问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是人，

$G(x)$: x是会死的，

a: 苏格拉底。

则有 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$

代换实例：$p \wedge q \rightarrow r$ 为重言式?

等值演算？

构造推理证明!

推理定律——遗留问题

已知有：量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\land B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\land\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\lor B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\lor\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\lor$，$\exists$对$\land$无分配律.

如何“证明”其正确？

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\lor\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

进一步考虑

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

(2) $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

(3) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$

(4) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

考虑上面“结论”的“倒推”问题：

$\forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \vee \exists x B(x)$ ？

第10-11节 一阶逻辑自然推理系统

主要内容:

- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则
- 一阶逻辑推理证明

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

定义1 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表
2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式的定义
3. 推理规则:
   (1) 前提引入规则
   (2) 结论引入规则
   (3) 置换规则
   (4) 假言推理规则
   (5) 附加规则
   (6) 化简规则
   (7) 拒取式规则

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

(8) 假言三段论规则

(9) 析取三段论规则

(10) 构造性二难推理规则

(11) 破坏性二难推理规则

(12) 合取引入规则

(13) 全称量词消去规则(简记为∀-规则或UI规则)

(14) 全称量词引入规则(简记为∀+规则或UG规则)

(15) 存在量词消去规则(简记为∃ -规则或EI规则)

(16) 存在量词引入规则(简记为∃ +规则或EG规则)

推理规则

(1) 前提引入规则

——在证明的任何步骤都可以引入前提。

(2) 结论引入规则

——在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提。

(3) 置换规则

——在证明的任何步骤，公式中的子公式都可以用等值的公式置换，得到公式序列中的又一个公式。

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\to B \quad B\to C}{\therefore A\to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A\vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\to B\\ C\to D\\ A\vee C\end{array}}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\to B\\ C\to D\\ \neg B\vee\neg D\end{array}}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{\therefore A\wedge B}$$

全称量词消去规则

(13) 全称量词消去规则(∀-或UI规则)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

两式成立的条件是：

(1)在第一式中，取代x的y应为任意的不在$A(x)$中约束出现的个体变项 (或者说：$A(x)$中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现).

(2)在第二式中，c为任意的不在$A(x)$中出现过的个体常项.

(3)用y或c去取代$A(x)$中的自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代.

重要提示

(13)全称量词消去规则(∀-或UI规则)

应用条件是:

(1)在第一式中，取代x的y应为任意的不在$A(x)$中约束出现的个体变项 (或者说：$A(x)$中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现).

(2)在第二式中，c为任意的不在$A(x)$中出现过的个体常项.

(3)用y或c去取代$A(x)$中的自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代.

*****要特别注意使用∀-规则的条件. 一定要保证，当$\forall xA(x)$为真时，$A(y)$或$A(c)$必为真，因而必须满足以上三个条件.

当$\forall xA(x)$为原子公式时，比如$A(x)= F(x)$，则$\forall xA(x)$为真时，对于个体域中任意个体变项y，不会出现$F(y)$为假的情况.

当$\forall xA(x)$不为原子公式时就可能会出现$\forall xA(x)$为真而$A(y)$为假的情况.

重要提示

*****要特别注意使用∀-规则的条件.

实例1. 对$A=\forall x\exists yF(x,y)$使用∀-规则, 推得$B=\exists yF(y,y)$.

取解释I: 个体域为R, $\overline{F}(x,y): x > y$

在I 下A被解释为$\forall x\exists y(x>y)$, 真; 而B被解释为$\exists y(y>y)$, 假

原因：在A中x自由出现在$\exists y$的辖域$F(x,y)$内[违背了条件(1)]

正确：对$A=\forall x\exists yF(x,y)$使用∀-规则, 推得$B=\exists yF(z,y)$.

(13)全称量词消去规则(∀-或UI规则)

应用条件是:

(1)在第一式中，取代x的y应为任意的不在$A(x)$中约束出现的个体变项 (或者说：$A(x)$中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现).

(2)在第二式中，c为任意的不在$A(x)$中出现过的个体常项.

(3)用y或c去取代$A(x)$中的自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代.

重要提示

(13)全称量词消去规则(∀-或UI规则)

应用条件是：

(1)在第一式中，取代x的y应为任意的不在$A(x)$中约束出现的个体变项 (或者说：$A(x)$中x不在$\forall y$和$\exists y$的辖域内自由出现).

(2)在第二式中，c为任意的不在$A(x)$中出现过的个体常项.

(3)用y或c去取代$A(x)$中的自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代.

在使用∀-或UI规则时，用第一式还是第二式要根据具体情况而定，这一点在后面的例题中加以说明.

全称量词引入规则

(14) 全称量词引入规则(∀+或UG规则)

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

该式成立的条件是：

(1)无论$A(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$A(y)$应该均为真.

(2)取代自由出现的y的x，也不能在$A(y)$中约束出现(或x不在前提的公式中自由出现).

重要提示

*****要特别注意使用∀+规则的条件.

应用∀+ 或UG规则时，必须能够证明前提$A(y)$对论域中每一可能的x是真.

实例2. 前提: $P(x) \to Q(x)$, $P(x)$

结论: $\forall x Q(x)$

取解释I: 个体域为Z, $\overline{P}(x): x$是偶数, $\overline{Q}(x): x$被2整除

在I 下前提为真, 结论为假, 从而推理不正确.

(14)全称量词引入规则(∀+或UG规则)

应用条件是:

(1)无论$A(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$A(y)$应该均为真.

(2)取代自由出现的y的x，也不能在$A(y)$中约束出现(或x不在前提的公式中自由出现).

重要提示

*****要特别注意使用∀+规则的条件.

实例3. 取个体域为R, $F(x,y)$: $x > y$.

$A(y) = \exists xF(x,y)$，显然$A(y)$满足条件(1)；

对$A(y)$应用UG规则时，若取已约束出现的x取代y，会得到

$\forall xA(x) = \forall x\exists xF(x,y) = \forall x\exists x(x > x)$，假命题[违背了条件(2)]

若取z取代y，得$\forall zA(z) = \forall z\exists xF(x,z) = \forall z\exists x(x > z)$，真命题

(14)全称量词引入规则(∀+或UG规则)

应用条件是：

(1)无论$A(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$A(y)$应该均为真.

(2)取代自由出现的y的x，也不能在$A(y)$中约束出现(或x不在前提的公式中自由出现).

存在量词消去规则

(15) 存在量词消去规则(∃-或EI规则)

$$\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(c)}$$

该式成立的条件是:

(1) c是使A为真的特定的个体常项.

(2) c不在$A(x)$中出现.

(3) 若$A(x)$中除自由出现的x外，还有其他自由出现的个体变项，此规则不能使用.

重要提示

*****要特别注意使用∃ -规则的条件.

实例4. 取个体域为N, $F(x)$: x 是奇数， $G(x)$: x 是偶数.

$\exists xF(x)$与$\exists xG(x)$ 都是真命题；

对$\exists xF(x)$应用EI规则时，取代x的c一定是特定的个体常项1、3、5等奇数，如$F(1)$、$F(3)$、$F(5)$均为真，而不能取c为0、2、4等偶数，因为$F(2)$、$F(4)$ 等为假 [违背了条件(1)]

同样，对$\exists xG(x)$应用EI规则时亦是如此.

(15) 存在量词消去规则(∃ -或EI规则)

应用条件是:

(1) c是使A为真的特定的个体常项.

(2) c不在$A(x)$中出现.

(3) 若$A(x)$中除自由出现的x外，还有其他自由出现的个体变项，此规则不能使用.

重要提示

*****要特别注意使用∃-规则的条件.

实例5. 取个体域为R, $F(x,y)$: $x > y$.

$\forall x\exists yF(x,y)$ 真命题， $\forall xF(x,c)$ 假命题；

① $\forall x\exists yF(x,y)$ 前提引入

② $\exists yF(z,y)$ ①$\forall$-

③ $F(z,c)$ ② $\exists$-

④ $\forall xF(x,c)$ ③ $\forall$+

此“证明”有无问题？

(15) 存在量词消去规则(∃-或EI规则)

应用条件是:

(1) c是使A为真的特定的个体常项.

(2) c不在$A(x)$中出现.

(3) 若$A(x)$中除自由出现的x外，还有其他自由出现的个体变项，此规则不能使用.

存在量词引入规则

(16) 存在量词引入规则(∃+或EG规则)

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)}$$

该式成立的条件是：

(1) c是(使A为真的)特定个体常项.

(2) 取代c的x不能在$A(c)$中出现过.

重要提示

*****要特别注意使用∃-规则的条件.

实例6. 取个体域为R, $F(x,y)$: $x > y$.

取$A(5)=\exists xF(x,5)$ 真命题

在用EG规则时，若用$A(5)$中已出现过的x取代5，得

$\exists xA(x)=\exists x\exists xF(x,x)=\exists x(x>x)$，假命题 [违背了条件(2)]

此时，若用$A(5)$中未出现过的y取代5，得

$\exists yA(y)=\exists y\exists xF(x,y)=\exists y\exists x(x>y)$，真命题

(16) 存在量词引入规则(∃+或EG规则)

应用条件是:

(1) c是(使A为真的)特定个体常项.

(2) 取代c的x不能在$A(c)$中出现过.

小 结

1、要特别注意使用∀-、∀+、∃-、∃+规则的条件.

2、只能对前束范式使用∀-、∀+、∃-、∃+规则.

构造推理证明的实例

例1 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:

任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以, 存在整数.

解: 设$F(x)$: x是自然数, $G(x)$: x是整数, 则有

前提: $\forall x(F(x)\to G(x))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

构造推理证明的实例

前提: $\forall x(F(x)\to G(x)), \exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
② $\exists xF(x)$	前提引入
③ $F(c)$	② $\exists$-
④ $F(c)\to G(c)$	①$\forall$-
⑤ $G(c)$	③ ④假言推理
⑥ $\exists xG(x)$	⑤ $\exists$+

构造推理证明的实例

前提: $\forall x(F(x)\to G(x)), \exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $F(c)$	① $\exists-$
③ $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
④ $F(c)\to G(c)$	③ $\forall-$
⑤ $G(c)$	②④假言推理
⑥ $\exists xG(x)$	⑤ $\exists+$

构造推理证明的实例

前提: $\forall x(F(x)\to G(x)), \exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

② $F(c)\to G(c)$ ① $\forall$-

③ $\exists xF(x)$ 前提引入

④ $F(c)$ ③ $\exists$-

⑤ $G(c)$ ②④假言推理

⑥ $\exists xG(x)$ ⑤ $\exists$+

注意: 消去全称量词和存在量词的先后顺序.

构造推理证明的实例

例2 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:

不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数. 所以, 有理数都不是无理数.

解: 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数,

$H(x)$: x能表示成分数，则有

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

构造推理证明的实例

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明:

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ ①置换

③ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$ ②置换

④ $F(y)\rightarrow\neg H(y)$ ③$\forall$-

⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ 前提引入

⑥ $G(y)\rightarrow H(y)$ ⑤$\forall$-

⑦ $H(y)\rightarrow\neg F(y)$ ④置换

⑧ $G(y)\rightarrow\neg F(y)$ ⑥⑦假言三段论

⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$ ⑧$\forall$+

构造推理证明的实例

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

在本题的证明中，要注意以下两点:

1) $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$不是前束范式，因而不能对它使用EI规则。

2) 因为结论中的量词是全称量词$\forall$，因而在使用UI规则时用第一式，而不能用第二式。

(13) 全称量词消去规则($\forall$-或UI规则)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

构造推理证明的实例

例3 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中，构造推理的证明.

人都喜欢吃蔬菜．但不是所有的人都喜欢吃鱼．所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

解: 令$F(x)$: x是人，$G(x)$: x喜欢吃蔬菜，

$H(x)$: x喜欢吃鱼，则有

前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$, $\neg\forall x(F(x)\to H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

构造推理证明的实例

证明：(归谬法)

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	结论否定引入
(2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$	(1)置换
(3) $\neg(F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y))$	(2)$\forall-$
(4) $G(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	(3)置换
(5) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
(6) $F(y)\rightarrow G(y)$	(5)$\forall-$
(7) $F(y)\rightarrow\neg F(y)\vee H(y)$	(4)(6)假言三段论
(8) $F(y)\rightarrow H(y)$	(7)置换
(9) $\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	(8)$\forall+$
(10) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$	前提引入
(12) 0	(9)(10)合取

构造推理证明的实例

例4 构造下面推理的证明:

(1) 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \forall xF(x)$

结论：$\forall xG(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(y)\rightarrow G(y)$	①$\forall-$
③ $\forall xF(x)$	前提引入
④ $F(y)$	③$\forall-$
⑤ $G(y)$	②④假言推理
⑥ $\forall xG(x)$	⑤$\forall+$

构造推理证明的实例

(2) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x)), \neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

证明：用归谬法

① $\neg\exists xF(x)$	结论否定引入
② $\forall x\neg F(x)$	①置换
③ $\neg F(c)$	②$\forall-$
④ $\neg\exists xG(x)$	前提引入
⑤ $\forall x\neg G(x)$	④置换
⑥ $\neg G(c)$	⑤ $\forall-$
⑦ $\forall x(F(x)\vee G(x))$	前提引入
⑧ $F(c)\vee G(c)$	⑦ $\forall-$
⑨ $G(c)$	③⑧析取三段论
⑩ $\neg G(c)\wedge G(c)$	⑥⑨合取引入

构造推理证明的实例

(3)前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall xF(x)\to\forall xH(x)$

证明: 用附加前提法

① $\forall xF(x)$	附加前提引入
② $F(y)$	①$\forall-$
③ $\forall x(F(x)\to G(x))$	前提引入
④ $F(y)\to G(y)$	③$\forall-$
⑤ $\forall x(G(x)\to H(x))$	前提引入
⑥ $G(y)\to H(y)$	⑤$\forall-$
⑦ $F(y)\to H(y)$	④⑥假言三段论
⑧ $H(y)$	②⑦假言推理
⑨ $\forall xH(x)$	⑧$\forall+$

前面的问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是人,

$G(x)$: x是会死的,

a: 苏格拉底。

则有

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $F(a)$

结论：$G(a)$

前面的问题

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), F(a)$

结论：$G(a)$

证明:

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(a)\rightarrow G(a)$	① ∀-
③ $F(a)$	前提引入
④ $G(a)$	② ③假言推理

推理定律——遗留问题

已知有：量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律.

如何“证明”其正确？

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

推理定律——遗留问题

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\lor\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

(2) 前提: $\exists x(A(x)\land B(x))$

结论: $\exists xA(x)\land\exists xB(x)$

证明:

① $\exists x(A(x)\land B(x))$ 前提引入

② $A(c)\land B(c)$ ①$\exists$-

③ $A(c)$ ②化简

④ $\exists xA(x)$ ③$\exists$+

⑤ $B(c)$ ②化简

⑥ $\exists xB(x)$ ⑤ $\exists$+

⑦ $\exists xA(x)\land\exists xB(x)$ ④ ⑥合取引入

推理定律——遗留问题

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(1) 前提: $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

结论: $\forall x(A(x)\vee B(x))$

推理定律——遗留问题

前提: $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

结论: $\forall x(A(x)\vee B(x))$

证明1：用归谬法和利用(2)式

1) $\neg\forall x(A(x)\vee B(x))$	结论否定引入
2) $\exists x\neg(A(x)\vee B(x))$	1)置换
3) $\exists x(\neg A(x)\wedge\neg B(x))$	2)置换
4) $\exists x\neg A(x)\wedge\exists x\neg B(x))$	规则如何标注?
5) $\forall xA(x)\vee\forall x\mathrm{B}(x)$	前提引入
6) $\neg\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$	5)置换
7) $\exists x\neg A(x)\rightarrow\forall xB(x)$	6)置换
8) $\exists x\neg A(x)$	4) 化简
9) $\forall xB(x)$	7)8)假言推理
10) $\exists x\neg B(x))$	4)化简
11) $\neg\forall xB(x)$	10)置换
12) $\neg\forall xB(x)\wedge\forall xB(x)$	10)(11)合取

推理定律——遗留问题

前提: $\forall xA(x) \lor \forall xB(x)$
结论: $\forall x(A(x) \lor B(x))$

证明2：用归谬法和利用(2)式

1) $\neg \forall x(A(x) \lor B(x))$ 结论否定引入
2) $\exists x \neg (A(x) \lor B(x))$ 1)置换
3) $\exists x (\neg A(x) \land \neg B(x))$ 2)置换
4) $\exists x \neg A(x) \land \exists x \neg B(x))$ 规则如何标注?
5) $\neg \forall xA(x) \land \neg \forall xB(x)$ 4)置换
6) $\neg (\forall xA(x) \lor \forall xB(x))$ 5)置换
7) $\forall xA(x) \lor \forall xB(x)$ 前提引入
8) 0 6)7)合取

推理定律——遗留问题

前提: $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$

结论: $\forall x(A(x)\vee B(x))$

证明3：用归谬法

(1) $\neg\forall x(A(x)\vee B(x))$	结论否定引入
(2) $\exists x\neg(A(x)\vee B(x))$	(1)置换
(3) $\exists x(\neg A(x)\wedge\neg B(x))$	(2)置换
(4) $\neg A(c)\wedge\neg B(c)$	(3) $\exists$-
(5) $\neg A(c)$	(4)化简
(6) $\exists x\neg A(x)$	(5) $\exists$+
(7) $\neg\forall xA(x)$	(6)置换
(8) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$	前提引入
(9) $\forall xB(x)$	(7)(8)析取三段论
(10) $\neg B(c)$	(4)化简
(11) $\exists x\neg B(x)$	(10) $\exists$+
(12) $\neg\forall xB(x)$	(11)置换
(13) $\neg\forall xB(x)\wedge\forall xB(x)$	(9)(12)合取

推理定律——遗留问题

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\lor\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\to\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\to\exists xB(x)$

(3) 前提：$\forall x(A(x)\to B(x))$

结论：$\forall xA(x) \to\forall xB(x)$

等价于证明(附加前提证明法)

前提：$\forall x(A(x)\to B(x))$, $\forall xA(x)$

结论：$\forall xB(x)$

例4 构造下面推理的证明:

(1) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x))$, $\forall xF(x)$

结论：$\forall xG(x)$

推理定律——遗留问题

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\lor\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\lor B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\land B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\land\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\to\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\to B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\to\exists xB(x)$

(4) 前提: $\forall x(A(x)\to B(x))$

结论: $\exists xA(x) \to \exists xB(x)$

等价于证明(附加前提证明法)

前提: $\forall x(A(x)\to B(x)), \exists xA(x)$

结论: $\exists xB(x)$

例1:

前提: $\forall x(F(x)\to G(x)), \exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

进一步考虑

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

考虑上面“结论”的“倒推”问题:

① $\forall x(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

其等价于

① 前提: $\forall x(A(x)\vee B(x))$

结论: $\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

进一步考虑

前提: $\forall x(A(x)\vee B(x))$
结论: $\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

等价于

前提: $\forall x(A(x)\vee B(x))$
结论: $\neg\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

证明: 用附加前提法

① $\neg\forall xA(x)$	附加前提引入
② $\exists x\neg A(x)$	①置换
③ $\neg A(c)$	② $\exists-$
④ $\forall x(A(x)\vee B(x))$	前提引入
⑤ $A(c)\vee B(c)$	④ $\forall-$
⑥ $B(c)$	③ ⑤析取三段论
⑦ $\exists xB(x)$	⑥ $\exists+$

总 结

主要内容:

- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

  推理定律、推理规则

- 推理证明

基本要求:

- 深刻理解自然推理系统N_L的定义，牢记N_L中的各条推理规则，特别是注意使用∀−、∀+、∃+、∃− 4条推理规则的条件.
- 能正确地给出有效推理的证明.