引 言

广义的数理逻辑：

包括逻辑演算、集合论、模型论、递归论、证明论等部分。

狭义的数理逻辑：

仅指逻辑演算，即命题逻辑演算和一阶(谓词)逻辑演算，这些内容构成数理逻辑其它分支的共同基础。

引 言

在数学中，为了说明一个命题是真命题需要进行证明。

要证明的命题有3种形式：

形式1 若A，则B，可表示成$A \rightarrow B$，其中A是前提或已知条件，B是结论。

形式2 A的充分必要条件是B，或A当且仅当B，可表示成$A \leftrightarrow B$。

形式3 B（即B恒为真）。

引 言

要证明的命题有3种形式：

形式1 若A，则B，可表示成$A\rightarrow B$，其中A是前提或已知条件，B是结论。

形式2 A的充分必要条件是B，或A当且仅当B，可表示成$A\leftrightarrow B$。

形式3 B（即B恒为真）。

由于“A的充分必要条件是B”等价于“若A，则B，并且若B，则A”，即$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$，故形式2可以化成形式1。

形式3可以看成形式1的特殊情况——没有前提A，也可以把它表示成$1\rightarrow B$，即前提恒为真。(如何理解?)

引 言

要证明的命题有3种形式：

形式1 若A，则B，可表示成$A \rightarrow B$，其中A是前提或已知条件，B是结论。

形式2 A的充分必要条件是B，或A当且仅当B，可表示成$A \leftrightarrow B$。

形式3 B（即B恒为真）。

要证形式1 的命题为真，是要证明当A为真时，B一定为真。

而对于形式3的命题，是要证B一定为真，这里没有前提A 。

说明：不管如何解释，后两种形式都可以化为形式1。

引 言

“若A，则B”的证明是在假设前提A为真的情况下，利用已知的定义、定理、引理和推论，按照推理规则推导出结论B为真的过程。

若A，则B，可表示成$A\to B$。

$A\to B$ 为真， 即$A\to B$ 为重言式，亦即$A\to B \Leftrightarrow 1$。

所谓定理是已经被证明的真命题。(当然，只有那些重要的真命题才能称为定理。)

引理和推论也是已经被证明的真命题，区别在于引理是为了证明某个定理而预先证明的真命题，而推论是由定理能够立即得到的真命题。

引 言

在证明中有时还要使用公理。

数学中的公理方法是古希腊欧几里得首创的，他在《几何原本》中从少数几个定义、公理出发，通过逻辑推理获得一系列的几何定理，建立起几何学的公理体系。

公理系统不仅使知识系统化，而且也是为了消除数学中的逻辑隐患。

公理是公理系统中的原始假设，即不加证明地承认它们。

它们中的绝大多数是被人们普遍接受的事实。

题外话

它们(公理)中的绝大多数是被人们普遍接受的事实。但是也有例外。

例如：欧氏几何中的平行公理：两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角和小于两个直角，则两直线则会在该侧相交。

它等价于另一种大家所熟悉的描述：过直线外一点，可作且只可作一直线跟此直线平行。

平行公理并不明显，人们一直想用其他公理推出它，但都失败了。

五条几何公理：

1.过相异两点，能作且只能作一直线（直线公理）。

2.线段(有限直线)可以任意地延长。

3.以任一点为圆心、任意长为半径，可作一圆(圆公理)。

4.凡是直角都相等(角公理)。

5.两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角和小于两个直角，则两直线则会在该侧相交(平行公理)。

题外话

直到19世纪中叶，高斯、罗巴切夫斯基等数学家认识到这种努力是不可能实现的，也就是说平行公理独立于其他公理，并且可以用不同的“平行公理”代替它而建立不同的几何学。

罗巴切夫斯基用一条新的公理“在平面上，过一直线外的一点至少可引两条和这直线不相交的直线”代替欧式平行公理，创建了一种新的非欧几何，现在称为罗巴切夫斯几何，又称双曲几何。

接着，黎曼又创建了另一个不同的非欧几何，他用来代替平行公理的公理是“在平面上，过一直线外的一点所引的任何直线都与这条直线相交”。这就是黎曼几何，又称椭圆几何。

引　言

"若A，则B"的证明是在假设前提A为真的情况下，利用已知的定义、定理、引理和推论，按照推理规则推导出结论B为真的过程。

证明方法不仅是数学研究中不可或缺的，而且在计算机科学中有广泛的应用，例如计算机推理所用的规则、程序正确性证明的技术、人工智能中的推理等等。

接下来，非形式地介绍常用的证明方法。

第13-14节 证明方法

主要内容:

- 直接证明法和归谬法
- 分情况证明法和构造性证明法
- 数学归纳法

1. 直接证明法和归谬法

直接证明法

设命题P：若A，则B，即$A \to B$。

直接证明法是假设A为真，利用已知的定义、定理、引理和推论，可能还有公理，推出B为真的结论，从而证明P为真。

直接证明法是最常用的证明方法。

直接证明法和归谬法

例1 证明：设A，B为任意集合。

(1) 若$A \subseteq B$，则$P(A) \subseteq P(B)$。

(2) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$。

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，即集合并运算的结合律成立。

直接证明法和归谬法

归谬法（反证法）

设命题P：若A，则B，即$A \to B$。

归谬法（反证法）是从假设A为真，B为假，推出矛盾。

这就说明当A为真时B必为真，从而证明P为真。

归谬法（反证法）也是常用的证明方法。

原理：$A \to B$

$$\Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee 0$$

$$\Leftrightarrow A \wedge \neg B \to 0$$

1.直接证明法和归谬法

例2 证明：不存在最大的素数。

证明：使用归谬法。

假设不然，即假设存在最大的素数，不妨设为p，则所有素数均大于或等于2，并且小于或等于p。

令S为所有素数之积，即$S = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$，

又设$S' = S+1$，即$S' = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p+1$。

易知，用2到p的所有素数去除S'，所得余数全是1。

这说明S'的正因子只有1与本身，故S'为素数。

可是$S' > p$，这与p是最大素数矛盾。

得证不存在最大的素数。

直接证明法和归谬法

例3 证明：不存在六阶无零因子环。

【近世代数内容】

直接证明法和归谬法

间接证明法

设命题P：若A，则B，即$A \to B$。

把P的逆否命题记作P'：

若非B，则非A，即$\neg B \to \neg A$。

P与P'同时为真，或同时为假，即$P \Leftrightarrow P'$。

因此可以通过证明P'来证明P。

这就是间接证明法。

原理：$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

直接证明法和归谬法

例4 证明：完全数不是素数。

[完全数：等于除本身外所有正因子之和的正整数。例如：6=1+2+3、28=1+2+4+7+14，均为完全数。]

证明：用间接证明法证明。

原命题的逆否命题是：素数不是完全数。

设p是素数，显然$p \geq 2$。除本身外，p只有一个正因子1，而$p \neq 1$，故p不是完全数。

得证原命题成立，即完全数不是素数。

直接证明法和归谬法

间接证明法可以看作是归谬法(反证法) 的特殊形式。假设$\neg B$为真，推出$\neg A$为真，即A为假，这与假设A为真矛盾。

例4 证明：完全数不是素数。
[完全数：等于除本身外所有正因子之和的正整数。例如：6=1+2+3、28=1+2+4+7+14，均为完全数。]

证明：用反证法证明。

已知p为完全数，假设p也是素数，显然$p\geq 2$。除本身外，p只有一个正因子1，而$p\neq 1$，故p不是完全数，这与p为完全数矛盾。得证完全数不是素数。

2. 分情况证明法和构造性证明法

分情况证明法（穷举法）

设命题P：若A，则B，即$A \to B$。

若前提A可以分成若干种情况$A_1, A_2, \dots, A_k$，那么只要证明对每一个$i(1\le i \le k)$，当A_i为真时，B为真，就可以得到当A为真时，B为真。

这样就把证明“若A，则B”转化为证明k个命题“若A_i，则B”，$i=1, 2, \dots, k$。

原理：$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k$

$$
\begin{aligned}
A \to B &\Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k \to B \\
&\Leftrightarrow \neg(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k) \vee B \\
&\Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \dots \wedge \neg A_k) \vee B \\
&\Leftrightarrow (\neg A_1 \vee B) \wedge (\neg A_2 \vee B) \wedge \dots \wedge (\neg A_k \vee B) \\
&\Leftrightarrow (A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B) \wedge \dots \wedge (A_k \to B)
\end{aligned}
$$

分情况证明法和构造性证明法

例1 证明：$\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$。

证明：a, b, c的大小关系有且只有6种情况：

情况1：$a \le b \le c$；

情况2：$a \le c \le b$；

情况3：$b \le a \le c$；

情况4：$b \le c \le a$；

情况5：$c \le a \le b$；

情况6：$c \le b \le a$。

对于情况1：

$$\max(a, \max(b, c)) = \max(a, c) = c$$

$$\max(\max(a, b), c) = \max(b, c) = c$$

两者相等。

类似可证明情况2至情况6，结合律都成立。

得证原命题成立。

分情况证明法和构造性证明法

例2 设$(L, \preccurlyeq)$是格, 则运算$\vee$和$\wedge$的结合律均成立, 即$\forall a, b, c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

【近世代数内容】

分情况证明法和构造性证明法

构造性证明法

有时要证明存在一种具有某种性质的客体。

对此有两种证明方法：

第一种是构造出具有所需性质的客体，从而证明它的存在性，这种证明方法称作构造性证明；

第二种是仅仅证明它的存在，而没有具体地给出它，称这种证明方法为非构造性证明。

分情况证明法和构造性证明法

例3 证明：对于每个正整数n，都存在n个连续的正合数。

证明：设$x = (n+1)! + 1$，考虑如下的n个连续的正整数：

$$x+1, x+2, \dots, x+n$$

对于i (i =1, 2, …, n)， $x+i = (n+1)! +(1+i)$

注意到： $(n+1)!$ 中含有因子$(1+i)$，所以： $x+i$ 中含有因子$(1+i)$，而因子$1+i \neq 1$， $1+i \neq x+i$，故$x+i$ 是合数，所以$x+1, x+2, \dots, x+n$是n个连续的正合数。

说明：该证明是构造性的，它不仅证明了存在这样的正合数，而且根据证明可以对任意给定的正整数n，构造出n个连续的正合数。例如：当n=3时，$x=(n+1)!+1=25$, 26，27，28是3个连续的正合数。

分情况证明法和构造性证明法

例4 设R是一个有单位元的可换环， H 是R的理想。R/H是域当且仅当H是R的极大理想。

【近世代数内容】

分情况证明法和构造性证明法

例5 证明：对于任意的自然数n，存在大于n的素数。

证法1： 可看作做是前面例题“证明：不存在最大的素数。”的推论。

证法2： 令S为所有小于或等于n的素数之积，

又设$S' = S+1$，于是，要么S'为素数，要么S'被大于n的素数整除。

总之，存在大于n的素数。

说明： 该证明是非构造性证明。该证明确实证明了存在大于n的素数，但是它并没有提供找到这样的素数的方法。

前提假证明法和结论真证明法

前提假证明法（空证明法）

设命题P：若A，则B，即$A \rightarrow B$。

如果前提A为假，则命题“若A，则B”为真。

例如：某人发誓：如果太阳从西边出来，我就把名字倒过来写。

其实，由于太阳永远不会从西边出来，所以他把不把名字倒过来写都没错。

也就是说，如果前提不成立，你说什么都可以。

因此，如果能证明前提为假，也就证明了命题为真，而不必管结论是否为真。

这种通过证明前提为假的证明方法称作前提假证明法或空证明法。

前提假证明法和结论真证明法

例6 空集是任何集合的子集。

例7 设$A=\{a, b, c, d\}$，$R\subseteq A\times A$，且$R=\{(a, b), (c, d)\}$，证明：R是A上的传递关系。

例8 设$n\in N$，记$P(n)$：若$n>1$，则$n^2>1$。试证明：$P(0)$为真。

证明： $P(0)$：若$0>1$，则$0^2>1$。

因为此蕴含式前件$0>1$为假，所以蕴含式为真，即$P(0)$为真。

前提假证明法和结论真证明法

结论真证明法（平凡证明法）

设命题P：若A，则B，即$A \to B$。

如果能证明结论为真，而不管前提真假，则命题一定为真。

这种通过在不假设前提为真的情况下证明结论为真来证明命题为真的方法称作**结论真证明法**或**平凡证明法**。

前提假证明法和结论真证明法

例10 设$n \in N$，$a>0$，$b>0$，记$P(n)$：若$a \geq b$，则$a^n \geq b^n$。试证明：$P(0)$为真。

证明： $P(0)$：若$a \geq b$，则$a^0 \geq b^0$。

因为$a^0 = b^0 = 1$，所以$P(0)$为真。

说明： 该证明没有用到条件$a \geq b$。

3. 数学归纳法

通过观察、发现规律、给出猜想，进而进行严格的数学证明，使猜想成为定理，是数学研究的一种方法。

例如：　观察到

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

……

猜想：$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

数学归纳法

猜想：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

此时还不能认为这个式子一定成立，需要证明。

对于这类与正整数(或自然数)有关的性质，数学归纳法是常用的证明方法。

数学归纳法

数学归纳法原理

设命题$P(n)$，$n \in N$，且$n \geq n_0$。若

(1) (n_0)为真；

(2) $n(n \in N$且$n \geq n_0)$，假设$P(n)$为真，则$P(n+1)$为真；

那么$\forall n\ (n \in N$且$n \geq n_0)$，$P(n)$为真。

最常遇到的是$n_0 = 0$和$n_0 = 1$，即要证明的命题是

$$\forall n \in N，P(n) \text{和} \forall n \in Z^+，P(n)$$

直观上，已知$P(n_0)$为真，由$P(n_0)$为真推出$P(n_0+1)$为真，由$P(n_0+1)$为真推出$P(n_0+2)$为真，……，所以对所有的自然数$n \geq n_0$，$P(n)$为真。

数学归纳法

严格地说，数学归纳法原理的基础是自然数集N的良序性，即N的任何非空子集都有最小的数。

例如： N的最小数为0， Z^+的最小数为1，偶数集的最小数为2，{5, 10, 15, 20}的最小数为5。

数学归纳法

数学归纳法原理

设命题$P(n)$，$n\in N$，且$n\geq n_0$。若

(1) $P(n_0)$为真；

(2) $\forall n\ (n\in N$且$n\geq n_0)$，假设$P(n)$为真，则$P(n+1)$为真；

那么$\forall n\ (n\in N$且$n\geq n_0)$，$P(n)$为真。

假设数学归纳原理不正确，则存在$n(n\in N$且$n\geq n_0)$，使得$P(n)$为假。

令$F=\{n|P(n)$为假，其中$n\in N$且$n\geq n_0\}$，则$F\neq\varnothing$。

由于N的良序性，F有最小数，设为a。

若$a=n_0$，由原理的(1)，$P(n_0)$为真，这与$n_0\in F$矛盾；

若$a>n_0$，则$a-1\notin F$且$a-1\geq n_0$，从而$P(a-1)$为真。

于是，由原理的(2)，可推出$P(a)$为真，这与$a\in F$矛盾。

数学归纳法

数学归纳法原理

设命题$P(n)$，$n \in N$，且$n \ge n_0$。若

(1) $P(n_0)$为真；

(2) $\forall n\ (n \in N$且$n \ge n_0)$，假设$P(n)$为真，则$P(n+1)$为真，

那么$\forall n\ (n \in N$且$n \ge n_0)$，$P(n)$为真。

数学归纳法的证明步骤：

(1) 归纳基础：证明$P(n_0)$为真；

(2) 归纳步骤：对任意的自然数$n \ge n_0$，假设$P(n)$为真，证明$P(n+1)$为真，其中“假设$P(n)$为真”称作**归纳假设**，注意在这里n是一个任意固定的自然数。

数学归纳法

例1 证明：$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$。

证明：用数学归纳法证明。

归纳基础：$n=1$时，$1=1^2$。

归纳步骤：假设当$n\geq1$时等式成立，即

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

考虑$n+1$的情况：

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1)$

$=n^2+(2n+1)$ (归纳假设)

$=(n+1)^2$

即当$n+1$时等式也成立。

得证对任意的正整数n，等式成立。

数学归纳法

数学归纳法还有另一种形式——第二数学归纳法。相对应地，也称前面介绍的数学归纳法为第一数学归纳法。

第二数学归纳法原理

设命题$P(n)$，$n\in N$，且$n\geq n_0$。若

(1) $P(n_0)$为真；

(2) $\forall n\ (n\in N$且$n\geq n_0)$，假设$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$为真，则$P(n+1)$为真；

那么$\forall n(n\in N$且$n\geq n_0)$，$P(n)$为真。

可以类似地利用自然数集的良序性证明第二数学归纳原理。

数学归纳法

第二数学归纳法原理

设命题$P(n)$，$n\in N$，且$n\geq n_0$。若

(1) $P(n_0)$为真；

(2) $\forall n\ (n\in N$且$n\geq n_0)$，假设$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$为真，则$P(n+1)$为真，那么$\forall n(n\in N$且$n\geq n_0)$，$P(n)$为真。

第二数学归纳法的证明步骤：

(1) 归纳基础：证明$P(n_0)$为真；

(2) 归纳步骤：对任意的自然数$n\geq n_0$，假设$P(n_0)$, $P(n_0+1), \ldots, P(n)$为真，证明$P(n+1)$为真。

数学归纳法

例2 证明：所有大于或等于2的整数都可以写成素数之积。

[例2是算术基本定理，也称为素因子分解定理。]

证明：用第二数学归纳法证明。

归纳基础：2是素数，2=2，这表明2可以写成素数之积。

归纳步骤：对任意的自然数$n \geq 2$，假设2, 3, …, n都可以写成素数之积，要证明n+1也可以写成素数之积。

数学归纳法

证明：用第二数学归纳法证明。

归纳基础：2是素数，2=2，这表明2可以写成素数之积。

归纳步骤：对任意的自然数$n \geq 2$，假设2, 3, …, n都可以写成素数之积，要证明n+1也可以写成素数之积。

分情况讨论如下：

(1)n+1是素数，此时n+1本身就是素数之积的形式。

(2)n+1是合数，此时存在整数a, b，且$2 \leq a, b \leq n$，使得$n+1=a\,b$。

因为$2 \leq a, b \leq n$，由归纳假设，a与b都可以写成素数之积。于是，n+1也可以写成素数之积。

由第二数学归纳原理可知，原命题成立。

数学归纳法

例3 设∘为非空集合S上的二元运算，若运算∘满足结合律，则$\forall a_i \in S$，i=1, 2, … , n，n个元素a_1，a_2, … , a_n的乘积(关于运算∘的运算结果$a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$)仅与这$n$个元素及其顺序有关而唯一决定。

[证明] 对n应用数学归纳法证明。

[注意] 由于这个定理(例3)，假如结合律成立，我们就随时可以应用$a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$这个符号，这对我们来说是一件极方便的事情。

结合律的重要性也就在此。

总　结

主要内容：

- 直接证明法和归谬法
- 分情况证明法和构造性证明法
- 数学归纳法

基本要求：

- 熟练掌握各种证明方法
- 针对不同问题会采用不同证明方法