Funktionentheorie: Übungsstunde 4

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

14.10.2025

1 Feedback Serie 2

Kommt später.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Satz von Cauchy, Windungszahl.

2.1 Zusätzliches Material

Beispiele zu Satz 3.20 Zwei (reelle) Funktionen mit Punkten, die die Bedingung $\lim_{z\to\zeta}(z-\zeta)f(z)=0$ für einen Punkt ζ erfüllen, sind

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-1}, \qquad g(x)=\frac{\sin x}{x}. \tag{1}$$

Diese wirken künstlich, vor allem wenn man sich die Potenzreihenentwicklung der beiden Funktionen anschaut. Durch die explizite Definition haben aber beide diese undefinierten Stellen/Werte bei $x=1$ respektive $x=0$, für die die (beidseitigen) Grenzwerte trotzdem existieren.

Intuition zur Windungszahl Auf einem Brett mit Nägeln ist ein Seil verschieden um diese Nägel gewickelt. Wir wollen für jeden Nagel rausfinden, wie oft das Seil um diesen Nagel herumgeht. Dazu können wir alle anderen Nägel entfernen und das Seil in eine Kreisform bringen, damit wir einfach sehen, wie oft das Seil herumgeht.

Wenn ein verschlungener Pfad um Punkte herumführt, können wir somit alle anderen Punkte missachten und brauchen nur die Abschnitte des Pfades, die direkt neben dem Punkt durchführen, und müssen nach Kreuzungen die Enden korrekt verbinden. Dann können wir, falls nötig, den Pfad vereinfachen und zählen, wie oft er um den Punkt herumführt.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben

Aufgabe 1. *Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Gilt*

$$\operatorname{Re} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \operatorname{Re} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

für alle Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$? Beweise oder finde ein Gegenbeispiel.

Lösung. Unsere Intuition von holomorphen Funktionen hilft uns hier: Die Aussage stimmt nicht.

Betrachte $f(z) = z$: Da die Funktion ganz ist, verschwindet das Integral (und somit auch dessen Realteil) über jede Kurve. Für das Integral des Realteils zerlegen wir $f(z)$ und $\dot{\gamma}(t)$ in Real- und Imaginärteil:

$$\int_\gamma \operatorname{Re} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \cos(t) i (\cos t + i \sin t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$= i \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t}_{=0} \tag{4}$$

$$= i\pi \neq 0 \tag{5}$$

Die beiden reellen Integrale sind dem Leser zur Übung überlassen. □

Aufgabe 2. *Zeige, dass*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i} \int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x}\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Lösung. Wir zerlegen die rechte Seite:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} - 1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^R \frac{\cos x - 1 + i \sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$= \underbrace{\int_{-R}^R \frac{\cos x - 1}{x}\,\mathrm{d}x}_{=0} + i \int_{-R}^0 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + i \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$= 2i \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

wobei das erste Integral in Gleichung (8) verschwindet, da wir eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall integrieren. □

Weitere Aufgaben

Aufgabe 3. *Benutze einen passenden (zusammengesetzten) Weg, um den Wert des Integrals aus Aufgabe 2 zu finden.*

Tipps zur Serie 4 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 4

1. Benutze Cauchy-Riemann und die Eigenschaften des Pfadintegrals.
2. Für ein konservatives Vektorfeld F gilt:
   - $\exists V$ Skalarfeld, sodass $F = \nabla V$
   - $\nabla \times F = 0$
   - $\int_\gamma F = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$
3. Bringe den Ausdruck mit Partialbruchzerlegung auf eine Form mit Termen wie $\frac{1}{z}$ (ohne quadratische inverse Terme).
4. Siehe Aufgabe 2.
5. Benutze (4) und Aufgabe 2.