



凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x 是人，

$G(x)$: x 是会死的，

a : 苏格拉底。

则有 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$

代换实例: $p \wedge q \rightarrow r$ 为重言式?

等值演算?

推理证明?

如何判别
该公式是
重言式?



量词分配等值式

设公式 $A(x)$, $B(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\textcircled{1} \quad \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

注意: \forall 对 \vee , \exists 对 \wedge 无分配律.

已知: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 不成立, 则

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \text{ 成立?}$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \quad \Leftarrow \quad \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \text{ 成立?}$$

已知: $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 不成立, 则

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \text{ 成立?}$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad \Leftarrow \quad \exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \text{ 成立?}$$



主要内容:

- 前束范式
- 一阶逻辑推理定律



1. 一阶逻辑前束范式

定义1 设 A 为一个一阶逻辑公式，若 A 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$$

则称 A 为**前束范式**，其中 Q_i ($1 \leq i \leq k$)为 \forall 或 \exists ， B 为不含量词的公式。

例如： $\forall x \neg (F(x) \wedge G(x))$

$\forall x \exists y (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x, y)))$ 是前束范式

而 $\neg \exists x (F(x) \wedge G(x))$

$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$ 不是前束范式。

定理1（前束范式存在定理）

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。



例1 求下列公式的前束范式

$$(1) \neg \exists x (M(x) \wedge F(x))$$

解： $\neg \exists x (M(x) \wedge F(x))$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (M(x) \wedge F(x)) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg M(x) \vee \neg F(x)) \quad (\text{置换})$$

$$\Leftrightarrow \forall x (M(x) \rightarrow \neg F(x)) \quad (\text{置换})$$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一。



例1 求下列公式的前束范式

$$(2) \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

解: $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

或

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$$

量词否定等值式

量词分配等值式

量词否定等值式

换名规则

辖域收缩扩张规则



例1 求下列公式的前束范式

$$(3) \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

解: $\forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$

关于存在量词的:

$$\textcircled{3} \exists x (A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\textcircled{4} \exists x (B \rightarrow A(x))$$

$$\Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \exists z (F(z) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y)))$$

辖域收缩扩张规则

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x, y) \wedge \neg H(y)))$$

辖域收缩扩张规则

或

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(z, y) \wedge \neg H(y))$$

代替规则

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \rightarrow \exists y (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$$

辖域收缩扩张规则

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$$

辖域收缩扩张规则

2. 一阶逻辑的推理理论



主要内容:

- 推理定律
- 自然推理系统



在一阶逻辑中，从**前提** A_1, A_2, \dots, A_k 出发推**结论** B 的推理的形式结构，依然采用如下的蕴含式形式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

若 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为永真式，则称**推理正确**，否则称**推理不正确**。



推理的形式结构:

1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

若此式是永真式，则推理正确，记作

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$$

2. 前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: B

判断推理是否正确:

判别 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 是否为永真式

推理定律: 永真式的蕴涵式



定理 由命题公式 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的推理正确
当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式。

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$$

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B \Leftrightarrow 1$ 。

判断公式是否为重言式的方法：

真值表法、 等值演算法、 主析取范式法

判断推理是否正确的方法：

真值表法、 等值演算法、 主析取范式法



定理 由命题公式 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的推理正确**当且仅当** $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式。

问题1：判断**蕴含式** $A \rightarrow B$ 为重言式的方法？

——真值表法/等值演算法/主析取范式法

除此之外，还有没有其它（简便）方法？

——利用一些**已知重言蕴含式**直接判断

问题2：重言蕴含式 $A \rightarrow B$ 有哪些呢？

或者 哪些蕴含式 $A \rightarrow B$ 为重言式呢？

说明：一些**重要的重言蕴含式**称作**推理定律**。



$$1. A \Rightarrow (A \vee B)$$

附加律

$$2. (A \wedge B) \Rightarrow A$$

化简律

$$3. (A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

假言推理

$$4. (A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

拒取式

$$5. (A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

析取三段论

$$6. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

假言三段论

$$7. (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

等价三段论

$$8. (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

构造性二难

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

构造性二难(特殊形式)

$$9. (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

破坏性二难

10. 每个等值式可产生两个推理定律 (16组24个等值式)

其中 A, B, C, D 都是元语言符号，表示任意的命题公式。



把具体的命题公式代入某条推理定律后就得到这条推理定律的一个代入实例。

例如： $p \Rightarrow p \vee q$, $p \rightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee r$, $p \Rightarrow p \vee q \vee r$ 等都是附加定律($A \Rightarrow (A \vee B)$)的代入实例。

推理定律的每一个代入实例都是重言式。



推理的形式结构：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

若此式是永真式，则推理正确，记作

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$$

判断推理是否正确：

判别 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 是否为永真式

判断公式是否为永真式的方法：

命题公式中重言式的代换实例、等值演算

判断蕴涵式是否为永真式的方法？

推理定律：永真式的蕴涵式



第一组 命题逻辑推理定律的代换实例

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

例如：化简律 $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 的代换实例

$$\forall x F(x) \wedge \exists y G(y) \Rightarrow \forall x F(x)$$



一阶逻辑的推理定律

第二组 基本等值式生成的推理定律

每个等值式可产生两个推理定律

1) 命题逻辑的等值式 (16组24个等值式)

双重否定律、幂等律、交换律、结合律、分配律、德摩根律、吸收律、零律、同一律、排中律、矛盾律、

蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

例如：由双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg \neg A$ 可产生

$A \Rightarrow \neg \neg A$ 和 $\neg \neg A \Rightarrow A$ 两条推理定律

代换实例： $\forall x F(x) \Rightarrow \neg \neg \forall x F(x)$, $\neg \neg \forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$



第二组 基本等值式生成的推理定律

每个等值式可产生两个推理定律

2) 一阶逻辑的等值式 (4组14个等值式)

(1) 消去量词等值式

设个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则有

$$\textcircled{1} \quad \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\textcircled{2} \quad \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

(2) 量词否定等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则有

$$\textcircled{1} \quad \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$



一阶逻辑的推理定律

第二组 基本等值式生成的推理定律

每个等值式可产生两个推理定律

2) 一阶逻辑的等值式 (4组14个等值式)

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式, B 中不含 x 的出现.

关于全称量词的:

- ① $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$
- ② $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$
- ③ $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$
- ④ $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$

关于存在量词的:

- ① $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$
- ② $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$
- ③ $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$
- ④ $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$



第二组 基本等值式生成的推理定律

每个等值式可产生两个推理定律

(2) 一阶逻辑的等值式 (4组14个等值式)

(4) 量词分配等值式

设公式 $A(x)$, $B(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\textcircled{1} \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\textcircled{2} \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

注意: \forall 对 \vee , \exists 对 \wedge 无分配律.

例如: 由一个量词否定等值式可产生:

$$\neg \forall x F(x) \Rightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\exists x \neg F(x) \Rightarrow \neg \forall x F(x)$$



量词分配等值式

设公式 $A(x)$, $B(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\textcircled{1} \quad \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

注意: \forall 对 \vee , \exists 对 \wedge 无分配律.

已知: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 不成立, 则

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \quad \Rightarrow \quad \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \text{ 成立?}$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \quad \Leftarrow \quad \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \text{ 成立?}$$

已知: $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 不成立, 则

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \text{ 成立?}$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \quad \Leftarrow \quad \exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \text{ 成立?}$$



(4) 量词分配等值式

设公式 $A(x)$, $B(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\textcircled{1} \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\textcircled{2} \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

注意: \forall 对 \vee , \exists 对 \wedge 无分配律.

第三组 其他常用推理定律

$$(1) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$(4) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$



第三组 其他常用推理定律

$$(1) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(1) \Rightarrow (2)$$

由(1)可得

$$\forall x \neg A(x) \vee \forall x \neg B(x) \Rightarrow \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$$

即 $\neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x) \Rightarrow \forall x (\neg A(x) \vee \neg B(x))$

亦即 $\neg (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Rightarrow \forall x \neg (A(x) \wedge B(x))$

亦即 $\neg (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Rightarrow \neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$

因此 $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$



第三组 其他常用推理定律

$$(1) \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$(3) \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$(4) \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

考虑上面“结论”的“倒推”问题：

$$\forall x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \exists x B(x) ?$$



主要内容:

- 前束范式
- 推理的形式结构
- 推理定律

基本要求:

- 熟练地求出给定公式的前束范式
- 熟练掌握推理定律