Funktionentheorie: Übungsstunde 5

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

21.10.2025

1 Feedback Serie 3

Folgt später

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Windungszahlen und glatte Schleifen, Cauchy Integralformel, holomorphe Funktionen, Morera, hebbare Singularitäten, Cauchy-Ungleichung, Liouville.

2.1 Zusätzliches Material

Zu Lemma 3.28 Die Windungszahl ändert sich um ± 1, wenn eine von links bzw. rechts kommende einfache Kurve überschritten wird. Anders formuliert: Man stelle sich vor, man steht auf der komplexen Ebene vor der Kurve. Um zu herauszufinden, wie sich die Windungszahl ändert, wenn die Kurve überschritten wird, muss man wissen, in welche Richtung die Kurve läuft.

Bemerkung zu Satz 3.31 / Korollar 3.37 Das Problem mit Funktionen wie $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ ist, dass zwar die Grenzwert-Bedingung bei $\zeta = 0$ erfüllt wäre, wir aber keinen Definitionsbereich einer Wurzelfunktion finden können, der eine Umgebung um 0 enthält. Die Begründung ist eine ähnliche wie bei der Logarithmusfunktion. Damit lässt sich auch begründen, dass wir solche Funktionen nicht stetig fortsetzen können.

Satz 3.39: Liouville Beschränkte ganze Funktionen sind konstant.

Beweis. Da $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist, ist die Voraussetzung für die Cauchy-Ungleichung überall erfüllt:

$$|f(z)| \leq M \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$$\implies |f'(z)| \leq \frac{M}{r} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \forall r > 0 \tag{2}$$

$$\implies f'(z) \equiv 0 \tag{3}$$

In Gleichung (2) wird die Cauchy-Ungleichung für $n = 1$ und für alle Bälle in $\mathbb{C}$ angewendet, und in Gleichung (3) der Grenzwert für $r \to \infty$ ausgewertet. $\square$

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben

Aufgabe 1. *Zeige:* $f(z) = e^{i\cos(\operatorname{Re} z)}$ *ist nicht holomorph auf* $\mathbb{C}$.

Lösung. Da $\cos(\operatorname{Re} z) \in \mathbb{R}$, gilt: $|e^{i\cos(\operatorname{Re} z)}| = 1, \forall z \in \mathbb{C}$. Nach Liouville müsste somit für eine holomorphe Funktion gelten, dass $f =$ konst. ist, was aber nicht stimmt. $\square$

Aufgabe 2. *Berechne:*

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz^2} - 1}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \gamma_1(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi] \tag{4}$$

Lösung. Mit der Integralformel von Cauchy kann das Integral direkt berechnet werden:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz^2} - 1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(0) = 0, \tag{5}$$

wobei $f(z) = e^{iz^2} - 1$. $\square$

Aufgabe 3. *Berechne:*

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z \qquad \gamma_2(t) = 1 + e^{it}, t \in [0, 2\pi] \tag{6}$$

Lösung. Nach einer Umformung kann das Integral wie in Aufgabe 2 in eine Form gebracht werden, die auch mit der Integralformel von Cauchy berechnet werden kann:

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z+1}}{z - 1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(1) = -\pi i, \tag{7}$$

wobei $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z+1}$. $\square$

Tipps zur Serie 5 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 5

1. Benutze Lemma 3.33.
2. Der Hinweis kann für andere Lösungswege allgemeiner formuliert werden: Polynome kann man in verschiedenen Arten aufteilen. Versuche eventuell zuerst (5) zu bearbeiten, da diese Aufgabe in eine ähnliche Richtung geht, aber einfacher ist.
3. Benutze Lema 3.28. Falls analytische Formeln für die Kurven zu aufwändig sind, fertige eine Skizze an und erkläre deine Lösung qualitativ.
4. Hier handelt es sich nicht um Ableitungen, sondern den Real- und Imaginärteil eines Integrals.
5. Der Term $(1 + |z|)$ deutet bereits daraufhin: Dies ist so geschrieben, dass man gefahrlos durch diesen Term teilen kann, ohne Unendlichkeiten zu erzeugen.