问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

如何判别该公式是重言式?

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是人,

$G(x)$: x是会死的,

a: 苏格拉底。

则有 $\underbrace{\forall x(F(x)\rightarrow G(x))}_{p} \wedge \underbrace{F(a)}_{q} \rightarrow \underbrace{G(a)}_{r}$

代换实例: $p \wedge q \rightarrow r$ 为重言式?

第8节 一阶逻辑等值演算

主要内容:

- 一阶逻辑等值式
- 置换规则
- 换名规则、代替规则

1. 一阶逻辑等值式

定义1 设A, B是两个谓词公式, 如果$A\leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B**等值**, 记作$A\Leftrightarrow B$, 并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**。

判别谓词公式A与B等值的方法:

判别谓词公式$A\leftrightarrow B$是永真式;

等值演算

(如何演算? 需要一些基本等值式和规则)

判别谓词公式A是永真式的方法:

(命题公式)重言式的代换实例;

等值演算.

判别谓词公式$A\leftrightarrow B$是永真式的方法?

判别谓词公式A是永真式的方法

判别谓词公式A是永真式的方法:

(命题公式)重言式的代换实例;

等值演算.

问题：命题公式中的重言式有哪些?

命题逻辑基本等值式：16组等值式(24式)

——“等价重言式”

命题逻辑推理定律

——重言蕴涵式

判别谓词公式$A \leftrightarrow B$是永真式的方法

判别谓词公式$A \leftrightarrow B$是永真式的方法:

(命题公式)重言式$A \leftrightarrow B$的代换实例;

等值演算.

问题1：命题公式$A \leftrightarrow B$中的重言式有哪些?

命题逻辑基本等值式：16组等值式(24式)

——“等价重言式”

问题2：谓词公式$A \leftrightarrow B$如何开始演算?

需要一些基本等值式和演算规则

回顾命题逻辑基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

回顾命题逻辑基本等值式

零律 $A \lor 1 \Leftrightarrow 1$，$A \land 0 \Leftrightarrow 0$

同一律 $A \lor 0 \Leftrightarrow A$，$A \land 1 \Leftrightarrow A$

排中律 $A \lor \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A \land \neg A \Leftrightarrow 0$

蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \land (B \to A)$

假言易位 $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论 $(A \to B) \land (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

特别提示：16组等值式(24式)

一阶逻辑基本等值式

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如:

$\neg\neg\forall xF(x)\Leftrightarrow\forall xF(x)$

是双重否定律 $\neg\neg A\Leftrightarrow A$的代换实例

$\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

是蕴涵等值式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$的代换实例

一阶逻辑基本等值式

第二组

(1) 消去量词等值式

设个体域为有限集$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，则有

① $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

(2) 量词否定等值式

设公式$A(x)$含自由出现的个体变项x，则有

① $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

② $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

一阶逻辑基本等值式

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的出现.

关于全称量词的：

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow \forall xA(x)$

③④如何理解或记忆？

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow \exists xA(x)$

一阶逻辑基本等值式

(4) 量词分配等值式

设公式$A(x)$，$B(x)$含自由出现的个体变项x，则

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律.

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 不成立

解释I_1: 个体域R, $A(x)$: $x>0$, $B(x)$: $x\leq 0$

左端：$\forall x(x>0 \vee x\leq 0)$ 为真

右端：$\forall x(x>0) \vee \forall x(x\leq 0)$ 为假

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 不成立

解释I_1: 个体域R, $A(x)$: $x>0$, $B(x)$: $x\leq 0$

左端：$\exists x(x>0 \wedge x\leq 0)$ 为假

右端：$\exists x(x>0) \wedge \exists x(x\leq 0)$ 为真

考虑

(4) 量词分配等值式

设公式$A(x)$，$B(x)$含自由出现的个体变项x，则

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

已知：$\forall x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ 不成立，则

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 成立？

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 成立？

已知：$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 不成立，则

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 成立？

$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 成立？

2. 置换规则、换名规则、代替规则

1. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含 A 的公式, 那么, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2. 换名规则

设 A 为一公式，将 A 中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为 A'，则 $A' \Leftrightarrow A$.

3. 代替规则

设 A 为一公式，将 A 中某个个体变项的所有自由出现用 A 中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为 A'，则 $A' \Leftrightarrow A$.

实例

例1 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值.

(1) 没有不犯错误的人

解: 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

实例

例1 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值.

(2) 不是所有的人都爱看电影

解: 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 置换

实例

例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

解： $\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\rightarrow G(x,t,z))$ 辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x,u,z)\rightarrow G(x,y,z))$ 辖域扩张等值式

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解: $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow$

$\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(\mathrm{F}(c)\rightarrow G(y)))$

$\Leftrightarrow((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解法二:

$$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow \exists yG(y))$$ 辖域收缩等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(b)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

$$\wedge(F(c)\rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c))$$

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(2) $\exists x\forall yF(x,y)$

解: $\exists x\forall y\mathrm{F}(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))$

$\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$

$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

前面的问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

如何判别该公式是重言式?

一阶逻辑命题符号化:

设 $F(x)$: x是人,

$G(x)$: x是会死的,

a: 苏格拉底。

则有 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$

代换实例: $p \wedge q \rightarrow r$ 为重言式?

等值演算

前面的问题

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$$

$\Leftrightarrow \forall x((F(x)\rightarrow G(x))\wedge F(a)) \rightarrow G(a)$ 辖域扩张等值式

$\Leftrightarrow \exists x((F(x)\rightarrow G(x))\wedge F(a) \rightarrow G(a))$ 辖域扩张等值式

$\Leftrightarrow$?

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的出现.

关于全称量词的:

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow \forall xA(x)$

关于存在量词的:

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow \exists xA(x)$

前面的问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是人，

$G(x)$: x是会死的，

a: 苏格拉底。

则有 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$

如何判别该公式是重言式？

代换实例：$p \wedge q \rightarrow r$ 为重言式？

等值演算？

推理正确或推理证明？

总 结

主要内容:

- 一阶逻辑等值式：基本等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则

基本要求:

- 深刻理解并牢记一阶逻辑中的重要等值式, 并能准确而熟练地应用它们.
- 熟练正确地使用置换规则、换名规则、代替规则.