问题1

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。

A曾到过受害者房间。

如果A在11点前离开，看门人会看见他。

看门人没有见到他。

所以， A是嫌疑犯。

该推理是否正确？（何谓推理正确？）

如何形式化（符号化）判别/证明该推理正确 ？

1) 命题符号化;

2) 形式化判别/证明该推理正确。

问题2

判断下面推理是否正确:

(1) 前提：$\neg p \rightarrow q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

(2) 前提：$q \rightarrow r$， $p \rightarrow \neg r$

结论：$q \rightarrow \neg p$

何谓推理正确？

如何（形式化或符号化）判别/证明该推理正确 ？

第5节 命题逻辑的推理理论(上)

主要内容:

- 推理的形式结构
  - 推理正确的定义
  - 推理的形式结构
  - 判断推理正确的方法
  - 推理定律
- 自然推理系统P

引言

数理逻辑是用数学方法研究推理。

所谓推理是指从前提出发推出结论的思维过程。

前提是已知的命题公式集合；

结论是从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

为此，首先应该明确什么样的推理是正确的。

推理正确的定义

定义1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的所有命题变项的任意一组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论。

定理1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$为重言式。

推理的形式结构

定义2 称

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

为由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推结论B的推理的形式结构。

推理的形式结构：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

若推理正确(即公式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式)，记为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$$

其中$\Rightarrow$同$\Leftrightarrow$一样是一种元语言符号，用来表示蕴含式为重言式。

推理的形式结构

定义1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的所有命题变项的任意一组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的，并称$B$是有效结论。

定义2 设前提为集合Γ，将由Γ推出B的推理记为

$$\Gamma \vdash B$$

称$\Gamma \vdash B$或$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$为推理的形式结构。

推理的形式结构:

$$\Gamma \vdash B \text{ 或} \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$$

若推理正确，记为

$$\Gamma \vDash B \text{ 或} \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vDash B$$

推理的形式结构

定义1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的所有命题变项的任意一组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的，并称$B$是有效结论。

推理的形式结构还有另外的表达方式，比如将前提和结论分开写：

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$
结论：B

推理正确的定义

定义1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的所有命题变项的任意一组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论。

定理1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$为重言式。

关于推理正确定义的说明:

1) 由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论B的推理是否正确与前提的排列次序无关。

推理正确的定义

关于推理正确定义的说明:

2) 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$中共出现n个命题变项，对于任一组赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\alpha_i = 0$ 或 $1)$，前提和结论的取值有以下4种情况:

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，$B$为0;

(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，$B$为1;

(3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，$B$为0;

(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，$B$为1。

由推理正确的定义可知：只要不出现情况(3)，推理就是正确的。因而判断推理是否正确，就是判断是否会出现情况(3)。

推理正确的定义

关于推理正确定义的说明:

3) 这里的推理是指形式推理。

推理正确并不能保证结论B一定正确或成立。

这与人们通常对推理的理解是不同的:

通常认为只有在正确的前提下推出正确的结论才是正确的推理。

而在这里:

如果前提不正确，无论结论正确是否，都说推理正确。

因此：只有在推理正确并且前提成立的条件下，结论才一定成立。

判断推理正确的方法

定义1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式，若对于$A_1, A_2, \ldots, A_k$和B中出现的所有命题变项的任意一组赋值，$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k$ 为假，或当$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论。

定理1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \to B$为重言式。

如何判断推理是否正确？

判断推理正确的方法

定理1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式。

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$
当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \Leftrightarrow 1$。

判断公式是否为重言式的方法:
真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

判断推理是否正确的方法:
真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号。今天是1号. 所以,
明天是5号。

解： 设 p：今天是1号，q：明天是5号。
推理的形式结构：$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

真值表法

等值演算法

$$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q \Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理1可知推理正确。

推理实例

(2) 若今天是1号，则明天是5号。 明天是5号。 所以，今天是1号。

解：设 p：今天是1号，q：明天是5号。

推理的形式结构: $(p\to q)\land q\to p$

主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\land q\to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\lor q)\land q\to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\ ((\neg p\lor q)\land q)\lor p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\lor p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\land\neg q)\lor(p\land\neg q)\lor\ (p\land\neg q)\lor(p\land q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0\lor m_2\lor m_3
\end{aligned}
$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确。

思 考

判别命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理是否正确

或

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$是否为重言式还有无别的思路？

除真值表法/等值演算法/主析取范式法外，还可以：

(1) 观察法：若能观察出公式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$的成假赋值，则断言推理一定不正确。

(2) 利用一些(总结的)重要的重言蕴含式(推理定律);

(3) 构造证明。

推理定律——重言蕴涵式

定理1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确**当且仅当**$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式。

由定理1知： 若蕴含式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式，则$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow$ B（命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确）。

问题： 哪些蕴含式$A \rightarrow B$为重言式呢？

或者 重言蕴含式$A \rightarrow B$有哪些呢？

说明： 一些重要的重言蕴含式称作**推理定律**。

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难
10. 每个等值式可产生两个推理定律 (16组24个等值式)

推理定律——重言蕴涵式

10. 每个等值式可产生两个推理定律。

(16组24个等值式)

例如, 由双重否定律： $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$

和 $\neg\neg A \Rightarrow A$。

已知： $A \Leftrightarrow B$

可得： $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$ 或 $A \rightarrow B \Leftrightarrow 1$，$B \rightarrow A \Leftrightarrow 1$ 。

推导： $A \rightarrow B$

$\Leftrightarrow A \rightarrow A$ (置换规则或等值公式可视为一个)

$\Leftrightarrow \neg A \vee A$

$\Leftrightarrow 1$

问题1解法一

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，
r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

则命题符号化为

$$(((p\wedge\neg q)\rightarrow r)\wedge p\wedge(q\rightarrow s)\wedge\neg s)\rightarrow r$$

该推理是否正确？

问题转化为：证明或判断该公式为重言式。

问题1解法一

证明或判断公式为重言式的方法：

1) 真值表；

2) 等值演算法；

3) 主析取范式。

$$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((\neg q\vee s)\wedge\neg s))\to r$$

$$\Leftrightarrow(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(\neg q\wedge\neg s))\to r$$

$$\Leftrightarrow(((\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(p\wedge\neg q))\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow(r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow\neg(r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\vee r$$

$$\Leftrightarrow\neg r\vee\neg p\vee q\vee s\vee r\ \Leftrightarrow 1$$ 重言式

问题2解答

判断下面推理是否正确。

(1) 前提：$\neg p \to q$，$\neg q$

结论：$\neg p$

解：改写推理的形式结构为: $(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

方法一：等值演算法

$$(\neg p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确。

问题2解答

方法二：主析取范式法

$$(\neg p\rightarrow q)\wedge\neg q\rightarrow\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg((p\vee q)\wedge\neg q)\vee\neg p$$

$$\Leftrightarrow\neg p\vee q$$

$$\Leftrightarrow M_2$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$$

不含m_2， 不是重言式， 推理不正确。

问题2解答

方法三　真值表法

p	q	$\neg p\to q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q$	$(\neg p\to q)\wedge\neg q\to\neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式，推理不正确。

方法四　直接观察出10是成假赋值。

问题2解答

(2) 前提：$q\to r$， $p\to\neg r$

结论：$q\to\neg p$

解：改写推理的形式结构：

$$(q\to r)\wedge(p\to\neg r)\to(q\to\neg p)$$

用等值演算法

$$(q\to r)\wedge(p\to\neg r)\to(q\to\neg p)$$

$\Leftrightarrow(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg r)\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow\neg((q\wedge\neg r)\vee(p\wedge r))\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow\neg((q\vee p)\wedge(q\vee r)\wedge(\neg r\vee p))\to(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow ((q\vee p)\wedge(q\vee r)\wedge(\neg r\vee p))\vee(\neg q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow 1$

推理正确。

推理的形式结构(小结)

推理的形式结构:

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \models B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. **前提**: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

总　结

主要内容：

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法

  真值表法、等值演算法、主析取范式法
- 推理定律

基本要求：

- 理解并记住推理形式结构的几种形式
- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法

  （如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 熟练掌握推理定律