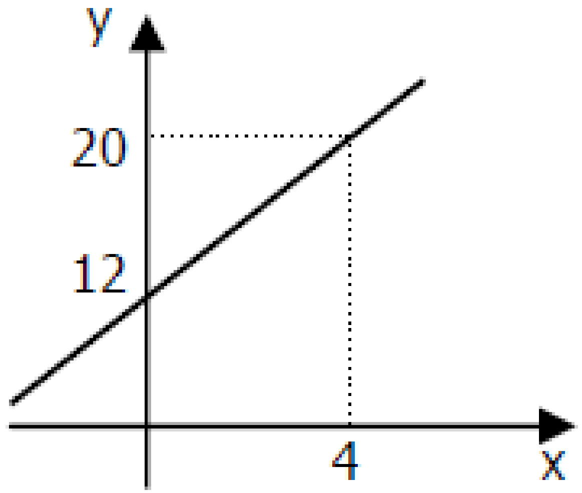
$$\mathrm{f}(2000) = 160 + 1780 = \text{R\$ } 1940$$

Logo, se vender 2000,00, irá receber R$ 1.940,00.

Fonte: livro texto.

Interatividade

- Determine $f(9)$ na função afim $f(x) = ax + b$, do gráfico abaixo:

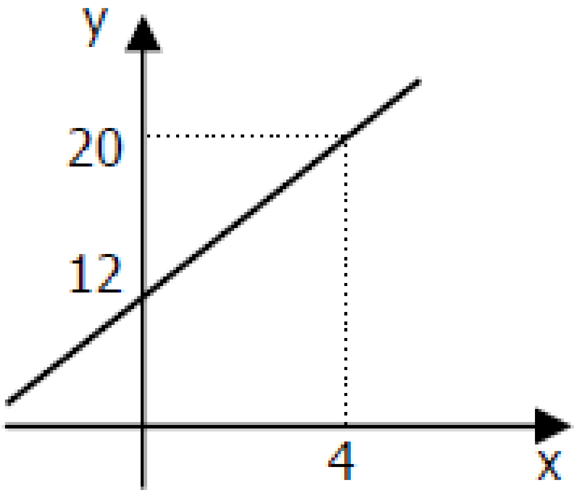


a) 30.
b) 20.
c) 10.
d) 8.
e) 5.

Resposta

- Determine $f(9)$ na função afim $f(x) = ax + b$, do gráfico abaixo:

a) 30.
b) 20.
c) 10.
d) 8.
e) 5.



Solução: no gráfico temos que

$$x = 0, y = 12 \;\rightarrow\; f(0) = 12$$
$$x = 4, y = 20 \;\rightarrow\; f(4) = 20$$

Substituindo $f(0)$ na equação temos,

$$12 = a \times 0 + b$$
$$b = 12$$

Substituindo $f(4)$ encontramos o valor de a

$$20 = a \times 4 + 12$$
$$-12 + 20 = 4a$$
$$8 = 4a$$
$$4a = 8$$
$$a = \frac{4}{8} = 2$$

Substituindo $f(x) = 2x + 12$ temos,

$$f(9) = 2 \times 9 + 12$$
$$f(9) = 18 + 12$$

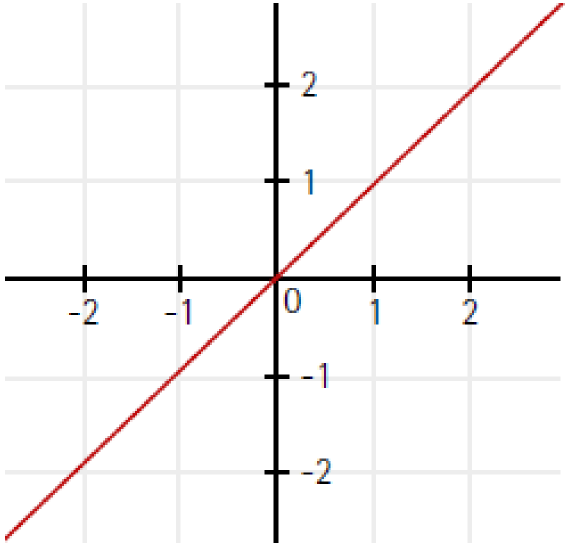
$$\boxed{f(9) = 30}$$

Funções afim – Função Linear

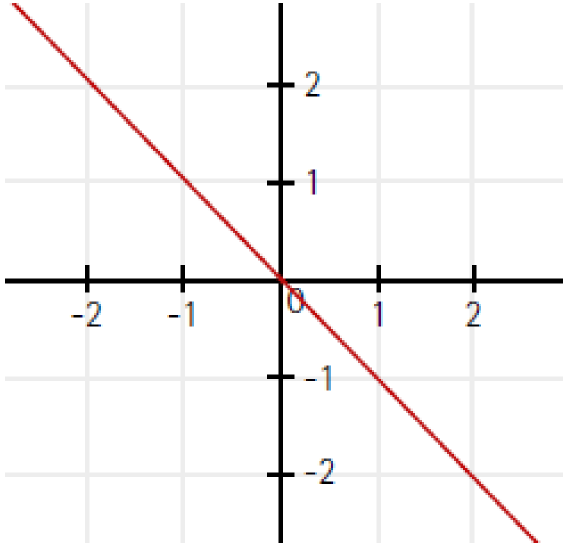
- Existe um caso particular de função de 1º grau, a chamada **função linear**. Para haver função linear, precisamos, necessariamente, de $a \neq 0$ a e $b = 0$. Como o termo independente é nulo, podemos determinar que a lei da função linear será especificamente do tipo: $f(x) = ax$.

- A interseção entre a reta da função e o eixo vertical em funções lineares é sempre no ponto (0, 0),

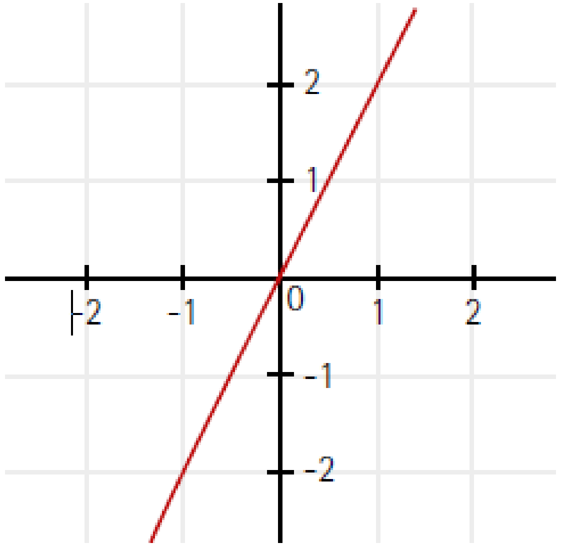
$f(x) = x$
$a = 1$
$b = 0$
Função crescente



$f(x) = -x$
$a = -1$
$b = 0$
Função decrescente



$f(x) = 2x$
$a = 2$
$b = 0$
Função crescente

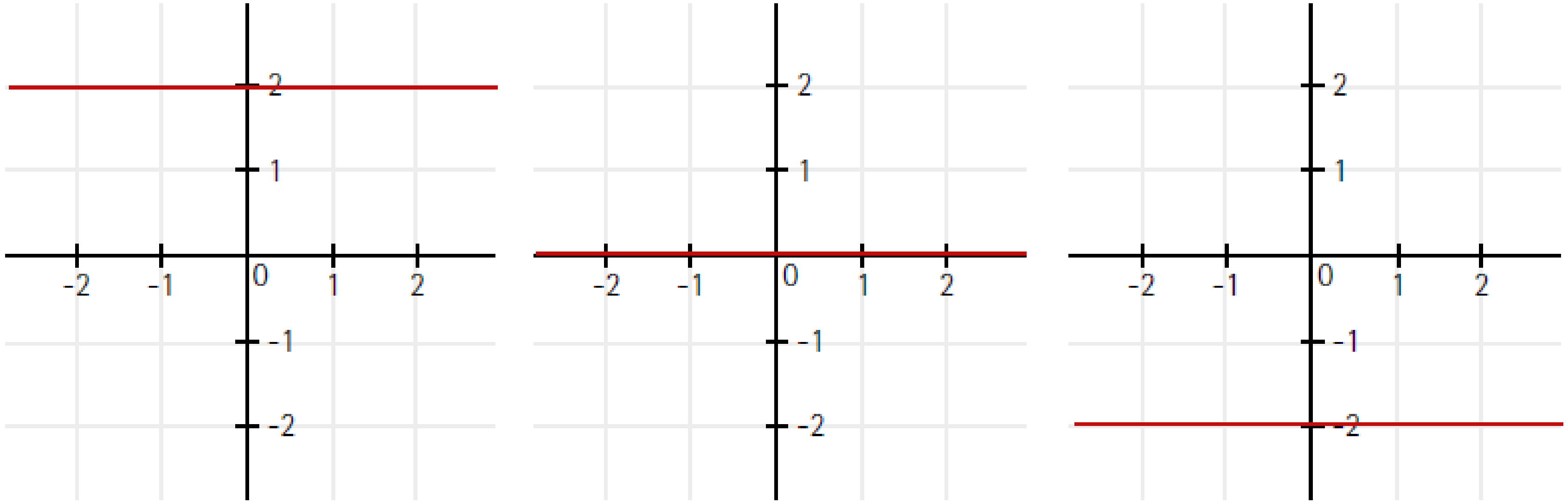


Fonte: livro texto.

Funções afim – Função Constante

- Denomina-se **função constante** a função afim que apresenta $a = 0$, ou seja, coeficiente angular nulo. Nesse caso, a lei da função constante será especificamente do tipo:: $f(x) = b$.

$f(x) = 2$	$f(x) = 0$	$f(x) = -2$
$a = 0$	$a = 0$	$a = 0$
$b = 2$	$b = 0$	$b = -2$
Intersecta o eixo vertical em (0, 2)	Intersecta o eixo vertical em (0, 0)	Intersecta o eixo vertical em (0, -2)



Fonte: livro texto.

Funções afim – Função Constante

- Exemplo: uma pizzaria utiliza o sistema de rodízio, em que cada cliente paga o equivalente a R$ 65,00 e pode comer à vontade, com bebidas e sobremesas incluídas. Se x representa a quantidade de pizza consumida por um cliente, em quilos, determine.
- A) A lei da função que descreve o preço pago por cliente nessa pizzaria.
- B) O preço pago por um cliente que consumiu 0,8 kg de pizza.
- C) O preço pago por um cliente que consumiu 0,2 kg de pizza.

Solução: A) a variável x, vai variar de acordo com o consumo. No entanto, o preço pago $f(x)$ será constante $f(x) = 65$. Logo, a Lei da Função é $f(x) = b, \text{com } a = 0$.

B) Substituindo 0,8 kg de pizza temos, $f(0{,}8) = 65$. Logo, o cliente que consumir 0,8 kg de pizza pagará R$ 65,00.

C) Substituindo 0,2 kg de pizza temos, $f(0{,}2) = 65$. Logo, o cliente que consumir 0,2 kg de pizza também pagará R$ 65,00.

Fonte: livro texto.

Funções afim – Raiz da Função afim

- Denomina-se **raiz da função afim** o valor de x para o qual a função é nula, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Para calcular a raiz da função, basta igualarmos sua lei a zero e resolvermos a equação assim obtida.
- A raiz representa a interseção entre a reta da função e o eixo horizontal.
- Alternativamente, podemos obter a raiz da função afim x', por meio da fórmula:

$$x' = -\frac{b}{a}$$

- Note que só é possível calcular raízes para funções de 1º grau, somente para $a \neq 0$.

Fonte: livro texto.

Interatividade

Seja f uma função afim definida pela lei de formação $f(x) = 5x + 3$. Determine.

Quais são os coeficientes angular e linear?

Qual é a raiz dessa função?

a) $\mathrm{a} = 2$, $\mathrm{b} = 2$, raiz = 0,1.

b) $\mathrm{a} = 3$, $\mathrm{b} = 2$, raiz = 0,3.

c) $\mathrm{a} = 5$, $\mathrm{b} = 3$, raiz = – 0,6.

d) $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 0$, raiz = – 0,3.

e) $\mathrm{a} = 12$, $\mathrm{b} = 1$, raiz = 0,6.

Fonte: livro texto.

Resposta

Seja f uma função afim definida pela lei de formação $f(x) = 5x + 3$. Determine.

Quais são os coeficientes angular e linear?

Qual é a raiz dessa função?

a) $a = 2$, $b = 2$, raiz = 0,1.

b) $a = 3$, $b = 2$, raiz = 0,3.

c) $a = 5$, $b = 3$, raiz = – 0,6.

d) $a = 0$, $b = 0$, raiz = – 0,3.

e) $a = 12$, $b = 1$, raiz = 0,6.

Solução**:**

Pela função afim acima, temos que

Coeficiente angular: $a = 5$

Coeficiente linear: $b = 3$

Para encontrar a raiz da função utilizamos a fórmula:

$$x' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{5} = -0{,}6$$

Fonte: livro texto.

Função quadrática – Introdução

- Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada de <u>função quadrática</u> ou <u>função polinomial de 2º grau</u> quando a sua lei pode ser expressa no seguinte formato, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

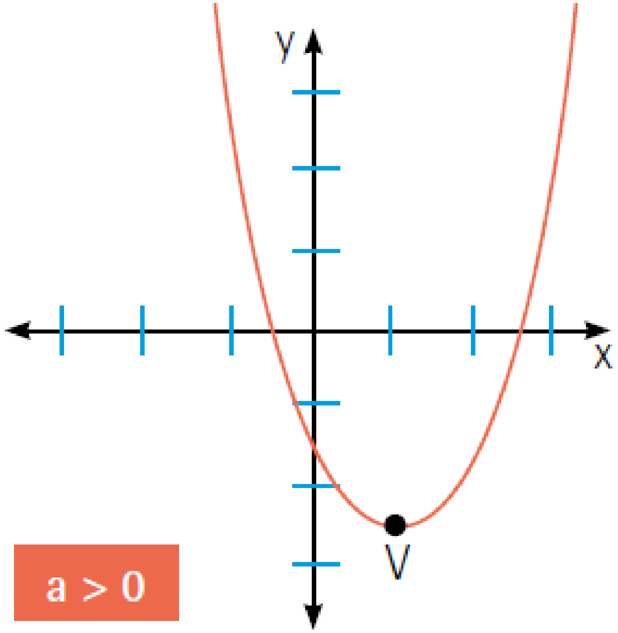
- Temos a, b e c como coeficientes (sendo que é imprescindível termos $a \neq 0$), x como variável independente e $y = f(x)$ como variável dependente.
- Uma função quadrática representa uma função que descreve uma parábola, no plano cartesiano, com concavidade para baixo ou para cima.

  - Se o coeficiente $a = 0$, a função perde sua característica de grau 2.
  - Se o coeficiente $a > 0$ concavidade para cima.
  - Se o coeficiente $a < 0$ concavidade para baixo.
  - O coeficiente b acompanha a variável x.
  - O coeficiente c é um termo independente.

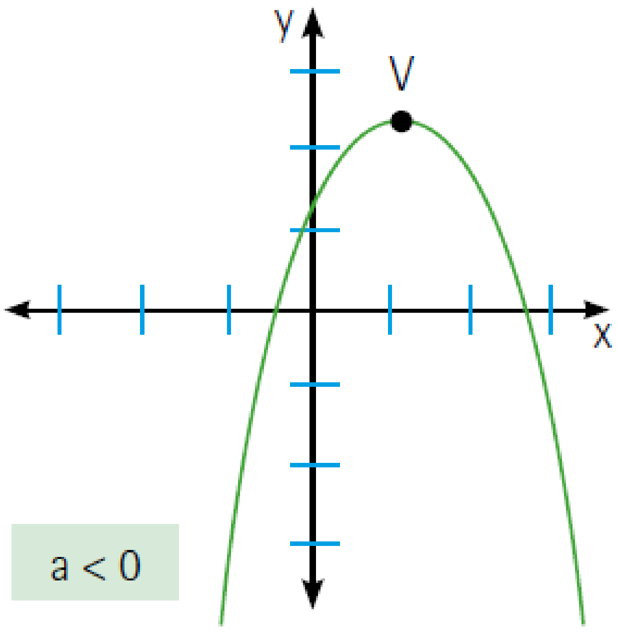
Fonte: livro texto.

Função quadrática – Introdução

- O sinal do coeficiente a é responsável pela concavidade da parábola. Temos as características mostradas a seguir, observadas na figura seguinte.
- Se o coeficiente $a > 0$ concavidade para cima. Neste caso a função apresenta um ponto mínimo, que representa seu vértice.
- Se o coeficiente $a < 0$ concavidade para baixo. Neste caso a função apresenta um ponto máximo, que representa seu vértice.



Concavidade para cima, com vértice V representando o ponto mínimo

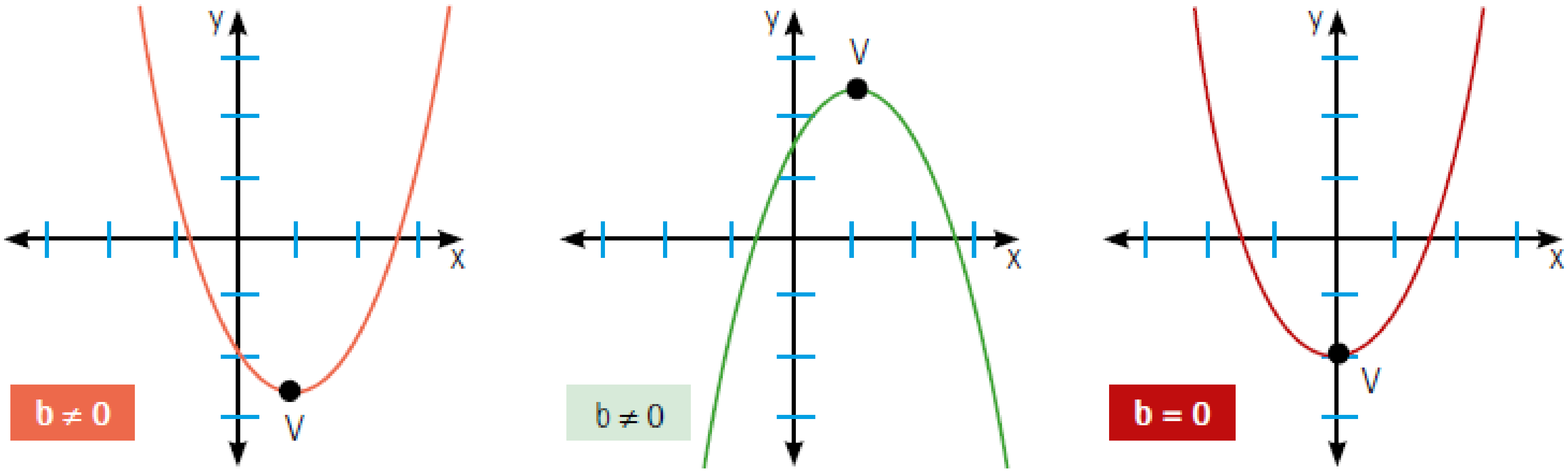


Concavidade para baixo, com vértice V representando o ponto máximo

Fonte: livro texto.

Função quadrática – Estudo dos coeficientes

- O coeficiente linear b, que aparece no termo bx da função do 2º, determina se o vértice da parábola ocorrerá sobre o eixo vertical ou se estará deslocado dele.
- Sempre que $b = 0$, o ponto do vértice ocorre em cima do eixo das ordenadas.
- Sempre que $b \neq 0$, o vértice será deslocado do eixo.



Fonte: livro texto.

Função quadrática – Raízes da função

- Denominam-se **raízes da função quadrática** os valores de x para os quais a função é nula, ou seja, os valores de x para os quais $f(x) = 0$. As raízes representam os pontos de interseção entre a parábola e o eixo horizontal.
- As raízes x’ e x’’ representam os pontos de interseção entre a parábola e o eixo horizontal.

$$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

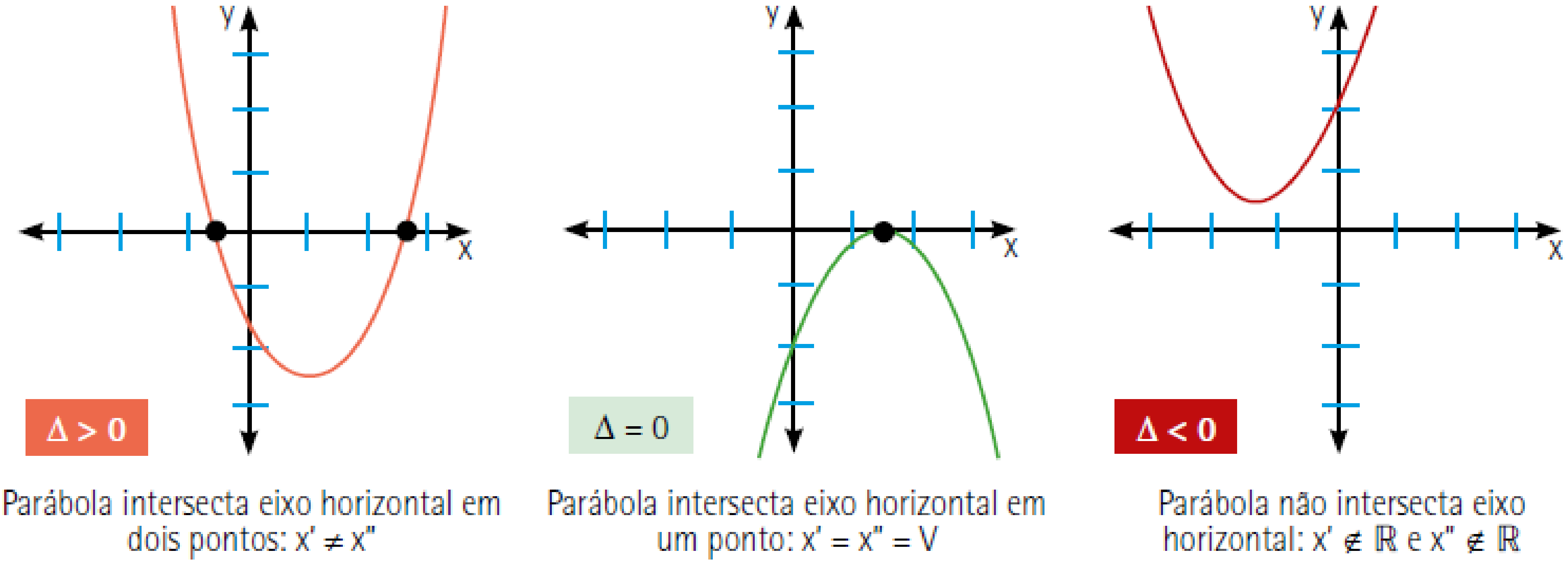
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Para calcular as raízes, podemos utilizar fórmula de Bhaskara.

Fonte: livro texto.

Função quadrática – Estudo do determinante

- O valor do determinante Δ traz informações sobre as raízes da função.



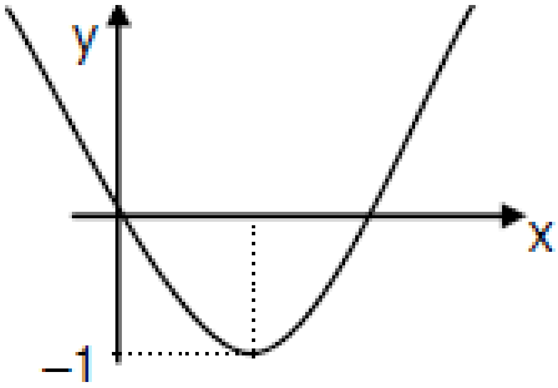
- Para Δ > 0: a função tem duas raízes reais distintas.
- Para Δ = 0: a função tem duas raízes reais iguais.
- Para Δ < 0: a função não tem raízes reais.

Fonte: livro texto.

Interatividade

- Adaptado de: (Cesgranrio) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$ é o da figura. Então podemos concluir que:

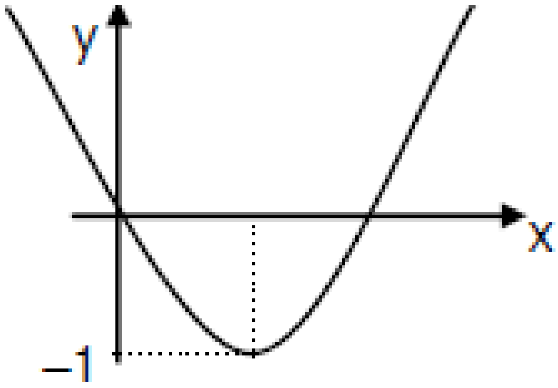
a) b = -1 e c = 0.
b) b = 0 e c = -1.
c) b = 1 e c = 1.
d) b = -2 e c = 0.
e) b = 2 e c = 0.



Resposta

- Adaptado de: (Cesgranrio) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$ é o da figura. Então podemos concluir que:

a) b = -1 e c = 0.
b) b = 0 e c = -1.
c) b = 1 e c = 1.
d) b = -2 e c = 0.
e) b = 2 e c = 0.



Solução: pelo gráfico temos que $c = 0$.

Pela função temos que $a = 1$, substituindo

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4\cancel{ac})}{4a} \Rightarrow -1 = \frac{-b^2}{4a} \Rightarrow -b^2 = -4 \Rightarrow b^2 = 4$$

$$b = \pm\sqrt{4} \Rightarrow b = \pm 2$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+2)}{2} = \cancel{-1} \text{ (no gráfico } x_v \text{ é positivo)}$$

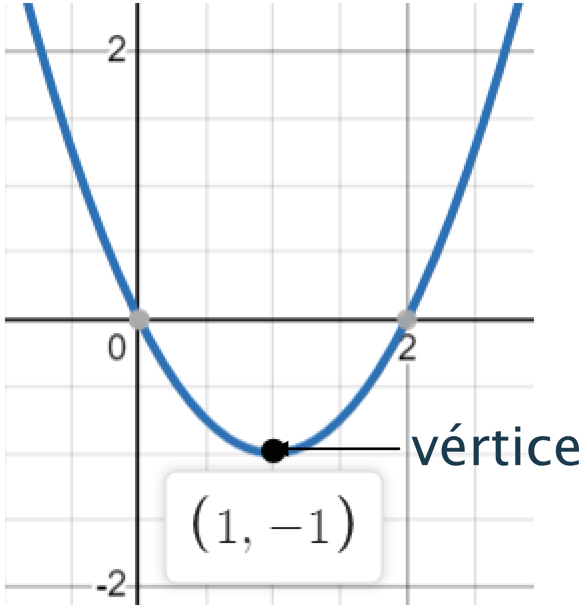
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

Portanto temos: $b = -2$ e $c = 0$

Função quadrática – Coordenadas do vértice da parábola

- Podemos calcular as coordenadas do vértice V de uma função quadrática por meio das relações mostradas a seguir, em que x_v é a coordenada horizontal e y_v é a coordenada vertical.

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$



Com isso, temos que o vértice é um ponto no plano cartesiano representado pelo par ordenado:

$$V(x_V, y_V) = V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Uma parábola pode ter ou não ter raízes reais, ou seja, ela pode cortar ou não cortar o eixo x. No entanto, toda parábola tem vértice.

Fonte: livro texto.

Função quadrática – Introdução

Exemplo: encontre as coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2 - 2x$.

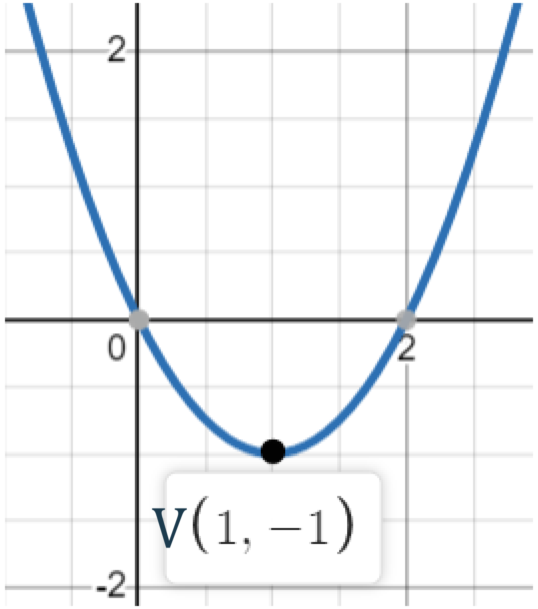
Solução:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4$$

$a = 1$
$b = -2$
$c = 0$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4 \times 1} = -1$$



- O vértice representa o ponto de mínimo da função, pois $a > 0$.

Fonte: livro texto.

Função quadrática – Introdução

Exemplo: encontre as coordenadas do vértice da função $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

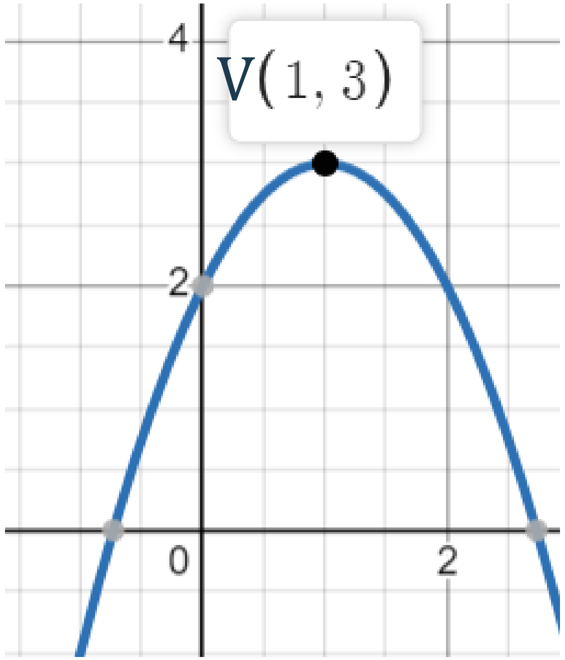
Solução:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(2) = 4 + 8 = 12$$

$a = -1$
$b = 2$
$c = 2$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{12}{4 \times (-1)} = 3$$

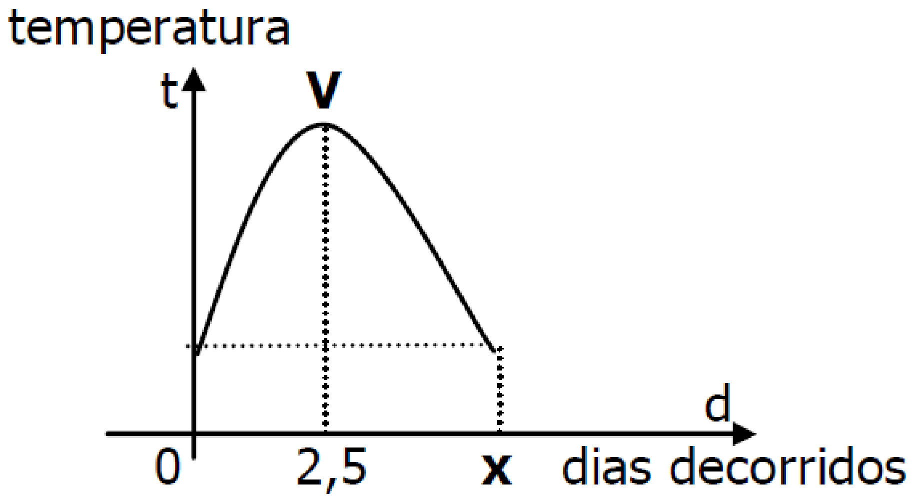


- O vértice representa o ponto máximo da função, pois $a < 0$.

Fonte: livro texto.

Interatividade

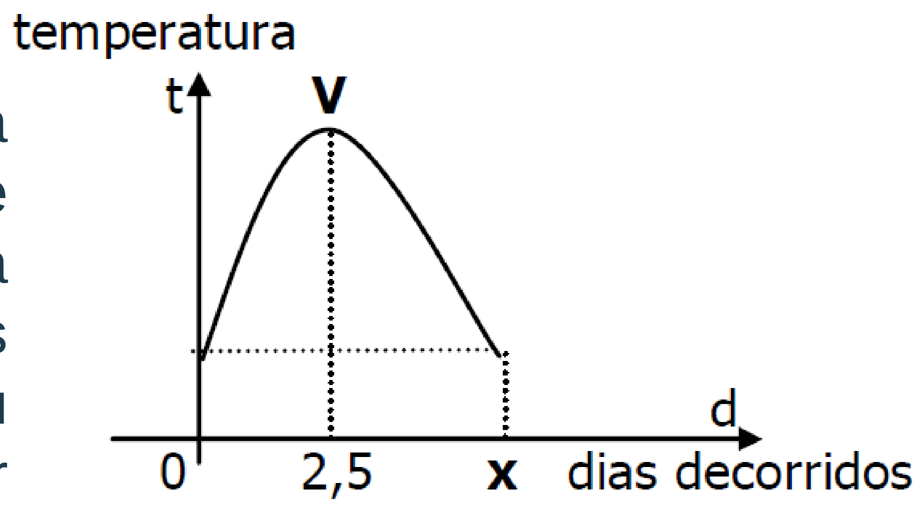
- A parábola da figura, de vértice **V**, mostra as temperaturas observadas em certo período, em função dos dias decorridos. O número de dias decorridos para que a temperatura volte a ser igual aquela do inicio das observações é:



a) 3,5.
b) 4,0.
c) 4,5.
d) 5,0.
e) 5,5.

Resposta

- A parábola da figura, de vértice **V**, mostra as temperaturas observadas em certo período, em função dos dias decorridos. O número de dias decorridos para que a temperatura volte a ser igual aquela do inicio das observações é:



a) 3,5.
b) 4,0.
c) 4,5.
d) 5,0.
e) 5,5.

Solução: considerando que sabemos a posição do vértice $x_v = 2{,}5$ e assumindo que a parábola tem a forma padrão e assumindo que as parábolas são simétricas em relação ao seu vértice, podemos simplificar x_v por simetria:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \to 2{,}5 = \frac{0 + x_2}{2} \to \frac{0 + x_2}{2} = 2{,}5$$

$$x_2 = 2{,}5 \times 2 = 5$$

Portanto, será necessário 5 dias para que a temperatura volte a ser igual o início.

Referências

- DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática*: contexto & aplicações – volume único. São Paulo: Ática, 2018.
- GUEDES, S. *Lógica de programação algorítmica*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.
- LAPA, N. *Matemática Aplicada*. São Paulo: Saraiva, 2012.
- MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, H. O. *Cálculo*: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2016.
- OLIVEIRA, C. A. M. *Matemática*. Curitiba: InterSaberes, 2016.
- ROCHA, A.; MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P. *Tópicos de Matemática Aplicada* [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2013.

Referências

- DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática*: contexto & aplicações – Volume único. São Paulo: Ática, 2018.
- MARGUTI, A. L.; CHIEREGATTI, B. G.; LIMA, J. S. B. (Coord.) *Minimanual de Matemática:* Enem, vestibulares e concursos. São Paulo: Rideel, 2017.
- OLIVEIRA, C. A. M. *Matemática* [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2016.
- ROCHA, A.; MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P. *Tópicos de Matemática Aplicada* [livro eletrônico]. Curitiba: InterSaberes, 2013.

ATÉ A PRÓXIMA!