O Grupo de Lorentz: Relatividade Restrita aos olhos de um matemático

Níckolas Alves[a)]
Departamento de Física Matemática, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil

Este trabalho é a versão escrita de um seminário apresentado aos calouros do Instituto de Física da USP em fevereiro de 2020 com a intenção de divulgar o trabalho em linhas gerais da Física Matemática por meio do estudo da Teoria da Relatividade Restrita. Tomamos como hipótese a existência de intervalos do tipo tempo, luz e espaço e obtemos a forma do Grupo de Lorentz ao buscar um conjunto de transformações lineares que preservem causalidade no espaço de Minkowski. Obtém-se então as transformações de Lorentz por meio da estrutura algébrica do Grupo de Lorentz. Por fim, como exemplos de aplicação da Relatividade, mostra-se a contração dos comprimentos e a dilatação do tempo.

Keywords: Relatividade Restrita, Grupo de Lorentz, Teoria de Grupos

I have no special talents, I am only passionately curious.

A. Einstein em carta para Carl Seelig, 11 de março de 1952, Albert Einstein Archives 39-013.

I. EVENTOS NO ESPAÇO-TEMPO

O objetivo da Teoria da Relatividade Restrita é descrever o movimento de corpos macroscópicos (de modo que efeitos quânticos possam ser ignorados) com velocidades comparáveis às da luz (de modo que a Mecânica Clássica usual não é mais suficiente) e na ausência de campos gravitacionais (de modo que não precisemos considerar os efeitos da Relatividade Geral).

Em geral, desejamos estudar Relatividade Restrita em $3+1$ dimensões (três para o espaço e uma para o tempo), mas por simplicidade analisaremos neste seminário o caso simplificado em $1+1$ dimensões (uma dimensão espacial e uma dimensão temporal). Isto nos permitirá perceber efeitos gerais que ocorrem neste novo ambiente sem precisarmos nos preocupar com as sutilezas do espaço-tempo quadridimensional.

Ao dizer "espaço-tempo", nos referimos ao conjunto de todos os pontos no espaço e no tempo. Como tanto o espaço quanto o tempo são números reais, vemos então que estamos lidando com o conjunto $\mathbb{R}^2$. Definimos um evento no espaço-tempo como sendo um elemento $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dado um tal evento, convencionamos que $x_0 = ct$, onde c é a velocidade da luz e t o instante de tempo em que ocorreu o evento, e que x_1 é a localização espacial do evento.

Dados dois eventos $x, y \in \mathbb{R}^2$ e escrevendo $\Delta x = y_1 - x_1$, $c\Delta t = y_0 - x_0$, há três possibilidades:

Tipo tempo:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} &< c^2, \\ \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 &< 0; \end{aligned} \tag{1}$$

Tipo luz:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} &= c^2, \\ \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

[a)]E-mail: nickolas@fma.if.usp.br

Tipo espaço:

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} > c^2,$$
$$\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 > 0. \tag{3}$$

A Teoria da Relatividade Restrita proíbe a propagação de sinais com velocidade acima da velocidade da luz (isto pode ser demonstrado, mas tomaremos como um postulado). Portanto, se x e y são do tipo espaço, nenhum sinal emitido em x pode alcançar y (pois isso necessitaria que o sinal viajasse acima da velocidade da luz). Por consequência, nada que tenha ocorrido em x pode ter influência sobre o que ocorrem em y, *id est*, x e y não possuem ligação causal. Por outro lado, se fossem eventos do tipo tempo, seria possível a ligação causal dos dois eventos.

Perceba que estas questões de causalidade são traduzidas no estudo do sinal da quantidade

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2. \tag{4}$$

Perceba que este estudo pode ser feito por meio da função

$$s(x, y) \coloneqq (x_1 - y_1)^2 - (x_0 - y_0)^2, \tag{5}$$

ou, em notação matricial,

$$s(x, y) = \begin{pmatrix} x_0 - y_0 & x_1 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - y_0 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A matriz

$$\eta \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

é conhecida como *métrica de Minkowski* e, como veremos em breve, possui um papel central na teoria.

II. MUDANÇAS DE REFERENCIAL

Voltamos agora nossa atenção ao problema de mudanças de referencial. Em Mecânica Clássica, dois referenciais distintos são conectados, em geral, por um sistema de equações da forma

$$\{ t' = t, x' = x - vt, \tag{8}$$

que é o chamado *boost de Galileu*. Ao dizermos boost, nos referimos a uma transformação conectando dois referenciais inerciais[1]que se movem a uma velocidade constante com relação um ao outro.

Esperamos então encontrar uma mudança de referencial da forma

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Como podemos restringir as possíveis opções de transformações de referencial?

O primeiro passo é considerarmos o Princípio da Relatividade de Galileu, que declara que a Física deve ser a mesma em todos os referenciais inerciais. Este princípio é uma necessidade para a consistência da Física: se a

[1] Um referencial inercial é um referencial no qual vale a Lei da Inércia de Newton: um corpo tende a manter seu estado de movimento a menos que sofra a ação de uma força externa.

Física muda de referencial para referencial, faz algum sentido estudarmos Física em primeiro lugar? Como eu poderia garantir que estou em um referencial que satisfaz as leis que conheço?

Deste princípio, seguem duas consequências importantes para as nossas discussões: em primeiro lugar, certas constantes Físicas devem possuir os mesmos valores em todos os referenciais inerciais. Por exemplo, a velocidade da luz c, a constante de Newton G e a constante de Planck normalizada $\hbar$ são partes essenciais da descrição de inúmeros fenômenos físicos e a alteração de seus valores alteraria a intensidade dos fenômenos associados. Por consequência, para que a Física seja a mesma, estas constantes precisam ser universais.

Além disto, temos a imposição de que a causalidade deve ser preservada entre diferentes referenciais. Se num dado referencial temos que o evento x não pode afetar o evento y, então o mesmo deve ser satisfeito em todo outro referencial inercial. Do contrário, observadores em referenciais diferentes teriam realidades distintas, o que contradiz o Princípio da Relatividade.

Para que a causalidade seja preservada por uma mudança de referencial Λ, basta que os sinais de Δs sejam mantidos inalterados, *id est*,

$$\operatorname{sign}\left[s\left(\Lambda x, \Lambda y\right)\right] = \operatorname{sign}\left[s\left(x, y\right)\right]. \tag{10}$$

A primeira proposta de transformações que podemos fazer são as dilatações: as transformações da forma $\Lambda = \lambda \mathbb{1}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. No entanto, estas transformações não são físicas.

Isto pode parecer impactante a princípio. Uma dilatação apenas altera a escala em que estamos lidando, "esticando" o tempo e o espaço. Como isso pode ser problemático.

Comece por considerar o tamanho médio do átomo de hidrogênio. Embora nada nos garanta que este valor é o mesmo em todos os locais do Universo, a crença de que é segue de maneira natural da nossa crença no Princípio de Relatividade. Afinal, o tamanho do átomo de hidrogênio é definido pelas interações eletromagnéticas entre o próton e o elétron, e estamos impondo que estas interações se comportam da mesma forma.

De forma semelhante, considere a massa de repouso do elétron, m_e. Como $\hbar$ tem dimensões de energia vezes tempo, a quantidade $\frac{\hbar}{m_e c}$ possui dimensões de comprimento (é o chamado *comprimento de onda Compton* do elétron). Se queremos acreditar que a massa de repouso do elétron é a mesma em todo o Universo (e não há motivação experimental para acreditar no contrário), segue como consequência um comprimento natural associado ao elétron. Uma dilatação alteraria esse comprimento natural e, por consequência, contraria a crença associada ao Princípio da Relatividade de que a Física precisa ser a mesma em todo referencial inercial.

Assim, saímos de nenhuma ideia sobre quais transformações são permitidas, obtivemos uma proposta e a descartamos. De volta à estaca zero, como podemos estudar as possíveis mudanças de referencial? A resposta para esta pergunta vem na forma do seguinte teorema.

Teorema 1:

Seja Λ uma matriz inversível 2×2 com coeficientes reais. Se Λ representa uma transformação entre sistemas de referenciais inerciais que preserva a estrutura causal do espaço-tempo e não envolve dilatações, então vale que

$$\Lambda^{\intercal} \eta \Lambda = \eta. \tag{11}$$

Por consequência, vale que

$$s\left(\Lambda x, \Lambda y\right) = s(x, y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{12}$$

□

Demonstração:

Dado $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, definimos

$$\begin{aligned} I(x) &:= x^{\intercal} \eta x, \\ &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ &= x_1^2 - x_0^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Além disso, definimos

$$
\begin{aligned}
J(x) &\coloneqq x^\mathsf{T} \Lambda^\mathsf{T} \eta \Lambda x, \\
&= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \\
&= L_{00} x_0^2 + 2L_{01} x_0 x_1 + L_{11} x_1^2,
\end{aligned} \tag{14}
$$

onde $L \equiv \Lambda^\mathsf{T} \eta \Lambda$. Note que $L^\mathsf{T} = \Lambda^\mathsf{T} \eta^\mathsf{T} \Lambda = L$.

Primeiramente consideremos o caso em que $L_{00} = 0$. Como Λ preserva os intervalos do tipo luz, temos que

$$
s(x, y) = 0 \Leftrightarrow s\left(\Lambda x, \Lambda y\right) = 0. \tag{15}
$$

Perceba, no entanto, que $I(x) = s(x, 0), \forall\, x \in \mathbb{R}^2$. De maneira semelhante, $J(x) = s(\Lambda x, 0), \forall\, x \in \mathbb{R}^2$. Assim, a Eq. (15) implica que $I(x) = 0 \Leftrightarrow J(x) = 0$.

Como $I(x) = x_1^2 - x_0^2$, temos que $I(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm x_0$. Assim, como $L_{00} = 0$, temos que $J(x) = 0$ se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
L_{00} x_0^2 + 2L_{01} x_0 x_1 + L_{11} x_1^2 &= 0, \\
\pm 2L_{01} x_1^2 + L_{11} x_1^2 &= 0, \\
\pm 2L_{01} + L_{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Se somarmos as duas equações (note que $\pm 2L_{01} + L_{11} = 0$ representa uma equação para o sinal positivo e outra para o sinal negativo), podemos concluir que $L_{01} = L_{11} = 0$. Como $L^\mathsf{T} = L$, isto implica que $L_{10} = 0$. Dado que $L_{00} = 0$, concluímos que

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}
$$

Por consequência, vemos que $\det(\Lambda^\mathsf{T} \eta \Lambda) = -1 \det(\Lambda)^2 = 0$. Logo, $\det \Lambda = 0$ e descobrimos que Λ não é inversível. Oras, mas partimos do pressuposto que Λ era inversível! Como chegamos a uma conclusão absurda, temos que a hipótese que fizemos ($L_{00} = 0$) era absurda em primeiro lugar e podemos concluir que ela é falsa, *id est*, sempre vale que $L_{00} \neq 0$.

Este é um exemplo de uma demonstração por absurdo, que consiste em assumir que o que desejamos provar é falso e mostrar que isso implica uma afirmação evidentemente falsa. Nas palavras do matemático G. H. Hardy,

> *Reductio ad absurdum*, que Euclides tanto amava, é uma das melhores armas de um matemático. É um gambito muito melhor que qualquer jogada de xadrez: um enxadrista pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo uma peça, mas um matemático oferece o jogo.

Voltando de nosso devaneio sobre demonstrações por absurdo, suponha agora que $L_{00} \neq 0$ (como sabemos ser o caso). Temos agora que J é um polinômio de segundo grau na variável x_0 e podemos escrever

$$
J(x) = L_{00} \left(x_0 - y_1\right) \left(x_0 - y_2\right), \tag{18}
$$

onde y_1 e y_2 satisfazem

$$
\begin{cases}
-L_{00}(y_1 + y_2) = 2L_{01} x_1, \\
L_{00} y_1 y_2 = L_{11} x_1^2.
\end{cases} \tag{19}
$$

Contudo, não é preciso considerarmos estas equações para obter y_1 e y_2. Note que Eq. (18) garante que y_1 e y_2 são as raízes de J enquanto polinômio em x_0.

Sabemos que, assumindo que Λ preserva intervalos do tipo luz, $J(x) = 0 \Leftrightarrow I(x) = 0$. Portanto, como ambos I e J são polinômios de segundo grau em x_0 que se anulam nos mesmos pontos, vemos que y_1 e y_2 são as raízes de $I(x) = x_1^2 - x_0^2$. Logo, temos que $y_1 = x_1$ e $y_2 = -x_1$. Segue que

$$
J(x) = L_{00} \left(x_0 - x_1\right) \left(x_0 + x_1\right) = -L_{00} I(x). \tag{20}
$$

Segue então que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$,

$$
\begin{aligned}
x^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda x &= -L_{00} x^\intercal \eta x, \\
x^\intercal \left(\Lambda^\intercal \eta \Lambda + L_{00}\eta\right) x &= 0, \\
\Lambda^\intercal \eta \Lambda &= -L_{00}\eta, \\
\eta\Lambda^\intercal \eta \Lambda &= -L_{00}\mathbb{1}, \\
\det\left(\eta\Lambda^\intercal \eta \Lambda\right) &= L_{00}^2, \\
\det\left(\Lambda\right)^2 &= L_{00}^2, \\
|\det \Lambda| &= \pm L_{00}, \\
\therefore\, x^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda x &= \pm |\det \Lambda| x^\intercal \eta x.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Note que, para que Λ preserve a estrutura causal, é necessário que o sinal escolhido seja o positivo e temos que $x^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda x = |\det \Lambda| x^\intercal \eta x, \forall\, x \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\mathcal{L} := \left\{\Lambda_0 \text{ é matriz } 2 \times 2 \text{ com coeficientes reais}; \eta\Lambda_0^\intercal \eta \Lambda = \mathbb{1}\right\}$. Se Λ satisfaz $x^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda x = |\det \Lambda| x^\intercal \eta x$, então $\Lambda = \lambda\Lambda_0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e para algum $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$. De fato, se $\Lambda \neq 0$ satisfaz tal relação, então temos que, $\forall\, \lambda > 0$,

$$
\eta \left(\lambda^{-1}\Lambda\right)^\intercal \eta \left(\lambda^{1}\Lambda\right) = \lambda^{-2} |\det \Lambda| \mathbb{1}. \tag{22}
$$

Tomando $\lambda = \sqrt{|\det \Lambda|}$, concluímos que $\lambda^{-1}\Lambda \in \mathcal{L}$.

Assim, Λ é produto de um elemento de $\mathcal{L}$ com uma dilatação $\lambda\mathbb{1}$. Se Λ não envolve dilatações, temos $\Lambda \in \mathcal{L}$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\eta\Lambda^\intercal \eta \Lambda &= \mathbb{1}, \\
\Lambda^\intercal \eta \Lambda &= \eta.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Por fim, perceba que

$$
\begin{aligned}
s\left(\Lambda x, \Lambda y\right) &= x^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda y, \\
&= x^\intercal \eta y, \\
&= s(x, y).
\end{aligned} \tag{24}
$$

Isto conclui a demonstração. ■

Observação:

Perceba que o conteúdo físico de interesse do teorema anterior é que toda transformação "bem-comportada" que preserva a causalidade automaticamente torna o intervalo Δs^2 numa quantidade invariante por mudança de referencial. ♣

O conjunto $\mathcal{L}$ é comumente chamado de *grupo de Lorentz em* $1+1$ *dimensões*. O termo *grupo* será justificado na Seção IV.

III. TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Agora que conhecemos o conjunto de todas as transformações conhecidas, queremos obter sua forma explícita. Comecemos notando que, como $\Lambda \in \mathcal{L}$ sempre satisfaz $\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta$, vale que

$$
\begin{aligned}
\det(\Lambda^\intercal \eta \Lambda) &= \det \eta, \\
-(\det \Lambda)^2 &= -1, \\
\det \Lambda &= \pm 1.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Por enquanto, suporemos que $\det \Lambda = +1$, e trataremos o outro caso *a posteriori*.

Como $\eta^{-1} = \eta$, $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \Rightarrow \eta\Lambda^T\eta = \Lambda^{-1}$. Dada uma matriz 2×2 qualquer, temos que sua inversa é dada em termos de suas componentes por

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det \Lambda}\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & -\Lambda_{01} \\ -\Lambda_{10} & \Lambda_{00} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Calculando o produto $\eta\Lambda^T\eta$ em termos das componentes de Λ, temos que

$$\begin{aligned} \eta\Lambda^T\eta &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{10} \\ \Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{10} \\ -\Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{27}$$

Assim, a equação $\eta\Lambda^T\eta = \Lambda^{-1}$ se torna (após impormos que $\det \Lambda = 1$)

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & -\Lambda_{10} \\ -\Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & -\Lambda_{01} \\ -\Lambda_{10} & \Lambda_{00} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

id est,

$$\left\{\Lambda_{00} = \Lambda_{11}, \Lambda_{01} = \Lambda_{10}. \right. \tag{29}$$

A condição $\det \Lambda = 1$ ainda nos ensina que

$$\begin{aligned} \Lambda_{00}\Lambda_{11} - \Lambda_{01}\Lambda_{10} = 1, \\ \Lambda_{00} = 1 + \Lambda_{01}^2, \Lambda_{00} = \pm\sqrt{1 + \Lambda_{01}^2}. \end{aligned}$$

Perceba que isto implica que $\Lambda_{00} \neq 0$. Por ora, assumiremos que $\Lambda_{00} > 0$. Lidaremos com o caso $\Lambda_{00} < 0$ *a posteriori*.

Concluímos então que $\Lambda \in \mathcal{L}$, se valerem $\det \Lambda = +1$ e $\Lambda_{00} > 0$, é da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{01} & \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Para obter Λ_{01}, precisaremos envolver um pouco mais de Física. Tome um referencial inercial, que chamaremos de S. Considere uma partícula que se move com velocidade v em relação a este referencial S e se encontrava na origem no instante $t = 0$. Queremos descobrir como as coordenadas de todos os eventos no referencial S se apresentam no referencial S' da partícula.

Em outras palavras, imagine um evento que ocorre no referencial S. Por exemplo, um fóton é emitido pela partícula numa certa posição x e num certo instante de tempo t. Nosso objetivo é descobrir qual a posição x' e qual o instante de tempo t' em que um observador no referencial S' observa o mesmo evento.

Como a partícula está sempre na origem do seu sistema de coordenadas, a emissão do fóton no referencial S' se dá em algum instante de tempo t', mas certamente na posição $x' = 0$. No referencial S, sabemos que a partícula se move com velocidade v, então se o evento ocorreu no instante t, ele se deu na posição $x = vt$.

Temos então o seguinte sistema de equações, escrito em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{01} & \sqrt{1 + \Lambda_{01}^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Da segunda equação, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \Lambda_{01} ct + \sqrt{1+\Lambda_{01}^2}\, vt, \\
-\Lambda_{01} c &= \sqrt{1+\Lambda_{01}^2}\, v, \\
\Lambda_{01}^2 c^2 &= v^2 + \Lambda_{01}^2 v^2, \\
\Lambda_{01}^2 (c^2 - v^2) &= v^2, \\
\Lambda_{01}^2 &= \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \\
\Lambda_{01} &= -\beta(v) \frac{1}{\sqrt{1-\beta(v)}},
\end{aligned}
\tag{32, 33}
$$

onde definimos

$$
\beta(v) := \frac{v}{c}, \quad \gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta(v)^2}}. \tag{34}
$$

Quando não houver risco de confusão sobre qual a velocidade considerada, escreveremos simplesmente $\beta \equiv \beta(v)$ e $\gamma \equiv \gamma(v)$.

Note que o sinal negativo escolhido na Eq. (33) é devido ao fato de que a Eq. (32) implica que $\Lambda_{01} < 0$.

Como $\Lambda_{00} = +\sqrt{1+\Lambda_{01}^2}$, temos agora que

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{00} &= +\sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2-v^2} + \frac{v^2}{c^2-v^2}}, \\
&= +\sqrt{\frac{c^2}{c^2-v^2}}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\
&= \gamma(v).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Logo, se $\Lambda \in \mathcal{L}, \det \Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0$, temos que

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix}. \tag{36}
$$

Observe que as equações de transformação se tornam

$$
\begin{cases}
ct' = \gamma(v)\left(ct - \beta(v)x\right), \\
x' = \gamma(v)\left(x - \beta(v)ct\right).
\end{cases}
\tag{37}
$$

Estas são as chamadas *transformações de Lorentz*. A simetria entre x e ct é a razão de termos escolhido trabalhar com ct ao invés de simplesmente t.

Perceba que, se tomarmos $v \ll c$, temos que $\frac{v}{c} \ll 1$ e $\gamma(v) \approx 1$. Temos então o limite não-relativístico:

$$
\begin{cases}
ct' = ct, \\
x' = x - vt,
\end{cases}
\tag{38}
$$

que são as transformações de Galileu da Mecânica Clássica.

Para $v = 0$, temos

$$\begin{cases} ct' = ct, \\ x' = x. \end{cases} \tag{39}$$

Estes limites indicam que estamos no caminho certo. Ao mudar para um referencial em repouso em relação ao referencial original, nada é alterado. De forma um pouco mais forte, a relatividade aparenta recuperar os resultados previamente conhecido sobre a Mecânica a baixas velocidades. Como nós sabemos que estes resultados fornecem uma boa descrição do Universo, é importante que nossa nova teoria os recupere, pois do contrário obteríamos uma descrição falha no que já conhecemos ao tentar estender o nosso conhecimento.

Por simplicidade, introduzimos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L}; \det \Lambda = +1, \Lambda_{00} > 0\}, \\ \mathcal{L}_+^\downarrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L}; \det \Lambda = +1, \Lambda_{00} < 0\}, \\ \mathcal{L}_-^\uparrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L}; \det \Lambda = -1, \Lambda_{00} > 0\}, \\ \mathcal{L}_-^\downarrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L}; \det \Lambda = -1, \Lambda_{00} < 0\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Teorema 2:

Sejam as matrizes P *e* T *dadas por*

$$P = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Então vale que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\downarrow &= \left\{ TP\Lambda; \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \right\}, \\ \mathcal{L}_-^\uparrow &= \left\{ P\Lambda; \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \right\}, \\ \mathcal{L}_-^\downarrow &= \left\{ T\Lambda; \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \right\}. \end{aligned} \tag{42}$$

□

Demonstração:

Note que $P^2 = T^2 = \mathbb{1}$, $P^\intercal = P$ e $T^\intercal = T$. Além disso, $PT = TP$, $P\eta = \eta P$ e $\eta T = T\eta$.

Seja $M \in \mathcal{L}_+^\downarrow$. Defino $\Lambda = PTM$. Perceba que

$$\begin{aligned} \Lambda^\intercal \eta \Lambda &= (PTM)^\intercal \eta (PTM), \\ &= M^\intercal T^\intercal P^\intercal \eta PTM, \\ &= M^\intercal T^\intercal \eta TM, \\ &= M^\intercal \eta M, \\ &= \eta. \end{aligned} \tag{43}$$

Logo, $\Lambda \in \mathcal{L}$. Vale que $\det \Lambda = +1$, pois

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= \det(PTM), \\ &= \det P \det T \det M, \\ &= (-1)(-1)(+1), \\ &= +1. \end{aligned} \tag{44}$$

Além disso, $\Lambda_{00} > 0$, pois

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -M_{00} & -M_{01} \\ -M_{10} & -M_{11} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{45}$$

e $M_{00} < 0$. Isto prova o teorema para os elementos de $\mathcal{L}_+^\downarrow$. Os demais casos podem ser provados segundo o mesmo raciocínio. ■

Note que, embora estranhos, os elementos de $\mathcal{L}_+^\downarrow, \mathcal{L}_-^\uparrow$ e $\mathcal{L}_-^\downarrow$ ainda possuem significado físico. Eles são apenas os elementos de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ compostos com as operações de *troca de paridade* (reversão da orientações dos eixos de coordenadas espaciais), denotada por P, ou de *reversão temporal*, denotada por T. Caso queiramos descrever transformações de caráter geral, as escolhas de orientações eixos também precisam poder ser alteradas.

IV. TEORIA DE GRUPOS

Uma das propriedades interessantes de $\mathcal{L}$ é sua estrutura de *grupo*. Como $\mathcal{L}$ é um conjunto de matrizes e nós sabemos calcular o produto de duas matrizes, podemos estudar como $\mathcal{L}$ se comporta com relação ao produto usual de matrizes. Contudo, antes de mais nada, vamos definir o que é um grupo.

Definição 3 [Grupo]**:**
Seja G um conjunto e seja $\cdot \colon G \times G \to G$ uma função. Dizemos que $(G, \cdot)$ é um *grupo* quando valerem as seguintes condições:

i. dados $f, g, h \in G$, vale que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ (associatividade);

ii. existe um elemento $e \in G$ tal que, para qualquer $g \in G$, $e \cdot g = g \cdot e = g$ (existência de identidade);

iii. dado $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ (existência de inverso).

No caso de valer a condição de que $\forall\, g, h \in G$, $g \cdot h = h \cdot g$, dizemos ainda que $(G, \cdot)$ é um grupo *abeliano*. ♠

Teorema 4:
O conjunto $\mathcal{L}$ munido do produto usual de matrizes é um grupo. □

Demonstração:
Sejam $\Lambda, M \in \mathcal{L}$. Então sabemos que

$$\begin{cases} \Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta, \\ M^\intercal \eta M = \eta. \end{cases} \tag{46}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} (\Lambda M)^\intercal \eta (\Lambda M) &= M^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda M, \\ &= M^\intercal \eta M, \\ &= \eta, \end{aligned} \tag{47}$$

e portanto $\Lambda M \in \mathcal{L}$.
Como o produto de matrizes é associativo para quaisquer três matrizes com coeficientes complexos (prove!), ele é associativo para matrizes de $\mathcal{L}$.
Note que $\mathbb{1} \in \mathcal{L}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}^\intercal \eta \mathbb{1} &= \mathbb{1} \eta \mathbb{1}, \\ &= \eta. \end{aligned} \tag{48}$$

Como $\Lambda \mathbb{1} = \mathbb{1} \Lambda = \Lambda$, vemos que $\mathcal{L}$ admite uma identidade.
Por fim, dado $\Lambda \in \mathcal{L}$, queremos mostrar que $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}$. Veja que

$$\begin{aligned} \Lambda^\intercal \eta \Lambda &= \eta, \\ (\Lambda^{-1})^\intercal \Lambda^\intercal \eta \Lambda \Lambda^{-1} &= (\Lambda^{-1})^\intercal \eta \Lambda^{-1}, \\ (\Lambda \Lambda^{-1})^\intercal \eta (\Lambda \Lambda^{-1}) &= (\Lambda^{-1})^\intercal \eta \Lambda^{-1}, \\ \eta &= (\Lambda^{-1})^\intercal \eta \Lambda^{-1}, \end{aligned} \tag{49}$$

e portanto $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}$.

Assim, concluímos que $\mathcal{L}$ munido com o produto usual de matrizes é, de fato, um grupo. ■

Enunciamos, sem prova, o seguinte teorema:

Teorema 5:
O conjunto $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ munido do produto usual de matrizes é um grupo, que denominamos de grupo de Lorentz próprio ortócrono em $1+1$ dimensões. □

Os demais componentes de $\mathcal{L}$ - $\mathcal{L}_+^{\downarrow}, \mathcal{L}_-^{\uparrow}$ e $\mathcal{L}_-^{\downarrow}$ - não são grupos, o que pode ser visto imediamente pelo fato de não conterem a identidade.

Este pode ser um resultado aparentemente inútil. Por que estaríamos interessados se o grupo de Lorentz é ou não um grupo?

A primeira implicação que o teorema nos fornece é que a composição de boosts[2] de Lorentz é também um boost de Lorentz. Com um pouco de álgebra, pode-se mostrar que

$$\begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta(v)\gamma(v) \\ -\beta(v)\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) & -\beta(u)\gamma(u) \\ -\beta(u)\gamma(u) & \gamma(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}) & -\beta(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}})\gamma(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}) \\ -\beta(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}})\gamma(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}) & \gamma(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(v)\Lambda(u) = \Lambda\left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right). \tag{50}$$

Isto pode parecer um resultado tolo, mas garanto-lhe que não é. Na verdade, ao considerarmos os boosts de Lorentz em 4 (*id est*, 3+1) dimensões, este resultado falha e a composição de boosts de Lorentz não precisa mais ser um boost. A forma mais geral de um elemento do grupo de Lorentz em 3+1 dimensões é uma rotação, seguida por um boost, seguido por outra rotação. A álgebra abstrata nos garantiu a confiança de que poderíamos obter a lei de composição de velocidades em relatividade, Eq. (50), antes de precisarmos nos aventurar às cegas nos cálculos necessários para a obter.

A seguir, a teoria de grupos também nos garante a existência de um, e apenas um, boost igual à identidade. O Teorema 4 garante que $\mathbb{1} \in \mathcal{L}$, e o teorema a seguir garante a unicidade desta identidade.

Teorema 6:
Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Existe um único elemento $e \in G$ satisfazendo $e \cdot g = g \cdot e = g, \forall g \in G$. □

Definição 7:
Suponha que e e e^* sejam elementos de G com $e \cdot g = g \cdot e = g$ e $e^* \cdot g = g \cdot e^* = g, \forall g \in G$. Então

$$\begin{aligned} e &= e \cdot e^*, \\ &= e^*, \end{aligned} \tag{51}$$

o que prova a unicidade da identidade de qualquer grupo. ♠

Note que esta identidade é $\Lambda(0)$, a transformação de Lorentz com $v = 0$ e sem inversões de paridade ou reversões temporais. O fato de que este elemento é a identidade pode ser verificado através do uso da regra de composição de velocidades, Eq. (50), e do Teorema 2.

De maneira semelhante, temos ainda a garantia de que todo boost admite um boost inverso. Além disso, temos a segurança de que tal boost é único, devido ao seguinte teorema.

Teorema 8:
Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e $g \in G$. Existe um único elemento $g^{-1} \in G$ satisfazendo $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$. □

[2] O nome dado a uma transformação de referencial entre referenciais com velocidades distintas cujas origens no espaço-tempo coincidem é *boost*.

Demonstração:
Sejam g^{-1} e g^* elementos de G com $g^{-1}\cdot g = g\cdot g^{-1} = e$ e $g^*\cdot g = g\cdot g^* = e$. Então

$$\begin{aligned} g^{-1} &= g^{-1}\cdot e,\\ &= g^{-1}\cdot(g\cdot g^*),\\ &= (g^{-1}\cdot g)\cdot g^*,\\ &= g^*, \end{aligned} \tag{52}$$

provando a tese. ■

Como pode ser visto pela regra de composição de velocidade, o inverso de todo elemento do grupo de Lorentz próprio ortócrono $\Lambda(v)$ é $\Lambda(-v)$. O resultado anterior nos garante que este inverso é único. Os inversos para os outros elementos do grupo de Lorentz podem ser obtidos pela regra de composição de velocidades e pelo Teorema 2.

A relevância física deste resultado é o fato de que toda transformação de referencial pode ser invertida. Se sabemos como mudar do referencial S para S', automaticamente sabemos como mudar de S' para S, e existe uma única maneira de o fazer. Além disso, o resultado é evidência de que estamos em acordo com o nosso tão prezado Princípio de Relatividade, pois as leis de transformação de S para S' são as mesmas de S' para S (se S' se move a uma velocidade v com relação a S, então S se move a uma velocidade $-v$ com relação a S').

V. CONTRAÇÃO DO ESPAÇO E DILATAÇÃO DO TEMPO

Construída a teoria, brinquemos um pouco com suas consequências físicas.

Consideremos um trem (como é comum em Relatividade Restrita) de comprimento L se movendo no referencial S com velocidade v. Como o trem é um corpo extenso, para descrever o seu movimento precisamos especificar a posição da frente e do fundo do trem a cada instante. Convencionaremos que o fundo do trem estava na origem no instante $t = 0$, de forma que a frente do trem se move segundo a lei $x_1(ct) = L + vt$ e o fundo se move segundo $x_2(ct) = vt$. Esta pode parecer uma pergunta tola, mas qual o comprimento do trem num referencial S' que se move com velocidade u em relação a S?

Como não estamos lidando com trocas de paridade ou reversões temporais, basta utilizarmos as transformações de Lorentz. Temos que

$$\begin{cases} ct_1' = \gamma(u)ct - \beta(u)\gamma(u)x_1, \\ x_1' = \gamma(u)x_1 - \beta(u)\gamma(u)ct, \end{cases} \quad \begin{cases} ct_2' = \gamma(u)ct - \beta(u)\gamma(u)x_2, \\ x_2' = \gamma(u)x_2 - \beta(u)\gamma(u)ct. \end{cases} \tag{53}$$

Ao substituir as expressões para $x_1(ct)$ e $x_2(ct)$ temos que

$$\begin{cases} ct_1' = \gamma(u)ct - \beta(u)\gamma(u)L - \beta(u)\beta(v)\gamma(u)ct, \\ x_1' = \gamma(u)L + \beta(v)\gamma(u)ct - \beta(u)\gamma(u)ct, \end{cases} \quad \begin{cases} ct_2' = \gamma(u)ct - \beta(u)\beta(v)\gamma(u)ct, \\ x_1' = \beta(v)\gamma(u)ct - \beta(u)\gamma(u)ct. \end{cases} \tag{54}$$

Perceba que, embora os eventos (ct, x_1) e (ct, x_2) sejam simultâneos em S, eles ocorrem em instantes distintos em S'. A simultaneidade é uma propriedade dependente do referencial em que estamos, agora que o tempo não é mais um conceito absoluto.

Isto complica nossa tarefa de calcular o comprimento do trem. Ao medir o comprimento de qualquer objeto, precisamos tomar a medida num único instante. Mesmo em Mecânica Clássica esta noção aparece: se medimos a posição do fundo do trem em um instante e a posição da frente do trem em outro, o trem pode se mover neste intervalo e tempo e não teremos uma medição acurada. Logo, precisamos calcular a posição da frente e do fundo do trem num mesmo instante no referencial S' para podermos calcular seu comprimento.

Um meio de se fazer isso é usando o sistema de equações anterior para escrever t em termos de t_2'. Podemos então substituir t na expressão para x_2' e obter a equação horária do fundo do trem no referencial S'. Sabendo a posição do fundo do trem em todo instante, basta analisarmos sua posição em t_1' e calcular $L' = x_1'(ct_1') - x_2'(ct_2')$.

Invertendo a expressão para ct'_2, temos

$$ct = \frac{ct'_2}{\gamma(u) - \beta(v)\beta(u)\gamma(u)}. \tag{55}$$

Substituindo na expressão para x'_2, segue

$$\begin{aligned} x'_2(ct'_2) &= \gamma(u)\left(\beta(v) - \beta(u)\right) ct, \\ &= \frac{\beta(v) - \beta(u)}{1 - \beta(v)\beta(u)} ct'_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Impondo $ct'_2 = ct'_1 = \gamma(u)\left(1 - \beta(u)\beta(v)\right) ct - \beta(u)\gamma(u)L$, obtemos

$$x'_2(ct'_1) = \frac{\beta(v) - \beta(u)}{1 - \beta(v)\beta(u)}\gamma(u)\left(1 - \beta(u)\beta(v)\right) ct - \frac{\beta(v) - \beta(u)}{1 - \beta(v)\beta(u)}\beta(u)\gamma(u)L. \tag{57}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L' &= x'_1(ct'_1) - x'_2(ct'_1), \\ &= \gamma(u)L + \left(\beta(v) - \beta(u)\right)\gamma(u)ct - \left(\beta(v) - \beta(u)\right)\gamma(u)ct + \frac{\beta(v) - \beta(u)}{1 - \beta(v)\beta(u)}\beta(u)\gamma(u)L, \\ &= \left(1 + \frac{(v-u)u}{c^2 - uv}\right)\gamma(u)L, \\ &= \frac{c^2 - uv + vu - u^2}{c^2 - uv}\gamma(u)L, \\ &= \frac{c^2 - u^2}{c^2 - uv}\gamma(u)L. \end{aligned} \tag{58}$$

No caso $v = 0$, o trem está em repouso no referencial S e temos

$$\begin{aligned} L' &= \frac{c^2 - u^2}{c^2}\frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}}L, \\ &= \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}L, \\ &= \frac{1}{\gamma(u)}L. \end{aligned} \tag{59}$$

Como $\gamma(u) \geqslant 1$, vemos que o trem é mais curto quando o medimos em um referencial no qual ele se move. Este fenômeno é chamado de *contração dos comprimentos*.

Note que isto não é um efeito óptico ou apenas um resultado teórico: é uma propriedade real do Universo em que vivemos. Corpos em movimento são mais curtos do que seriam em repouso, e este é o nosso Universo.

Analisemos agora um segundo experimento semelhante. Suponha que no referencial S de repouso de um certo semáforo, a luz verde acendeu no instante t_1 e a vermelha se acendeu T instantes de tempo depois, no instante $t_2 = t_1 + T$. Novamente, por mais boba que possa parecer a pergunta, queremos saber quanto tempo demora para que a luz do semáforo fique vermelha no referencial S' de um motorista se movendo a velocidade u.

Por simplicidade, tomemos a origem dos espaços no referencial S como sendo o próprio semáforo. As transformações de Lorentz nos fornecem que

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(u)ct_1, \\ x'_1 = -\beta(u)\gamma(u)ct_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(u)ct_2, \\ x'_2 = -\beta(u)\gamma(u)ct_2. \end{cases} \tag{60}$$

Como $t_2 = T + t_1$, temos que

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(u)ct_1, \\ x'_1 = -\beta(u)\gamma(u)ct_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(u)cT + \gamma(u)ct_1, \\ x'_2 = -\beta(u)\gamma(u)cT - \beta(u)\gamma(u)ct_1. \end{cases} \tag{61}$$

Nos deparamos agora com um problema semelhante ao que enfrentamos ao calcular o comprimento do trem: devido à relatividade do espaço e do tempo, para medir quanto tempo se passa entre dois eventos é preciso que estejamos mantendo uma posição fixa.

No entanto, desta vez, estamos no referencial do motorista que olha o semáforo. Estamos no referencial S' observando como o tempo se passa no referencial S. Portanto, devemos tomar a medida do tempo com o relógio fixado no referencial S.

Em outras palavras, imagine que há um relógio fixado em cima do semáforo. A pergunta que estamos fazendo não é quanto tempo marca o relógio do motorista entre o sinal se tornar verde e o sinal se tornar vermelho. A pergunta que fazemos é quanto tempo marca o relógio do semáforo entre estes dois eventos. A resposta é obtida simplesmente tomando os valores de ct_2' e ct_1' calculados anteriormente e os subtraindo:

$$\begin{aligned} cT' &= ct_2' - ct_1', \\ &= \gamma(u)cT + \gamma(u)ct_1 - \gamma(u)ct_1, \\ &= \gamma(u)cT. \end{aligned} \tag{62}$$

O semáforo demora mais tempo para se tornar vermelho quando observado do referencial do motorista (pois $\gamma(u) \geqslant 1$).

Como $\gamma(u)$ é crescente em u para $u \geqslant 0$ e tende a infinito para $u \to c$, quanto mais rápido estiver o motorista, mais tempo demora para o sinal ficar vermelho[3].

O conteúdo físico deste resultado é que relógios em movimento funcionam mais devagar. É importantíssimo ressaltar que isto não se deve ao mecanismo do relógio, a uma ilusão de óptica ou qualquer efeito semelhante: é assim que o próprio tempo funciona. Uma propriedade natural do Universo.

VI. CONCLUSÕES

Por fim, devo fazer dois comentários. Um acerca da Física Matemática em si e outro acerca da Relatividade Restrita.

O propósito da Física Matemática é não apenas formalizar os estudos comuns em Física Teórica, os colocando em base matemática apropriada, mas também, segundo Faddeev[4]:

> Eu considero como o principal objetivo da física matemática [(FM)] o uso da intuição matemática para a dedução de resultados realmente novos na física fundamental. Neste sentido, FM e Física Teórica são competidoras. Seus objetivos em investigar as leis da estrutura da matéria coincidem. Entretanto, os métodos e mesmo as estimativas de importância dos resultados do trabalho podem diferir significativamente.

Naturalmente, este é o espírito que guiou o significado atribuído a "Física Matemática" durante a escrita deste trabalho. Nos propusemos a desenvolver princípios de uma teoria física, a Teoria da Relatividade Restrita, com base em fundamentos matemáticos sólidos. No entanto, sendo este pensado como um primeiro contato com a Física Matemática, é necessário notar que foram abertas algumas exceções por onde deixou-se a falta de rigor passar. Tive o objetivo de mostrar como teoremas rigorosos podem ser úteis na formulação de teorias físicas, e, sendo eu autor, não tenho como saber se tive sucesso. Em particular, é uma árdua tarefa exemplificar o papel da Física Matemática na ausência de ferramentas mais complexas, como a Topologia e a Análise Funcional. Como este trabalho é destinado a ingressantes, mesmo derivadas precisavam ser evitadas e poucas explorações se mostraram possíveis.

Quanto à Relatividade Restrita, digo que ela é provavelmente um dos primeiros contatos de todo estudante com o fato de que o Universo é muito mais do que vemos. Não é difícil olhar para os resultados teóricos e se perguntar se aquilo é mesmo verdade. Como é possível que o tempo desacelere num referencial em movimento? Este espanto é semelhante ao causado pelos primeiros contatos com a Mecânica Quântica, em que se descobre que as partículas quânticas se comportam de maneira muito diferente do que encontramos no mundo macroscópico.

---

[3] É válido mencionar que, na época da escrita deste trabalho, o autor não estava habilitado a dirigir.

Lida-se com os estranhos princípios de incerteza, superposições de estados, emaranhamentos e diversos outros efeitos inesperados.

Cito, talvez de forma incorreta por falhas de memória, algo que dito por Allan Adams em uma das aulas de[1]: "O surpreendente não é que um elétron se comporta como um elétron, mas sim que 10^{23} elétrons se comportam como queijo!". O mundo em que vivemos é consequência dos estranhos mundos quânticos e relativísticos que tão estranhos nos parecem, e nossa sensação de surpresa e incompreensão é mera consequência da nossa pequeneza quando comparados ao esplendor do nosso Universo.

A dilatação do tempo e a contração do espaço podem lhe parecer absurdos, mas o Universo não liga para o que você acha absurdo. Isso não por arrogância ou maldade por conta da Natureza, mas sim por sua beleza e esplendor. Nas palavras de Einstein,

> Subtle is the Lord, but malicious He is not.

REFERÊNCIAS

[1]A. Adams, M. Evans, and B. Zwiebach. Quantum Physics I, 2013. URL https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-04-quantum-physics-i-spring-2013/. (recorded course).
[2]J. C. A. Barata. Notas de Física-Matemática, 2020. URL http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/notas_de_aula.html.
[3]V. Chabu. Física Matemática: a teoria das teorias, 2018. URL http://fma.if.usp.br/~nickolas/rt/2018/Chabu2018.pdf.
[4]L. Faddeev. Modern Mathematical Physics: what it should be?, 2000.
[5]D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.