问题

问题1：考虑下面的推理：

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。

A曾到过受害者房间。

如果A在11点前离开，看门人会看见他。

看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

问题2(苏格拉底三段论)：

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

问题

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。

A曾到过受害者房间。

如果A在11点前离开，看门人会看见他。

看门人没有见到他。

所以， A是嫌疑犯。

该推理是否正确？（何谓推理正确？）

如何形式化（符号化）证明该推理正确 ?

1) 命题符号化;

2) 形式化证明该推理正确 。

第2节 命题逻辑的基本概念

主要内容:

- 命题与联结词
  命题及其分类
  联结词与复合命题
- 命题公式及其赋值

2.1 命题与联结词

命题与真值

命题：判断结果惟一的陈述句
非真即假的陈述句
可判断真假的陈述句

命题的真值：判断的结果

真值的取值：真与假

真命题与假命题

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。
陈述句中的悖论不是命题。
判断结果不惟一确定的陈述句不是命题。

命题概念

例1 下列句子中那些是命题？

(1) 中华民族是伟大的民族。 真命题

(2) 拿破仑是联合国秘书长。 假命题

(3) $x + 5 > 3$。 不是命题

(4) 你去教室吗？ 不是命题

(5) 这个苹果真大呀！ 不是命题

(6) 请不要讲话！ 不是命题

(7) 2024年元旦下大雪。 命题，但真值现在不知

(8) 我正在说谎。 悖论，不是命题

(9) 1+1=10。 有争议的陈述

(10) 别的星球上存在着生命。 有争议的陈述

命题分类

命题分类：简单命题(也称原子命题)
复合命题

简单命题：不能分解成更简单的命题

复合命题：由简单命题通过联结词联结而成的命题

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ ($i \geq 1$)表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p: $\sqrt{2}$是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为1。

否定联结词

定义1 设 p为命题，复合命题“非p”(或“p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词。

规定: $\neg p$ 为真当且仅当p为假。

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取联结词

定义2 设p, q为两个命题，复合命题“p并且q”(或“p与 q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词。

规定: $p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真。

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	1

析取联结词

定义3 设p, q为两个命题，复合命题“p或q”称作p与q的**析取式**，记作$p \vee q$，$\vee$称作**析取联结词**。

规定: $p \vee q$为假**当且仅当**p与q同时为假。

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

联结词的实例

例2 将下列命题符号化。

(1) 吴颖既用功又聪明。

(2) 吴颖不仅用功而且聪明。

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功。

(4) 张辉与王丽都是三好学生。

(5) 张辉与王丽是同学。

联结词的实例

解：　令 p: 吴颖用功, q: 吴颖聪明

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$

(4) 令p: 张辉是三好学生，　q: 王丽是三好学生

$p \wedge q$

(5) p: 张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(既/又、不但/而且、虽然/但是、一面/一面等)

(4)—(5) 要求分清 “与” 所联结的成分

联结词的实例

例3 将下列命题符号化。

(1) 2 或 4 是素数。

(2) 2 或 3 是素数。

(3) 4 或 6 是素数。

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨。

(5) 王小红生于 1975 年或 1976 年。

联结词的实例

解:

(1) 令p:2是素数, q:4是素数, $p \vee q$

(2) 令p:2是素数, q:3是素数, $p \vee q$

(3) 令p:4是素数, q:6是素数, $p \vee q$

(4) 令p:小元元拿一个苹果， q:小元元拿一个梨

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(5) p:王小红生于 1975 年， q:王小红生于1976 年

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 或 $p \vee q$

(1)—(3) 为相容或(它联结的两个命题可以同时为真)

(4)—(5) 为排斥或(它联结的两个命题只有当一个为真、另一个为假时才为真)

蕴涵联结词

定义4 设p, q为两个命题，复合命题"如果p, 则q"称作p与q的蕴涵式，记作$p \rightarrow q$，并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\rightarrow$称作蕴涵联结词。

规定：$p \rightarrow q$为假当且仅当p为真q为假。

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

蕴涵联结词

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

思考：这样规定是否合理？

从实例考虑：试着举一个实例。

蕴涵联结词

(1) $p \to q$ 的逻辑关系：q为 p 的必要条件；

p为 q 的充分条件。

(2) "如果 p, 则 q" 有很多不同的表述方法：

若p，就q　　　　只要p，就q

p仅当q　　　　只有q 才p

除非q, 才p　或　除非q，否则非p，….

(3) 当 p 为假时，$p \to q$恒为真，称为空证明。

(4) 常出现的错误：不分充分与必要条件。

(5) 在自然语言中，"如果p，则q"，p, q具有某种内在联系；但在数理逻辑中，p, q可以无任何内在联系。

蕴涵联结词

(3) 当 p 为假时，$p \to q$恒为真，称为空证明。

证明：空集是任意集合的子集。

定义：设R为X上的二元关系。如果对X上的任意x, y, z，只要xRy且yRz，就有xRz，则称R为X上传递关系。

例如：设$X=\{1, 2, 3, 4\}$，$R=\{(1, 2), (1, 3)\}$，则R为X上传递关系吗？

联结词的实例

例4 设 p:天冷，q:小王穿羽绒服，将下列命题符号化。

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服。 $p \to q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服。 $p \to q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷。 $p \to q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服。 $q \to p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服。 $q \to p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷。 $p \to q$

(7) 如果天不冷，则小王不穿羽绒服。 $q \to p$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候。 $q \to p$

等价联结词

定义5 设 p, q 为两个命题，复合命题 "p当且仅当q" 称作p与q的**等价式**，记作$p\leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作**等价联结词**。

规定: $p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假。

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系：p与q互为充分必要条件。

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词的实例

例5 求下列复合命题的真值。

(1) 2 + 2 = 4 当且仅当 3 + 3 = 6。 1

(2) 2 + 2 = 4 当且仅当 3 是偶数。 0

(3) 2 + 2 = 4 当且仅当 太阳从东方升起。 1

(4) 2 + 2 = 4 当且仅当 美国位于非洲。 0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续。 0

问题1符号化

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，

r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

则命题符号化为

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s) \rightarrow r$$

问题2符号化

问题：苏格拉底三段论

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

符号化：

设 p:凡是人都会死的

q:苏格拉底是人

r:苏格拉底也会死的

则命题符号化为

$$p \wedge q \rightarrow r$$

小　结

- 本小节中$p, q, r, \ldots$ 均表示命题。
- 联结词集为$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

  $\neg p, p\wedge q, p\vee q, p\rightarrow q, p\leftrightarrow q$为基本复合命题。

  其中要特别注意理解$p\rightarrow q$的涵义。

p q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

小　结

- 反复使用{¬, ∧, ∨, →, ↔}中的联结词可以组成更为复杂的复合命题，此外还可以使用圆括弧 (和), (和)必须成对出现。
- 求解复杂的复合命题的真值时(可视为运算)，因此要规定联结词的优先顺序。
- 联结词的运算顺序：( ), ¬, ∧, ∨, →, ↔, 同级按从左到右顺序进行。

设 p: $\sqrt{2}$是无理数，q: 3是奇数，
　r: 苹果是方的，　s: 太阳绕地球转。
则复合命题 $(p \to q) \leftrightarrow ((r \wedge \neg s) \vee \neg p)$ 是假命题。

小 结

- 在计算机应用领域，能够将自然语言陈述的“事实”或“需求”用符号化的方法准确的表示出来，是一项非常重要的工作，也是一项需要掌握的技术。
- 在数学基础研究方面，人们更关系的问题是如何建立命题之间的逻辑与推理关系。

2.2 命题公式及其赋值

命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题变项与合式公式

命题常项(命题常元)：简单命题(相当于常数或常量)

命题变项(命题变元)：取值1(真)或0 (假)的变元
(相当 于变量)

命题变项不是命题

常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示。

将命题变项用联结词和圆括弧按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为合式公式。

当使用联结词集$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$时，合式公式定义如下:

命题变项与合式公式

定义6 合式公式（也称命题公式，简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式。

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式。

(4) 只有有限次地应用(1)~(3) 形成的符号串是合式公式。

设A是合式公式，B为A的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

命题变项与合式公式

几点说明：

1、归纳或递归定义

2、元语言与对象语言

对象语言：用来描述研究对象的语言

如p，$\neg p \to q$，$\neg(p \to q) \leftrightarrow r$等

元语言：用来描述对象语言的语言

如A，B，C等符号

3、外层括号可以省去

合式公式的层次

定义7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式。

(2) 称 A 是 n+1(n≥0) 层公式是指下面情况之一：

(a) A=¬B, B 是 n 层公式；

(b) A=B∧C, 其中B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 n=max{i, j}；

(c) A=B∨C, 其中B, C 的层次及 n 同(b)；

(d) A=B→C, 其中B, C 的层次及 n 同(b)；

(e) A=B↔C, 其中B, C 的层次及 n 同(b)。

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式。

例如： 公式 A=p, B=¬p, C=¬p→q, D=¬(p→q)↔r,

E=((¬p∧q) →r) ↔(¬r∨s)

分别为0层，1层，2层，3层，4层公式。

公式赋值

定义8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对A的一个**赋值**或**解释**。

若使A为1, 则称这组值为A的**成真赋值**;

若使A为0, 则称这组值为A的**成假赋值**。

公式赋值

几点说明：

- A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指

  $$p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n,$$

  $\alpha_i=0$或1, α_i之间不加标点符号。
- A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指

  $$p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$$
- 含n个命题变项的公式有2^n个赋值。

例如：000, 010, 101, 110是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$的成真赋值，

001, 011, 100, 111是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$的成假赋值。

真值表

定义9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \dots, p_n$(若无下角标则按字母顺序排列)， 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法， 每次加1, 直至11…1为止。

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次。

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值，直到最后计算出公式 的真值为止。

真值表

例6 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

(2) $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3) $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$

真值表实例

(1) $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值: 000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

真值表实例

(2) $B = (q \to p) \wedge q \to p$

p q	$q \to p$	$(q \to p) \wedge q$	$(q \to p) \wedge q \to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值: 00, 01, 10, 11; 无成假赋值

真值表实例

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值: 00, 01, 10, 11; 无成真赋值

公式的类型

定义10

(1) 若**A**在它的任何赋值下均为真, 则称**A**为重言式或永真式;

(2) 若**A**在它的任何赋值下均为假, 则称**A**为矛盾式或永假式;

(3) 若**A**不是矛盾式, 则称**A**是可满足式.

公式的类型

由例6可知：

$$(p\vee q)\rightarrow\neg r,\ (q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p,\ \neg(\neg p\vee q)\wedge q$$

分别为非重言式的可满足式， 重言式， 矛盾式。

注意：重言式是可满足式，但反之不真。

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 判断公式的类型。

问题1

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，

r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

则命题符号化为

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s) \rightarrow r$$

推理正确问题转化为：证明或判断该公式为重言式。

问题2

问题2 (苏格拉底三段论)：

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

符号化：

p:凡是人都会死的

q:苏格拉底是人

r:苏格拉底也会死的

$p \wedge q \rightarrow r$ 是重言式吗？

总结

主要内容：

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化
- 联结词$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$及复合命题符号化
- 命题公式及层次、公式的类型
- 真值表及应用

基本要求：

- 深刻理解各联结词的逻辑关系，熟练地将命题符号化；会求复合命题的真值
- 深刻理解合式公式及重言式、矛盾式、可满足式等概念
- 熟练地求公式的真值表，并用它求公式的成真赋值与成假赋值及判断公式类型