问题1

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。

A曾到过受害者房间。

如果A在11点前离开，看门人会看见他。

看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

该推理是否正确？（何谓推理正确？）

如何形式化（符号化）证明该推理正确？

1) 命题符号化;
2) 形式化证明该推理正确。

问题1解法一

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，
r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

则命题符号化为

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s) \rightarrow r$$

问题转化为：证明或判断该公式为重言式。

问题1解法一

证明或判断公式为重言式的方法：

1) 真值表；

2) 等值演算法；

3) 主析取范式。

$$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((\neg q\vee s)\wedge\neg s))\to r$$

$$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(\neg q\wedge\neg s))\to r$$

$$\Leftrightarrow (((\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(p\wedge\neg q))\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow (r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\to r$$

$$\Leftrightarrow\neg(r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\vee r$$

$$\Leftrightarrow\neg r\vee\neg p\vee q\vee s\vee r \Leftrightarrow 1$$ 重言式

问题1解法二

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

命题符号化：

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，
r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

前提：$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$, p, $q \rightarrow s$, $\neg s$

结论：r

问题转化为：在自然推理系统中构造推理证明

问题1解法二

构造证明方法:

1) 直接证明法;

2) 附加前提证明法;

3) 归谬法（反证法）;

4) 消解法或归结法。

问题1解法二-直接证明法

前提：$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$, p, $q\rightarrow s$, $\neg s$

结论：r

证明

①	$q\rightarrow s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg q$	①②拒取式
④	p	前提引入
⑤	$p\wedge\neg q$	③④合取引入
⑥	$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理

什么是推理规则？有哪些？

推理证明需用推理规则！

问题1解法二-直接证明法

前提：$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$，$p$，$q\rightarrow s$，$\neg s$

结论：r

什么是置换规则？

证明

① $q\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s\rightarrow\neg q$	①置换
③ s	前提引入
④ $\neg q$	②③假言推理
⑤ p	前提引入
⑥ $p\wedge\neg q$	④⑤合取引入
⑦ $(p\wedge\neg q)\rightarrow r$	前提引入
⑧ r	⑥⑦假言推理

问题解法二-消解(或归结)证明法

什么是合取范式?

前提: $(p \wedge \neg q) \rightarrow r,\ p,\ q \rightarrow s,\ \neg s$

结论: r

(1)求解 $((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s \wedge \neg r$ 的合取范式:

$$((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s \wedge \neg r$$
$$\Leftrightarrow (\neg(p \wedge \neg q) \vee r) \wedge p \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg s \wedge \neg r$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge p \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg s \wedge \neg r$$

(2)建立集合

$$S = \{\neg p \vee q \vee r,\ p,\ \neg q \vee s,\ \neg s,\ \neg r\}$$

问题解法二-消解(或归结)证明法

(2)建立集合S

$S = \{\neg p \vee q \vee r,\ p,\ \neg q \vee s,\ \neg s,\ \neg r\}$

(3)对S做归结

① $\neg q \vee s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg q$	①②归结
④ p	前提引入
⑤ $\neg p \vee q \vee r$	前提引入
⑥ $q \vee r$	④⑤归结
⑦ r	③⑥归结
⑧ $\neg r$	前提引入
⑨ λ	⑦⑧归结

第3节 命题逻辑等值演算(上)

主要内容:

- 等值式与基本的等值式
- 等值演算与置换规则
- 析取范式与合取范式

1. 等值式

首先了解等值的概念：

定义1 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式。

几点说明：

- 定义中的符号$\Leftrightarrow$不是联结符（词）
- 用真值表可检查两个公式是否等值

小结：真值表的用途

1) 求出公式的全部成真赋值与成假赋值;
2) 判断公式的类型;
3) 判断两个公式是否等值。

等值式例题

例1 判断下列各组公式是否等值。

(1) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \land q) \to r$

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \land q$	$(p \land q) \to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \land q) \to r$

等值式例题

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$，$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$
假言易位	$A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式(24式)，这是继续学习的基础。

2. 等值演算与置换规则

1. 等值演算

——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础

(1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

等值演算与置换规则

3. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换$\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式。

若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$。

等值演算的应用举例

证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

注意：用等值演算不能直接证明两个公式不等值

等值演算的应用举例

证明两个公式不等值

例3 证明 $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$ 不等值

证　方法一 真值表法, 见例1(2)

　　方法二 观察法。 观察到000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值

　　方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r$$

$$(p \to q) \to r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$$

更容易看出前面的两个赋值分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

等值演算的应用举例

判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

(2) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

(3) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

等值演算的应用举例

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

非重言式的可满足式：101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

问题1

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。

所以，A是嫌疑犯。

设 p: A到过受害者房间，q: A在11点前离开，
r: A是嫌疑犯，s: 看门人看见A。

则命题符号化为

$$(((p \wedge \neg q) \rightarrow r) \wedge p \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg s) \rightarrow r$$

问题转化为：证明或判断该公式为重言式。

问题1解答一

$$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\to r$$

想说啥
不?

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((q\to s)\wedge\neg s))\to r$ (结合律)

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((\neg q\vee s)\wedge\neg s))\to r$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((\neg q\wedge\neg s)\vee(s\wedge\neg s)))\to r$ (分配律)

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge((\neg q\wedge\neg s)\vee 0))\to r$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(\neg q\wedge\neg s))\to r$ (同一律)

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\to r)\wedge(p\wedge\neg q)\wedge\neg s)\to r$ (结合律)

$\Leftrightarrow (((\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(p\wedge\neg q))\wedge\neg s)\to r$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow (((\neg(p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee(r\wedge(p\wedge\neg q)))\wedge\neg s)\to r$ (分配律)

$\Leftrightarrow (((0\vee(r\wedge(p\wedge\neg q)))\wedge\neg s)\to r$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow (r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\to r$ (同一律)

$\Leftrightarrow \neg(r\wedge p\wedge\neg q\wedge\neg s)\vee r$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow \neg r\vee\neg p\vee q\vee s\vee r$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow 1$ 重言式 (排中律)

3. 析取范式与合取范式

基本概念:

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

$p,\ \neg q,\ p\vee\neg q,\ p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——仅由有限个文字构成的合取式

$p,\ \neg q,\ p\wedge\neg q,\ p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p,\ \neg p\wedge q,\ p\vee\neg q,\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p,\ \ p\vee\neg q,\ \ \neg p\wedge q,\ (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

范式的性质

说明：

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 形如 $p \wedge \neg q \wedge r$，$\neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

定理1

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式。

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式。

范式的性质

定理2

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式。

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

定理3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

命题公式的范式

求公式*A*的范式的步骤：

(1) 消去A中的→, ↔（若存在）

$$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词¬的内移或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$$ 求合取范式

$$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$ 求析取范式

公式范式的不足——不惟一

求公式的范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\to\neg q)\to r$

解 (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，又是合取范式(由一个简单析取式组成的合取式)。

求公式的范式

(2) $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移) 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

注：范式的不唯一性

$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge r)$ 析取范式

$\Leftrightarrow p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ 析取范式

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$ 析取范式

小 结

判断公式类型的方法:

(1) 真值表

(2) 等值演算

A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

A为非重言式的可满足式?

有没有其他方法?

小 结

判断公式类型的方法:

A为非重言式的可满足式?

A为非重言式的可满足式
当且仅当 A既有成真赋值又有成假赋值。

如何求一个公式A的成真赋值和成假赋值呢?

(1)真值表
(2) 还有没有其他方法?
——主析(合)取范式!

思考题

命题公式的构造问题：

现有n个命题变项$p_1, p_2, \dots, p_n$，那么可以用它们构造多少个命题公式？(等值的只算一个)

每个命题公式是什么样子的？

如何构造它们？

总　结

主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 析取范式与合取范式

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 会熟练求解析取范式与合取范式