# 引 言

无论是在命题逻辑还是在一阶逻辑中构造推理证明时使用了很多推理规则，这不利于在计算机上实现。

**命题逻辑：12条**推理规则

**一阶逻辑：16条**推理规则

有没有一种机械化可在计算机上加以实现的推理方法？

# 引 言

归结证明法除前提引入规则外，只使用一条归结规则，因而便于在计算机上实现，在人工智能中有广泛的应用。

归结(*resolution*)证明法也称归结推理方法、消解证明法或消解法。

**归结原理(*principle of resolution*, 又称为消解原理)由*J. A. Robinson*于1965年提出**

可参考：人工智能原理. 石纯一等. 清华大学出版社

# 引 言

归结原理，即Robinson第一定理，在数理逻辑和自动定理证明中，归结（*resolution*）是对于命题逻辑和一阶逻辑中的句子的推理规则，它导致了一种反证法的定理证明技术。

—— 百度百科

命题逻辑中的归结(*)

一阶逻辑中的归结

# 第11节 归结证明法

**主要内容:**

- 命题逻辑中的归结(*)
  - 归结规则
  - 归结证明法
- 一阶逻辑中的归结

# 1. 命题逻辑中的归结：归结规则

显然有

$$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$$

其中，$l$是一个(命题)变元，$C_1$和$C_2$是简单析取式。

基本概念:

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——仅由有限个文字构成的析取式

$p$, $\neg q$, $p\vee\neg q$, $p\vee q\vee r$, …

(3) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p$, $p\vee\neg q$, $\neg p\wedge q$, $(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

# 归结规则

显然有

$$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2 \qquad (1)$$

其中，$l$是一个(命题)变元，$C_1$和$C_2$是简单析取式。

$$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$$

当且仅当 $(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \rightarrow (C_1 \vee C_2)$为重言式

当且仅当 $(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \rightarrow (C_1 \vee C_2) \Leftrightarrow 1$

事实上，只有当$C_1$和$C_2$都是0时，右端$(C_1 \vee C_2)$才为0，而此时左端也为0，因而这是一个重言式。

称式(1)为归结定律。

说明：一些重要的重言蕴含式称作推理定律。

# 归结规则

$$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$$

当且仅当 $(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \rightarrow (C_1 \vee C_2)$为重言式

当且仅当 $(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \rightarrow (C_1 \vee C_2) \Leftrightarrow 1$

| $p_1 \ p_2 \ldots p_n$ | $C_1$ | $C_2$ | $A=(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2)$ | $B=C_1 \vee C_2$ | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0… 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 0… 1 | 0 | 1 | 0 or 1 | 1 | 1 |
| … | 1 | 0 | 0 or 1 | 1 | 1 |
| 1 1… 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

小结：判别/证明蕴含式为重言式的方法：

真值表/等值演算/主析取范式/

重演蕴含式(推理定律)/构造证明/…

# 归结规则

归结定律：$(l \vee C_1) \wedge (\neg l \vee C_2) \Rightarrow C_1 \vee C_2$

根据归结定律得到如下归结规则：

$$\begin{array}{r} l \vee C_1 \\ \neg l \vee C_2 \\ \hline \therefore C_1 \vee C_2 \end{array}$$

其中，$l$是一个(命题)变元，$C_1$和$C_2$是简单析取式。

前提：$l \vee C_1$，$\neg l \vee C_2$

结论：$C_1 \vee C_2$

证明：？

# 归结规则

**归结规则：**

$$\begin{array}{r} l \vee C_1 \\ \neg l \vee C_2 \\ \hline \therefore C_1 \vee C_2 \end{array}$$

特别地，当$C_1$和$C_2$是空简单析取式(即不含任何文字的简单析取式)时，由$l$和$\neg l$推出空简单析取式，而空简单析取式是矛盾式——它没有一个文字的值为1。

也就是说，$l$和$\neg l$推出0。

实际上，$l \wedge \neg l \Leftrightarrow 0$ (矛盾律)

本节把空简单析取式记作0。

当$C_1$或$C_2$是空简单析取式时也用0代替。

例如：由$p$和$\neg p \vee q$推出$q$，这里$l=p$，$C_1=0$，$C_2=q$。

# 归结规则

**归结规则：**

$$\frac{\begin{array}{r} l \vee C_1 \\ \neg l \vee C_2 \end{array}}{\therefore C_1 \vee C_2}$$

应用归结规则由两个含有相同变元(一个含变元，另一个含它的否定式)的简单析取式推出一个新的不含这个变元的简单析取式，对这个新的简单析取式又可以继续应用归结规则。

# 2.命题逻辑中的归结：归结证明法

归结证明法是根据归谬法(或反证法)，采用归结规则(或消解规则)构造证明的方法。

归结证明法的基本做法：把前提中的公式和结论的否定都化为等值的合取范式，以这些合取范式中的所有简单析取式作为前提用归结规则构造证明。如果能得到空简单析取式(即0)，则证明推理是正确的。

说明：归结证明法除准备工作外，只使用前提引入和归结两条规则。

# 归结证明法

归结证明法的基本思想是采用归谬法(或反证法)，把结论的否定引入前提。如果推出空简单析取式，即推出0，则证明推理正确。

其证明步骤如下：

(1) 把结论的否定引入前提。

(2) 把所有前提，包括结论的否定在内，化成合取范式，并把得到的合取范式中的所有简单析取式作为前提。

(3) 应用归结规则进行推理或构造证明。

(4) 如果推出空简单析取式，即推出0，则证明推理正确。

# 归结证明法

归结法的证明步骤如下：

(1) 把结论的否定引入前提。

(2) 把所有前提，包括结论的否定在内，化成合取范式，并把得到的合取范式中的所有简单析取式作为前提。

(3) 应用归结规则进行推理或构造证明。

(4) 如果推出空简单析取式，即推出0，则证明推理正确。

实际上可以证明：如果推理正确，则一定可以推出空简单析取式。

说明：(1)和(2)是构造证明的准备工作。

归结证明法除准备工作外，只使用前提引入和归结两条规则。

# 归结证明法

设推理形式为

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$ $\Rightarrow$ 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

结论：$B$ 结论：$0$

求出$A_1, A_2, \ldots, A_k$和$\neg B$的合取范式，设

$$A_1 \Leftrightarrow C_{11} \wedge C_{12} \wedge \ldots \wedge C_{1n_1}$$

$$A_2 \Leftrightarrow C_{21} \wedge C_{22} \wedge \ldots \wedge C_{2n_2}$$

$$\ldots$$

$$A_k \Leftrightarrow C_{k1} \wedge C_{k2} \wedge \ldots \wedge C_{kn_k}$$

$$\neg B \Leftrightarrow D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$$

# 归结证明法

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$ (1) $\Rightarrow$ 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

结论：$B$ 结论：0

(2) 求出$A_1, A_2, \ldots, A_k$和$\neg B$的合取范式，设

$$A_1 \Leftrightarrow C_{11} \wedge C_{12} \wedge \ldots \wedge C_{1n_1}$$
$$A_2 \Leftrightarrow C_{21} \wedge C_{22} \wedge \ldots \wedge C_{2n_2}$$
$$\ldots$$
$$A_k \Leftrightarrow C_{k1} \wedge C_{k2} \wedge \ldots \wedge C_{kn_k}$$
$$\neg B \Leftrightarrow D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_m$$

若在该前提中有重复出现的简单析取式，则应删去

于是，经过(1)和(2)把推理的形式转化为下述等价的形式

前提：$C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n_1}, C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2n_2}, \ldots,$
$C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn_k}, D_1, D_2, \ldots, D_m$

结论：0

# 归结证明法

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$
结论：$B$

⇨ 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$
结论：0

归谬法或反证法

⇨ 前提：$C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n_1}, C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2n_2}, \ldots,$
$C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn_k}, D_1, D_2, \ldots, D_m$
结论：0

简单析取式

归结法或消解法

# 归结证明法

前提：$A_1, A_2, \dots, A_k$ ⇔ 前提：$A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B$

结论：$B$ 　　　　　　　　　结论：0

归结证明法的基本做法：

(1) 求前提各式$A_1, A_2, \dots, A_k$和结论否定$\neg B$的合取范式；

(2) 将推理的前提和结论改成下述形式：

前提：第(1)步得到的所有简单析取式(用逗号隔开)

结论：0

(3)使用前提引入规则和归结规则构造证明。

# 实 例

例1 用归结证明法证明下面推理。

前提： $p\vee q, \neg p\vee r, \neg r\vee s$

结论： $q\vee s$

解： 先求前提中各式和结论否定的合取范式:

$\neg(q\vee s) \Leftrightarrow \neg q\wedge\neg s$

再将推理的前提和结论改成下述形式:

前提： $p\vee q, \neg p\vee r, \neg r\vee s, \neg q, \neg s$

结论： 0

# 实 例

前提： $p\vee q, \neg p\vee r, \neg r\vee s, \neg q, \neg s$

结论： 0

证明：

(1) $p\vee q$ 前提引入
(2) $\neg q$ 前提引入
(3) $p$ (1)(2)归结
(4) $\neg p\vee r$ 前提引入
(5) $r$ (3)(4)归结
(6) $\neg r\vee s$ 前提引入
(7) $s$ (5)(6)归结
(8) $\neg s$ 前提引入
(9) 0 (7)(8)归结

注意：
在推理中，有些简单析取式是一个文字，如$\neg q, p, r, s$与$\neg s$。用归结规则时，将它们分别看成$\neg q\vee 0$, $p\vee 0$，$r\vee 0$，$s\vee 0$与$\neg s\vee 0$。

# 实 例

例2 用归结证明法证明下面推理。

前提： $q\rightarrow p,\ q\leftrightarrow s,\ s\leftrightarrow t,\ t\wedge r$

结论： $p\wedge q\wedge s$

解：先求前提中各式和结论否定的合取范式:

$q\rightarrow p \Leftrightarrow \neg q\vee p$ ……是一个简单析取式

$q\leftrightarrow s \Leftrightarrow (\neg q\vee s)\wedge(\neg s\vee q)$ ……有两个简单析取式

$s\leftrightarrow t \Leftrightarrow (\neg s\vee t)\wedge(\neg t\vee s)$ ……有两个简单析取式

$\neg(p\wedge q\wedge s) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg s$ ……是一个简单析取式

再将推理的前提和结论改成下述形式:

前提： $\neg q\vee p,\ \neg q\vee s, \neg s\vee q,\ \neg s\vee t, \neg t\vee s,\ t,\ r\ , \neg p\vee\neg q\vee\neg s$

结论： $0$

# 实 例

例2 用归结证明法证明下面推理。

前提： $q \to p,\ q \leftrightarrow s,\ s \leftrightarrow t,\ t \wedge r$

结论： $p \wedge q \wedge s$

解：先求前提中各式和结论否定的合取范式:

$q \to p \Leftrightarrow \neg q \vee p$ ……是一个简单析取式

$q \leftrightarrow s \Leftrightarrow (\neg q \vee s) \wedge (\neg s \vee q)$ ……有两个简单析取式

$s \leftrightarrow t \Leftrightarrow (\neg s \vee t) \wedge (\neg t \vee s)$ ……有两个简单析取式

$t \wedge r$ ……有两个简单析取式

$\neg(p \wedge q \wedge s) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg s$ ……是一个简单析取式

再将推理的前提和结论改成下述形式：

前提： $\neg q \vee p,\ \neg q \vee s, \neg s \vee q,\ \neg s \vee t, \neg t \vee s,\ t,\ r\ , \neg p \vee \neg q \vee \neg s$

结论： 0

# 实 例

**前提：** $\neg q\vee p,\ \neg q\vee s, \neg s\vee q,\ \neg s\vee t, \neg t\vee s,\ t,\ r,\ \neg p\vee\neg q\vee\neg s$

**结论：** 0

**证明：**

(1) $\neg t\vee s$ 前提引入
(2) $t$ 前提引入
(3) $s$ (1)(2)归结
(4) $\neg s\vee q$ 前提引入
(5) $q$ (3)(4)归结
(6) $\neg q\vee p$ 前提引入
(7) $p$ (5)(6)归结
(8) $\neg p\vee\neg q\vee\neg s$ 前提引入
(9) $\neg q\vee\neg s$ (7)(8)归结
(10) $\neg s$ (5)(9)归结
(11) 0 (3)(10)归结

**证明：**

(1) $\neg q\vee s$ 前提引入
(2) $\neg s\vee q$ 前提引入
(3) 0 (1)(2)归结

这样证是否正确？

# 归结证明法

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$ ⇔ 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

结论：$B$ 结论：0 (或λ或□)

做法: 有点不一样?

(1) 求解$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$的合取范式;

(2) 建立集合$S$，即将合取范式写成集合的表达形式;

$S$={第(1)步合取范式的所有简单析取式}

称$S$中的每一个元素为一个子句，$S$称为对应于$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$的子句集.

(3) 对$S$做归结. 从子句集$S$出发，仅对$S$的子句使用归结规则，并将所得归结式仍放入$S$中，进而再对新子句集使用归结规则，重复这些步骤直到得到空子句(λ或□).

# 以前的问题

只要A曾到过受害者房间并且11点前没离开，A就是嫌疑犯。 A曾到过受害者房间。如果A在11点前离开，看门人会看见他。看门人没有见到他。所以， A是嫌疑犯。

问题转化为:

设 $p$: A到过受害者房间，$q$: A在11点前离开，
$r$: A是嫌疑犯，$s$: 看门人看见A。

前提：$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$, $p$, $q\rightarrow s$, $\neg s$
结论： $r$

# 以前的问题

前提：$(p\wedge\neg q)\to r$, $p$, $q\to s$, $\neg s$
结论：$r$

证明：

| | |
|---|---|
| ① $q\to s$ | 前提引入 |
| ② $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg q$ | ① ②拒取式 |
| ④ $p$ | 前提引入 |
| ⑤ $p\wedge\neg q$ | ③ ④合取引入 |
| ⑥ $(p\wedge\neg q)\to r$ | 前提引入 |
| ⑦ $r$ | ⑤⑥假言推理 |

# 以前的问题-归结证明法

前提：$(p\wedge\neg q)\rightarrow r$, $p$, $q\rightarrow s$, $\neg s$

结论： $r$

(1) 求解 $((p\wedge\neg q)\rightarrow r)\wedge p\wedge(q\rightarrow s)\wedge\neg s\wedge\neg r$ 的合取范式：

$$((p\wedge\neg q)\rightarrow r)\wedge p\wedge(q\rightarrow s)\wedge\neg s\wedge\neg r$$
$$\Leftrightarrow(\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge p\wedge(\neg q\vee s)\wedge\neg s\wedge\neg r$$
$$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge p\wedge(\neg q\vee s)\wedge\neg s\wedge\neg r$$

(2) 建立集合$S$

$S=\{\neg p\vee q\vee r$， $p$， $\neg q\vee s$， $\neg s$， $\neg r\}$

# 以前的问题-归结证明法

## (2) 建立集合S

$S=\{\neg p\vee q\vee r,\ p,\ \neg q\vee s,\ \neg s,\ \neg r\}$

## (3) 对S做归结

| | | |
|---|---|---|
| ① | $\neg q\vee s$ | 前提引入 |
| ② | $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ | $\neg q$ | ①②归结 |
| ④ | $p$ | 前提引入 |
| ⑤ | $\neg p\vee q\vee r$ | 前提引入 |
| ⑥ | $q\vee r$ | ④⑤归结 |
| ⑦ | $r$ | ③⑥归结 |
| ⑧ | $\neg r$ | 前提引入 |
| ⑨ | $\lambda$ | ⑦⑧归结 |

# 一阶逻辑的归结法

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$ $\Leftrightarrow$ 前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B$

结论：$B$ 　　　　　　　　结论：0 (或λ或□)

一阶逻辑归结法的做法：

(1) 对一阶逻辑谓词公式$G=A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge\neg B$:

首先化成与$G$等值的前束范式$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$;

其次将$M$化成与其等值的合取范式;

最后将所有的存在量词消去，得到公式$G$的Skolem标准型。

(2) 建立子句集$S$。

(3) 对$S$做归结。

# 实 例

**证明：梯形的对角线与上下底构成的内错角相等。**

设已给梯形的顶点分别为$a, b, c, d$，引入谓词

$T(x,y,u,v)$：以$xy$为上底，以$uv$为下底的梯形，

$P(x,y,u,v)$：$xy$平行于$uv$ ($xy\|uv$),

$E(x,y,z,u,v,w)$：$\angle xyz = \angle uvw$,

则

**前提：** $\forall x\forall y\forall u\forall v(T(x,y,u,v)\rightarrow P(x,y,u,v))$,

$\forall x\forall y\forall u\forall v(P(x,y,u,v)\rightarrow E(x,y,v,u,v,y))$,

$T(a,b,c,d)$

**结论：** $E(a,b,d,c,d,b)$

# 实 例

证明：

(1) $\neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v)$ 前提引入

(2) $\neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y)$ 前提引入

(3) $T(a,b,c,d)$ 前提引入

(4) $\neg E(a,b,d,c,d,b)$ 前提引入

(5) $P(a,b,c,d)$ (1)(3)归结

(6) $\neg P(a,b,c,d)$ (2)(4)归结

(7) $\lambda$ (5)(6)归结

# 说 明

有关一阶逻辑的归结可参阅：

人工智能原理. 石纯一等. 清华大学出版社

数理逻辑(离散数学第一分册). 王捍贫. 北京大学出版社

# 说 明

机械化方法

——王浩(1921-1995)：自动定理证明系统

1983年，被国际人工智能联合会授予第一届“数学定理机械证明里程碑奖”。

参考：离散数学. 董晓蕾，曹珍富. 机械工业出版社

——吴文俊(1919-2017)：计算机证明几何定理方法（国际上称为吴方法）

吴文俊人工智能科学技术奖，被外界誉为“中国智能科学技术最高奖”。

# 总 结

主要内容(命题逻辑中的归结)：

- 归结规则
- 归结证明法

基本要求(命题逻辑中的归结）：

- 掌握归结规则
- 掌握归结证明法