问题

苏格拉底三段论：

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

命题符号化：

p:凡是人都会死的

q:苏格拉底是人

r:苏格拉底也会死的

前提： p，q

结论： r ？

第7节 一阶逻辑基本概念

主要内容:

- 一阶逻辑命题符号化

  个体词、谓词、量词

  一阶逻辑命题符号化

- 一阶逻辑公式及其解释

  一阶语言

  合式公式(谓词公式)

  合式公式的解释

  永真式、矛盾式、可满足式

1. 一阶逻辑命题符号化

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：表示具体或特定的客体的个体词，一般用a, b, c表示

个体变项：表示抽象或泛指的客体的个体词，一般用x, y, z表示

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如: $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如: $N, Z, R, \ldots$

全总个体域——由宇宙间一切事物组成

注意：以后如没有指明个体域，均指全总个体域.

谓词

谓词——表示个体词性质或个体词相互之间关系的词

谓词常项: 表示具体性质或关系的谓词,

如: $F(a)$: a是人

谓词变项: 表示抽象或泛指性质或关系的谓词,

如: $F(x)$: x具有性质F

***n*元谓词**—— 含n ($n\geq1$) 个个体变项的谓词

一元谓词($n=1$)——表示个体的性质

多元谓词($n\geq2$)——表示个体之间的关系

如: $L(x, y)$: x与y有关系L, $L(x, y)$: $x\geq y$, …

0元谓词——不含个体变项的谓词

量词

量词——表示数量的词

全称量词∀: 表示所有的.

$\forall x$: 对个体域中所有的x

如：$\forall x F(x)$表示:

个体域中所有的x具有性质F

$\forall x \forall y G(x, y)$表示:

个体域中所有的x和y有关系G

量词

量词——表示数量的词

存在量词$\exists$: 表示存在, 有一个.

$\exists x$: 个体域中有一个x

如: $\exists x F(x)$表示: 个体域中有一个x具有性质F

$\exists x \exists y G(x, y)$表示: 个体域中存在$x$和$y$有关系$G$

$\forall x \exists y G(x, y)$表示: 对个体域中每一个$x$都存在一个$y$使得$x$和$y$有关系$G$

$\exists x \forall y G(x, y)$表示: 个体域中存在一个$x$使得对每一个$y$, x和y有关系G

实例

例1 用0元谓词将命题符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

解：在命题逻辑中：

(1) p, 其中，p：墨西哥位于南美洲.（真命题）

(2) $p \rightarrow q$, 其中， p: $\sqrt{2}$是无理数，q: $\sqrt{3}$ 是有理数.（假命题）

(3) $p \rightarrow q$, 其中，p：2>3，q：3<4.（真命题）

实例

例1 用0元谓词将命题符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲.

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数.

(3) 如果2>3，则3<4.

在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

(2) $F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，

其中，$F(x, y)$：$x > y$，$G(x, y)$：$x < y$

实例

注意：

(1) 不含个体变项的谓词称为0元谓词.

(2) 当谓词为谓词常项时， 0元谓词为命题.

(3) 任何命题均可以表示成0元谓词，因而可将命题看成特殊的谓词.

实例

例2 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 人都爱美.　　(2) 有人用左手写字.

个体域分别为:

(a) D为人类集合.　　(b) D为全总个体域.

解: (a) (1) $\forall xG(x)$，$G(x)$：x爱美

(2) $\exists xG(x)$，$G(x)$：x用左手写字

(b) $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

1. 引入特性谓词$F(x)$；
2. (1)、(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式.

实例

例3 在分别取个体域为

(a) $D_1=N$　　(b) $D_2=R$　　(c) D_3为全总个体域

的条件下，将下面命题符号化，并讨论真值.

存在数x，使得 $x+7=5$.

解：设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$　　假

(b) $\exists xH(x)$　　真

(c) 又设$F(x)$：x为实数

$\exists x(F(x)\wedge H(x))$　　真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）.

实例

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域.

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 正数都大于负数.

解:

(1) 令 $F(x)$：x为正数，

$G(y)$：y为负数，

$L(x, y)$：$x > y$，

则有

$$\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow L(x, y))$$

实例

注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域.

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(2) 有的无理数大于有的有理数.

解:

(2) 令 $F(x)$：x是无理数，

$G(y)$：y是有理数，

$L(x, y)$：$x > y$，

则有

$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$$

实例

例5 在一阶逻辑中将下面命题符号化.

(1) 没有不呼吸的人.

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖.

解: (1) $F(x)$: x是人, $G(x)$: x呼吸

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $F(x)$: x是人, $G(x)$: x喜欢吃糖

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

实例

例6 设个体域为实数域, 将下面命题符号化.

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$.

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$.

解: $L(x, y)$: $x < y$

(1) $\forall x\exists yL(x, y)$

(2) $\exists x\forall yL(x, y)$

注意: $\forall$与$\exists$不能随意交换.

显然(1)是真命题, (2)是假命题.

前面的问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

如何“说明”推理正确或有效?

一阶逻辑命题符号化：

设　$F(x)$: x是人,

$G(x)$: x是会死的,

a: 苏格拉底。

则有　$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$

或　**前提：** $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$，$F(a)$

结论： $G(a)$

2. 一阶逻辑公式及解释

定义1 设L是一个非逻辑符集合，由L生成的一阶语言 $\mathcal{L}$ 的字母表包括下述符号：

非逻辑符号：

(1) 个体常项符号：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号：

(4) 个体变项符号：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

一阶语言Ł的项与原子公式

定义2 Ł的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1)、(2)得到的.

如：a, x, $x+y$, $f(x)$, $g(x,y)$等都是项.

定义3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是Ł的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是Ł的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是Ł的原子公式.

如：$F(x, y)$, $F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式.

一阶语言$Ł$的公式

定义4 $Ł$的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

合式公式也称为谓词公式，简称公式.

如：$F(x)$, $F(x)\vee\neg G(x,y)$, $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$等都是合式公式.

封闭的公式

定义5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域.

在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现的.

例如： 考虑公式：$\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

x为指导变元，

$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，

x的两次出现均为约束出现，

y与 z 均为自由出现.

封闭的公式

又如: $\exists x(F(x, y, z)\rightarrow\forall y(G(x, y)\wedge H(x, y, z)))$,

$\exists x$中的x是指导变元, 辖域为

$$(F(x, y, z)\rightarrow\forall y(G(x, y)\wedge H(x, y, z))).$$

$\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x, y)\wedge H(x, y, z))$.

x的3次出现都是约束出现,

y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现,

z的2次出现都是自由出现.

封闭的公式

定义6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如：$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ 为闭式，

而 $\exists x(F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式.

公式的解释

定义7 设$Ł$是L生成的一阶语言，$Ł$的解释 I 由4部分组成：

(a) 非空个体域 D_I .

(b) 对每一个个体常项符号$a \in L$，有一个 $\overline{a} \in D_I$，称 $\overline{a}$ 为a在 I 中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f \in L$，有一个D_I上的n元函数 $\overline{f} : D_I^n \to D_I$ ，称 $\overline{f}$ 为 f 在 I 中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F \in L$，有一个D_I上的n元谓词常项$\overline{F}$，称 $\overline{F}$ 为F在 I 中的解释.

设公式A，取个体域D_I，把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释 $\overline{a}$、$\overline{f}$、$\overline{F}$，称所得到的公式A'为A在I下的解释，或A在I下被解释成A'.

实例

例7 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=R$

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

写出下列公式在 I 下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists xF(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\rightarrow F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 假

(3) $\forall xF(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不定, 不是命题

公式的类型

定理1 闭式在任何解释下都是命题.

注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题.

定义8 若公式A在任何解释下均为真, 则称A为永真式(逻辑有效式).

若A在任何解释下均为假, 则称A为矛盾式(永假式).

若至少有一个解释使A为真, 则称A为可满足式.

说明:

(1) 永真式为可满足式，但反之不真.

(2) 判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的，即不存在一个算法能够在有限步内判断任意给定的公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式).

代换实例

定义9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i $(1\le i\le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如：$F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$等都是$p\to q$的代换实例.

定理2 重言式的代换实例都是永真式；
矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例8 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>5, $G(x)$: x>4, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:x<5, $G(x)$:x<4, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

前面的问题

凡是人都会死的。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底也会死的。

一阶逻辑命题符号化：

设 $F(x)$: x是人，

$G(x)$: x是会死的，

a: 苏格拉底。

则有

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$$

如何判别该公式是重言式？

考虑

判断谓词公式是否为重言式的方法:

代换实例

其它方法?

练习

证明：梯形的对角线与上下底构成的内错角相等。

如何符号化？
如何证明？

设已给梯形的顶点分别为a, b, c, d，引入谓词

$T(x,y,u,v)$：以xy为上底，以uv为下底的梯形，

$P(x,y,u,v)$：xy平行于uv($xy\|uv$)，

$E(x,y,z,u,v,w)$：$\angle xyz = \angle uvw$，

则

？

总 结

主要内容:

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言L

  项、原子公式、合式公式
- 公式的解释

  量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型

  永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

总 结

基本要求:

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念，会判断简单公式的类型