引 言

定理 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式。

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \Leftrightarrow 1$。

判断公式是否为重言式的方法:

真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

判断推理是否正确的方法:

真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

引 言

判断推理是否正确的方法:
真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

上述内容是从命题公式的真值和命题演算的角度讨论如何判断推理的正确性。

在实际应用中，证明推理正确和进行有效推理的基本方法是构造推理的证明，即构造一个从前提到结论的公式序列，序列中的每一个公式都是前提的有效结论。

下面介绍如何构造这样的序列。

第6节 命题逻辑的推理理论(下)

主要内容:

- 推理的形式结构:
  - 推理正确的定义
  - 推理的形式结构
  - 判断推理正确的方法
  - 推理定律
- 自然推理系统*P*:
  - 自然推理系统*P*的定义
  - 在*P*中构造证明方法

形式系统

对由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的正确推理的证明给出严格的形式描述。

证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面公式应用推理规则得到的结论（中间结论或推理中的结论）。

形式系统

定义1 一个**形式系统** I由下面4个部分组成:

（1）非空的字母表$A(I)$;

（2） $A(I)$中符号构造的合式公式集$E(I)$;

（3） $E(I)$中一些特殊的公式组成的公理集$A_X(I)$；

（4）推理规则集$R(I)$ 。

将I记为四元组$<A(I), E(I), A_X(I), R(I)>$，其中：

$<A(I), E(I)>$是I的形式语言系统;

$<A_X(I), R(I)>$是I的形式演算系统。

形式系统

形式系统一般分为两类：

一类是自然推理系统：是从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，最后得到的命题公式是推理的结论（它是有效的结论，可能是重言式，也可能不是重言式）。

另一类是公理推理系统：它只能从若干条给定的公理出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，得到的结论是系统中的重言式，称为系统中的定理。

下面只介绍自然推理系统P，它的定义中无公理部分，因此只有3部分。

自然推理系统P

定义2 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式(命题公式): 见之前的定义

3. 推理规则(12条)

(1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提。

(2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提。

自然推理系统*P*

(3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

[由9条推理定律和结论引入规则可以导出以下推理规则]

(4) 假言推理规则(或分离规则)：若证明的公式序列中已出现过$A \rightarrow B$和A，则由假言推理定律$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$可知，$B$是$A \rightarrow B$和$A$的有效结论。由结论引入规则可知，可将$B$引入到命题公式序列中来。

[以下各条推理规则直接以图式给出，不再加以说明]

假言推理规则用图式表示为如下形式：

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ A\end{array}}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ B\rightarrow C\end{array}}{\therefore A\rightarrow C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\vee B\\ \neg B\end{array}}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\lor C \\ \hline \therefore B\lor D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\lor\neg D \\ \hline \therefore \neg A\lor\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A\land B \end{array}$$

在自然推理系统*P*中构造证明

定义3 设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$，结论B及公式序列$C_1, C_2, \ldots, C_l$。如果每一个C_i $(1\le i \le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l = B$, 则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明。

如果存在由前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出结论B的证明，则这个推理是有效的。

实际上，证明的本身就是一个有效推理的过程。

在自然推理系统P中构造证明

推理的形式结构:

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \models B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

在自然推理系统P中构造证明

构造从前提$A_1, A_2, \ldots , A_k$推结论B的证明时，推理的形式结构采用如下形式：

前提：$A_1, A_2, \ldots , A_k$
结论：B

对于正确的推理，能从前提出发，严格按照推理规则构造命题公式序列，序列的最后一条是结论。另外，对于任意的赋值，若$A_1, A_2, \ldots , A_k$均为真，则构造出的命题公式序列的每一条也均为真，从而结论B为真。

构造证明实例

例1 在系统*P*中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩。如果颐和园游人太多，就不去颐和园。今天是周六，并且颐和园游人太多。所以, 我们去圆明园或动物园玩。

解1：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

(2) 前提：$p\rightarrow(q\vee r)$，$s\rightarrow\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

直接证明法

(2) 前提：$p\rightarrow(q\vee r)$，$s\rightarrow\neg q$，p，s

结论：$r\vee t$

(3) 证明：

① $p\rightarrow(q\vee r)$	前提引入
② p	前提引入
③ $q\vee r$	①②假言推理
④ $s\rightarrow\neg q$	前提引入
⑤ s	前提引入
⑥ $\neg q$	④⑤假言推理
⑦ r	③⑥析取三段论
⑧ $r\vee t$	⑦附加

构造证明实例

例2 在系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩。如果颐和园游人太多，就不去颐和园。今天是周六，并且颐和园游人太多。所以，我们去圆明园或动物园玩。

解2：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，

r：到圆明园玩，s：颐和园游人太多

t：到动物园玩

(2) 前提：$p \to ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$，$s \to \neg q$，$p$，$s$

结论：$r \vee t$

直接证明法

(2) 前提：$p\to((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$, $s\to\neg q$， p， s

结论：$r\vee t$

(3) 证明：

① $p\to((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$	前提引入
② p	前提引入
③ $(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$	①②假言推理
④ $(q\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$	③置换
⑤ $s\to\neg q$	前提引入
⑥ s	前提引入
⑦ $\neg q$	⑤ ⑥假言推理
⑧ $q\vee r$	④化简
⑨ r	⑦ ⑧析取三段论
⑩ $r\vee t$	⑨附加

证明实例

例3 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课。若我明天有课，今天必备课。我今天没备课。所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解：(1) 命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，　s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

考虑这样做是否可行?

例3 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课。若我明天有课，今天必备课。我今天没备课。所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解：(1) 命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，　　s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

考虑这样做是否可行?

(2) 写出证明的形式结构

前提：$((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①②拒取式

④ $((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\rightarrow r$ 前提引入

⑤ $\neg((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$ ③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$ ⑤置换 （?）

考虑这样做是否可行?

写成另外一种推理形式结构:

$$(((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow s)\wedge\neg s\rightarrow(\neg p\wedge\neg q)$$

判别该式是否为重言式?

考虑赋值:**1100**

"或"的符号化问题

再考虑下面的推理证明

例4 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

前提： $p \to (q \lor r)$，$q \to \neg p$，$s \to \neg r$

结论： $p \to \neg s$

附加前提证明法

附加前提证明法 适用于结论为蕴涵式

欲证： 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

前面提到的考虑问题

例4 在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

前提：$p \to (q \vee r)$，$q \to \neg p$，$s \to \neg r$

结论：$p \to \neg s$

证明

① p 附加前提引入

② $p \to (q \vee r)$ 前提引入

③ $q \vee r$ ①②假言推理

④ $q \to \neg p$ 前提引入

⑤ $\neg q$ ①④拒取式

⑥ r ③⑤析取三段论

⑦ $s \to \neg r$ 前提引入

⑧ $\neg s$ ⑥⑦拒取式

附加前提证明法实例

例5 构造下面推理的证明：

2是素数或合数。若2是素数，则 $\sqrt{2}$ 是无理数。若 $\sqrt{2}$ 是无理数，则4不是素数。所以，如果4是素数，则2是合数。

解： 用附加前提证明法构造证明。

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$ 是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p \vee q$, $p \to r$, $r \to \neg s$

结论：$s \to q$

附加前提证明法实例

前提：$p \lor q$，$p \to r$，$r \to \neg s$

结论：$s \to q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p \to r$	前提引入
③ $r \to \neg s$	前提引入
④ $p \to \neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p \lor q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)：在前提中加入$\neg B$，推出矛盾

欲证：　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

　　　　结论：B

等价地证明：

　　　　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

　　　　结论：0或矛盾式

理由：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$

归谬法实例

例6 前提：$\neg(p \wedge q) \vee r$，$r \to s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明： 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r \to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p \wedge p$	⑧⑨合取

曾经给出的2个问题

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。
所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，
r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A，
则有

前提：$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$, p, $q \rightarrow s$, $\neg s$
结论： r

曾经给出的2个问题

前提：$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$, p, $q \rightarrow s$, $\neg s$

结论：r

证明

① $q \rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg q$	①②拒取式
④ p	前提引入
⑤ $p \wedge \neg q$	③④合取引入
⑥ $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$	前提引入
⑦ r	⑤⑥假言推理

曾经给出的2个问题

前提：$(p\wedge\neg q)\to r,\ p,\ q\to s,\ \neg s$

结论：r

证明 用归缪法

① $\neg r$	结论否定引入
② $(p\wedge\neg q)\to r$	前提引入
③ $\neg(p\wedge\neg q)$	① ②拒取式
④ $\neg p\vee q$	③置换
⑤ $q\to s$	前提引入
⑥ $\neg s$	前提引入
⑦ $\neg q$	⑤ ⑥拒取式
⑧ $\neg p$	④ ⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

曾经给出的2个问题

苏格拉底三段论：

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

命题符号化：

p:凡是人都会死的

q:苏格拉底是人

r:苏格拉底也会死的

前提： p, q

结论： r

总 结

主要内容：

- 自然推理系统*P*
- 构造推理证明的方法

    直接证明法

    附加前提证明法

    归谬法(反证法)

基本要求：

- 牢记 *P* 系统中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题