问题

判别下面命题公式是否为重言式(永真式)?

$$((p \wedge \neg q) \to r) \wedge p \wedge (q \to s) \wedge \neg s \to r$$

证明或判断公式为重言式的方法:

1) 真值表;

2) 等值演算法

——思路或步骤?

——主析取范式

如何判别一个命题公式是否为矛盾式(永假式)?

如何判别一个命题公式是否为非重言式的可满足式?

思考题

命题公式的构造问题：

现有n个命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$，那么可以用它们构造多少个命题公式？(等值的只算一个)

每个命题公式是什么样子的？

如何构造它们？

答案尽在“主范式”中！

第4节 命题逻辑等值演算(下)

主要内容:

- 主析取范式和主合取范式
- *n*元真值函数
- 联结词完备集
- 复合联结词

1. 主析取范式与主合取范式

基本概念:

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——仅由有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p, \neg p\wedge q, p\vee\neg q, (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p, p\vee\neg q, \neg p\wedge q, (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

求命题公式范式的步骤

求公式*A*的范式的步骤：

(1) 消去*A*中的→, ↔（若存在）

$$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词¬的内移或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

公式范式的不足——不惟一

极小项与极大项

定义1 在含有n个命题变项的简单合取式中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），称这样的简单合取式为极小项。

定义2 在含有n个命题变项的简单析取式中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），称这样的简单析取式为极大项。

极小项与极大项

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项。
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值。
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示。
- 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示。
- m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称。

实 例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项。

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

实 例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项。

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \land \neg q \land \neg r$	0 0 0	m_0	$p \lor q \lor r$	0 0 0	M_0
$\neg p \land \neg q \land r$	0 0 1	m_1	$p \lor q \lor \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \land q \land \neg r$	0 1 0	m_2	$p \lor \neg q \lor r$	0 1 0	M_2
$\neg p \land q \land r$	0 1 1	m_3	$p \lor \neg q \lor \neg r$	0 1 1	M_3
$p \land \neg q \land \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \lor q \lor r$	1 0 0	M_4
$p \land \neg q \land r$	1 0 1	m_5	$\neg p \lor q \lor \neg r$	1 0 1	M_5
$p \land q \land \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \lor \neg q \lor r$	1 1 0	M_6
$p \land q \land r$	1 1 1	m_7	$\neg p \lor \neg q \lor \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\Leftrightarrow M_1\wedge M_7$——主合取范式

定理1 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是惟一的。

求命题公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$。

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式， $j=1, 2, \ldots, s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge 1 \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止;

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$;

(4) 将极小项按下标从小到大排列。

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1, p_2,\ldots, p_n$.

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式， $j=1,2, \ldots, s$;

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee 0\Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止;

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$;

(4) 将极大项按下标从小到大排列。

实 例

例1 求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

解 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q) \Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

$r \Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ (主析取范式)

实 例

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r \Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ (主合取范式)

实 例

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ (主析取范式)

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ (主合取范式)

注：(1) 由主析取范式求主合取范式;

(2) 由主合取范式求主析取范式。

由主析(合)取范式确定主合(析)取范式

由主析取范式确定主合取范式

例2 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式。

解：A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

说明：由主合取范式确定主析取范式。

用成真和成假赋值确定主范式

问题：用成真和成假赋值如何确定主析(合)取范式?
或者　用真值表如何求解主析(合)取范式？

例3 设A有3个命题变项, 且已知001,011,111为A的成真赋值，求A的主合取范式和主析取范式。

解：A的主析取范式

$$A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_7$$

A的主合取范式

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

说明：求解主析取范式和主合取范式的方法。

主范式的应用

1.求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值。

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为矛盾式

$\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例4 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A\Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)\wedge q$ (2) $B\Leftrightarrow p\rightarrow(p\vee q)$ (3) $C\Leftrightarrow (p\vee q)\rightarrow r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p\vee(p\vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例5 用主析取范式判以下每一组公式是否等值

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例6 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察，需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$

$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$

$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$

$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去，方案2 派B去

小结

解此类问题的步骤：

1.设简单命题并符号化；

2. 用复合命题描述各条件；

3. 写出由复合命题组成的合取式；

4. 将合取式化成析取式（最好是主析取范式）；

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论。

回忆前面的思考题

命题公式的构造问题：

现有n个命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$，那么可以用它们构造多少个命题公式？(等值的只算一个)

每个命题公式是什么样子的？

如何构造它们？

2. n元真值函数

定义3 称F:$\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ 为n元真值函数。

$\{0, 1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含 2^n 个长为n的0, 1符号串。

共有 2^{2^n} 个n元真值函数。

1元真值函数: F:$\{0,1\} \to \{0,1\}$

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1元真值函数

由1个命题变项 p形成的极小项与极大项。

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p$ p	0 1	m_0 m_1	p $\neg p$	0 1	M_0 M_1

1元真值函数

1元真值函数: F:{0,1}→ {0,1}

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

00　01　10　11　　　m_0 m_1

对应的命题公式: 0　m_1　m_0　$m_0 \vee m_1$

真值表

p	0	m_1	m_0	$m_0 \vee m_1$	
0	0	0	1	1	m_0
1	0	1	0	1	m_1

2元真值函数

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

2元真值函数

由2个命题变项 p，q形成的极小项与极大项。

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

2元真值函数

	0	m_3	m_2		m_1			
p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	m_0					$m_0 \vee m_1 \vee m_3$		

公式与真值函数

任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应惟一的一个n元真值函数 F , F 恰好为A的真值表。

等值的公式对应的真值函数相同。

例如：$p \rightarrow q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

$$13 = \begin{array}{cccc} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ \hline \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}$$

$$F_{13}^{(2)} \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

说明：真值函数、命题公式、主析取范式(主合取范式)

3. 联结词完备集

定义4 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集。

若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示。

定理2 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

证明 由范式存在定理可证。

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$　　(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$　　(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明　(1),(2) 显然。

(3) $A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$

(4) $A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B)$

(5) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示;

它的子集$\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\},\{\leftrightarrow\},\{\wedge,\vee\},\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是。

4. 复合联结词

定义5 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\wedge q)$称作p与q的与非式, 记作$p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为与非联结词。$\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的或非式, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称为或非联结词。

定理3 $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$为联结词完备集。

证明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p\downarrow p$$

$$p\wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q) \Leftrightarrow \neg p\downarrow\neg q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$$

$$p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\downarrow q) \Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$$

得证$\{\downarrow\}$为联结词完备集。 对$\{\uparrow\}$类似可证。

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真?

(1) $A \Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式　真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0　假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1　假

(4) 任何公式都能等值地化成$\{\wedge, \vee\}$中的公式　假

(5) 任何公式都能等值地化成$\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$中的公式　真

练习1:概念

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项，为**1**。

(3) 矛盾式的主合析范式不含任何极小项， 为**0**。

(4) $\{\wedge, \vee\}$不是完备集，如矛盾式不能写成$\{\wedge, \vee\}$中的公式。

(5) $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集。

练习2: 判断公式类型

2. 判断下列公式的类型:

(1) $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

解 用等值演算法求主范式

$$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee(q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_0$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 主析取范式

$\Leftrightarrow 1$ 主合取范式

重言式

练习题2(续)

(2) $\neg(p\to q)\wedge q$

解 用等值演算法求公式的主范式

$\neg(p\to q)\wedge q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q$

$\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q$

$\Leftrightarrow 0$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$ 主合取范式

矛盾式

练习2(续)

(3) $(p \rightarrow q) \wedge \neg p$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$
\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \wedge \neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \vee q) \wedge \neg p \\
\Leftrightarrow\ & \neg p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0 \vee m_1 && \text{主析取范式} \\
\Leftrightarrow\ & M_2 \wedge M_3 && \text{主合取范式}
\end{aligned}
$$

非重言式的可满足式

练习3：求公式的主范式

3．已知命题公式A中含3个命题变项p, q, r，并知道它的成真赋值为001, 010, 111, 求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数。

解　A的主析取范式为$m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$p\ q\ r$	F	$p\ q\ r$	F
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	1	1 0 1	0
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

练习4：联结词完备集

4．将$A = (p\rightarrow\neg q)\wedge r$改写成下述各联结词集中的公式:

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$　　(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$　　(4) $\{\neg, \rightarrow\}$

(5) $\{\uparrow\}$　　(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

(2) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

(3) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$$

练习4 解答

(4) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg(p\to\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\to\neg q)\to\neg r)$

(5) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\uparrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg\,\neg((p\uparrow q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p\uparrow q)\uparrow r)\uparrow((p\uparrow q)\uparrow r)$

(6) $(p\to\neg q)\wedge r \Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\downarrow\neg q)\downarrow\neg r$

$\Leftrightarrow ((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)\downarrow(r\downarrow r)$

说明：答案不惟一

练习5：应用题

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国？

练习5解答

解此类问题的步骤:

1.设简单命题并符号化;

2. 用复合命题描述各条件;

3. 写出由复合命题组成的合取式;

4. 将合取式成析取式(最好是主析取范式);

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论。

练习5解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p \to q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s \lor u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q \land \neg r) \lor (\neg q \land r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r \land s) \lor (\neg r \land \neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u \to (p \land q)$

练习5解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p \to q) \land (s \lor u) \land ((q \land \neg r) \lor (\neg q \land r)) \land ((r \land s) \lor (\neg r \land \neg s)) \land (u \to (p \land q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q \land r \land s \land \neg u) \lor (p \land q \land \neg r \land \neg s \land u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001。

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

练习5解答

$$A \Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge$$
$$(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))\wedge$$
$$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$$

$$B_1=(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$$
$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge\neg r)) \quad \text{（分配律）}$$

$$B_2=(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow ((s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge u)) \quad \text{（分配律）}$$

$$B_1\wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)$$
$$\vee(q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge u)$$

再令 $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))=B_3$，则

$$B_1\wedge B_2\wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

总　结

主要内容

- 主析取范式与主合取范式
- n元真值函数
- 联结词完备集
- 复合联结词

基本要求

- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单析取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式的类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题