计算固体力学project报告

**白航雨帆**

1. 理论推导

1、强、弱、伽辽金形式问题

从强形式问题：

已知, 确定, 使得

可以得出弱形式问题：

已知, 确定, 使得

其中，

对于数值方法，我们应该考虑有限元的伽辽金形式问题：

已知, 确定, 使得

这里边界条件为迪利克雷条件g和纽曼条件h。

1. 矩阵问题

可以将上述问题转换成下列矩阵问题

其中，刚度矩阵K可由下列式子计算

其中，,

如果是弹性力学问题，根据平面应力公式

根据平面应变公式

其中，,

在数值计算过程中，我们需要计算每个单元的刚度矩阵kele

其中，J为雅各比矩阵

1. ID数组与IEN数组

所以，

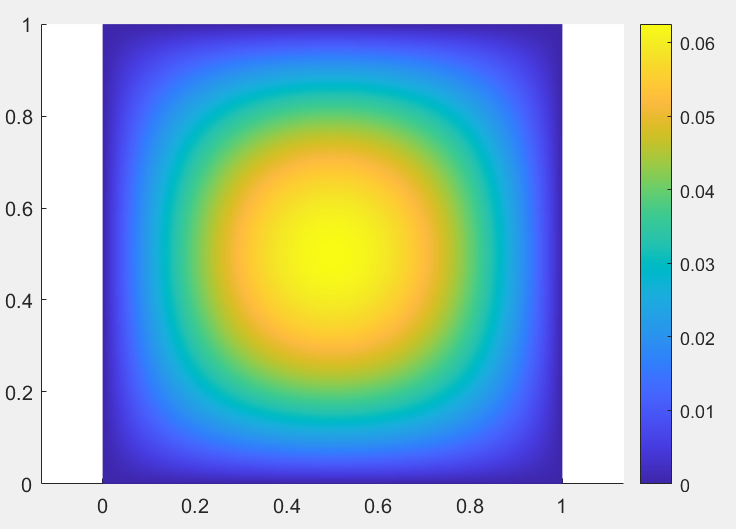
1. 代码开发

使用矩形平面板进行代码开发，验证代码可行性

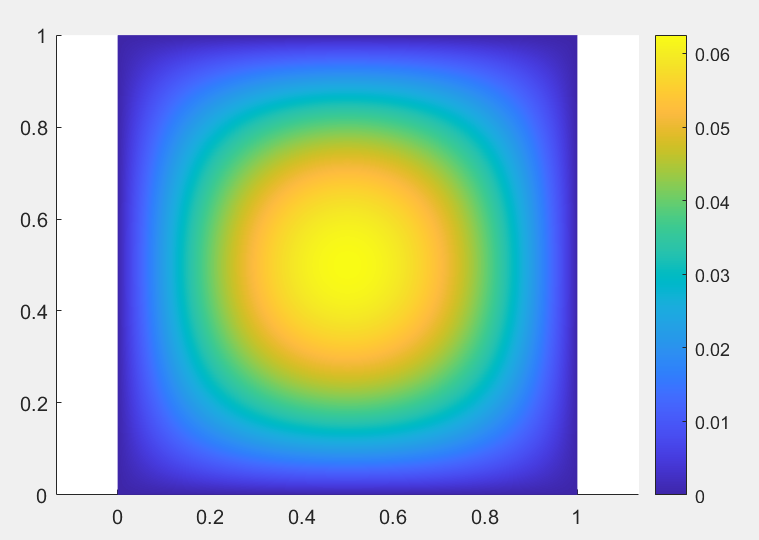
选取一个边长为1的矩形平板，在四边施加迪利克雷条件均为0，给出位移的精确解为

由精确解可知，x、y方向上位移相等，我们能够求出两方向的应变ε，再计算出应力σ=Dε，最后根据解出两个方向的f。

带入到代码中求出数值位移解

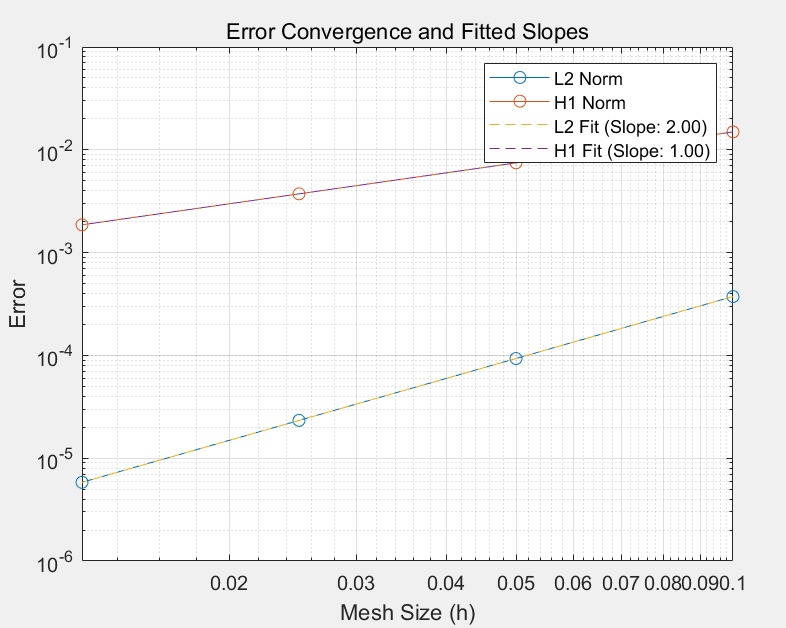


x方向位移



y方向位移

接下来根据误差的泛函公式分别计算出不同网格下的L2误差和H1误差

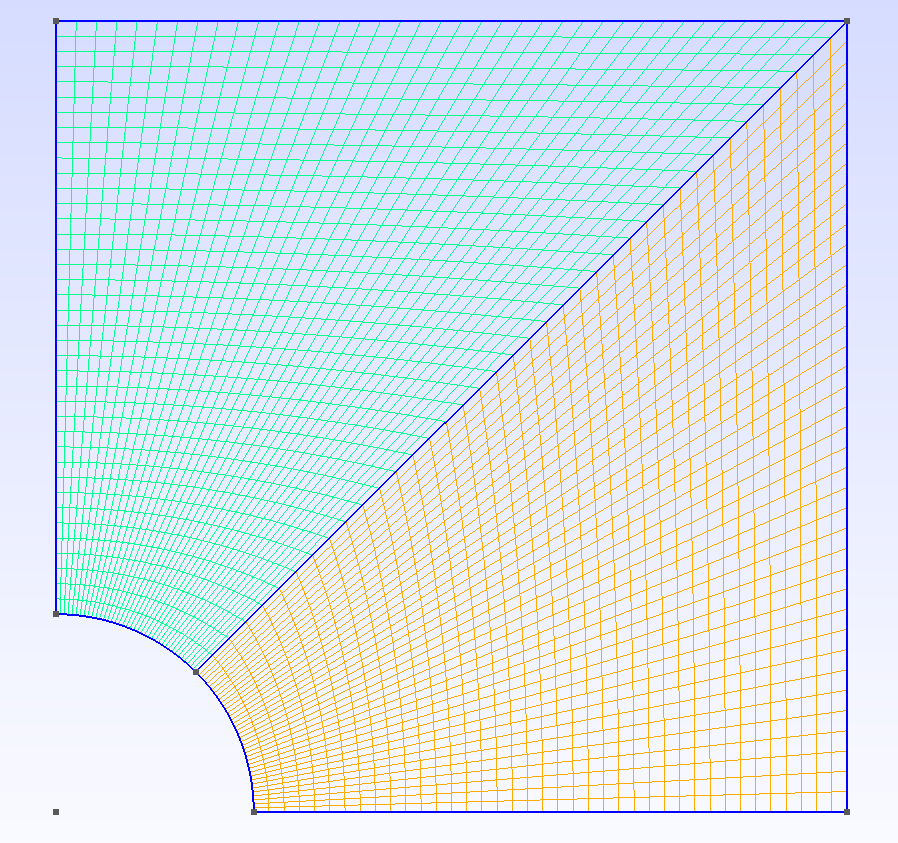


根据有限元误差估计，L2误差收敛率应为2，H1误差收敛率应为1

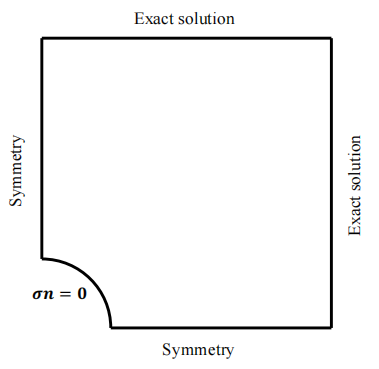
与解出数值解相吻合，说明数值结果可靠，符合理论推导。

1. 解决实际问题

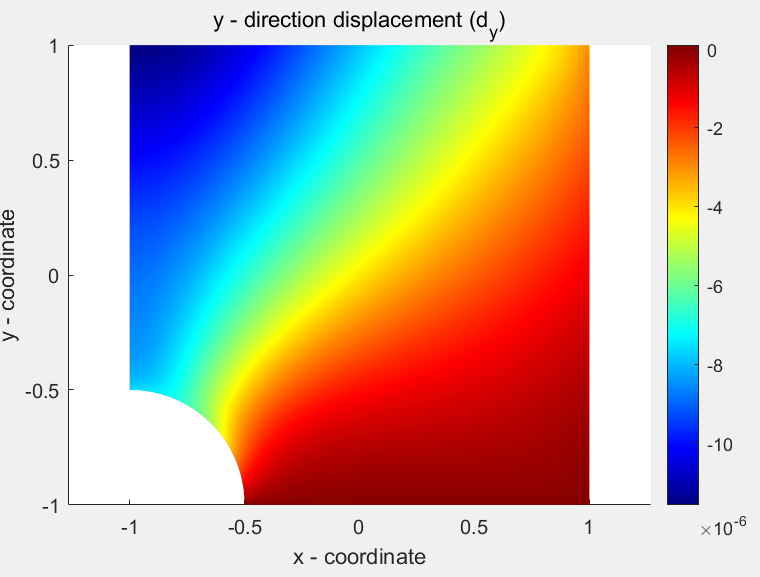
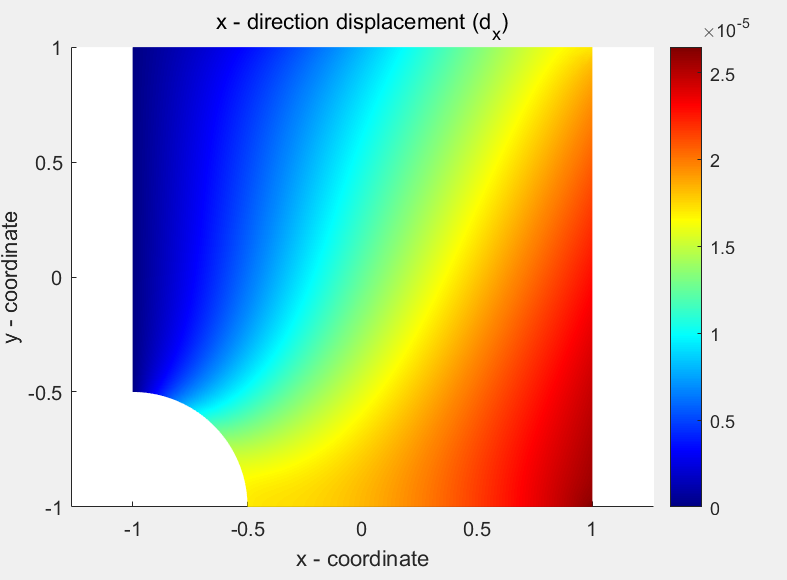
有一张边长为4的正方形平板，正中心有一个半径为0.5的圆孔，由于是对称的，所以可利用gmsh绘制四分之一平板的网格计算给定边界的应力应变



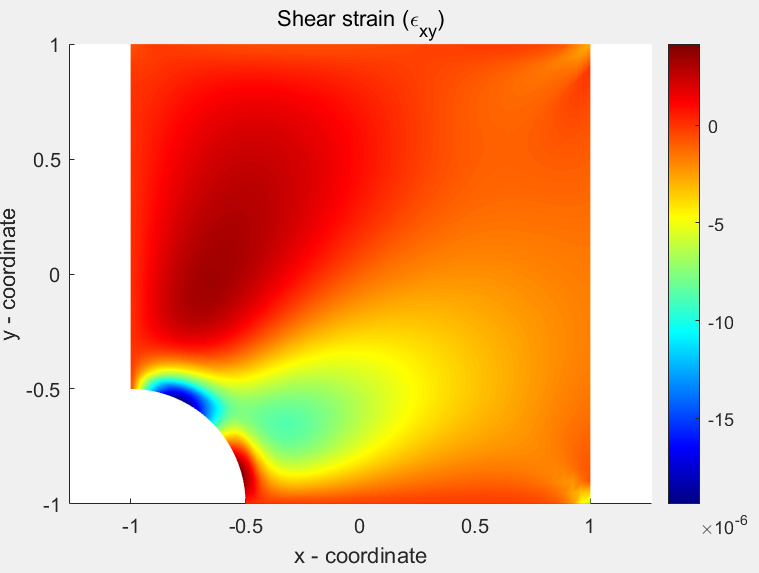
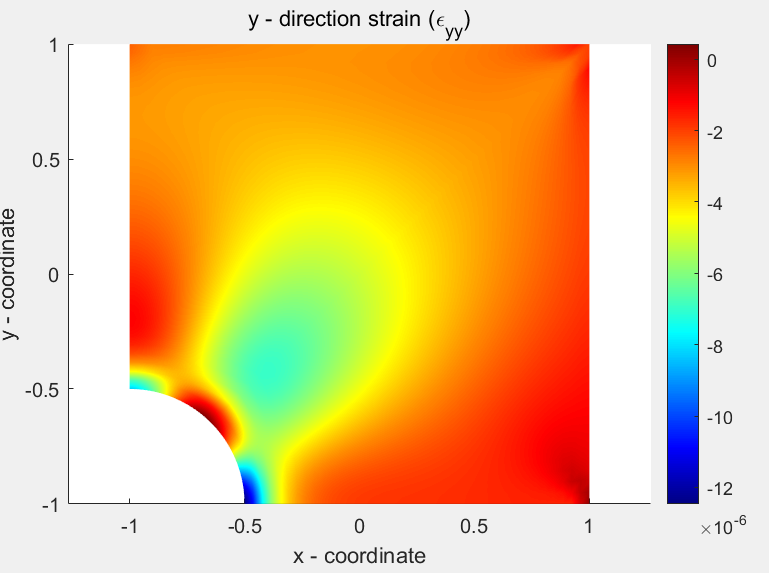
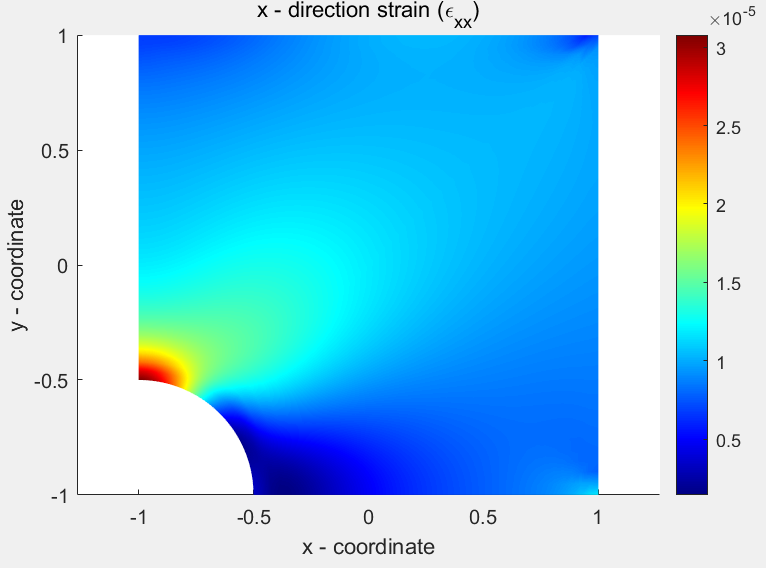
1. 给定应力的精确解



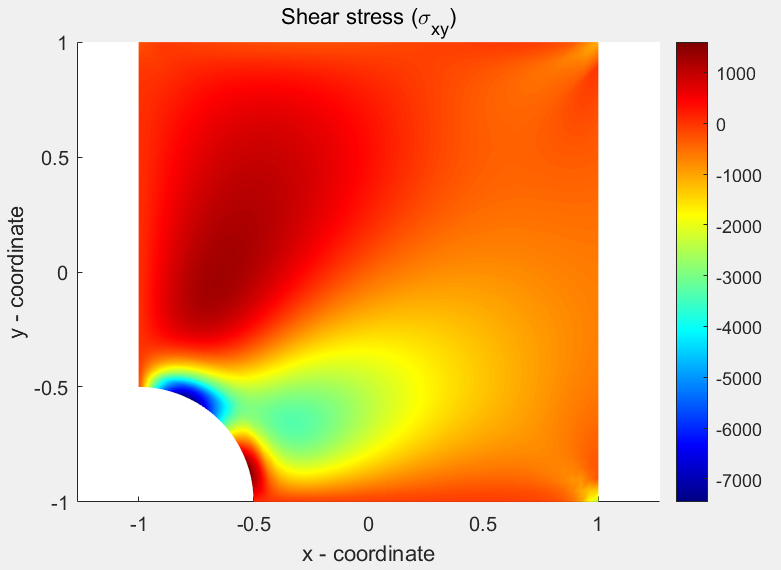
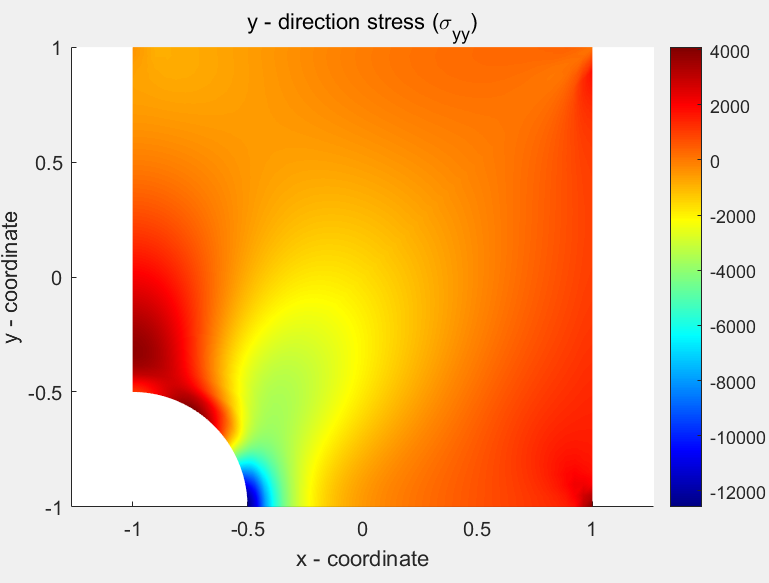
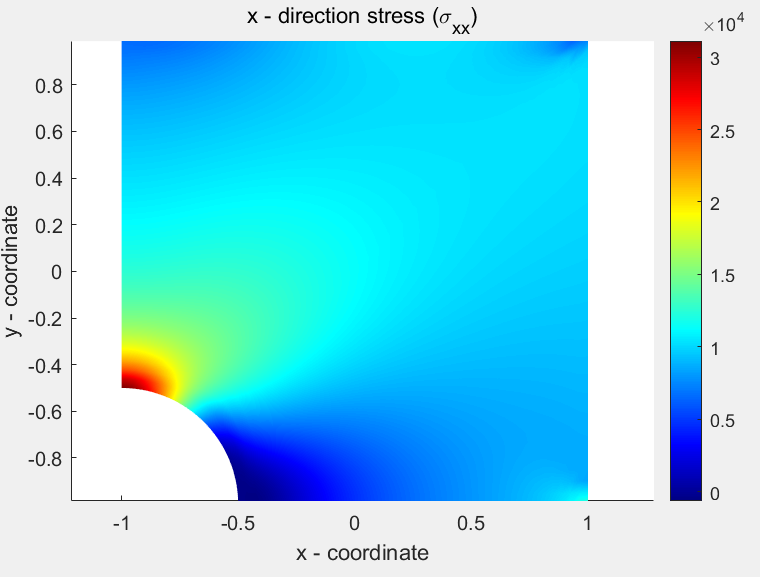
1. 根据给定的应力，通过材料力学中学到的应力变换将极坐标r系转换为平面直角坐标系xy。
2. 根据已知条件建立ID、IEN数组，其中IEN数组需要注意每个网格中的取点顺序，更改geo文件的画图顺序，否则会导致计算失败，ID数组需要给用户留有一个改变边界条件的自由。
3. 根据解出每条边应有的纽曼边界，其中圆弧因为是没有径向应力，所以没有纽曼边界条件，对称边没有垂直的纽曼边界
4. 由于没有体力，所以f需要再边界上进行线积分
5. 解出位移的数值解



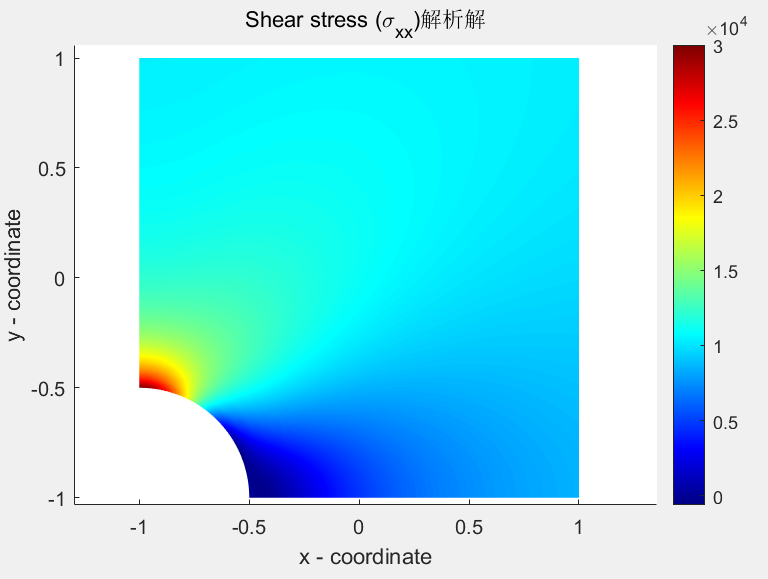
1. 然后先用高斯积分求出每个单元的应力数值解，取高斯积分点的平均应变作为单元应变，用单元应变加权，对每个节点应变进行平均得到每个节点的应变



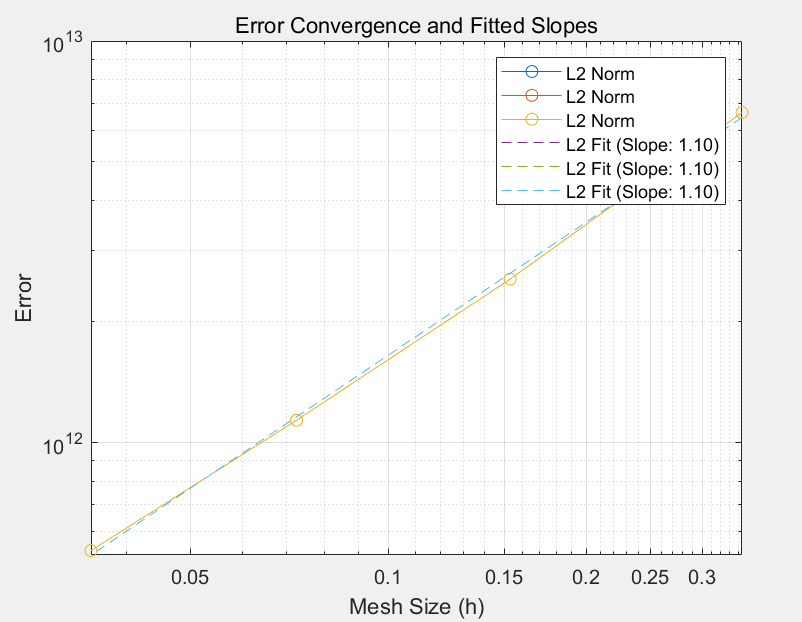
1. 求出每个节点的应力



1. 与解析解画出的图进行比较



1. 改变网格大小计算应力的有限元误差

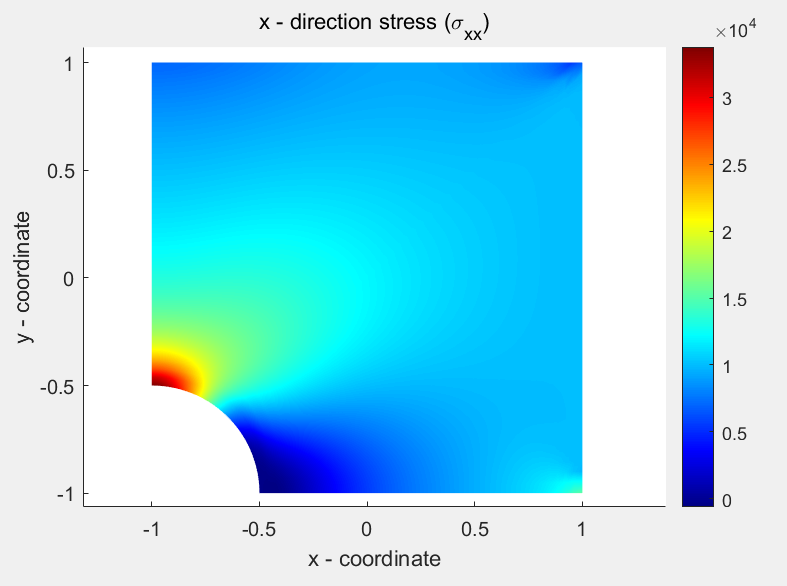


由于应力是位移一阶导数的函数，所以它的收敛率是1，符合理论推导。

1. 工程实践中左右表面上有10kPa的牵引力均匀，没有体力

只需要改变纽曼边界h的函数为右边的垂直应力为10kPa，其余都是零就可以了。

得到的x方向应力图像为



1. 应力集中点分析
2. 当板受到外力作用时，力的传递在孔附近受到阻碍，原本均匀分布的应力线被迫绕过孔洞，使得孔附近的应力线变得密集，从而导致该区域的应力值增大，形成应力集中点。
3. 应力集中系数
4. 应力集中系数是用来衡量应力集中程度的一个指标，它定义为应力集中点的最大应力与无应力集中时（如远离孔洞的边界处）的应力之比。
5. 对于一些简单的几何形状和受力情况，可以通过理论分析和推导得到应力集中系数。对于无限大平板中心有一个小圆孔，在单向均匀拉伸的情况下，通过弹性力学的理论分析，可以得到孔边的应力集中系数约为 3，即孔边的最大应力约为远离孔的边界处应力的三倍。
6. 公式推导
   1. 采用极坐标来分析问题，设平板在无穷远处受到沿 x 轴方向的均匀拉伸应力。
   2. 根据弹性力学的基本方程和边界条件，通过求解应力函数，可以得到应力分量的表达式。
   3. 对于圆孔周边的切向应力，在（即孔的上下边缘）处，应力表达式为，当（圆孔半径）时，，这就说明了孔边的最大应力是无穷远处应力的三倍，也就是边界应力的三倍。
7. 误差分析
8. 在求解应力部分，由于节点应力是根据单元应力平均下来的，导致边角的应力少算了外部单元格的，所以边角的图像有些瑕疵。
9. 纽曼边界的h阶数可能高于二阶，但只用二阶高斯积分可能会产生误差。