

Funktionentheorie: Übungsstunde 6

Florian Frauenfelder

<https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/>

28.10.2025

1 Feedback Serie 4

3. Vorsicht: Der Residuensatz wurde in der Vorlesung noch nicht gezeigt und darf deshalb nicht ohne Beweis verwendet werden. Die Idee ist hier entweder Satz 3.31 (oder die Definition der Windungszahl) zu verwenden – entweder mit oder ohne Partialbruchzerlegung – oder nach der Partialbruchzerlegung das Pfadintegral mit der Substitution $w = z - a \implies dw = dz$ auszuwerten, ähnlich wie es in der Musterlösung gemacht wird.
4. Denke daran, dass die Orientierung einer Kurve wichtig ist: Deshalb ist die Funktion über γ_ϵ^+ integriert $= -\pi$.
5. Abschätzungen bei Grenzwerten sind bei solchen Integralen fast immer wichtig.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Weierstrass, Potenzreihen, Taylor.

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx oder FSxx sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:
<https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie>

Besprochene Aufgaben

- FS05: 1
- HS05: 2

Eine sehr elegante Lösung von HS05: 2b, vorgeschlagen von einem Studenten:

Lösung HS05: 2b. Aus der rekursiven Definition der Koeffizienten können wir schreiben:

$$\sum_{k \geq 2} f_k z^k = \sum_{k \geq 2} f_{k-1} z^k + \sum_{k \geq 2} f_{k-2} z^k \quad (1)$$

$$= z \sum_{k \geq 2} f_{k-1} z^{k-1} + z^2 \sum_{k \geq 2} f_{k-2} z^{k-2} \quad (2)$$

was mit Koeffizientenvergleich überprüft werden kann. Ebenfalls gilt:

$$\sum_{k \geq 2} f_k z^k = f(z) - 1 - z, \quad (3)$$

$$\sum_{k \geq 1} f_k z^k = \sum_{k \geq 2} f_{k-1} z^{k-1} = f(z) - 1. \quad (4)$$

Damit gilt nun:

$$f(z) - 1 - z = z(f(z) - 1) + z^2(f(z)) \quad \Big| + z \quad (5)$$

$$f(z) - 1 = zf(z) + z^2 f(z) \quad \Big| + 1 - zf(z) - z^2 f(z) \quad (6)$$

$$f(z)(1 - z - z^2) = 1 \quad \Big| / (1 - z - z^2) \quad (7)$$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} \quad (8)$$

□

Weitere Aufgaben

- HS05: 3
- FS06: 3
- HS06: 2
- FS07: 1

Tipps zur Serie 6 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 6

1. Benutze Satz 3.17.
3. Nimm an, $z = 0$ sei die einzige Singularität, zeige ein Beispiel und begründe, wieso das allgemein gilt.
4. Was muss holomorph sein?
5. Benutze Satz 3.31 (Cauchy).