Lineare Algebra II: Übungsstunde 2

Florian Frauenfelder
`florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/`

03.03.2025

1 Quiz 15: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 15.1

Einige der einfachsten Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \tag{1}$$

1.2 Aufgabe 15.2

Berechne das charakteristische Polynom für die algebraische Vielfachheit und erhalte:

$$\chi_A(x) = (\lambda - x)^3 \implies \boxed{a_\lambda = 3}. \tag{2}$$

Für die geometrische Vielfachheit berechne die Eigenvektoren $(v_1, v_2, v_3)^\top$:

$$\begin{aligned} \lambda v_1 + v_2 &= \lambda v_1 && (3)\\ \lambda v_2 + v_3 &= \lambda v_2 && (4)\\ \lambda v_3 &= \lambda v_3 && (5)\\ \implies v_3 = v_2 &= 0 && (6)\\ \implies v_1 &\in K, && (7) \end{aligned}$$

womit wir direkt die Dimension des Eigenraums von λ erhalten:

$$\dim E_\lambda = \boxed{g_\lambda = 1}. \tag{8}$$

Alternativ: Man sieht direkt, dass die Matrix ein Jordanblock der Grösse 3 mit Eigenwert λ ist: $A = J_3(\lambda)$, und leitet direkt ab, dass die algebraische Vielfachheit die Länge des Blocks $a_\lambda = 3$ und die geometrische die Anzahl der Blöcke $g_\lambda = 1$ ist.

2 Feedback Serie 14

1. Achtung: Linearität in den Spalten und den Zeilen ist nicht dasselbe (Ausnahme: det)!

4. Vorsicht Spezialfälle: Was passiert für $\det A = 0$? Dies muss separiert betrachtet werden, da im sonstigen Beweis durch $\det A$ geteilt wird!

7. Da $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot)$ kein Element -1 enthält, sollte auch die Lösung einer Polynomdivision ohne Subtraktion geschrieben werden: $-1 \equiv 1$.

3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Eigenräume, Vielfachheiten, Einführung minimales Polynom.

3.1 Zusätzliches Material

Notation (Ordnung einer Nullstelle)**.** *Sei $p(x) \in K[x]$ mit einer Nullstelle bei $x = \lambda$ der Ordnung k (also $p^{(j)}(\lambda) = 0, \forall j < k$), dann schreiben wir:*

$$\operatorname{ord}_\lambda p := k \tag{9}$$

für die Ordnung der Nullstelle bei $x = \lambda$ in p.

4 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

Besprochene Aufgaben:

- HS00: 2
- HS02: 3 (Definitheit)

Weitere Aufgaben:

- FS01: 2
- HS01: 6 (schwierig)
- FS04: 2b
- HS05: 2ac
- HS06: 4ab, 7a

Tipps zur Serie 15 auf der nächsten Seite!

5 Tipps zur Serie 15

1. keine
2. $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$
3. Benutze die elementweise Definition der Matrixmultiplikation.
4. Wenn $Av = \lambda v$ gilt, was passiert für $A^2 v$?
5. Benutze die Endlich-Dimensionalität für Berechnungen von $\dim \ker G \circ F$.
6. Schwierig: Konstruiere eine Vandermonde-Matrix V mit den x_i und betrachte $V^{-1}y$.
7. Schwierig:
   a) f ist invariant auf V_i heisst: $f(V_i) \subseteq V_i$. Definiere geordnete Basen von V_i und setze sie zusammen zu einer Basis von V, um eine nützliche Form von f zu finden.
   b) Benutze die Rückrichtung von Lemma 10.3.7 (ohne Beweis).
   c) $\Longrightarrow$: Benutze dieselbe Basis aus Eigenvektoren und die Linearität von f und g.
   $\Longleftarrow$: Benutze a) und b) um die Basis zu konstruieren.