

Tópicos em Sistemas

Quânticos Abertos

Diogo O. S. Pinto

XIII Escola do CBPF

Notas por
Nicholas Alves

2022

Sistemas Quânticos Abertos

O sistema de nosso interesse é uma parte de um sistema maior. Não estamos interessados em todos os graus de liberdade, nem tanas acesso a todos eles.

Operador Densidade

Micro-estados (estados puros):

Preparado de modo ideal (conhecendo completamente)

Macro-estados:

representando-se, em escala micronóptica, de um sistema que foi preparado sob as mesmas condições físicas. Não é completamente conhecido, não é idealmente preparado. Só podemos atribuir uma probabilidade de que ele seja descrito por um ou outro micro-estado

↳ mistura estatística

É um conjunto de micro-estados $|z_i\rangle$ com respectivas probabilidades de ocorrência p_i

As probabilidades são positivas e normalizadas

$$\sum_{\lambda} P_{\lambda} = 1, \quad P_{\lambda} \geq 0$$

Os microestados são normalizados, mas não necessariamente ortogonais.

Macroestados: representados por uma mistura estatística de microestados $|E_{\lambda}\rangle$ com probabilidades P_{λ}

↳ precisões de um "operador médio" para descrever o sistema

↳ operador densidade

Operador Densidade de Estados Puros

Sistema descrito por um estado bem definido ou puro. Vídeo de estado:

$$|E\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad \text{base orthonormal}$$

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \text{ para normalização}$$

Seja A observável com elementos de hermitianos

$$\langle n | A | m \rangle = A_{nm}$$

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m A_{nm}$$

Portanto,

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

$$= \sum_n \langle \psi | A | n \rangle \times_{\psi} \langle n | \psi \rangle$$

$$= \sum_n \langle n | \psi \rangle \times_{\psi} \langle \psi | A | n \rangle$$

$$= \text{Tr} [|\psi\rangle \times_{\psi} |\psi\rangle A] \quad \varphi \equiv |\psi\rangle \times_{\psi} |\psi\rangle$$

$$= \text{Tr} [\varphi A] \quad \begin{matrix} \text{operador/matriz} \\ \text{dissipade} \end{matrix}$$

Nas bases $|n\rangle$,

$$\langle n | \varphi | m \rangle = \langle n | \psi \times_{\psi} |\psi\rangle A | m \rangle$$

$$= c_n c_m^*$$

φ carrega toda a informação sobre o sistema e pode ser usada para calcular tudo que se pode calcular com $|\psi\rangle$

Propriedades

- $\sum_n |c_{nl}|^2 = \sum_n p_{nn} = \text{Tr}[P] = 1$
 - $P = P^\dagger$
 - $P \geq 0$
- Estado puro:
 $P^2 = P$
 $\text{Tr}[P^2] = 1$

Operador Densidade de Estados Mistos

Macrossistato: mistura de microestados $|z_\lambda\rangle$ com prob. P_λ

↳ Logaritmo P_λ ocupa o estado $|z_\lambda\rangle$

P_λ é um dado logaritmo, o valor esperado de A é $\langle z_\lambda | A | z_\lambda \rangle$. Para o macroestato completo, o valor médio há de ser

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_\lambda P_\lambda \langle z_\lambda | A | z_\lambda \rangle \\ &= \sum_{\lambda, n} P_\lambda \langle z_\lambda | A | n \times n | z_\lambda \rangle \\ &= \sum_{\lambda, n} P_\lambda \langle n | z_\lambda \times z_\lambda | A | n \rangle \\ &= \text{Tr} \left[\sum_\lambda P_\lambda |z_\lambda \times z_\lambda| A \right]\end{aligned}$$

$$= \text{Tr}[P A] \quad \leftarrow \quad P = \sum_\lambda P_\lambda |z_\lambda \times z_\lambda|$$

↳ macroestato é associado ao operador de densidade

Propriedades

- $\text{Tr}[\rho] = \text{Tr} \left[\sum_{\lambda} p_{\lambda} |\psi_{\lambda} \rangle \langle \psi_{\lambda}| \right]$

$$= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \text{Tr} [|\psi_{\lambda} \rangle \langle \psi_{\lambda}|]$$

$$= \sum_{\lambda} p_{\lambda}$$

$$= 1$$

- Se $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \langle \varphi | \psi_{\lambda} \rangle \langle \psi_{\lambda} | \varphi \rangle$$

$$= \sum_{\lambda} p_{\lambda} |\langle \varphi | \psi_{\lambda} \rangle|^2$$

≥ 0 \hookrightarrow positivo semi-definido

- ρ é hermitiano

Se tivermos um ρ com estas propriedades, ele é diagonalizável com autovalores reais, não negativos e que somam 1. Podemos escrevê-lo em sua base de autovalores como

$$\rho = \sum_m p_m |m\rangle \langle m|$$

Note que os p_m podem ser interpretados
imediatamente como a probabilidade associada
ao estado puro $|m\rangle$.

Na decomposição espacial, os estados puros $|m\rangle$ são orthonormais, mas no caso geral os $|\psi_\lambda\rangle$ são apenas normalizados.

Para estados puros, $\text{Tr } \rho^2 = 1$. Para mistos,

$$\text{Tr } \rho^2 = \text{Tr} \left[\sum_{\lambda, \mu} p_\lambda p_\mu |\lambda \times \lambda| |\mu \times \mu| \right] \xrightarrow{\text{na base}} \text{esperado}$$

$$= \text{Tr} \left[\sum_\lambda p_\lambda^2 |\lambda \times \lambda| \right]$$

$$= \sum_\lambda p_\lambda^2$$

maximamente misturado

$$\leq 1$$

Para $\rho = \frac{1}{d} I$ ($d = \dim \mathcal{H}$),

$$\text{Tr } \rho^2 = \sum_{i=1}^d \frac{1}{d}^2 = \frac{1}{d}$$

Logo, $\frac{1}{d} \leq \text{Tr } \rho^2 \leq 1$ mede a pureza do sistema

Esteira de Bloch \rightarrow caso de um q-bit

Matriz 2×2 mais fácil possível:

$$P = \alpha (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad \rightarrow \text{Tr } P = 0$$

Como queremos $\text{Tr } P = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Logo

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & 1 - r_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Tr } P} \frac{1}{2} \left[(\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) \right] = \frac{\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{s}}{2}$$

Como $\frac{1}{2} \leq \text{Tr } P^2 \leq 1$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\|\vec{r}\|^2}{2} \leq 1$$

$$0 \leq \|\vec{r}\|^2 \leq 1$$

↳ estira com razão variando entre 0 e 1

Deixa logo, podemos visualizar os possíveis estados de um q-bit

sistema de dois níveis

Operador Densidade de um Subsistema

Dado um sistema total $A + B$, queremos eliminar B para levar operadores em A , ou seja, sistemas interessados

Suponha que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{total}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

base
base
 \mathcal{H}_B

posto lado

Elementos da matriz densidade: $\langle h_a l_b | \rho | h'_a l'_b \rangle$.

Dados os vários observáveis C , os que descrevem interações operadoras sobre o sistema A são da forma

$$C_A \otimes \mathbb{I}_B$$

com valores esperados dados por

$$\langle C_A \rangle = \text{Tr} [\rho (C_A \otimes \mathbb{I}_B)]$$

$$= \sum_{\substack{h_a, h'_a \\ l_a, l'_a}} \langle h_a l_b | \rho | h'_a l'_b \rangle \langle h'_a l'_b | C_A \otimes \mathbb{I}_B | h_a l_b \rangle$$

$$= \sum_{h_a, l_b} \langle h_a l_b | \rho | h'_a l_b \rangle \langle h_a l_b | C_A | h'_a l_b \rangle$$

Podemos clinic

$$\langle h_a | \varphi_A | h_a' \rangle = \sum_{l_b} \langle h_a l_b | p | h_a' l_b \rangle$$

o., de modo independante da base,

Taxers on $\overline{f_0}$

$$\langle \varrho_a \rangle = \text{Tr} [\rho (\varrho_a \otimes \mathbb{1}_B)],$$

$$= \text{Tr} [\rho_A \varrho_A].$$

↳ não é preciso usar H inteiro

Poderes baixos over abacaxi com material caro
mais rigorosa.

Espaço de Hilbert ↗

Definición de producto interno

Espacio de Hilbert ↗

Exemplos: \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n . Em dimensão finita, qualquer espaço de Hilbert é isomórfico a eles.

Matrices complexes $n \times m$, $\mathbb{C}^{n \times m}$, com produtos
intervos

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr} [A^* B]$$

Notações de Dirac

$|1\rangle$ (ket) é um vetor. $|1\rangle, |q\rangle \in \mathcal{H}$. Base usual (computacional) de \mathbb{C}^d : $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |d-1\rangle$. Para $d=2$ (qubit),

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O espaço dual, \mathcal{H}^* , do espaço de Hilbert \mathcal{H} é definido como o conjunto de funcionais lineares em \mathcal{H} .

Funções lineares $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ → corpo sobre qual \mathcal{H} é definido

Para um vetor $|x\rangle \in \mathcal{H}$, $f_x: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_x(|y\rangle) = \langle x|y\rangle$ é um funcional linear.

↳ por consequência, droitores f_x simplesmente por $\langle x|$ (bra)

↳ \mathcal{H}^* é banado por vetores bra

Exemplos:

i. Dual de \mathbb{C}^2 :

$$\langle 0 | = (1, 0)$$

$$\langle 1 | = (0, 1)$$

conjunto complexo

ii. Dual de \mathbb{C}^d

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{d-1} c_n |n\rangle \mapsto \langle z | = \sum_{n=0}^{d-1} \bar{c}_n \langle n |$$

Observação:

$$\langle \psi | A | \varphi \rangle = \langle \psi | A \varphi \rangle \text{ para } A \text{ transformações lineares}$$

Soma Direta de Espaços de Hilbert

Dados subespaços M e N de \mathcal{H} , dizemos que \mathcal{H} é soma direta de M e N (escreve-se $\mathcal{H} = M \oplus N$), se

$$\mathcal{H} = M + N, \quad M \cap N = \{0\}.$$



$$\dim \mathcal{H} = \dim M + \dim N$$

onde \dim é o

um esp. de Hilbert

Produto Tensorial de Espaços de Hilbert ^{a partir da definição}

Sejam \mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B espaços de Hilbert com

$\dim \mathcal{H}^A = d_A$, $\dim \mathcal{H}^B = d_B$, ambas finitas. Existe uma forma bilinear \otimes que leva dois vetores $|f\rangle \in \mathcal{H}^A$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^B$ a um elemento da forma

$$|f\rangle \otimes |\varphi\rangle = |f, \varphi\rangle.$$

Se $|n_A\rangle \in \text{Im}_A$ e $|m_B\rangle \in \text{Im}_B$ são bases orthonormais de \mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B , então

$$\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B = \left\{ \sum_{n,m} m_{nm} |n_A\rangle \otimes |m_B\rangle, \quad m_{n,m} \in \mathbb{F} \right\}$$

$\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ é um espaço de Hilbert com base orthonormal dada por $|n_A\rangle \otimes |m_B\rangle$ e $\dim(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B) = \dim \mathcal{H}^A \times \dim \mathcal{H}^B$.

Dados

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,m} \psi_{nm} |n_A\rangle \otimes |m_B\rangle,$$

$$|\varphi^{AB}\rangle = \sum_{n,m} \varphi_{nm} |n_A\rangle \otimes |m_B\rangle,$$

- o produto interno é dado por $\langle \psi^{AB} | \varphi^{AB} \rangle = \text{Tr} [\psi^* \varphi]$

$$\psi \equiv (\psi_{nm})$$

Produto Tensorial de Kronecker

Como todos os esp. de Hilbert em dimensão finita são isomórfos a \mathbb{C}^n , podemos fazer a correspondência

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |n_A\rangle \mapsto \vec{a} = (a_1, \dots, a_{d_A})^T \in \mathbb{C}^{d_A}$$

$$|\varphi\rangle = \sum_m b_m |m_B\rangle \mapsto \vec{b} = (b_1, \dots, b_{d_B})^T \in \mathbb{C}^{d_B}$$

Para um produto tensorial,

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \sum_{n,m} a_n b_m |n_A\rangle \otimes |m_B\rangle \mapsto \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{a}, \vec{b} \\ \vdots \\ \vec{a}_{d_A}, \vec{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d_A d_B}$$

Para matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ tem-se

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq}$$

Dados $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definir a soma de Kronecker \oplus

$$A \oplus B = A \otimes \mathbb{1}_n + \mathbb{1}_m \otimes B$$

$$\hookrightarrow e^{A \oplus B} = e^A \otimes e^B$$

Operaciones Lineales e Estados Quânticos

$\underline{\mathcal{Q}}: \mathcal{H}^A \rightarrow \mathcal{H}^B$ é linear se e

$$\underline{\mathcal{Q}}(\lvert \psi \rangle + \lambda \lvert \varphi \rangle) = \underline{\mathcal{Q}}\lvert \psi \rangle + \lambda \underline{\mathcal{Q}}\lvert \varphi \rangle$$

$\forall \lvert \psi \rangle, \lvert \varphi \rangle \in \mathcal{H}^A, \forall \lambda \in \mathbb{F}$.

Se $\lvert n_A \rangle$ e $\lvert m_B \rangle$ são bases de \mathcal{H}^A e \mathcal{H}^B , podemos representar $\underline{\mathcal{Q}}$ por meio de uma matriz.

$$\underline{\mathcal{Q}} = \sum_{n,m} \lvert m_B \rangle \underbrace{\langle n_A \lvert}_{\underline{Q}_{mn}} \underline{\mathcal{Q}} \lvert n_A \rangle \lvert m_B \rangle = \sum_{n,m} \underline{Q}_{mn} \lvert m_B \rangle \lvert n_A \rangle$$

Obs: diferentes bases fornecem diferentes matrizes $\underline{\Omega}_{mn}$ representando o mesmo operador $\underline{\Omega}$

Adjunto

Se $\underline{\Omega}: \mathcal{H}^A \rightarrow \mathcal{H}^B$, seu adjunto $\underline{\Omega}^*: \mathcal{H}^B \rightarrow \mathcal{H}^A$ é

Def. per

ou $\underline{\Omega}^+$

$\boxed{\underline{\Omega}^*}$

$\underline{\Omega}^*: \mathcal{H}^B \rightarrow \mathcal{H}^A$

$$\langle 2 | \underline{\Omega} \varphi \rangle_{\mathcal{H}_B}$$

$$\underline{\Omega}^* = \sum_{n,m} \overline{\underline{\Omega}_{mn}} | n_A \times m_B \rangle = \langle \underline{\Omega}^* | \varphi \rangle_{\mathcal{H}_A}$$

Hermitianos

$H: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é dito hermitiano se $H = H^*$.

↳ sempre admite decomposição espectral

$$H = \sum_{n=0}^{\dim \mathcal{H}} \underbrace{\epsilon_n}_{\text{real}} \underbrace{| n \rangle \langle n |}_{\text{base orthonormal de } \mathcal{H}}$$

Positivo Semidefinito

Dizemos que um operador hermitiano é positivo semi-definido e escrevemos $f \geq 0$ se seus autovalores são não-negativos

↳ escrevemos $f \geq \sigma \Leftrightarrow f - \sigma \geq 0$

Exemplo:

$\hat{1}$ é um operador positivo \rightarrow todos os autovalores são ≥ 0

$$\hat{1} = \sum_n \ln X_n$$

Estado Quântico

Um operador positivo semi-definido pôde ser um estado quântico ou uma matriz densidade se $\text{Tr } \rho = 1$. Seus autovalores p_i representam as componentes de uma distribuição de probabilidade.

Um estado quântico pôde fôco se seu rank for $\text{rank}(\rho) = 1$, i.e., os span colunas de ρ

Estados puros são projetados em subespaços unidimensionais de \mathcal{H}

Os vetores normalizados para o qual ocorre a projeção é também chamado de estado quântico

Obs.: nota que um estado quântico é puro se $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho)$

Tipicamente tratamos estados puras via $|q_1\rangle\langle q_1|$,
 1-4) sendo um vetor normalizado em \mathcal{H} .

Toda coleção de vetores normalizados $|q_\lambda\rangle\langle q_\lambda|$
 juntamente com uma distribuição de probabilidades p_λ
 é chamada de ensemble de estados. Para todo ensemble
 de estados, há um estado quântico definido por

$$\rho = \sum_\lambda p_\lambda |q_\lambda\rangle\langle q_\lambda|$$

↳ não necessariamente a decomposição
 espectral, já que os $|q_\lambda\rangle$ não precisam
 ser ortogonais

O Espaço de Operadores Lineares

$B(\mathcal{H}^A, \mathcal{H}^B)$ é o espaço de \mathcal{H} ; isto é, os
 operadores lineares $T: \mathcal{H}^A \rightarrow \mathcal{H}^B$. Isomórfico a
 $C^{d_A d_B}$ com produto interno

$$\langle M | N \rangle = \text{Tr}[M^* N], \quad \forall M, N \in B(\mathcal{H}^A, \mathcal{H}^B)$$

A base de $B(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ é dada
 por $|m_B \times n_A\rangle$, onde $|m_A\rangle \in \mathcal{H}^A$ e

Obs:
 $B(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$

$|m_B\rangle \in \mathcal{H}^B$ são bases. $\dim \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B) = d_A d_B$

Espaço para operadores hermitianos em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

$\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

$\hookrightarrow H \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) \Leftrightarrow H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ e } H = H^\dagger$

Medidas de Distância

Conjunto de todos os estados em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: $\mathcal{D}(\mathcal{H})$

$\hookrightarrow \rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \rho \geq 0, \text{Tr } \rho = 1$

Dois distâncias comumente usadas para distinguir estados em $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ são a distância trace e a fidelidade.

Norma Trace

Dado: norma ou norma trace $\|\cdot\|_1: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\|X\|_1 = \text{Tr}(|X|) \quad |X| = \sqrt{X^* X}$$

\hookrightarrow para H hermitiano, \rightarrow autovalores

$$\|H\|_1 = \sum_n |\lambda_n|$$

Distância Troso

A distância troso entre dois estados $\rho, \sigma \in D(H)$ é definida por

$$\rho, \sigma \in D(H) \text{ e } \text{definida por}$$

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|$$

↳ normalização. $D(\rho, \sigma) = 1$ (máx)
para ρ e σ ortogonais

Teorema

Sejam \vec{p} e \vec{q} dois vetores de probabilidade e $(p_i)_{i=0}^{n-1}$ e $(\sigma_i)_{i=0}^{n-1}$ os conjuntos de matrizes que dão ρ e σ em $D(H)$. Então

$$D\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i \rho_i, \sum_{i=0}^{n-1} q_i \sigma_i\right) \leq D(\vec{p}, \vec{q}) + \sum_{i=0}^{n-1} p_i D(\rho_i, \sigma_i)$$

↳ $D(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |p_i - q_i|$

Para $\rho, \sigma \in D(H)$ definimos

$$F(\rho, \sigma) = \|\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma}\|_1 = \text{Tr} \left[|\sqrt{\rho} \sqrt{\sigma}| \right] = \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\sigma} \rho \sqrt{\sigma}} \right]$$

↳ se $\rho = |+\rangle\langle +|$ e $\sigma = |\psi\rangle\langle\psi|$, $F(\rho, \sigma) = |\langle +|\psi\rangle|$

Tecena

Sejam \vec{p} e \vec{q} dois vetores de probabilidade e $(p_i)_{i=0}^{n-1}$ e $(\sigma_i)_{i=0}^{n-1}$ os conjuntos de matrizas desse em $\mathcal{D}(H)$. Então

$$F\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i p_i, \sum_{i=0}^{n-1} q_i \sigma_i\right) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_i q_i} F(p_i, \sigma_i).$$

Em particular,

$$F\left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i p_i, \sum_{i=0}^{n-1} p_i \sigma_i\right) \geq \sum_{i=0}^{n-1} p_i F(p_i, \sigma_i).$$

buscar Quantum Channels & Operations: Guided Tour
Michael M. Wolf

Canais Quânticos

Como podemos definir evoluções quânticas, ou dinâmicas quânticas, para um sistema aberto?

Exigência:

evolução linear que preserva as estados quânticos

$$\rho \in \mathcal{B}(H), \rho^+ = \rho, \rho \geq 0, \text{Tr}[\rho] = 1$$

Transformações de superoperadores que preservam hermiticidade, positividade e trago.

Canais Quânticos \hookrightarrow ou mapas geômetras

↳ descrição mais geral da evolução quântica

Representações desses mapas: Choi, Kraus, Stinespring

Ferramentas úteis para Superoperadores em Geral

Do invés de lidar com mapas $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H})$,
vamos lidar com $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

Superoperadores $\mathcal{E}: \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ (acto)

antes da \Downarrow evolução

após a \Uparrow evolução

Entrada $\xrightarrow{\quad}$ Espaço de saída

Observação:

mapas em $\mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ podem ser produzidos a partir de mapas em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ com o auxílio de tramas passivas e ancillas ↗ arXiv:1705.06768

Representação de Choi → matriz de Choi

$$\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \Rightarrow \Lambda_{\mathcal{E}} \equiv (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \mathcal{E})(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})$$

ponto de $\Lambda_{\mathcal{E}}$ é ↗ chamado de Choi rank

$|Q\rangle$: estado maximamente enraizado (não-normalizado) em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$

$$|Q\rangle = \sum_n |n, n\rangle$$

Percoba que

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \varepsilon)(|Q\rangle \langle Q|) \\ &= (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{n,m} |n, n\rangle \langle m, m| \right) \\ &= \sum_{n,m} \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} |n\rangle \langle m| \otimes \varepsilon(|n\rangle \langle m|) \\ &= \sum_{n,m} |n\rangle \langle m| \otimes \varepsilon(|n\rangle \langle m|) \end{aligned}$$

Obs.: Vetorialização de um operador

Seja $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ dado por

$$A = \sum_{n,m} A_{nm} |n\rangle \langle m| \xrightarrow{\text{vetorializar}} |A\rangle = \sum_{n,m} A_{n,m} |m, n\rangle \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$$

mechanical transformation *transformação*
 $|n\rangle \langle m| \rightarrow |m\rangle \otimes |n\rangle$

Todo vetor

$$|A\rangle \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$$

corresponde a um operador

$$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

\hookrightarrow "empilha" os colunas de \$A\$ uma sobre a outra para formar um vetor

Considerando

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} = \sum_n |n\rangle \langle n| \Rightarrow |\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}\rangle \langle \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}| = \sum_n |n, n\rangle \langle n, n| = |\Omega\rangle \langle \Omega|$$

A matriz de Choi pode ser escrita como

$$\Lambda_E = (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \mathcal{E}) (|\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}\rangle \langle \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}|)$$

Tomar a matriz de Choi - um isomorfismo entre

$$\mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \leftarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \rightarrow \text{operadores lineares}$$

superoperadores

lineares

e é conhecido como isomorfismo de Choi-Jamiołkowski.

Teorema

O mapeamento

$$\mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

$$\mathcal{E} \mapsto \Lambda_E = (\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \mathcal{E}) (|\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}\rangle \langle \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}|)$$

\mathcal{E} um isomorfismo com inversa dada por

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \rightarrow \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

$$\Lambda_E \mapsto \mathcal{E}(p) = \text{Tr}_2 \left[(p^\top \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}) \Lambda_E \right]$$

onde $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ e p^\top é a transposta de p .

Representações de Kraus

Todo $\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ admite uma representação de Kraus

$$\epsilon(p) = \sum_i^r A_i p B_i^+$$

(choi rank)

operadores de Kraus

O menor número de operadores de Kraus diferentes é chamado de "Kraus rank" e é igual ao Choi rank Lema de Choi, portanto, o "Choi-Kraus rank"

Importante: a representação de Kraus não é única

Representações de Stinespring

Existe um espaço de Hilbert \mathcal{F} tal que

$$\epsilon(p) = \text{Tr}_{\mathcal{F}} (A p B^+)$$

para $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{F})$

Teorema

Todo $\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ admite uma representação de Stinespring

Proposição

Dada uma representação de Kraus de $\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$,

$$\epsilon(p) = \sum_i^r A_i p B_i^+$$

a matriz de Choi de ϵ é dada por

$$\gamma_{\epsilon} = \sum_i |A_i\rangle \langle B_i|$$

e a representação de Stinespring é dada por

$$E(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{F}} [A\rho B^+]$$

com $A = \sum_i A_i \otimes |i\rangle\langle i|$ e $B = \sum_i B_i \otimes |i\rangle\langle i|$ para um espaço de Hilbert n -dimensional \mathcal{F} .

Proposição

Dado uma matriz de Choi de $E \in B^2(H_1, H_2)$ com decomposição de valor singular

$$\Lambda_E = \sum_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|,$$

a representação de Kraus é dada por

$$E(\rho) = \sum_i A_i \rho B_i^+$$

com operadores de Kraus $A_i = L_i$, $B_i = R_i$. A representação de Stinespring é

$$E(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{F}} [A\rho B^+]$$

para $A = \sum_i A_i \otimes |i\rangle\langle i|$ e $B = \sum_i B_i \otimes |i\rangle\langle i|$ e um espaço de Hilbert n -dimensional \mathcal{F} .

Proposição

Dado uma representação de Stinespring de $E \in B^2(d, k)$

$$E(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{F}} [A\rho B^+],$$

a representação de Kraus é dada por

$$E(\rho) = \sum_i A_i \rho B_i^+$$

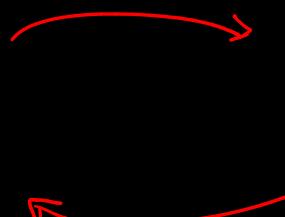
com $A_i = \langle i | A$ e $B_i = \langle i | B$ para um dímero base orthonormal de \mathcal{F} . A matriz de Choi é dada por

$$\Lambda_E = \sum_i |A_i\rangle\langle B_i|.$$

Em suma,

Kraus

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho B_i^\dagger$$



Choi

$$\Lambda_{\mathcal{E}} = \sum_i |A_i\rangle \langle B_i|$$

$$A = \sum_i |A_i\rangle \langle B_i|_F$$

$$B = \sum_i |B_i\rangle \langle A_i|_F$$

$$A_i = \zeta_i |A|$$

$$B_i = \zeta_i |B|$$

Stinespring

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_F [A \rho B^\dagger]$$

Note que se soubermos operas como o mapa atua no sistema de entrada, $\mathcal{E}(\rho), \forall \rho \in B(H_1)$, então é possível encontrar a matriz de Choi, primeiro e depois os outros representarões. O contrário também é verdade: dada $\Lambda_{\mathcal{E}}$, podemos recuperar \mathcal{E} .

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_F [(\rho^T \otimes \mathbb{1}_{H_2}) \Lambda_{\mathcal{E}}]$$

Mapa
 $\mathcal{E}(\rho)$

Choi
 $\Lambda_{\mathcal{E}}$

$$\Lambda_{\mathcal{E}} = (\mathbb{1}_{H_1} \otimes \mathcal{E})(\mathbb{1}_{H_1} \otimes \mathbb{1}_{H_2})$$

Obs:

Supõe que $\mathcal{E} \circ \mathcal{F}$ são superoperadores e $\mathcal{G} = \mathcal{E} \circ \mathcal{F}$. Como a composição de mapas lineares é linear, \mathcal{G} deve possuir uma matriz de Choi $\Lambda_{\mathcal{G}}$ que pode ser escrita em termos de $\Lambda_{\mathcal{E}}$ e $\Lambda_{\mathcal{F}}$.

Mapas que Preservam Trago

Um superoperador $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ preserva o trago se

$$\text{Tr}_2[\mathcal{E}(\rho)] = \text{Tr}_1[\rho] \quad \forall \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1).$$

Teorema [Representações dos Mapas que Preservam o Trago]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, são equivalentes

i. \mathcal{E} preserva o trago;

ii. Choi: $\text{Tr}_2[\mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}] = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$;

iii. Kraus se $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho B_i^\dagger$, então $\sum_i B_i^\dagger A_i = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$;

iv. Stinespring se $\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_2[A_\rho B^\dagger]$, então $B^\dagger A = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$.

Proposição

A composição de mapas que preservam o trago preserva o trago.

Mapas que Preservam a Hermiticidade

Um superoperador $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ preserva a hermiticidade

se leva geradores hermitianos em hermitianos.

Teorema [Representações de Mapas que Preservam a Hermiticidade]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, são equivalentes

i. \mathcal{E} preserva a hermiticidade;

ii. $\mathcal{E}(\rho)^+ = \mathcal{E}(\rho^+)$, $\forall \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$;

iii. Choi: $\mathbb{1}_{\mathcal{E}}$ é hermitiano;

iv. Kraus $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \lambda_i P_i \rho P_i^\dagger$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Proposição

A composição de mapas que preservam a Hermiticidade preserva a Hermiticidade.

Mapas Positivos

Um superoperador $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é positivo se suas operadores positivas semi-definidas em operadores positivos semi-definidos. Em particular, \mathcal{E} preserva a Hermiticidade, pois operadores positivos semi-definidas são Hermíticos.

Proposição [Matriz de Choi para Mapas Positivos]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, \mathcal{E} é positivo se, e somente se, $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ for bloco positiva, i.e., $\langle \psi | \mathcal{N}_{\mathcal{E}} | \psi \rangle \geq 0 \forall \psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ separável.

Proposição

A composição de mapas positivos é positiva.

Proposição

Seja $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H})$ um mapa que preserva o fogo. \mathcal{E} é um mapa positivo se, e somente se,

$$\| \mathcal{E}(p) \|_{\perp} \leq \| p \|_{\perp}$$

$\forall p \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ hermitiano.

A primeira nota, superoperadores lineares positivos que preservam fogo devem preservar as propriedades dos estados quânticos, e assim seguem a representação mais geral permitida. Contudo, a positividade não é suficiente para preservar a

Característica positivo semidefinida dos estados quanticos

↳ enraizado

↳ mapas positivos não nos levar a estados de saída positivo semidefinidos

Exemplo Mapeamento de Transposições

Seja $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ um mapa de transposições num q-bit

$$T: \mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

↳ preserva trace e determinante

preserva \Downarrow autovalores

preserva \Downarrow carac. positivo semidefinida

Suponha que o q-bit esteja enraizado com outro q-bit no estado

$$|14\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow |14\rangle \langle 14| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazemos

$$(T \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2})(|14\rangle \langle 14|) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um autovalor $-\frac{1}{2}$
não é positivo semidefinido

Quais mapas preservam a característica positivo considerada mesmo na presença de escalonamento?

Segundo a inspiração do exemplo, vamos exigir que $(\varepsilon \otimes \mathbb{1}_n)$ seja positivo $\forall h \in \mathbb{N}$

$\mathbb{1}_n$) \hookrightarrow anállas encopladas ao sistema não alteram a característica

mapas completamente positivas

Logo

Mapas h-Positivos

$\forall h \in \mathbb{N}$, um mapa ε é h-positivo se $(\varepsilon \otimes \mathbb{1}_n)$ é positivo.

Em particular, mapas positivos são h-positivos.

Teorema [Matriz de Choi de Mapas h-Positivos]

Para $\varepsilon \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, ε é h-positivo se e só se $\mathbb{1}_{\varepsilon}$ (o h-bloco positivo, i.e., $\langle d|\mathbb{1}_{\varepsilon}|d\rangle \geq 0$ $\forall (d) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ com número de Schmidt menor ou igual a h).

Mapas Completely Positivas

$\varepsilon \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é completamente positivo se $\varepsilon \otimes \mathbb{1}_n$ é positivo $\forall h \in \mathbb{N}$.

Teorema [Representação dos Mapas Completely Positivos]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, são equivalentes

- i. \mathcal{E} é completamente positivo;
- ii. $\mathcal{E} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{H}_2}$ é positivo, onde $d = \min\{\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2\}$;
- iii. Choi: $\Lambda_{\mathcal{E}}$ é positivo semidefinito;
- iv. Kraus $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$;
- v. Stinespring $\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} [A \rho A^\dagger]$.

Obs: se um operador é ao menos d-positivo, onde $d = \min\{\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2\}$, então ele é completamente positivo.

Proposição

A composição de mapas completamente positivos é completamente positiva.

Embora as representações de Kraus e Stinespring não sejam únicas, para mapas completamente positivos elas são únicas a menos de uma transformação unitária.

Proposição [Equivalência Unidimensional das Ops. de Kraus]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger = \sum_j B_j \rho B_j^\dagger$, então há um operador unitário $U = (U_{ij})$ tal que

$$B_j = \sum_i U_{ij} A_i.$$

Proposição [Equivalência Unidimensional das Ops. de Stinespring]

Para $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^z(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se $\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} [A \rho A^\dagger] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} [B \rho B^\dagger]$, então há um operador unitário tal que

$$B = (\mathbb{I}_{\mathcal{H}_2} \otimes U) A.$$

Fun Fact: Todo mapa que preserva Hermiticidade pode ser escrito como a diferença entre dois mapas completamente positivos

Proposição

$E \in \mathcal{B}^*(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ preserva Hermiticidade se e só se $E = E_1 - E_2$, onde E_1 e E_2 são mapas completamente positivos.

Canais Quânticos

Classe mais geral de transf. quânticas: CPTP

Completely Positive Trace-Preserving \rightsquigarrow (achô)

Teorema [Representações de Canais Quânticos]

Para $E \in \mathcal{B}^*(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, são equivalentes

- E é um canal quântico;
- Choi: Λ_E é positivo e $\text{Tr}_2[\Lambda_E] = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$;
- Kraus: $E(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$ e $\sum_i A_i^\dagger A_i = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$;
- Stinespring: $E(\rho) = \text{Tr}_{\frac{1}{2}}[A_\rho A^\dagger]$ e $A^\dagger A = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}$.

Kraus

$$E(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$$

Choi

$$\Lambda_E = \sum_i |A_i\rangle\langle A_i|$$

Relação entre as representações para canais quânticos

$$A_i = \langle i_{\mathcal{H}_2} | U | 0_j \rangle$$

Stinespring

$$E(\rho) = \text{Tr}_{\frac{1}{2}}[U(\rho \otimes |0_j\rangle\langle 0_j|)U^\dagger]$$

Representações de Evoluções Fechadas por Canais Quantícias

Canais unitários fecham a Lema

$$U(\rho) = U\rho U^\dagger$$

$$\text{onde } UV^\dagger = V^\dagger U = \mathbb{1}.$$

Teorema

A inversa de um canal quantico bijectivo $E \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ é também um canal quantico se e só se E for um canal unitário.

Exemplos

Canal Identidade

$$I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H}), \quad I_{\mathcal{H}}(\rho) = \rho$$

$$\text{Kraus e Stinespring: } I_{\mathcal{H}}(\rho) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}} \rho \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

$$\text{Ch.: } N_{I_{\mathcal{H}}} = (I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{H}}) (|\mathbb{1}_{\mathcal{H}}\rangle\langle\mathbb{1}_{\mathcal{H}}|) = |\mathbb{1}_{\mathcal{H}}\rangle\langle\mathbb{1}_{\mathcal{H}}|$$

Canais Unitários

$$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad U(\rho) = U\rho U^\dagger$$

$$\text{Kraus e Stinespring: } U(\rho) = U\rho U^\dagger$$

$$\begin{aligned} \text{Ch.: } N_U &= \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes U|i\rangle\langle j|U^\dagger \\ &= \left(\sum_i |i\rangle\langle i| \otimes U|i\rangle\langle i|U^\dagger \right)^+ \end{aligned}$$

$$= |\bar{\Psi}\rangle\langle\bar{\Psi}| \quad \xrightarrow{\text{muito poco}}$$

Canais Unifiais

Um mapa $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^*(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é unifial se $\mathcal{E}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$

Dada uma representação de (o estado de natureza mista)
Kraus, temos que

$$\mathcal{E}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) = \sum_i D_i \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} A_i^\dagger = \sum_i D_i A_i^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$$

Sistemas pura

$$\mathcal{E}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) = \text{Tr}_{\mathcal{S}} [A \mathbb{1}_{\mathcal{H}_1} A^\dagger]$$

$$= \text{Tr}_{\mathcal{S}} [A A^\dagger]$$

$$= \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso: } \text{Tr}_{\mathcal{S}} [\mathcal{E}] &= \sum_j \text{Tr}_{\mathcal{S}} [I_j X_j] \mathcal{E}(I_j X_j) \\ &= \sum_j \mathcal{E}(I_j X_j) \\ &= \mathcal{E}(\mathbb{1}_{\mathcal{H}_1}) \\ &= \mathbb{1}_{\mathcal{H}_2} \end{aligned}$$

Obs: um canal gerânico unifial também é denominado canal de planar de estocástico

\hookrightarrow doubly stochastic channel

Q-L-T Amplitude Damping

Consideremos a evolução $\mathcal{E} \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C}^2)$ com representação de Kraus

$$\mathcal{E}(p) = A_0 p A_0^\dagger + A_1 p A_1^\dagger \quad \xrightarrow{\text{modo de dissipação aerogásica}} \text{em gás}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

$|0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma} |1\rangle\langle 1|$

$\sqrt{\gamma} |0\rangle\langle 1|$

$$\text{Choi: } \mathcal{N}_\epsilon = \sum_i |A_i\rangle\langle A_i|$$

$$= (|00\rangle + \sqrt{1-\gamma} |11\rangle)(\langle 00| + \sqrt{1-\gamma} \langle 11|) + \gamma |10\rangle\langle 01|$$

$$= \begin{pmatrix} -\gamma & 0 & 0 & \sqrt{1-\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

Sistinespring:

$$A = A_0 \otimes |0\rangle + A_1 \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dinâmica do Subsistema

Sistema Quântico Aberto:

Subsistema de um sistema maior, de um "universo"

espaço de Hilbert grande o suficiente para conter o sistema e o ambiente no endoso de modo que o sistema total é fechado

sistema



$\boxed{H_s \otimes H_E}$ é fechado

ambiente $\hookrightarrow p_{SE} \in \mathcal{D}(H_s \otimes H_E)$ evolui por uma operação unitária $U \in \mathcal{B}(H_s \otimes H_E)$ tal que

$$p'_{SE} = U p_{SE} U^\dagger$$

Estados interessados no endoso redondo

$$p_s = \text{Tr}_E(p_{SE})$$

com evolução dada por

$$p'_s = \text{Tr}_E[U p_{SE} U^\dagger].$$

Essa evolução pode ser implementada por um canal quântico? Mais especificamente, existe um canal quântico E que conecta $p_s \in \mathcal{D}(H_s)$ a p'_s tal que

$$p_{SE} \xrightarrow{U} U p_{SE} U^\dagger$$

$$\text{Tr}_E \downarrow$$

$$p_s \dashrightarrow E(p_s)$$

$$\downarrow \text{Tr}_E$$

comida?

Em geral, não.

Exemplo Sistema de 2 q-bits \rightarrow um sistema e um ambiente

Dois estados iniciais

$$\rho_{SE}^{(1)} = \rho_S \otimes \rho_E^{(1)} \quad > \rho_E^{(1)} \neq \rho_E^{(2)}$$

$$\rho_{SE}^{(2)} = \rho_S \otimes \rho_E^{(2)}$$

Operação U: porta swap

$$U|1\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1\rangle \in \mathcal{H}_S$$

$$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_E$$

Em termos do estado reduzido,

estado inicial

$$\text{Tr}_E[\rho_{SE}^{(1)}] = \text{Tr}_E[\rho_{SE}^{(2)}] = \rho_S$$

estado final

$$\text{Tr}_E[U \rho_{SE}^{(1)} U^\dagger] = \text{Tr}_E[\rho_{SE}^{(1)} \otimes \rho_S] = \rho_{SE}^{(1)}$$

$$\text{Tr}_E[U \rho_{SE}^{(2)} U^\dagger] = \text{Tr}_E[\rho_{SE}^{(2)} \otimes \rho_S] = \rho_{SE}^{(2)}$$

Como proceder? Que vínculos devem ser impostos pra definir um canal quântico para o estado reduzido do sistema?

 vaires impõe restrições aos estados iniciais e ao conjunto de evoluções unitárias conjuntas

Vamos restringir o conjunto de estados iniciais a

$$S = \{ \rho_s \otimes \tilde{\rho}_E \mid \rho_s \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_S) \}$$

para algum estado fixo $\tilde{\rho}_E \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_E)$. Considerando a decomposição espectral $\tilde{\rho}_E = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$, $p_n \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\begin{aligned} \rho_S' &= \text{Tr}_E [U \rho_S \otimes \tilde{\rho}_E U^\dagger] \\ &= \sum_j \langle j | U \rho_S \otimes \sum_i p_i |i\rangle \langle i | U^\dagger | j \rangle \\ &= \sum_{ij} p_i \langle j | U | i \rangle \rho_S \langle i | U^\dagger | j \rangle \\ &= \sum_{ij} A_{ij} \rho_S A_{ij}^\dagger \quad \xrightarrow{\text{decomposição de Kraus}} \\ &= \mathcal{E}(\rho) \end{aligned}$$

\Downarrow
canal gerador

$$A_{ij} = \sqrt{p_j} \langle j | U | i \rangle$$

\mathcal{E} é o mapa para gerador unitária

Vamos restringir o conjunto de evoluções a operações locais unidirecionais

$$U = U_S \otimes U_E$$

Sendo $\rho_{SE} = \sum_{i,j} p_{ij} \rho_S \otimes \rho_E^{ij}$ e $\rho_S = \text{Tr}_E[\rho_{SE}] = \sum_i p_i \rho_i$ com

$$p_i = \sum_j p_{ij}, \text{ temos}$$

$$\begin{aligned}
 P_S &= \text{Tr}_{\Sigma} \left[(U_S \otimes U_E) P_{SE} (U_S^+ \otimes U_E^+) \right] \\
 &= \sum_i P_{ij} \text{Tr}_{\Sigma} \left[(U_S \otimes U_E) P_S^j \otimes P_E^j (U_S^+ \otimes U_E^+) \right] \\
 &= \sum_j P_{jj} \text{Tr}_E \left[U_S P_S^j U_S^+ \otimes U_E P_E^j U_E^+ \right] \\
 &= \sum_j P_{jj} U_S P_S^j U_S^+ \text{Tr}_E [U_E P_E^j U_E^+] \\
 &= U_S (\sum_j P_{jj} P_S^j) U_S^+ \\
 &= U_S P_S U_S^+ \quad \text{canal quantico unitario} \\
 &\quad \text{(sem interacao com} \\
 &\quad \text{o ambiente)}
 \end{aligned}$$

Em suma:

se quisermos trabalhar com todos os possíveis evoluções unitárias conjuntas, devemos impor restrições a conjuntos de estados iniciais do sistema-ambiente e vice-versa

Mapeas Dinâmicos Quantícios

Ate agora: evoluções tomam um input e fornecem um output

$$|i\rangle \mapsto \boxed{? ? ?} \mapsto |f\rangle \quad \text{"caixa preta"}$$

Daqui em diante: input com linavante modificando o output
↳ evoluções dependentes do tempo

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$



$$\hookrightarrow \rho(\tau) = \sum_i p_i |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)|$$

$$\rho(t) = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|$$

$$= \sum_i p_i U(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \langle \psi_i(t_0)| U^\dagger(t, t_0)$$

$$= U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)$$

$$= \mathcal{U}_{(t, t_0)} [\rho(t_0)] \quad \xrightarrow{\text{superoperador unitário}}$$

Para um sistema aberto,

$$\rho(t) = \sum_{(t, t_0)} [\rho(t_0)] \quad \begin{array}{l} \text{canal geométrico conectando} \\ \rho(t_0) \text{ com } \rho(t) \text{ (mapa} \\ \text{dinâmico quântico)} \end{array}$$

Obs.:

para $\rho(t_0)$ fixo, podemos definir uma família de mapas $\{E_{(t, t_0)}\}$ $\forall t > t_0$. Não podemos definir uma evolução incompatível $E_{(t_1, t)}$, $t' > t_0$

Semigrupos e Divisibilidade

Considere o mapa dinâmico

$$\mathcal{U}_{(t, t_0)} [\rho(t_0)] = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)$$

Propriedades

$$i. \quad \rho(t) = \mathcal{U}_{(t, t)} [\rho(t)] = I [\rho(t)], \quad \forall t$$

$$\text{ii. } t_0 \xrightarrow{\mathcal{U}(t_0)} t_1 \xrightarrow{\mathcal{U}(t_1)} t_2$$

$$\hookrightarrow f(t_1) = \mathcal{U}_{(t_0, t_1)} [f(t_0)]$$

$$\text{Note: } f(t_2) = \mathcal{U}_{(t_1, t_2)} [f(t_1)] =$$

$$= \mathcal{U}_{(t_2, t_0)} [\mathcal{U}_{(t_0, t_1)} [f(t_0)]]$$

$$\mathcal{U}_{(t_0, t)} = \mathcal{U}_{(t_0, t_1)} \mathcal{U}_{(t_1, t)}$$

\hookrightarrow grupo de dois parâmetros

$$\text{Sendo } \mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}(t - t_0), \quad \hookrightarrow \text{homogêneos no tempo}$$

redefinimos $t - t_0 \rightarrow t$

$$\hookrightarrow \mathcal{U}_s = \mathcal{U} \quad \hookrightarrow \text{grupo de um parâmetro}$$

$$\mathcal{U}_{t+s} = \mathcal{U}_t \mathcal{U}_s$$

As evoluções dos sistemas abertos satisfazem essas propriedades?

- a inversa de um canal quantico é um canal quantico operar se o canal for unitário
- evoluções de sistemas abertos não formam um grupo monoide?
- abrindo mão da inversa, formam um semigrupo

Semigrupo de dois parâmetros

$$E_{(+,+)} = I$$

$$E_{(+z,+t_0)} = E_{(+z,+1)} E_{(+,+t_0)} \quad +z \geq t_1 \geq t_0$$

Semigrupo de um parâmetro

$$E_0 = I$$

$$E_{++s} = E_+ E_s \quad \forall t, s \geq 0$$

Quando uma família de mapas dinâmicos contínuos forma um semigrupo?

Mapas intermediários podem não existir. Se a evolução é invertível $\forall t > 0$, podemos definir

$$\underbrace{E_{(+z,+1)}}_{\text{é um canal}} = E_{(+z,t_0)} \underbrace{E_{(+,+z)}^{-1}}_{\substack{\text{inverso de mapas} \\ \text{sequencia e positiva}}}$$

k-Divisibilidade

Um mapa dinâmico quântico $E_{(+,t_0)}$ é *k*-divisível se, para qualquer $t' \in [t_0, t]$,

$$E_{(+,t_0)} = E_{(+t')} E_{(+',t_0)}$$

e $E_{(+,t')}$ é *k*-positivo.

De modo análogo ao caso da *k*-positividade,

- E é h-positivo se $E \otimes I_n$ é positivo
- $E_{(+,+)} \otimes I_n$ é h-positivo se $E_{(+,+)} \otimes I_n$ é positivo $\forall f \in [t_0, t_1]$

Obs:

$$E_{(+,+)} \circ CP$$

- mapa L-divisível \Leftrightarrow mapa P-divisível
- mapa $\dim H$ -divisível \Leftrightarrow mapa CP-divisível
- mapa CP divisível é um semigrupo de dois parâmetros dado que a dinâmica intermediária representa um canal quântico

Teorema

Um mapa dinâmico quântico $E_{(+,+)}$ é h-divisional

sse

$$\frac{d}{dt} \| (E_{(t,t_0)} \otimes I_n)(\rho) \|_1 \leq 0$$

$\forall \rho \in \mathcal{B}(H \otimes \mathbb{C}^n)$ hermitiano.

Representação Matricial

Mapas Dinâmicos	\Leftrightarrow	Superoperadores	\Leftrightarrow	Representação
Quânticos		Lineares		Matricial

Vamos nos restringir a superoperadores em $\mathcal{B}^2(H)$.

Considere uma base orthonormal $\{G_i\}$ de $D(H)$

$$Tr [G_i^\dagger G_j] = \delta_{ij}, \quad i,j = 0, \dots, d^2-1, \quad d = \dim H$$

Para uma base composta por operadores Lomíticos, podemos falar $G_0 = \frac{1}{\sqrt{d}}$ e todos os demais terão traço nulo.

Para $\rho(\cdot) \in D(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_{n=0}^{d^2-1} \text{Tr}[G_n \rho(\cdot)] G_n \\ &= \frac{1}{d} \text{Tr}[\rho(\cdot)] \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{d^2-1} \text{Tr}[G_n \rho(\cdot)] G_n \\ &= \frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{d^2-1} x_n(\cdot) G_n \right) \quad \xrightarrow{\text{Definição}} x_n(\cdot) = \frac{1}{d} \text{Tr}[G_n \rho(\cdot)]\end{aligned}$$

Visto que $\rho(\cdot) = E_{(t, t_0)}[\rho(t_0)]$, $\vec{x} = (x_n)$ é o que representa ρ

$$\begin{aligned}\rho(\cdot) &= E_{(t, t_0)} \left[\frac{1}{d} \left(\mathbb{1} + \sum_{n=1}^{d^2-1} x_n(t_0) G_n \right) \right] \\ &= \frac{1}{d} \left(E_{(t, t_0)}[\mathbb{1}] + \sum_{n=1}^{d^2-1} x_n(t_0) E_{(t, t_0)}[G_n] \right) \quad \text{isto que } x_n(t_0) \text{ não é }\end{aligned}$$

zero que $x_n(t_0)$, mas $x_n(t)$. Por isso é em barra

Entendemos de $\vec{x}(\cdot)$,

$$\begin{aligned}x_j(\cdot) &= \text{Tr} \left[G_j \left(E_{(t, t_0)}[\mathbb{1}] + \sum_{n=1}^{d^2-1} x_n(t_0) E_{(t, t_0)}[G_n] \right) \right] \\ &= \underbrace{\text{Tr} [G_j E_{(t, t_0)}[\mathbb{1}]]}_{\omega_j(t, t_0)} + \sum_{n=1}^{d^2-1} x_n(t_0) \underbrace{\text{Tr} [G_j E_{(t, t_0)}[G_n]]}_{B_{jn}(t, t_0)}\end{aligned}$$

Assim,

$$\vec{x}_j(t) = \omega_j(t, t_0) + \sum_{n=1}^{d-1} B_{jn}(t, t_0) x_n(t_0)$$

↓

$$\vec{x}(t) = \vec{\omega}(t, t_0) + \vec{B}(t, t_0) \vec{x}(t_0)$$

Equações Mestras Quantitativas

Evolução Fechada: Eq de Liouville - von Neumann

A evolução de um estado $|z\rangle \in \mathcal{H}$ é dada por

$$|z(t)\rangle = U(t, t_0) |z(t_0)\rangle.$$

Para uma evolução unitária, podemos encontrar a operação inversa

$$|z(t_0)\rangle = U^+(t, t_0) |z(t)\rangle.$$

Se a evolução for homogênea no tempo, i.e.,

$$U(t, t_0) = U(t - t_0),$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |z(t)\rangle &= \frac{d}{dt} U(t - t_0) |z(t_0)\rangle \\ &= \frac{d}{dt} U(t - t_0) U^+(t - t_0) |z(t)\rangle \\ &= -i H(t) |z(t)\rangle \end{aligned}$$

\leftarrow ; $\frac{d}{dt} U(t - t_0) = i H(t) U(t - t_0)$
 $\hbar = 1$

Poderemos estender a eq de crohgas para

- o formalismo de operadores hermitianos, nas Leis das equações de Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt} P(t) = -i [H(t), P(t)]$$

Série de Dyson

Se integrarmos localmente a eq

$$\frac{d}{dt} U(t, t_0) = -i H(t) U(t, t_0)$$

com condições inicial $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ temos que

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t H(t_1) U(t_1, t_0) dt_1, \quad \text{substituindo em si mesma}$$

$$= \mathbb{1} - i \int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} H(t_1) H(t_2) U(t_2, t_0) dt_2 dt_1$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1 \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1 \right]$$

$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} H(t_1) H(t_2) dt_2 dt_1$, é um termo típico para
 calcularmos

Podemos definir um operador de ordenamento temporal T via

$$T[H(t_1) H(t_2)] = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\Theta(t_1 - t_2) H(t_1) H(t_2)}_{\text{theta de Heaviside}} + \Theta(t_2 - t_1) H(t_2) H(t_1) \right]$$

Podemos então escrever Heaviside $\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 T \left[\left(\int_{t_0}^t H(s) ds \right)^2 \right] &= T \left[\int_{t_0}^t H(t_1) dt_1 \int_{t_0}^t H(t_2) dt_2 \right] \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t T[H(t_1) H(t_2)] dt_2 dt_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Theta(t_1 - t_2) H(t_1) H(t_2) dt_2 dt_1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Theta(t_2 - t_1) H(t_2) H(t_1) dt_2 dt_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} H(t_1) H(t_2) dt_2 dt_1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_2} H(t_2) H(t_1) dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} H(t_1) H(t_2) dt_2 dt_1
 \end{aligned}$$

renomeando

Podemos então representar a série como

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1) H(t_2) \cdots H(t_n) dt_n \cdots dt_2 dt_1, \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} T \left[\left(\int_{t_0}^t H(s) ds \right)^n \right], \\
 &= T \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int_{t_0}^t H(s) ds \right)^n \right]. \\
 &= T \left[e^{-i \int_{t_0}^t H(s) ds} \right] \xrightarrow{\text{série de Dyson}} \text{série de } U(t, t_0)
 \end{aligned}$$

Só o Hamiltoniano conta consigo mesmo em instantes distintos, i.e.,

$[H(t), H(s)] = 0$, $\forall t, s$, então a série se reduz a

$$U(t, t_0) = e^{-i \int_{t_0}^t H(s) ds}$$

Equação Mista com Kernel de Memória

Sistema bipartido

$$H = H_S \otimes H_E$$

sistema \leftarrow

Hamiltoniano total do sistema composto: $H(t)$

$H(t)$ determina uma evolução fechada segundo a

e.g. de Liouville-von Neumann para o sistema como um todo, i.e.,

Liouviliano

$$\frac{d}{dt} \rho_{SE}(t) = -i [H(t), \rho_{SE}(t)] = L_0 \rho_{SE}(t)$$

↳ equação mistra para o sistema composto

Qual a equação mistra para o operador das dimensões reduzidas do sistema? $\rho_S = \text{Tr}_E[\rho_{SE}]$



técnica do operador de projeção
de Nakajima-Zwanzig

Dado $\rho_E \in \mathcal{B}(H_E)$ fixo, vamos definir o operador

$$P \in \mathcal{B}(H)$$

$$P_{\rho_{SE}} = \text{Tr}_E[\rho_{SE}] \otimes \rho_E.$$

$P = P^2$ é uma projeção com projeções ortogonais

$$Q = I_H - P.$$

Podemos fazer o seguinte

$$P \frac{d}{dt} \rho_{SE}(t) = \frac{d}{dt} P_{\rho_{SE}}(t)$$

$$= P L_0 \rho_{SE}(t)$$

$$= P L_0 (P + Q) \rho_{SE}(t)$$

$$= P L_0 P \rho_{SE}(t) + P L_0 Q \rho_{SE}(t)$$

Analogamente,

$$\frac{d}{dt} Q \rho_{SE}(t) = Q L_0 Q \rho_{SE}(t) + Q L_0 P \rho_{SE}(t)$$

Se resolvemos esta equação para $Q p_{SE}$ temos

$$Q p_{SE}(t) = G(t, t_0) Q p_{SE}(t_0) + \int_{t_0}^t G(t, s) Q L_{es} P p_{SE}(s) ds$$

$$\hookrightarrow G(t, t_0) = T \left[e^{\int_{t_0}^t Q L_{es} ds} \right]$$

Substituindo na equação para $P p_{SE}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} P p_{SE}(t) = P L_t G(t, t_0) Q p_{SE}(t_0) + P L_t P p_{SE}(t) + \int_{t_0}^t P L_t G(t, s) Q L_{es} P p_{SE}(s) ds$$



equação de
Nakajima - Zanzig

Suponhamos um estado inicial $\xrightarrow{\text{ambiente}}$ estado do ambiente

$$p_{SE}(t_0) = p_s(t_0) \otimes p_E$$

$$P p_{SE}(t_0) = p_{SE}(t_0), \quad Q p_{SE}(t_0) = 0$$



$$P L_t G(t, t_0) Q p_{SE}(t_0) = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} P p_{SE}(t) = P L_t P p_{SE}(t) + \int_{t_0}^t P L_t G(t, s) Q L_{es} P p_{SE}(s) ds$$

Vamos supor ainda que o estado conjunto localiza para todo instante, i.e.,

$$P_{SE}(t) = P_S(t) \otimes P_E(t)$$

hipótese muito forte

(sistema fracoamente
acoplado com o
ambiente)

Condições exatas:

$$P_{L_0} P_{SE}(t) = 0$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} P_{SE}(t) = \int_{t_0}^t P_{L_0} G(t,s) Q L_0 P_{SE}(s) ds.$$

Ações do operador P

$$\frac{d}{dt} (P_S(t) \otimes P_E) = \int_{t_0}^t \text{Tr}_E \left[L_0 G(t,s) Q L_0 (P_S(s) \otimes P_E) \right] \otimes P_E ds$$

Tratando o reservatório:

$$\frac{d}{dt} P_S(t) = \int_{t_0}^t K(t,s) [P_S(s)] ds$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad K(t,s)[\cdot] = \text{Tr}_E [L_0 G(t,s) Q L_0 (\cdot) \otimes P_E] Q L_0$$

equações mistas
com kernel de
memória

kernel de memória

Equação Meio Local no Tempo

Qual a forma mais geral de uma equação mista quântica local no tempo?

$$P \in \mathcal{D}(H), \quad L_0 \in \mathcal{B}^2(H), \quad \frac{d}{dt} P(t) = L_0 P(t)$$

Qual é L_+ mais bom que seja linear e preserve positividade e trago?

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^t L_s p(s) ds$$

$$\hookrightarrow \text{Tr } p(t) = \text{Tr} [p(t_0)] + \int_{t_0}^t \text{Tr} [L_s p(s)] ds$$

$$\text{Tr} [L_s p(s)] = 0 \quad \forall s$$

para preservar o trago

Hamiltoniano conjugado

$$p^\dagger(t) = p^\dagger(t_0) + \int_{t_0}^t (L_s p(s))^\dagger ds$$

$$= p^\dagger(t_0) + \int_{t_0}^t (L_s p(s))^\dagger ds$$

\hookrightarrow para preservar hermiticidade é preciso que

$$(L_s p(s))^\dagger = L_s p(s) \quad \forall s$$

É a positividade? \Rightarrow não há resposta clara

Sendo L_+ superoperador linear, podemos escrever

$$L_+ p(t) = \sum_i A_i(t) p(t) B_i^\dagger(t)$$

com $A_i, B_i \in \mathcal{B}(H)$.

Considerando a base orthonormal $\{G_i\}$ em $B(\mathcal{H})$ com

$$\text{Tr}[G_i^\dagger G_j] = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 0, \dots, d^2-1, \quad d = \dim \mathcal{H}$$

$$G_0 = \frac{\mathbb{I}}{\sqrt{d}}, \quad G_i \text{ hermitianos},$$

podemos escrever

$$A_i(s) = \sum_{j=0}^{d^2-1} a_{ij}(s) G_j, \quad B_i(s) = \sum_{n=0}^{d^2-1} b_{in}(s) G_n$$

$$\begin{aligned} L_f p(t) &= \sum_{j,h=0}^{d^2-1} \left(\sum_i a_{ij}(t) b_{ih}^*(s) \right) G_j p(t) G_h^\dagger \\ &\stackrel{\downarrow}{=} \sum_{j,h=0}^{d^2-1} \gamma_{jh} G_j p(t) G_h^\dagger \end{aligned} \quad \text{coeficientes da matriz de decoerência}$$

Note que

$$\begin{aligned} (L_f p(t))^+ &= \sum_{j,h=0}^{d^2-1} \gamma_{jh}^*(t) G_h p(t) G_j^\dagger \\ &= \sum_{h,j=0}^{d^2-1} \gamma_{hj}^*(t) G_j p(t) G_h^\dagger \end{aligned}$$

Pra preservar a hermiticidade, matriz de decoerência

$$(L_f p(t))^+ = (L_f p(t)) \Rightarrow \gamma_{jh} = \gamma_{hj}^* \quad \xrightarrow{\text{é hermitiana}}$$

Se separamos os termos $j=0$ e $h=0$ temos

$$\mathcal{L}_t \rho(t) = G_0 \rho(t) G_0^+ + \sum_{j=1}^{d^2-1} r_{j0}(t) G_j^- \rho(t) G_j^+ + \sum_{h=1}^{d^2-1} r_{0h}(t) G_h^- \rho(t) G_h^+ + \sum_{j,h=1}^{d^2-1} r_{jh}(t) G_j^- \rho(t) G_h^+$$

$$= \frac{r_{00}(t)}{d} \rho(t) + \left(\sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{r_{j0}(t)}{\sqrt{d}} G_j^- \right) \rho(t) + \rho(t) \left(\sum_{h=1}^{d^2-1} \frac{r_{0h}(t)}{\sqrt{d}} G_h^+ \right) + \sum_{j,h=1}^{d^2-1} r_{jh}(t) G_j^- \rho(t) G_h^+$$

Vamos entao definir

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{r_{00}(t)}{d} + \sum_{j=1}^{d^2-1} \frac{r_{j0}(t)}{\sqrt{d}} G_j^-$$

$$c^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{r_{00}(t)}{d} + \sum_{h=1}^{d^2-1} \frac{r_{0h}(t)}{\sqrt{d}} G_h^+$$

Assim

$$\mathcal{L}_t \rho(t) = c(t) \rho(t) + \rho(t) c^\dagger(t) + \sum_{j,h=1}^{d^2-1} r_{jh}(t) G_j^- \rho(t) G_h^+$$

\downarrow trafo e' circular

$$\text{Tr} [\mathcal{L}_t \rho(t)] = \text{Tr} \left[\left(c(t) + c^\dagger(t) + \sum_{j,h=1}^{d^2-1} r_{jh}(t) G_j^- G_h^+ \right) \rho(t) \right]$$

\downarrow trafo e' preservado

$$= 0$$

\hookrightarrow vale poco tudo $f \in \mathcal{D}(H)$

Logo,

$$c(t) + c^\dagger(t) = - \sum_{j,h=1}^{d^2-1} r_{jh}(t) G_h^+ G_j^-.$$

Definindo

$$H(t) = \frac{i}{2} (c(t) - c^\dagger(t)) \xrightarrow{\text{operator}} \text{comutantes}$$

Temos

$$c(s) = -iH(s) - \sum_{j,h=1}^{d-1} \alpha_{jh}(s) G_h^+ G_j$$

$$c^\dagger(s) = iH(s) - \sum_{j,h=1}^{d-1} \alpha_{jh}(s) G_h^+ G_j$$

Desta forma,

$$\mathcal{L}_p \rho(s) = -iH(s)\rho(s) - \sum_{j,h=1}^{d-1} \alpha_{jh}(s) G_h^+ G_j \rho(s)$$

$$+ i\rho(s)H(s) - \sum_{j,h=1}^{d-1} \alpha_{jh}(s) \rho(s) G_h^+ G_j$$

Poderemos então expressar a equação nestas como

$$+ \sum_{j,h=1}^{d-1} \gamma_{jh}(s) G_j \rho(s) G_h^+$$

$$\frac{d}{dt} \rho(s) = -i[H(s), \rho(s)] + \sum_{j,h=1}^{d-1} \gamma_{jh}(s) \left(G_j \rho(s) G_h^+ - \frac{1}{2} \{ G_h^+ G_j, \rho(s) \} \right)$$

Sendo a matriz de decoerência hermitiana, podemos escrever

$$\gamma_{jh}(s) = \sum_i u_{ji}(s) \gamma_i(s) u_{hi}^*(s) \quad \begin{matrix} \gamma \text{ hermitiana pode ser} \\ \text{diagonalizada} \end{matrix}$$

Seja que

$$\frac{d}{dt} \rho(s) = -i[H(s), \rho(s)] + \sum_{i,j,h=1}^{d-1} u_{ji}(s) \gamma_i(s) u_{hi}^*(s) \left(G_j \rho(s) G_h^+ - \frac{1}{2} \{ G_h^+ G_j, \rho(s) \} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_{i=1}^{d^2-1} r_i(t) \left[(\bar{\zeta} u_{ji} G_j) \rho(t) (\sum_n u_{ni}^* G_n^+) - \frac{1}{2} \left\{ (\sum_n u_{ni}^* G_n^+) (\bar{\zeta} u_{ji} G_j), \rho(t) \right\} \right]$$

\hookrightarrow definir $L_i(t) = \sum_{j=1}^{d^2-1} u_{ji}(t) G_j$ note que $\text{Tr}[L_i(t)] = 0$
 $\forall i = 1, \dots, d^2-1$

$$L_i(t) = \sum_{j=1}^{d^2-1} u_{ji}(t) G_j \quad \text{e} \quad \text{Tr}[L_i^\dagger(t) L_i(t)] = \delta_i$$

Obtemos então a forma geral da eq. mestra local no tempo
 para a parte não-unitária
 responsável por decaimento/dissipação

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \underbrace{-i[H(t), \rho(t)]}_{\text{operador Leonardiano}} + \sum_{i=1}^{d^2-1} r_i(t) \underbrace{\left[L_i(t) \rho(t) L_i^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{ L_i^\dagger(t) L_i(t), \rho(t) \} \right]}_{\text{taxa de decaimento}}$$

Observação:

Como consideramos que a evolução passiva opera traço e hermitiana, podem haver evoluções na forma acima que não são positivas ou completamente positivas, não representando evoluções físicas válidas.

O conjunto de condições necessárias e suficientes para garantir a completa positividade é um problema aberto, resolvendo operadores para casos simples, como o q-bit.

Observação:

A eq. mestra local no tempo tem forma única e é chamada de forma canônica. É canônica porque toda eq. mestra local no tempo pode ser escrita dessa forma e única porque as taxas de decaimento, que determinam a evolução unitária, são invariantes sob operações unitárias. Portanto, podemos mudar $L_i(t)$ e $H(t)$, mas as taxas de decaimento continuam as mesmas.

Divisibilidade

Divisibilidade é uma dinâmica descrita por uma equação mestra local no tempo.

Teorema

A dinâmica gerada por uma equação mestra local no tempo é

- i. CP-divisível se $\gamma_i(t) \geq 0, \forall t \geq 0$
- ii. P-divisível se

$$\sum_i \gamma_i(t) |(k_m | L_i(t) | n\rangle)|^2 \geq 0$$

para todo $m, n, t \geq 0$ e base orthonormal $\{|n\rangle\}$ de \mathcal{H} .

Representação Matricial

Tal qual fizemos antes, queremos encontrar a forma

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(t) + D(t)\vec{x}(t)$$

$\vec{u}(t)$ $\xleftarrow{\text{drift vector}}$ $\xrightarrow{\text{Damping matrix}}$

Para a eq mestra que temos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{u}_i(t) &= \text{Tr}\left[G_i L_i^\dagger \vec{u}\right] \\ &= \sum_n \gamma_n(t) \text{Tr}\left[G_i [L_n(t), L_n^\dagger(t)]\right] \end{aligned}$$

$$D_i(t) = \text{Tr}\left[G_i L_i^\dagger [G_i]\right]$$

$$= -i \text{Tr}\left[H(t)[G_i, G_i]\right] + \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n(t) \text{Tr}\left[L_n^\dagger(t) G_i L_n(t) G_i - \frac{i}{2} L_n^\dagger(t) L_n(t) \{G_i, G_i\}\right]$$

Pode-se notar que

$$\text{Tr}[\Delta(t)] = -d \sum_{k=1}^{d-1} \gamma_k(t).$$

Equivalecia com Mapas Dinâmicos

Mapas Dinâmicos: $p(t) = E_{(t,t_0)} f(t)$

Eq. mista Local no Tempo: $\frac{d}{dt} p(t) = L_t p(t)$

Vamos considerar

$$\frac{p(t+\epsilon) - p(t)}{\epsilon} = L_t p(t)$$

$$E_{(t+\epsilon, t)} p(t) = p(t+\epsilon) = p(t) + \epsilon L_t p(t)$$



$$E_{(t+\epsilon, t)} = I + \epsilon L_t$$

Derivando

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{d}{dt} E_{(t,t_0)} f(t_0)$$

$$= \frac{d}{dt} E_{(t,t_0)} E_{(t,t_0)}^{-1} f(t) \Rightarrow L_t = \frac{d}{dt} E_{(t,t_0)} E_{(t,t_0)}^{-1}$$

$$= L_t f(t)$$

Poderemos obter uma forma mais amigável para termos das representações matriciais.

$$\vec{x}(t) = \vec{\omega}(t, t_0) + \vec{B}(t, t_0) \vec{x}(t_0)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{\omega}(t) + D(t) \vec{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \vec{\omega}(t) + D(t) [\vec{\omega}(t, t_0) + \vec{B}(t, t_0) \vec{x}(t_0)] \\ &= \vec{\omega}(t) + D(t) \vec{\omega}(t, t_0) + D(t) \vec{B}(t, t_0) \vec{x}(t_0) \end{aligned}$$

Inspecionando as equações percebemos que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\omega}}(t, t_0) &= \vec{\omega}(t) + D(t) \vec{\omega}(t, t_0) \\ \dot{\vec{B}}(t, t_0) &= D(t) \vec{B}(t, t_0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{relação entre o campo} \\ \text{dinâmico e a eq mto} \\ \text{local no tempo} \end{array} \right.$$

Obs.:

Pode não haver solução para $D(t)$, visto que nem todo campo dinâmico corresponde a uma EMLT. Se houver, $D(t)$ pode não ser único. As restrições são como em que $\vec{B}(t, t_0)$ é invertível, por consequência, a solução única é

$$D(t) = \vec{B}(t, t_0) \vec{B}^{-1}(t, t_0).$$

Representação da Esfera de Bloch

Operador densidade:

$$\rho(t) = \frac{1}{d} \left[\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{d^2-1} x_i(t) |g_i\rangle \langle g_i| \right]$$

Em $d=2$,

$$G_{ij} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \quad \xrightarrow{\text{matrizes de Pauli}}$$

$$P(t) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{n}(t) \cdot \vec{\sigma})$$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{x}$
 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$n_i = \text{Tr} [\sigma_i P(t)]$

vetor de Bloch

$$P(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3(t) & n_1(t) - i n_2(t) \\ n_1(t) + i n_2(t) & 1 - n_3(t) \end{pmatrix}$$

Poderemos definir

$$\begin{aligned} n_j(t) &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\sigma_j L_+ (\mathbb{1})] \\ D_{jn}(t) &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\sigma_j L_+ [\sigma_i]] \end{aligned} \quad \dot{\vec{n}}(t) = \vec{n}(t) + D(t) \vec{n}(t)$$

Q-bit + amplitude damping

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \sum_n \omega_n b_n^\dagger b_n + \sum_n g_n (\sigma_+ b_n + \sigma_- b_n^\dagger)$$

$$\frac{d}{dt} P_S(t) = -i \left[\frac{\omega_0}{2} \sigma_z, P_S(t) \right] + \Gamma (N(\omega_0) + 1) \left[\sigma_- P_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \{ \sigma_+ \sigma_-, P_S(t) \} \right] + \Gamma N(\omega_0) \left[\sigma_+ P_S(t) \sigma_- - \frac{1}{2} \{ \sigma_- \sigma_+, P_S(t) \} \right]$$

Q-bit + phase damping

$$H = \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \sum_n \omega_n b_n^\dagger b_n + \gamma_p \sum_n g_n (b_n + b_n^\dagger)$$

$$\frac{d}{dt} P_S(t) = -i \left[\frac{\omega_0}{2} \sigma_z, P_S(t) \right] + \Gamma \left[\sigma_z P_S(t) \sigma_z - P_S(t) \right]$$

Não-Markovianidade Quântica

Review de Probabilidade

Espaço de Probabilidades Clássico: $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, P)$

espaço amostral
 espaço de
 funções de
 probabilidade
 conjunto de
 eventos possíveis

Ω : um conjunto

\mathcal{A} : σ -álgebra, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

P : $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, σ -aditiva

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Elementos de Ω : resultados

Elementos de \mathcal{A} : eventos

$P(A)$: probabilidade de A

Observação:

vamos nos restringir a espaços de probabilidade discretos

$\hookrightarrow \Omega$ finito, $\overset{(ach.)}{A = \mathcal{P}(\Omega)}$

Uma função de probabilidade é uma função sobre \mathcal{A} tal que

$$\text{i. } P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\text{ii. } P(\Omega) = 1$$

$$\text{iii. } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

A probabilidade conjunta dos eventos $A \in \mathcal{B}$, i.e., de ambos ocorrerem é $P(A; B) = P(A \cap B)$.

A probabilidade condicional de A dado que B ocorreu ($P(B) > 0$) é definida como $P(A|B) = \frac{P(A; B)}{P(B)}$.

Uma variável aleatória (real) é uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

A distribuição de probabilidade de X é

relaciona a cada $\omega \in \Omega$ com $X(\omega) = x \in \mathbb{R}$ de forma que podemos usar \mathbb{R} ao invés de Ω

$$P(x) = P(X^{-1}(\{x\})) = P(\omega)$$

(função de prob. definida para os valores dos resultados ao invés dos resultados)

Importante:

$$p(x) \geq 0 \rightarrow \text{positividade}$$

$$\sum_x p(x) = 1 \rightarrow \text{normalização}$$

Para um número discreto de x , $\vec{p} = (p(x_1), \dots, p(x_n))$ é chamado de vetor de probabilidades.

Para qualquer vetor \vec{v} num espaço vetorial, podemos definir a norma como $\|\vec{v}\|_1 = \sum_i |v(x_i)|$. Assim, para vetores de probabilidade, temos uma norma

$$\|\vec{p}\|_1 = \sum_i |p(x_i)| = 1$$

e também uma medida de distância entre espaço

$$d(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \sum_i |p(x_i) - q(x_i)|$$

distância de Kolmogorov

Processos Estocásticos

Seja uma família de variáveis aleatórias $\{X(t)\}_{t \in I}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ sendo um intervalo real que representa o tempo e pode ser discreto ou contínuo. Então um processo estocástico pode ser visto como uma variável aleatória evoluindo no tempo.

Estendendo a definição de prob. temos

$$P(x, t) = P(X(t)^{-1}(\{x\})).$$

Uma família de probabilidades conjuntas (famílias) é a probabilidade conjunta de n eventos ocorrendo em tempos $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ para um dado processo estocástico

$$P(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}, \dots; x_1, t_1).$$

Consequências da Normalização e Positividade

condições de consistência

$$\begin{cases} p(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) > 0 \\ \sum_i p(x_n, t_n; \dots; x_i, t_i; \dots; x_1, t_1) = p(x_n, t_n; \dots; x_{n+1}, t_{n+1}; x_{n+2}, t_{n+2}; \dots; x_1, t_1) \\ \sum_x p(x, t) = 1 \end{cases}$$

Probabilidade Condicional

$$(n \in \mathbb{N}) \quad p(x_n, t_n; \dots; x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \frac{p(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{p(x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_1, t_1)}$$

Para um processo estocástico com instante inicial t_0 , as probabilidades $p(x, t | x_0, t_0)$ são bem-definidas para $t > t_0$ e formam uma matriz com componentes $p_{ij} = p(x_i, t | x_j, t_0)$.

Temos também que

$$\begin{cases} p(x, t | x_0, t_0) \geq 0 \\ \sum_x p(x, t | x_0, t_0) = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{matrizes que satisfazem} \\ \text{essa condição: matrizes estocásticas} \end{array} \right\}$$

A partir da definição de probabilidade condicional, temos que

$$p(x, t) = \sum_{x_0} p(x, t | x_0, t_0) p(x_0, t_0)$$

↳ mapas lineares responsáveis pela evolução
de probabilidades de um instante de tempo

Para $t' > t$, as probabilidades $p(x, t' | x', t')$ não são necessariamente bem-definidas. No entanto, se todas as matrizes $p(x, t | x_0, t_0)$ forem invertíveis, pode-se definir

$$P(x, t | x', t') = \sum_{x_0} P(x, t | x_0, t_0) (P(x' | x_0, t_0))^{-1}$$

→ pode não ser uma matrizes estocástica, pois pode não satisfazer a condição de positividade

Note que

$$\begin{aligned} & \sum_x p(x, t | x', t') P(x', t' | x_0, t_0) P(x_0, t_0) \\ &= \sum_{x', x_0} p(x, t | x', t') (P(x' | x_0, t_0)) P(x', t' | x_0, t_0) P(x_0, t_0) \\ &= \sum_{x_0} p(x, t | x_0, t_0) P(x_0, t_0) \\ &= P(x, t) \quad \Rightarrow P(x, t | x_0, t_0) = \sum_{x'} p(x, t | x', t') P(x' | x_0, t_0) \end{aligned}$$

equação de

Chapman-Kolmogorov

processos estocásticos cujas matrizes $\overrightarrow{P(x, t | x', t')}$ são estocásticas
sao chamados de processos divisíveis

Teorema [Monotonicidade com Respeito à Norma 1]

Um processo estocástico é divisível se, e somente se,

$$\left\| \sum_{x'} p(x, t | x', t') v(x') \right\|_1 \leq \|v\|_1$$

para qualquer vetor $\vec{v} = (v(x)) \in \mathbb{R}^{2t+1}$.

Processo Markoviano Clássico

Um processo estocástico é um processo Markoviano se, para qualquer família de probabilidades condicionais de um instante de tempo, tivermos que

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_0, t_0) = P(x_n, t_n | x_0, t_0)$$

→ o estado futuro de um processo Markoviano depende apenas do estado presente, não tendo memória das estações passadas

Tecnicamente:

Processos Markovianos são divisíveis.

Obs.:

Há processos divisíveis que são não-Markovianos. Logo, os conceitos de divisibilidade e Markovianidade não são, em geral, equivalentes. No entanto, existe equivalência no nível de probabilidade de um ponto $p(x, t | x_0, t_0)$, donde que tal família de matrizes, se dividível, sempre pode ser vista como as probabilidades condicionais de algum processo Markoviano.

Note que processos Markovianos são a exceção, não a regra, dentre os processos estocásticos. Portanto, são amplamente estudados devido à sua simplicidade. Veja por exemplo que, no caso Markoviano,

$$p(x_1, t_1, x_0, t_0) = p(x_1, t_1 | x_0, t_0) p(x_0, t_0)$$

$$p(x_2, t_2, x_1, t_1, x_0, t_0) = p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1 | x_0, t_0) p(x_0, t_0)$$

De modo geral,

$$p(x_n, t_n, \dots, x_0, t_0) = \prod_{i=0}^{n-1} p(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i) p(x_0, t_0).$$

↳ para processos Markovianos

Processos Markovianos Quânticos

O operador desidende é a generalização natural do vetor de probabilidades.

$$P = \sum_x p(x) |x\rangle\langle x| \quad \text{ensemble de linhas de onda}$$

($\rightarrow P$ é vetor de prob)

$$\sum_x p(x) = 1, \quad p(x) \geq 0$$

Equações de evolução

$$p(x,t) = \sum_{x_0} p(x,t|x_0,t_0) p(x_0,t_0)$$



$$p(t) = \underbrace{E_{(t,t_0)}}_{\substack{\text{contrapartida quântica} \\ \text{de } p(x,t|x_0,t_0)}} p(t_0)$$

\rightarrow superoperador linear

$$\left. \begin{array}{l} p(t) \geq 0 \\ \text{Tr}[p(t)] = 1 \end{array} \right\} E_{(t,t_0)} e^{-CPTP} \Rightarrow \text{mapa dinâmico quântico}$$

Mapas intermediários $E_{(t_0,t)}$ em geral não são bem-definidos para uma evolução quântica. No entanto, se $E_{(t_0,t)}$ é invertível, temos uma analogia com o caso clássico e a equação de Chapman-Kolmogorov se torna

$$\underbrace{E_{(t_0,t)} = E_{(t_0,t'')} E_{(t'',t')}}_{\substack{\text{divisibilidade} \\ \text{clássica}}}$$

} vale condição de
monotonicidade da
norma-1

\Rightarrow CP-divisibilidade
quântica

Para definir processos Markovianos quânticos, precisamos generalizar a ideia de probabilidade condicionais no tempo,
 $p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots, x_0, t_0)$

\hookrightarrow para $n \rightarrow 1$, precisaremos medir o
estado do sistema em diversos instantes

Se a medida afeta o estado do sistema, a noção de probabilidade condicional no tempo dependerá não só da dinâmica, mas das medidas também.



não haverá generalização satisfatória para a noção de probabilidade condicional no tempo

↳ como definir um processo Markoviano?

Precisamos definir um processo Markoviano genérico de outra forma enquanto seguimos pressupostos semelhantes com a definição clássica e/ou as suas propriedades qualitativas.

Dois definições alternativas



Rivas, Huelga & Plenio
(RHP)

ou

definições da
divisibilidade

Breuer, Laine & Piilo
(BLP)

ou

definições da
indistingibilidade
ou ainda

definições da
distância trigo

Definições RHP

Para probabilidades condicionais clássicas de 1 passo, processos Markovianos são equivalentes a processos divisíveis.

RHP: processos Markovianos quânticos são mapas CP-divisíveis

↳ Definição é matematicamente próxima da definição clássica

Definições BLP

Processos Markovianos são, na prática, processos sem memória. ou processos em que a informação é monotonicamente decrescente.

↳ Uma abordagem mais física é definir Markovianidade com relação à monotonicidade de alguma medida de informação



para processos Markovianos, esta medida deve ser apenas decrescer, visto que não se mantém memória dos estados passados

BLP: processos Markovianos são evoluções em que a distância entre ocorrências de dois estados é monotonicamente decrescente

A distância traço mede a distinguibilidade de estados, e passando o seu avesso indica que alguma interação entre os estados voltando para o sistema.

Sejam dois estados p_1 e p_2 . A máxima probabilidade de concretamente identificar a (in)distinguibilidade de dois estados é dada por

$$P_{\max} = \frac{1}{2} (1 + D(p_1, p_2)) \xrightarrow{\text{red}} \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_1$$

Obs:

A distância traço é monotonamente decrescente para certas quantícias, e em particular para mapas CP-divisíveis

\hookrightarrow RHP Markoviano \Rightarrow BLP Markoviano

Lembre-se que um mapa dinâmico quântico $E_{(t,t_0)} \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H})$ é P-divisível se a norma traço for monotonamente decrescente no tempo

$$\frac{d}{dt} \|E_{(t,t_0)}(p)\|_1 \leq 0$$

$\forall p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ hermitiana. Como a diferença é grande dos estados quânticos $p_1 - p_2$ é hermitiana, para mapas dinâmicos inversíveis a P-divisibilidade equivale a

$$\frac{d}{dt} \left\| \mathcal{E}_{(t,h)}(p_1 - p_2) \right\|_1 \leq 0, \quad \forall p_1, p_2 \in \mathcal{D}(h).$$

Mapas inverteíveis são BLR-Markovianos se e só
se P-divisíveis. Como CP-divisibilidade é uma particular
de P-divisibilidade,

$$RHP\text{-Markov} \Rightarrow BLR\text{-Markov} \not\Rightarrow RHP\text{-Markov}$$

Defendendo e Mediando a Não-Markovianidade Quântica
Divisibilidade:

$$RHP\text{-Markov} \Leftrightarrow CP\text{-Divisível}$$

Padres mede a não-Markovianidade RHP ao
observar quanto a dinâmica desvia da divisibilidade.

- Um mapa \mathcal{E} é um canal quântico se sua matriz de Choi normalizada, $d^{-1}\Lambda_{\mathcal{E}}$ ($d = \dim \mathcal{H}$), é
um estado quântico, i.e., positiva, de frago 1.
- Note que a norma frago de um operador corresponde
a seu frago se o operador for positivo semiblinh.

Justamente estes critérios

$$\|\Lambda_{\mathcal{E}}\|_1 \geq d \rightarrow \text{igualdade se canal quântico}$$

Para una familia de mapas dinámicos bijetivos $\mathcal{E}_{(t,t_0)}$, tenemos que, $t+t' \in [t_0, t]$,

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)} = \mathcal{E}_{(t,t')} \mathcal{E}_{(t',t_0)} \rightarrow \mathcal{E}_{(t,t')} = \mathcal{E}_{(t,t_0)} \mathcal{E}_{(t',t_0)}^{-1}.$$

A dinâmica é CP-divisível se a dinâmica intermediária $\mathcal{E}_{(t,t')}$ é um canto quadrático $t+t' \in [t_0, t]$.

Assim, podemos medir o desvio da completa positividade por meio da quantidade

$$\|\mathcal{N}_{\mathcal{E}_{(t,t')}}\|_{-1} \xrightarrow{\text{Zero óptimo para mapas CPTP}}$$

Para recorrer todo o intervalo de tempo, vamos introduzir a quantidade

$$g(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\delta^{-1} \|\mathcal{N}_{\mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)}}\|_{-1}}{\epsilon}$$

\hookrightarrow será positiva para algum t se, e somente se, a dinâmica for não-Markoviana no sentido de RHP

Medida RHP

$$M_{RHP} = \int_{t_0}^{t_0} g(t) dt$$

\hookrightarrow medida de não-Markovianidade RHP
implica que todos os processos não-Markovianos BLP também podem ser medidas

Distância Tresz:

A evolução é não-Markoviana se, para algum p_1 e p_2 , por as vezes um instante de tempo t durante a evolução, a distância Tresz aumenta, i.e.,

$$\frac{d}{dt} D_2(p_1(t), p_2(t)) > 0$$

Dolininde

$$\sigma(p_1, p_2, t) = \max \left\{ 0, \frac{d}{dt} D_2(p_1(t), p_2(t)) \right\}$$

Seves una quantidade não-nula sempre que a distância é positiva.

Medida BLP

$$\text{BLP} = \max_{p_1, p_2} \int_{t_0}^{t_f} \sigma(p_1, p_2, t) dt$$

integral sobre todos os intervalos com $\sigma > 0$ e máximo sobre todos os estados iniciais possíveis

↳ difícil de verificar porque é preciso analisar todos os estados iniciais

↳ porém, para que biles assume uma forma mais simples

Vamos considerar dois operadores distintos intitutivamente separados, ρ e $\rho + \delta\rho$. Na representação de Bloch, podemos escrever

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sum_i n_i \sigma_i)$$

$$\rho + \delta\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sum_i (n_i + \delta n_i) \sigma_i)$$

↳ distância traço quadrática:

$$D_J^2(\rho + \delta\rho, \rho) = \frac{1}{4} \|\delta\rho\|^2,$$

Autoraivos de $\delta\rho$:

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \|\delta\vec{n}\| = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta n_1^2 + \delta n_2^2 + \delta n_3^2}.$$

A norma traço lica

$$\|\delta\rho\|_1 = |\lambda_+| + |\lambda_-| = \|\delta\vec{n}\|.$$

Assim,

$$D_J^2(\rho + \delta\rho, \rho) = \frac{1}{4} \|\delta\vec{n}\| \|\delta\vec{n}\| = \frac{1}{4} \delta\vec{n}^T \delta\vec{n}$$

Se os operadores considerados evoluem segundo algum mapa dinâmico quântico (inversível), então obtemos uma equação motion local no tempo que pode ser escrita na representação de Bloch.

$$\dot{\vec{n}}(t) = \vec{n}(t) + D(t) \vec{n}(t)$$

$$\dot{\vec{n}}(t + \delta t) = \vec{n}(t) + D(t)(\vec{n}(t) + \delta\vec{n}(t))$$

$$\delta\vec{n}(t) = D(t) \delta\vec{n}(t)$$

sendo grande

$D(t) + D^T(t)$ tem

→ autorawler
positivo

Tem-se entao

$$\frac{d}{dt} D_J^2(\rho + \delta\rho, \rho) = \frac{1}{4} [\delta\vec{n}^T \delta\vec{n} + \delta\vec{n}^T \delta\vec{n}]$$

$$= \frac{1}{4} [\delta\vec{n}^T (D(t) + D^T(t)) \delta\vec{n}] > 0$$

A evolução de um g-bit é BLP não-Markoviana quando

$$\lambda_{\max} [D(\delta) + D^T(\delta)] > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max}[A] \text{ é o maior autovalor de } A$$

Taxas de Decaimento

Uma dinâmica gerada por uma equação mestra local no tempo e CP-divisível (e portanto RHP Markoviana) tem as taxas de decaimento sejam não-negativas. A medida Anderson-Cresser-Hall-Li (ACHL) é baseada na negatividade dessas taxas. Para cada taxa de decaimento $r_i(t)$ definimos

$$f_i(t) = \max \{0, -r_i(t)\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[|\delta_i(t)| - \delta_i(t) \right]$$

→ onde a contribuição de $\delta_i(t)$ ao caráter não-Markoviano da evolução

Contribuição total:

$$f(t) = \sum_i f_i(t)$$

Medida ACHL

$$M_{\text{ACHL}} = \int_{t_0}^{t_f} f(t) dt$$

como a eq mestra está na forma canônica, as taxas de decaimento estão bem definidas, por consequência, a medida é bem-definida

→ como ACHL e RHP são baseados no desvio da CP-divisibilidade, essas medidas são relacionadas por um teorema

Teorema

$$M_{\text{ACHL}} = \frac{d}{Z} M_{\text{RHP}}, \quad d = \dim \mathcal{H}.$$