$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(\mathbf{x}_1) \\ \dots \\ y(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} - \textit{Экспериментальные данные}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{c}) \end{pmatrix} - \textit{Вектор данных от подбираемой модели}$$

$$\mathbf{c} = \left(c_1, \dots, c_m\right)^T - \textit{Вектор параметров модели}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{y} - \textit{Вектор невязок}$$

$$\mathbf{r} \to \min$$

$$S = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \to \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = 2\mathbf{J}_j^{\,T} \mathbf{r} = 0 - \textit{Условие минимума}$$

$$\mathbf{J}_j = \frac{\partial \mathbf{r}(x, \mathbf{c})}{\partial c_j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial c_1} \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial c_m} \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}^T \mathbf{r} = \mathbf{0}, \textit{ где } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_1, \mathbf{c})}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_1, \mathbf{c})}{\partial c_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})}{\partial c_1} & & \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})}{\partial c_m} \end{pmatrix} - \textit{матрица Якоби}$$

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta \mathbf{c}^{(k)} - k - \textit{номер итерации}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{r}^{(k)}}{\partial c_j^{(k)}} \mathbf{\Delta c}_j^{(k)} + \ldots = \mathbf{r}^{(k)} + \mathbf{J}^{(k)} \mathbf{\Delta c}^{(k)} + \ldots$$

Умножим на $\mathbf{J}^{T^{(k)}}$:

$$\mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)} + \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}\right)^{(k)} \mathbf{\Delta c}^{(k)} + \ldots$$

Пусть $\mathbf{A}^{(k)} = \left(\mathbf{J}^T \mathbf{J}\right)^{(k)}$

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{\Delta c}^{(k)} - \mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k+1)} = -\mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)} \qquad (*)$$

1) Метод Гаусса-Ньютона

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{\Delta c}^{(k)} = -\mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\mathbf{\Delta c}^{(k)} = -\left(\mathbf{A}^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \alpha \mathbf{\Delta c}^{(k)}, \ \alpha \le 1$$

2) Метод Левенберга-Марквардта

Можно аппроксимировать второе слагаемое в (*) с помощью $\lambda^{(k)} \mathbf{D} \Delta \mathbf{c}^{(k)}$

$\lambda^{(k)}$ - масштабный коэффициент

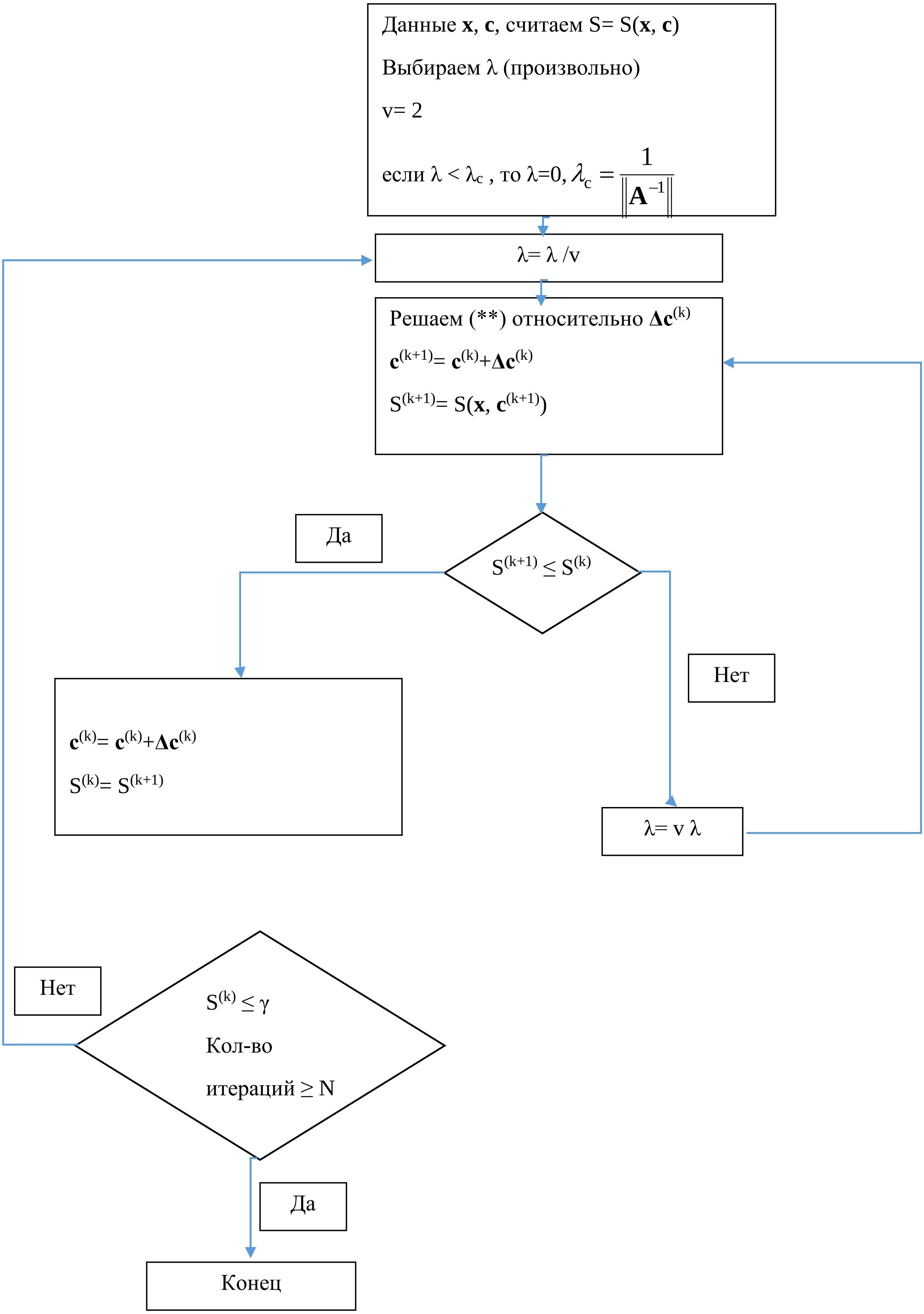
D - диагональная матрица весов

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{\Delta c}^{(k)} - \lambda^{(k)} \mathbf{D} \Delta \mathbf{c}^{(k)} = -\mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)}$$

Левенберг: **D** = **I** – единичная матрица

$$\left(\mathbf{A}^{(k)} + \lambda \mathbf{I}\right) \mathbf{\Delta c}^{(k)} = -\mathbf{J}^{T^{(k)}} \mathbf{r}^{(k)} \qquad (**)$$

D=diag(A$^{(k)}$)


Данные x, c, считаем S= S(x, c)
Выбираем λ (произвольно)
v= 2
если λ < λc , то λ=0, λc = 1/‖A⁻¹‖
λ= λ /v
Решаем (**) относительно Δc(k)
c(k+1)= c(k)+Δc(k)
S(k+1)= S(x, c(k+1))
Да
S(k+1) ≤ S(k)
Нет
c(k)= c(k)+Δc(k)
S(k)= S(k+1)
λ= v λ
Нет
S(k) ≤ γ
Кол-во
итераций ≥ N
Да
Конец