第12节 可满足性问题与消解法

主要内容:

- 命题公式的可满足性问题
- 谓词公式的可满足性问题

1. 命题公式的可满足性问题

命题公式的可满足性问题是算法理论的核心问题之一.

我们已经知道这个问题可以直接用真值表、主析取范式或主合取范式解决，但这两种方法的计算量都很大。

本节介绍一种新的方法——消解法或归结法。

命题公式的可满足性问题

命题公式的可满足性问题：判断命题公式是否是可满足的.

因此先从可满足的定义说起。

定义1 设A是命题公式 (或合式公式).

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

A是可满足的$\Leftrightarrow$ A不是矛盾式

$\Leftrightarrow$存在一组赋值使A为真

命题公式的可满足性问题

问题：不可满足的定义或说法

A是可满足的$\Leftrightarrow$ A不是矛盾式
$\Leftrightarrow$存在一组赋值使A为真

A是不可满足的$\Leftrightarrow$ $\neg$(A不是矛盾式)
$\Leftrightarrow$ A是矛盾式
$\Leftrightarrow$ $\neg A$是永真式
$\Leftrightarrow$ $\neg$存在一组赋值使A为真
$\Leftrightarrow$ 任何赋值都使A为假

回 顾

判断命题公式类型的方法：

1、真值表　2、等值演算　3、主析（合）取范式

设*A*含*n*个命题变项.

*A*为重言式 $\Leftrightarrow$ *A*的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ 1(也是*A*的主合取范式，等值演算).

*A*为矛盾式 $\Leftrightarrow$ *A*的主合取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ 0(也是*A*的主析取范式，等值演算).

*A*为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ *A*的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow$ *A*的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

命题公式的可满足性问题

判断命题公式是否可满足的方法:

1、真值表　2、主析取范式或主合取范式

设A含n个命题变项.

A是可满足的$\Leftrightarrow$ A不是矛盾式

$\Leftrightarrow$存在一组赋值使A为真

A是不可满足的

$\Leftrightarrow$ A为矛盾式

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式含全部2^n个极大项

计算量大，有没有其他方法?

命题公式的可满足性问题

定理1（**范式存在定理**）任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.

说明：一般命题公式的可满足性问题可以化为合取范式的可满足性问题.

回顾：归结证明法

归结证明法的基本思想是采用归谬法(或反证法)，把结论的否定引入前提。

如果推出空简单析取式，即推出0，则证明推理正确。

回顾：归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)：在前提中加入$\neg B$，推出矛盾

欲证：　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

　　　　结论：B

等价地证明：

　　　　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

　　　　结论：0或矛盾式

理由：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$
$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$

回顾：归谬法（反证法）

归谬法 (反证法):

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾

欲证：前提：$A_1, A_2, \dots, A_k$

结论：B

等价地证明：

前提：$A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B$

结论：0或矛盾式

理由：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$

$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$

理由：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$

欲证：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式

即证：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B \Leftrightarrow 1$

$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \Leftrightarrow 1$

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \Leftrightarrow 0$

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B$为不可满足式

联想：合取范式 归结法

命题公式的可满足性问题

基本概念:

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

$$p,\ \neg q,\ p\vee\neg q,\ p\vee q\vee r, \dots$$

(3) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$$p,\ \ p\vee\neg q,\ \ \neg p\wedge q,\ (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$$

不失一般性，假设一个简单析取式不同时出现某个命题变项和它的否定. (为什么这样假设？)

称不含任何文字的简单析取式为空简单析取式, 记作λ.

规定：空简单析取式λ是不可满足的(因为对任何赋值, 空简单析取式中都没有文字为真).

因此：含有空简单析取式的合取范式是不可满足的.

命题公式的可满足性问题

符号：

S 表示 合取范式(由有限个简单析取式组成的合取式),

C 表示 简单析取式(仅由有限个文字构成的析取式),

L 表示 文字(命题变项及其否定的总称).

为表示方便，公式可带下角标或 $'$.

设α是关于S中命题变项的赋值表示赋值，用$\alpha(l)$、$\alpha(C)$和$\alpha(S)$分别表示在α下l、C和S的值.

又设S和S'是两个合取范式,

$S \approx S'$ 表示 S是可满足的当且仅当S' 是可满足的.

命题公式的可满足性问题

定义2 设l是一个文字，记

$$l^c = \begin{cases} \neg p & \text{若} l = p \\ p & \text{若} l = \neg p \end{cases}$$

称l^c文字l的**补**.

回顾：归结规则

归结定律：$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$

根据归结定律得到如下归结规则：

$$\begin{array}{r} l \vee C_1 \\ \neg l \vee C_2 \\ \hline \therefore C_1 \vee C_2 \end{array}$$

其中，l是一个(命题)变元，C_1和C_2是简单析取式。

前提：$l \vee C_1$，$\neg l \vee C_2$

结论：$C_1 \vee C_2$

证明：？

命题公式的可满足性问题

下面给出消解规则(或归结规则)及其性质：

定义3 设C_1, C_2是两个简单析取式， C_1含文字l，C_2含文字l^c. 从C_1中删去l，从C_2中删去l^c，然后再将所得到的结果析取成一个简单析取式，称这样得到的简单析取式为C_1，C_2(以l和l^c为消解文字)的消解式或消解结果, 记作Res(C_1,C_2).

归结定律：$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$

根据归结定律得到如下归结规则：

$$\begin{array}{c} l \vee C_1 \\ \neg l \vee C_2 \\ \hline \therefore C_1 \vee C_2 \end{array}$$

命题公式的可满足性问题

定义3′ 设C_1, C_2是两个简单析取式，$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c，称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为**消解文字**)的**消解式**或**消解结果**, 记作$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$.

即$C_1 = l\vee C_1'$, $C_2 = l^c\vee C_2'$, $\mathrm{Res}(C_1,C_2) = C_1'\vee C_2'$.

例如： $\mathrm{Res}(\neg p\vee q\vee r, p\vee q\vee\neg s) = q\vee r\vee\neg s$

归结定律：$(l\vee C_1)\wedge(\neg l\vee C_2)\Rightarrow C_1\vee C_2$

根据归结定律得到如下归结规则：

$$\begin{array}{r} l\vee C_1 \\ \neg l\vee C_2 \\ \hline \therefore C_1\vee C_2 \end{array}$$

命题公式的可满足性问题

$C_1 = l \vee C_1', C_2 = l^c \vee C_2', \mathrm{Res}(C_1,C_2) = C_1' \vee C_2'$.

说明：根据上述定义由C_1，C_2得到$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$的规则称作消解规则或归结规则。

可以证明：如果C_1，C_2可对多对文字消解，其消解结果都是等值的。

例如：$C_1 = \neg p \vee q \vee r$，$C_2 = p \vee \neg r \vee s \vee t$，

$\mathrm{Res}(C_1,C_2) = q \vee r \vee \neg r \vee s \vee t$ (以p和$\neg p$为消解文字)

或者

$\mathrm{Res}(C_1,C_2) = \neg p \vee q \vee p \vee s \vee t$ (以r和$\neg r$为消解文字)

都是永真式.

命题公式的可满足性问题

$S \approx S'$: S是可满足的当且仅当S' 是可满足的.

定理2 $C_1 \wedge C_2 \approx \text{Res}(C_1,C_2)$

证明1： 记$C= \text{Res}(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$, 其中$l$和$l^c$为消解文字, $C_1=l \vee C_1'$, $C_2=l^c \vee C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

假设$C_1 \wedge C_2$是可满足的, α是它的满足赋值, 不妨设$\alpha(l)=1$. C_2必含有文字$l' \neq l, l^c$且$\alpha(l')=1$. C中含有l', 故α满足C.

反之, 假设C是可满足的, α是它的满足赋值. C必有l'使得$\alpha(l')=1$, 不妨设C_1'含l', 于是α满足C_1. 把扩张到l(和l^c)上:

若$l=p$, 则令$\alpha(p)=0$;

若$l^c=p$, 则令$\alpha(p)=1$. 恒有$\alpha(l^c)=1$, 从而α满足C_2. 得证$C_1 \wedge C_2$是可满足的.

命题公式的可满足性问题

定理2 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

证明2： 记$C=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$, 其中$l$和$l^c$为消解文字, $C_1=l \vee C_1'$, $C_2=l^c \vee C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

假设$C_1 \wedge C_2$是可满足的, α是它的满足赋值，即$\alpha(C_1 \wedge C_2)=1$.

若$\alpha(l)=1$，则$\alpha(C_1)=\alpha(l \vee C_1')=1$；由于$\alpha(C_1 \wedge C_2)=1$，所以$\alpha(C_2)=\alpha(l^c \vee C_2')=1$. 而$\alpha(l^c)=0$，所以$\alpha(C_2')=1$. 从而$\alpha(C)=\alpha(C_1' \vee C_2')=1$, 故$\alpha$满足$C$.

若$\alpha(l)=0$，则$\alpha(l^c)=1$，于是$\alpha(C_2)=\alpha(l^c \vee C_2')=1$；由于$\alpha(C_1 \wedge C_2)=1$，所以$\alpha(C_1)=\alpha(l \vee C_1')=1$. 而$\alpha(l)=0$，所以$\alpha(C_1')=1$. 从而$\alpha(C)=\alpha(C_1' \vee C_2')=1$, 故$\alpha$满足$C$.

反之, 见证明1.

命题公式的可满足性问题

定理2 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1,C_2)$

注意: $C_1 \wedge C_2$与$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$具有相同的可满足性, 但不一定等值.

实际上，从定理的证明可以看到:

任何满足$C_1 \wedge C_2$的赋值都满足$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$;

但满足$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$的赋值不一定满足$C_1 \wedge C_2$.

例如：$C_1 = p \vee q \vee r$，$C_2 = p \vee \neg r$，$\mathrm{Res}(C_1,C_2) = p \vee q$.

$\alpha = 010$是$C_1 \wedge C_2$的满足赋值，也是$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$的满足赋值;

$\alpha' = 011$是$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$的满足赋值，但不是$C_1 \wedge C_2$的满足赋值.

命题公式的可满足性问题

定理2 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

给定一个合取范式S，从S的简单析取式开始，重复使用消解规则可以得到一个简单析取式序列.

根据定理2：

如果S是可满足的，得到的所有简单析取式都是可满足的.

如果最后得到空简单析取式λ，则S是不可满足的.

例如：当 $C_1 = A$,

$C_2 = \neg A$

有 $\mathrm{Res}(C_1, C_2) = \lambda$.

消解序列与合取范式的否证

定义4 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\leq i\leq n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j, C_k)(1\leq j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的**消解序列**.

当$C_n=\lambda$时, 称此序列是S的一个**否证**.

消解序列与合取范式的否证

命题1 如果合取范式S有否证，则S是不可满足的.

那么，反之呢？

命题2 设S含有简单析取式l，从S中删去所有包含l的简单析取式，再从剩下的简单析取式中删去l^c，把这样得到的合取范式记为S'，则$S \approx S'$.

命题3 如果合取范式S不可满足的，则S有否证.

定理3 一个合取范式是不可满足的当且仅当它有否证.

消解序列与合取范式的否证

定义4 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\le i\le n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j, C_k)(1\le j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的消解序列.

当$C_n=\lambda$时, 称此序列是S的一个否证.

定理3 一个合取范式是不可满足的当且仅当它有否证.

A是不可满足的$\Leftrightarrow$ A为矛盾式

$\Leftrightarrow$ A(的合取范式)有否证

实 例

例1 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

证： $C_1=\neg p\vee q$,

$C_2= p\vee q\vee\neg s$,

$C_3=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=q\vee\neg s$,

$C_4=q\vee s$,

$C_5=\mathrm{Res}(C_3,C_4)=q$,

$C_6=\neg q$,

$C_7=\mathrm{Res}(C_5,C_6)=\lambda$,

这是S的否证，从而证明S是不可满足的.

实 例

例1 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

事实上，

$\neg p\vee q\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee s)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg s)\Leftrightarrow M_4\wedge M_5$

$p\vee q\vee\neg s\Leftrightarrow M_1$

$q\vee s\Leftrightarrow(p\vee q\vee s)\wedge(\neg p\vee q\vee s)\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$,

$\neg q\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee s)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg s)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee s)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg s)$

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_3\wedge M_6\wedge M_7$

$S\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7$

S为矛盾式，亦即S是不可满足的.

实 例

例2 构造公式$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg r$的否证，从而证明它是矛盾式.

解：消解序列:

①	$p\vee q$	A的简单析取式
②	$\neg p\vee q$	A的简单析取式
③	q	①,②消解
④	$\neg q\vee r$	A的简单析取式
⑤	$\neg r$	A的简单析取式
⑥	$\neg q$	④,⑤消解
⑦	λ	③,⑥消解

这是A的一个否证，从而证明A是矛盾式.

消解算法

消解算法

输入: 合式公式A

输出: 当A是可满足时, 回答“Yes”; 否则回答“No”.

1. 求A的合取范式S
2. 令$S_0 \leftarrow \varnothing$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, $S_1 \leftarrow S$的所有简单析取式
3. For $C_1 \in S_0$和$C_2 \in S_1$
4. If C_1, C_2可以消解 then
5. 计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$
6. If $C=\lambda$ then
7. 输出“No”, 计算结束
8. If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
9. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$

消解算法

10. For $C_1 \in S_1$, $C_2 \in S_1$且$C_1 \neq C_2$
11. If C_1, C_2可以消解 then
12. 计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$
13. If $C = \lambda$ then
14. 输出“No”, 计算结束
15. If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
16. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$
17. If $S_2 = \varnothing$ then
18. 输出“Yes”, 计算结束
19. Else $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1$, $S_1 \leftarrow S_2$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, goto 3

消解算法例题

例3 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

$$p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$$

解: $S= p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

第1次循环 $S_0=\varnothing$,

$S_1=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$,

$S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee q, p\vee\neg q)=p$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee\neg r)=p\vee\neg r$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee r)= p\vee r$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, q\vee r)=q$

$S_2=\{p\vee\neg r, p\vee r, q\}$

消解算法例题

第2次循环 $S_0=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$,

$S_1=\{p\vee\neg r, p\vee r, q\},$

$S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q)=p$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, p\vee r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(q\vee r, p\vee\neg r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(p\vee r, p\vee\neg r)=p$

$S_2=\varnothing$

输出“Yes”

消解算法例题

例3 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

$$p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$$

事实上 $p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge(p\vee q))\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow p\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge(p\vee\neg q))\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow p\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

$\Leftrightarrow p\wedge((q\vee\neg r)\wedge(q\vee r))$

$\Leftrightarrow p\wedge((q\vee(\neg r\wedge r))$

$\Leftrightarrow p\wedge(q\vee 0)$

$\Leftrightarrow p\wedge q$

易知上述公式为可满足式.

消解算法例题

例4 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(p\lor\neg q)\land(q\lor\neg r)\land(\neg q\lor\neg r)$$

解: $S=(p\lor\neg q)\land(q\lor\neg r)\land(\neg q\lor\neg r)$

第1次循环 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{p\lor\neg q, q\lor\neg r, \neg q\lor\neg r\}$, $S_2=\varnothing$

$p\lor\neg q$, $q\lor\neg r$ 消解得到$p\lor\neg r$

$q\lor\neg r$, $\neg q\lor\neg r$消解得到$\neg r$

$S_2=\{p\lor\neg r,\neg r\}$

第2次循环 $S_0=\{p\lor\neg q, q\lor\neg r, \neg q\lor\neg r\}$,$S_1=\{p\lor\neg r,\neg r\}$, $S_2=\varnothing$

$S_2=\varnothing$

输出 “Yes”,计算结束.

消解算法例题

例4 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$$

事实上

$p\vee\neg q\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_2\wedge M_3$

$q\vee\neg r\Leftrightarrow(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_1\wedge M_5$

$\neg q\vee\neg r\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_3\wedge M_7$

原式$\Leftrightarrow M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_5\wedge M_7$

原式是可满足的.

消解算法例题

例5 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q)$$

解: $S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q)$

第1次循环 $S_0=\varnothing, S_1=\{\neg p\vee q, p\vee q, \neg q\}, S_2=\varnothing$

$\neg p\vee q, p\vee q$消解得到q

$\neg p\vee q, \neg q$消解得到$\neg p$

$p\vee q, \neg q$消解得到p

$S_2=\{p, \neg p, q\}$

第2次循环 $S_0=\{\neg p\vee q, p\vee q, \neg q\},S_1=\{p, \neg p, q\}, S_2=\varnothing$

$\neg p\vee q, p$消解得到q

$p\vee q, p$消解得到q

$\neg q, q$消解得到λ

输出“No”,计算结束.

消解算法例题

例5 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q)$$

事实上

$\neg p\vee q\Leftrightarrow M_2$

$p\vee q\Leftrightarrow M_0$

$\neg q \Leftrightarrow(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\Leftrightarrow M_1\wedge M_3$

因此

$(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg q)\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$

即该式为矛盾式，亦即为不可满足式.

也可以用真值表求解.

命题公式的可满足性问题

说明：一般命题公式的可满足性问题可以化为**合取范式的可满足性问题**.

更多可满足性的应用以及求解问题可参考：
离散数学及其应用（原书第7版-本科教学版）.
Kenneth H. Rosen 著. 机械工业出版社

2. 谓词公式的可满足性问题

定义1 若谓词公式*A*在任何解释下均为真, 则称*A*为永真式(逻辑有效式).

若*A*在任何解释下均为假, 则称*A*为矛盾式(永假式).

若至少有一个解释使*A*为真, 则称*A*为可满足式.

说明:

(1) 永真式为可满足式，但反之不真.

(2) 判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的，即不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式是可满足的(永真式, 矛盾式).

谓词公式的可满足性问题

关于谓词公式的可满足性问题可参考：

人工智能原理. 石纯一等. 清华大学出版社

总 结

主要内容：

- 命题公式的可满足性问题
- 谓词公式的可满足性问题

基本要求：

- 掌握消解规则及其性质
- 会用消解算法判断命题公式的可满足性