

# Lineare Algebra II: Übungsstunde 3

Florian Frauenfelder

`florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/`

10.03.2025

## 1 Quiz 16: Lösungsvorschlag

### 1.1 Aufgabe 16.1

**Theorem 1** (Cayley-Hamilton). *Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $K$  und  $T : V \rightarrow V$  ein linearer Endomorphismus, dann gilt:*

$$\chi_T(T) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

wobei  $\chi_T(x)$  das charakteristische Polynom von  $T$  und  $\mathbf{0}$  die Nullabbildung bezeichnen.

Eine andere, äquivalente Formulierung lautet:

**Theorem 2** (Cayley-Hamilton). *Sei  $K$  ein Körper und  $A \in K^{n \times n}$ , dann gilt:*

$$\chi_A(A) = \mathbf{0}_{n \times n}, \quad (2)$$

wobei  $\chi_A(x)$  das charakteristische Polynom von  $A$  und  $\mathbf{0}_{n \times n}$  die Nullmatrix bezeichnen.

Im Skript entspricht Theorem 1 dem Theorem 11.2.1.

### 1.2 Aufgabe 16.2

Hier gibt es mehrere mögliche Lösungen:

- Es handelt sich um einen Jordanblock der Länge zwei mit  $\chi_A(x) = (1 - x)^2$ , und für Jordanblöcke gilt  $\chi_A(x) = m_A(x)$ , also ist hier  $m_A(x) = (1 - x)^2$ .
- Man berechnet  $\chi_A(x) = (1 - x)^2$  und weiss, dass  $m_A(x) \mid \chi_A(x)$  gilt, also  $m_A(x)$  entweder  $(1 - x)^2$  oder  $(1 - x)$  sein muss. Da ebenfalls  $m_A(A) = \mathbf{0}_{n \times n}$  gilt, muss also  $m_A(x) = (1 - x)^2$  gelten, da  $\mathbf{1}_n - A \neq \mathbf{0}_{n \times n}$  ist.

## 2 Feedback Serie 15

2. Vorsicht mit Konstanten-Multiplikation in Determinanten: Wenn das Argument mit  $-1$  multipliziert wird, dann muss man dies mit  $(-1)^n$  aus der Determinante ziehen.
4. Ein (im Moment) noch wichtiger Teil des Beweises: Ist 0 immer ein Eigenwert? Dies muss separat gezeigt werden.
5. b) Was passiert, wenn  $Gv = 0_V$ ? Dann funktioniert der «normale» Beweis nicht mehr.
7. Vorsicht bei der Definition eines invarianten Unterraums: siehe unten.

## 3 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Minimalpolynom, Cayley-Hamilton, Jordansche Normalform.

### 3.1 Zusätzliches Material

**Definition** (Begleitmatrix). Sei  $p(x) \in K[x]$  mit  $\partial p = k > 0$  monisch (also in der Form  $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$ ), dann nennen wir folgende Matrix die Begleitmatrix von  $p(x)$  (diese wird in späteren Kursen für Physiker noch wichtiger werden):

$$A(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix} \in K^{k \times k}. \quad (3)$$

**Definition** (Invarianter Unterraum). Sei  $T : V \rightarrow V$  linear, dann heisst  $W \leq V$  ein  $T$ -invarianter Unterraum  $\iff T(W) \subseteq W$ .

## 4 Aufgaben

**Lemma 1.** Seien  $A, B \in K^{n \times n}$ , dann gilt:

$$A \sim B \iff J_A(x) = J_B(x) \quad (4)$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst  $\implies$ : Es gilt von der Definition der Ähnlichkeit von Matrizen:

$$A \sim B \iff \exists P \in GL_n(K) : B = P^{-1}AP. \quad (5)$$

Ebenfalls erhalten wir von der Jordanschen Normalform die Basiswechselmatrizen der Jordanbasen, sodass

$$J_A = Q^{-1}AQ \quad J_B = R^{-1}BR \quad Q, R \in GL_n(K) \quad (6)$$

gelten. Also können wir das umformen, um zu erhalten:

$$J_B = R^{-1}P^{-1}APR = R^{-1}P^{-1}QJ_AQ^{-1}PR, \quad (7)$$

was auch einer Ähnlichkeit entspricht. Da die Jordansche Normalform bis auf Vertauschung der Blöcke aber eindeutig ist (was immer als Basiswechsel (genauer: Basispermutation) geschrieben werden kann, Beispiel siehe unten), folgern wir daraus, dass mit einer Vereinbarung einer Standardanordnung der Jordanblöcke sogar

$$J_B = J_A \quad (8)$$

gilt, also  $R^{-1}P^{-1}Q = \mathbf{1}_n$ .

Die Rückrichtung  $\Leftarrow$  ist schneller gezeigt: Wir haben zwei Matrizen mit derselben Jordanschen Normalform:

$$A, B \in K^{n \times n} : J_A = J_B =: J. \quad (9)$$

Wir schreiben mithilfe der Basiswechselmatrizen der Jordanbasen:

$$A = QJQ^{-1} \quad B = RJR^{-1}, \quad (10)$$

womit wir direkt sehen, dass

$$B = RQ^{-1}AQR^{-1} \quad (11)$$

gilt, was die Ähnlichkeit zeigt.  $\square$

Ein Beispiel zu Basiswechselmatrizen, die eine Basispermutation durchführen, um Jordanblöcke zu vertauschen: Wir nehmen zwei Matrizen, die dieselbe Jordansche Normalform haben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Der Basiswechsel entspricht hier dem Vertauschen der beiden Jordanblöcke  $J_1(1)$  und  $J_1(2)$  mit

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

damit  $B = P^{-1}AP$  gilt.

(Im Allgemeinen entspricht dieser Typ von Basispermutationsmatrix immer einer Matrix, die aus der gewünschten Permutation der Einheitsbasisvektoren als Spalten zusammengesetzt ist; in diesem Beispiel ist  $P = (e_2 \mid e_1)$ .)

**Lemma 2.** Seien  $A, B \in K^{n \times n}$ , dann gilt:

$$A \sim B \implies \chi_A(x) = \chi_B(x). \quad (14)$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 1, da  $J_A = J_B \implies \chi_A(x) = \chi_B(x)$ .  $\square$

Ein anderer Beweis, ohne Lemma 1 zu benutzen:

*Beweis.* Wir benutzen die Multiplikativität der Determinante für  $B = P^{-1}AP$ :

$$\chi_B(x) = \det(B - x\mathbf{1}_n) \quad (15)$$

$$= \det(P^{-1}AP - x\mathbf{1}_n) \quad (16)$$

$$= \det(P^{-1}AP - xP^{-1}\mathbf{1}_nP) \quad (17)$$

$$= \det(P^{-1}(A - x\mathbf{1}_n)P) \quad (18)$$

$$= \det P^{-1} \det(A - x\mathbf{1}_n) \det P \quad (19)$$

$$= \chi_A(x) \quad (20)$$

□

**Achtung:** Lemma 2 ist keine Äquivalenz, sondern nur eine einseitige Implikation!  
Ein Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Diese beiden Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom  $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (1 - x)^2$ , sind aber nicht ähnlich. Dies lässt sich auf verschiedene Arten zeigen; eine schnelle Variante ist zu zeigen, dass  $B$  nicht diagonalisierbar ist (da  $B = J_2(1)$ ).

*Aufgaben mit HSxx oder FSxx sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:*  
<https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII>

Besprochene Aufgaben:

- HS02: 7.3
- FS06: 7g

Weitere Aufgaben:

- HS04: 4
- HS07: 3

*Tipps zur Serie 16 auf der nächsten Seite!*

## 5 Tipps zur Serie 16

1. -
2. Erinnere dich an die Definition von Diagonalisierbarkeit und Basiswechselmatrizen.
3. Betrachte und faktorisiere  $f^2v - v = 0_V = v - f^2v$ .
4. Faktorisiere eine Nullstelle:  $p(x) = (x - \lambda)q(x)$ , und überlege, was man über  $q(x)$  sagen kann.
5. Überlege, welche Funktionen Eigenfunktionen der Ableitungsabbildung zum Eigenwert 1 sind (also  $f' = f$ ), und verallgemeinere dieses Resultat. Weshalb sind das alle Resultate?
6. Notation in dieser Aufgabe:  $p_A := \chi_A$ 
  - a) Benütze die Eigenschaften der Determinante.
  - b) Polynomumformungen (beachte:  $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}_n$ )
  - c) Anwendung von b)