Funktionentheorie: Übungsstunde 1

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

23.09.2025

1 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Komplexe Zahlen und deren Darstellungen, Komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemann-Gleichungen.

1.1 Zusätzliches Material

1.1.1 Matrixdarstellung von komplexen Zahlen

Wir betrachen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Matrixraum:

$$\mathbb{C} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \tag{1}$$

woraus wir die anderen Darstellungen von komplexen Zahlen ablesen können:

$$z = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} = \operatorname{Re} z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Im} z \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = re^{i\theta} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1.1.2 Logarithmus

Wenn wir die Exponentialfunktion einschränken, sodass sie bijjektiv wird, erhalten wir:

$$\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \Omega = \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \tag{3}$$

woraus wir den (Hauptzweig des) Logarithmus als Umkehrfunktion mit Definitionsbereich Ω finden, mit $\log z := \log|z| + i \arg z$.

Andere Zweige können im Allgemeinen mit der Bedingung $\exp(\log z) = z$ gefunden werden, wodurch immer gelten muss, dass $0 \notin \Omega$. Zusätzlich (ohne Beweis) muss Ω einfach zusammenhängend sein.

1.1.3 Riemann-Sphäre

Rechenregeln in der erweiterten komplexen Ebene $\bar{\mathbb{C}} \equiv \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

- $\infty \pm z = z \pm \infty = \infty, \forall z \in \mathbb{C}$
- $\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$
- $\frac{z}{\infty} = 0, \forall z \in \mathbb{C}$
- $\frac{z}{0} = \infty, \forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$

1.1.4 Möbiustransformationen

Möbiustransformationen sind Abbildungen ϕ_A, die folgendermassen definiert sind:

$$\phi : GL(2, \mathbb{C}) \to \qquad (\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}) \tag{4}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \qquad \phi_A = \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) \tag{5}$$

Eigenschaften:

1. ϕ_A ist stetig
2. $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$
3. $\phi_{\lambda A} = \phi_A, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, also insbesondere $\phi_{\lambda 1} = 1$
4. $\phi_A^{-1} = \phi_{A^{-1}}$
5. Kreise mit $r \leq \infty$ werden auf Kreise mit $r \leq \infty$ abgebildet (Kreise mit $r = \infty$ sind als Geraden zu verstehen)
6. drei Punkte ($\in \bar{\mathbb{C}}$) und ihre Bilder bestimmen ϕ_A eindeutig (bis auf λ)

1.1.5 Komplexe Differenzierbarkeit

In der Literatur (und auch im Kurs später) wird komplex differenzierbar und holomorph sehr häufig gleichgesetzt und einfach immer spezifiziert, ob nur ein Punkt oder ein Gebiet gemeint ist. Ist eine Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, heisst sie «ganz» (eng.: entire).

1.1.6 Cauchy-Riemann-Gleichungen

Satz 1. *Sei $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. TFAE:*

1. *f ist holomorph in z_0.*
2. *$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist (reell) differenzierbar in z_0 mit $df(z_0) \equiv Jf(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form einer komplexen Zahl.*

3. u, v sind (reell) differenzierbar in z_0 mit

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{6}$$

Dese Gleichungen heissen Cauchy-Riemann-Gleichungen.

4. f ist (reell) differenzierbar in z_0 mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(z_0) = 0. \tag{7}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} && (8)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) && (9)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) && (10)\\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) && (11)\\
&= -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) && (12)
\end{aligned}$$

2 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben:

- FS06: 0

Lemma 1. *Holomorphe Funktionen sind harmonisch (Laplace-Operator $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$):*

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \implies \Delta f = 0 \tag{13}$$

Beweis. Mit der Notation

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{14}$$

und Satz 1 ist der Beweis schnell erbracht:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 && \forall z \in \Omega && (15)\\
\implies\ &\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 && && (16)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cancel{+i\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}} \cancel{-i\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}}\right) f && && (17)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f && && (18)\\
&= \boxed{\frac{1}{4}\Delta f = 0} && && \square
\end{aligned}
$$

(Hier wurde angenommen, dass die zweiten Ableitungen existieren und vertauschen. Dies wurde formell in der Vorlesung noch nicht gezeigt.)

Weitere Aufgaben:

Aufgabe 1. *Wo sind folgende Funktionen holomorph?*

1. $f(z) = z\bar{z}$

2. $g(z) = \sin z$

3. $h(z) = \operatorname{Re} z$

4. $k(x + iy) = \sqrt{x} + \frac{i}{2}y$

Lösungsansatz. (Die explizite Rechnung ist dem Leser überlassen.)

1. Bei $z = 0$, was aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen ersichtlich ist.

2. Überall, da sin als Komposition von ganzen Funktionen geschrieben werden kann: $\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$. (Formeller Beweis dieser Aussage erfolgt über die Linearität der Ableitung oder den Differentialquotienten.)

3. Nirgends, da der Grenzwert des Differenzialquotienten für $h \in \mathbb{R}$ sich von jenem für $h \in i\mathbb{R}$ unterscheidet.
   Oder: Nirgends, da die Cauchy-Riemann-Gleichungen nicht erfüllt sind.

4. In allen Punkten mit $\operatorname{Re} z = 1$, was aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen und Satz 1 hervorgeht. (Da dies keine offene Menge ist, ist die Funktion nur in jedem dieser Punkte einzeln holomorph, aber *nicht* in $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}$.)

$\square$

Tipps zur Serie 1 auf der nächsten Seite!

3 Tipps zur Serie 1

1. Verschiedene Darstellungen der Zahlen helfen.

2. Ein bisschen lineare Algebra.

3. Aufwändig:
   $\Longrightarrow$: Benutze die Seiten des Dreiecks $a = z_1 - z_2, b = z_2 - z_3, c = -a - b$ und $a\measuredangle b = b\measuredangle c = c\measuredangle a = \pm\frac{2\pi}{3}$.
   $\Longleftarrow$: Betrachte Rotationen um $e^{i\theta}$ und Translationen um $z_0 \neq 0$.

4. Was ist $\bar{w}$?

5. b) Beweise in zwei Teilen: $z \in \mathbb{H} \implies f(z) \in \mathbb{D}$ und $w \in \mathbb{D} \implies \exists z \in \mathbb{H} : f(z) = w$.