Double pendule

Favre Florian

18.01.2025

1 Schéma

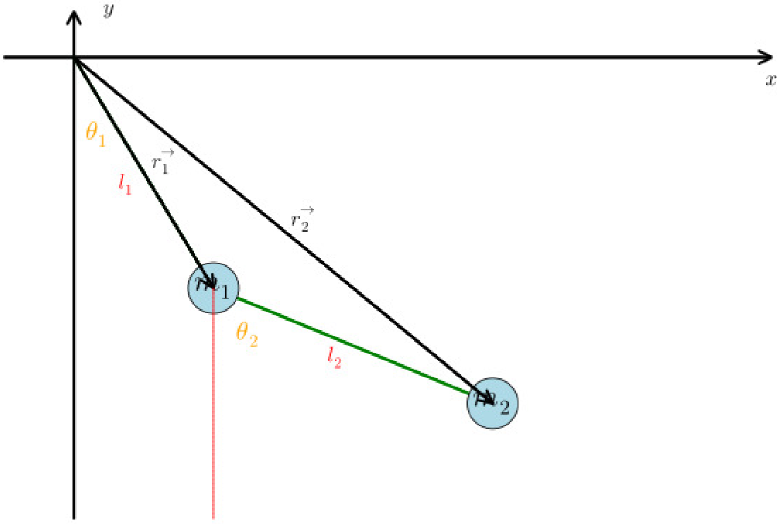

Figure 1: Schéma du double pendule

2 Paramètres du système

- Masse du premier pendule : m_1 [kg]
- Masse du deuxième pendule : m_2 [kg]
- Longueur de la tige du premier pendule : L_1 [m]
- Longueur de la tige du deuxième pendule : L_2 [m]
- Angle du premier pendule (sens anti-horaire) : θ_1 [rad]
- Angle du deuxième pendule (sens anti-horaire) : θ_2 [rad]
- Vitesse angulaire du premier pendule : ω_1 [rad/s]
- Vitesse angulaire du deuxième pendule : ω_2 [rad/s]
- Accélération angulaire du premier pendule : α_1 [rad/s^2]
- Accélération angulaire du deuxième pendule : α_2 [rad/s^2]
- Constante gravitationnelle : $g = 9{,}81$ [m/s^2]

3 Équations

3.1 Positions

$$\frac{x_1}{l_1} = \sin(\theta_1) \tag{1}$$
$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \tag{2}$$
$$\tag{3}$$
$$\frac{y_1}{l_1} = \cos(\theta_1) \tag{4}$$
$$y_1 = -l_1 \cos(\theta_1) \tag{5}$$
$$\tag{6}$$
$$x_2 = x_1 + l_2 \sin(\theta_2) \tag{7}$$
$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \tag{8}$$
$$\tag{9}$$
$$y_2 = y_1 - l_2 \cos(\theta_2) \tag{10}$$
$$y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \tag{11}$$

3.1.1 Résumé

$$x_1(t) = l_1 \sin(\theta_1(t)) \tag{12}$$
$$y_1(t) = -l_1 \cos(\theta_1(t)) \tag{13}$$
$$x_2(t) = l_1 \sin(\theta_1(t)) + l_2 \sin(\theta_2(t)) \tag{14}$$
$$y_2(t) = -l_1 \cos(\theta_1(t)) - l_2 \cos(\theta_2(t)) \tag{15}$$

3.2 Vitesse

$$v_{x1} = \frac{dx_1}{dt} = l_1 \cos(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) \tag{16}$$
$$v_{y1} = \frac{dy_1}{dt} = -l_1 \sin(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) \tag{17}$$
$$v_{x2} = l_1 \cos(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos(\theta_2(t))\dot{\theta}_2(t) \tag{18}$$
$$v_{y2} = -l_1 \sin(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) - l_2 \sin(\theta_2(t))\dot{\theta}_2(t) \tag{19}$$

3.2.1 Résumé

$$v_{x1}(t) = l_1 \cos(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) \tag{20}$$
$$v_{y1}(t) = -l_1 \sin(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) \tag{21}$$
$$v_{x2}(t) = l_1 \cos(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) + l_2 \cos(\theta_2(t))\dot{\theta}_2(t) \tag{22}$$
$$v_{y2}(t) = -l_1 \sin(\theta_1(t))\dot{\theta}_1(t) - l_2 \sin(\theta_2(t))\dot{\theta}_2(t) \tag{23}$$

3.3 Accélération

$$a_{x1}(t) = -l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 \tag{24}$$
$$a_{y1}(t) = -l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 \tag{25}$$
$$a_{x2}(t) = -l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2 \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2 \tag{26}$$
$$a_{y2}(t) = -l_1 \cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2 \tag{27}$$

3.4 Forces

(a) Forces appliquées à m_1 (b) Forces appliquées à m_2

Figure 2: Schéma des forces du double pendule.
Source : https://www.youtube.com/watch?v=SXj1P9Ra5AM

Vecteur unitaire pour la direction des forces de tension:

$$\vec{u}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1(t)) \\ \cos(\theta_1(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2(t)) \\ \cos(\theta_2(t)) \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

$$\vec{g} = (0, -g) \tag{30}$$

Deuxième Loi de Newton, la somme des forces = m$\vec{a}$

$$m_1\vec{a}_1(t) = -T_1(t)\vec{u}_1(t) + T_2(t)\vec{u}_2(t) + m_1\vec{g} \tag{31}$$

$$m_2\vec{a}_2(t) = -T_2(t)\vec{u}_2(t) + m_2\vec{g} \tag{32}$$

3.4.1 Résolution

On sépare les forces pour l'axe x et l'axe y:

$$m_1 a_{x1} = -T_1\sin(\theta_1) + T_2\sin(\theta_2) \tag{33}$$

$$m_1 a_{y1} = -T_1\cos(\theta_1) + T_2\cos(\theta_2) - m_1 g \tag{34}$$

$$m_2 a_{x2} = -T_2\sin(\theta_2) \tag{35}$$

$$m_2 a_{y2} = -T_2\cos(\theta_2) - m_2 g \tag{36}$$

On remplace les a_i par les valeurs trouvées pour l'accélération ci-dessus.

$$m_1\left(-l_1\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1\right) = -T_1\sin(\theta_1) + T_2\sin(\theta_2) \tag{37}$$

$$m_1\left(-l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - l_1\sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1\right) = -T_1\cos(\theta_1) + T_2\cos(\theta_2) - m_1 g \tag{38}$$

$$m_2\left(-l_1\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right) = -T_2\sin(\theta_2) \tag{39}$$

$$m_2\left(-l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 - l_1\sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - l_2\sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right) = -T_2\cos(\theta_2) - m_2 g \tag{40}$$

On isole T_2 depuis la 4ème équation

$$T_2 = \frac{m_2(l_1 cos\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l2 sin\theta_2 \ddot{\theta}_2 + g)}{cos\theta_2} \tag{41}$$

On remplace T_2 dans la 3ème équation

$$\begin{aligned} m_2\Big(-l_1\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\Big) = \\ -\frac{m_2}{\cos\theta_2}\Big(l_1\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 + l_2\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2^2 + l_2\sin\theta_2\,\ddot{\theta}_2 + g\Big)\sin(\theta_2) \end{aligned} \tag{42}$$

On développe les termes.

$$\begin{aligned} &-l_1\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\,\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 - l_2\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)\,\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + l_2\cos^2(\theta_2)\,\ddot{\theta}_2 = -l_1\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\,\dot{\theta}_1^2 - l_2\cos(\theta_2)\sin(\theta_2)\,\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad - l_2\sin^2(\theta_2)\,\ddot{\theta}_2 - g\sin(\theta_2) \end{aligned} \tag{43}$$

On factorise en utilisant les identités trigonométriques

$$\begin{aligned} &l_1\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 + l_2\big(\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)\big)\ddot{\theta}_2 \\ &= l_1\big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)\dot{\theta}_1^2 - g\sin(\theta_2) \end{aligned} \tag{44}$$

On obtient la première équation

$$l_1\cos(\theta_1-\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = l_1\sin(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_1^2 - g\sin(\theta_2) \tag{45}$$

On utilise la 2ème et 3ème équation pour isoler $T_2 cos\theta_2$ et $T_2 sin\theta_2$

$$T_2 sin\theta_2 = -m_2\left(-l_1\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\cos(\theta_1)\ddot{\theta}_1 - l_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2\cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right) \tag{46}$$

$$T_2 cos\theta_2 = m_2\left(l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2\sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + g\right) \tag{47}$$

On remplace $T_2 sin$ dans la première équation

$$m_1\left(-l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1 \ddot{\theta}_1\right)x = -T_1 sin\theta_1 - m_2(-l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 cos\theta_2 \ddot{\theta}_2) \tag{48}$$

On isole T_1

$$T_1 = \frac{-m_1(-l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1 \ddot{\theta}_1) - m_2(-l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 sin\theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 cos\theta_2 \ddot{\theta}_2)}{sin\theta_1} \tag{49}$$

On remplace T_1 et T_2 dans la deuxième équation

$$\begin{aligned}
&m_1\Big(l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1\Big) \\
&= \frac{-m_1(-l_1 sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1\ddot{\theta}_1) - m_2(-l_1 sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + l_1 cos\theta_1\ddot{\theta}_1 - l_2 sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 + l_2 cos\theta_2\ddot{\theta}_2)}{sin\theta_1}\cos(\theta_1) \\
&- m_2\Big(l_1\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + l_1\sin(\theta_1)\ddot{\theta}_1 + l_2\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + l_2\sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + g\Big) - m_1 g
\end{aligned} \tag{50}$$

On développe les termes

$$\begin{aligned}
&m_1 l_1 cos\theta_1 sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + m_1 l_1 sin^2\theta_1\ddot{\theta}_1 \\
&= m_1 l_1 sin\theta_1 cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 - m_1 l_1 cos^2\theta_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 cos\theta_1 sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 cos^2\theta_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 cos\theta_1 sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \\
&- m_2 l_2 cos\theta_1 cos\theta_2\ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 sin\theta_1 cos\theta_1\dot{\theta}_1^2 - m_2 l_1 sin^2\theta_1\ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 sin\theta_1 cos\theta_2\dot{\theta}_2^2 - m_2 l_2 sin\theta_1 sin\theta_2\ddot{\theta}_2 \\
&- (m_1+m_2) g sin\theta_1
\end{aligned} \tag{51}$$

On factorise avec les identités trigonométriques. Et on a donc les 2 équation on l'on peut isolé l'accélération car on a supprimé les tensions.

$$l_1(m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 - m_2 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)g\sin\theta_1 - m_2 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \tag{52}$$

$$l_1\cos(\theta_1-\theta_2)\,\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = l_1\sin(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_1^2 - g\sin(\theta_2) \tag{53}$$

On pose

$$\Delta = \theta_1 - \theta_2 \tag{54}$$

$$l_1(m_1+m_2)\ddot{\theta}_1 - m_2 l_2\cos\Delta\,\ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)g\sin\theta_1 - m_2 l_2\sin\Delta\,\dot{\theta}_2^2 \tag{55}$$

$$l_1\cos\Delta\,\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2 = l_1\sin\Delta\,\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2 \tag{56}$$

On isole $\ddot{\theta}_2$ dans la 2ème équation.

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{l_1\sin\Delta\,\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2 - l_1\cos\Delta\,\ddot{\theta}_1}{l_2} \tag{57}$$

On remplace $\ddot{\theta}_2$ dans la 1er équation.

$$l_1\big(m_1 + m_2\sin^2\Delta\big)\ddot{\theta}_1 = -(m_1+m_2)g\sin\theta_1 + m_2 g\sin\theta_2\cos\Delta - m_2 l_1\sin\Delta\cos\Delta\,\dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2\sin\Delta\,\dot{\theta}_2^2 \tag{58}$$

On obtient donc les 2 équations finales

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-(m_1+m_2)g\sin\theta_1 + m_2 g\sin\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2}{l_1\big(m_1 + m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2)\big)} \tag{59}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{l_1\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 - g\sin\theta_2 - l_1\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1}{l_2} \tag{60}$$

3.5 Équations finales (Formes canonique)

$$\dot{\omega}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_2^2 l_2 + \omega_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{61}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\big(\omega_1^2 l_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \omega_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\big)}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{62}$$

4 Équations différentiels

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \tag{63}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \tag{64}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \alpha_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_2^2 l_2 + \omega_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{l_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{65}$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \alpha_2 = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\big(\omega_1^2 l_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \omega_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\big)}{l_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))} \tag{66}$$

5 Énergies

5.1 Énergie cinétique

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \tag{67}$$

$$v_1^2 = (l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1)^2 + (-l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1)^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (cos^2\theta_1 + sin^2\theta_1) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \tag{68}$$

$$v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = (l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1)^2 + (-l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1)^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (cos^2\theta_1 + sin^2\theta_1) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \tag{69}$$

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = (l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (-l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \tag{70}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \tag{71}$$

5.2 Énergie potentielle

$$E_{pot} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \tag{72}$$

$$E_{pot} = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) \tag{73}$$

5.3 Énergie totale

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot} \tag{74}$$

6 Euler

Calcule de la vitesse angulaire au temps $t + \Delta t$ avec les frottements

$$\omega_1(t + \Delta t) = \omega_1(t) + \Delta t[\alpha_1(t) - f1\omega_1(t)] \tag{75}$$
$$\omega_2(t + \Delta t) = \omega_2(t) + \Delta t[\alpha_2(t) - f2\omega_2(t)] \tag{76}$$

$$\theta_1(t + \Delta t) = \theta_1(t) + \Delta t[\omega_1(t + \Delta t)] \tag{77}$$
$$\theta_2(t + \Delta t) = \theta_2(t) + \Delta t[\omega_2(t + \Delta t)] \tag{78}$$

7 Runge-Kutta

On a le système suivant :

$$\dot{\omega_i} = \alpha_i(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) - f_i\omega_i \tag{79}$$
$$\dot{\theta_i} = \omega_i \tag{80}$$

Au lieu de prendre une seule pente, RK4 évalue la pente à plusieurs endroits dans l'intervalle, puis fait une moyenne pondérée de ces pentes

Pente au début

$$f_1 = f(X_k, t_k) \tag{81}$$

Pente au millieu, On avance à moitié du pas en utilisant f1, puis on recalcule la pente.

$$f_2 = f(X_k + \frac{\Delta t}{2} f_1, t_k + \frac{\Delta t}{2}) \tag{82}$$

pente au milieu

$$f_3 = f(X_k + \frac{\Delta t}{2} f_2, t_k + \frac{\Delta t}{2}) \tag{83}$$

pente à la fin, pente estimée à la fin de l'intervalle

$$f_4 = f(X_k + \Delta t f_3, t_k + \Delta t) \tag{84}$$

Moyenne pondérée

$$X_{k+1} = X_k + \frac{\Delta t}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \tag{85}$$

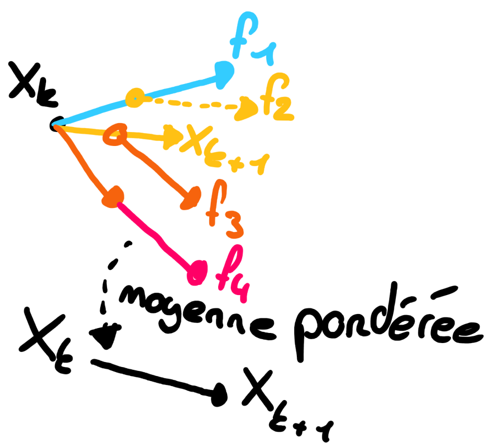

Schéma de RK4

8 Nelder-Mead

Le Nelder-Mead trouve un minimum local, pas nécessairement le minimum global.

Cet algoritme va prendre des points dans l'espace qui vont former un polygone. Il va prendre n + 1 points si on est en dimension n.

Ensuite, il va évaluer la fonction qu'on veut minimiser à chaqu'un de ces points puis prendre le meilleure point et le pire point.

Finalement, il va transformer ce polynome :

- Réflexion : réfléchit le pire point à travers le centre des autres points. Si le point réfléchi est meilleur que le pire mais pas meilleur que le meilleur, on remplace le pire par ce nouveau point.
- Expansion : Si le point réfléchi est meilleur que le meilleur, on essaie d'aller encore plus loin dans cette direction.
- Contraction : Si le point réfléchi est pire que la plupart, on contracte vers le centre pour rester dans une zone plus prometteuse.
- Réduction : Si rien ne marche, on réduit tout le polynome autour du meilleur point pour resserrer la recherche.

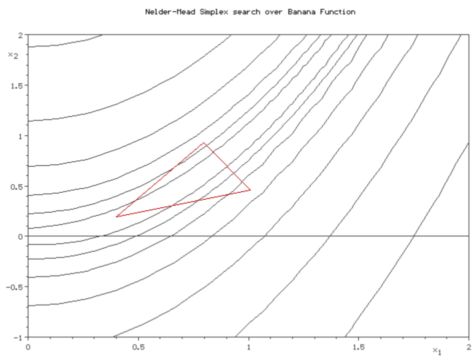

Schéma de Nelder Mead, source: https://en.wikipedia.org/wiki/Nelder-Mead_method