Funktionentheorie: Übungsstunde 2

Florian Frauenfelder
https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/

30.09.2025

1 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Holomorphe, konforme und harmonische Funktionen, Kurven.

1.1 Zusätzliches Material

1.1.1 Biholomorphe Funktionen

Jede holomorphe Funktion (mit Ableitung $\neq 0$) kann durch geschickte Einschränkung des Definitionsbereiches (und des Wertebereiches) biholomorph gemacht werden.

Beispiel 1. *Wir schränken die Exponentialabbildung auf den Streifen* $\{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ *ein, sodass wir eine biholomorphe Abbildung nach* $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *erhalten, die den Hauptzweig des Logarithmus als Umkehrfunktion hat.*

1.1.2 Zusammenhang

Ein offenes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heisst zusammenhängend $\iff$ weg-zusammenhängend. Ω heisst *einfach zusammenhängend*, wenn es zusammenhängend ist und alle Kurven (mit gleichen Endpunkten) homotop zueinander sind.

Intuition: Einfach zusammenhängende Gebiete dürfen keine «Löcher» enthalten, da sonst eine geschlossene Kurve um das Loch herum nicht homotop zur konstanten Kurve ist.

2 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/Funktionentheorie`

Besprochene Aufgaben:

Aufgabe 1. *Finde* $f = u + iv$ *holomorph, sodass* $u(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + 4y$.

Lösung. Mit Cauchy-Riemann und den Ableitungsregeln ergibt sich:

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 2x - i(-4xy + 2y + 4), \quad (1)$$

woraus man eine Stammfunktion $f(z)$ von $f'(z)$ finden kann. $\square$

Aufgabe 2. *Was können wir über eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sagen?*

Lösung. Aus $f = u + iv \implies v = 0$ folgt, dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen $= 0$ sind, also $u =$ konst. sein muss. $\square$

Aufgabe 3. *Finde alle holomorphen $f = u + iv$, sodass $\tilde{f} = u^2 + iv^2$ auch holomorph ist.*

Lösung. Da die Cauchy-Riemann-Gleichungen für beide Funktionen gelten, finden wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u^2}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} = 2v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u^2}{\partial y} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} = -2v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v^2}{\partial x}, \quad (3)$$

woraus zwei Möglichkeiten folgen, die geforderte Eigenschaft zu erfüllen: Entweder gilt $u = v$ oder $u, v =$ konst. $\square$

Weitere Aufgaben:

- HS05: 1
- HS06: 3a
- FS07: 4i

Tipps zur Serie 2 auf der nächsten Seite!

3 Tipps zur Serie 2

2. Benutze die Eigenschaften der Möbiustransformationen und die Resultate aus (1).

3. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen helfen.

4. Benutze entweder die Ableitungen in Polarform, oder leite die Gleichungen wie in Satz 2.13 her.

5. Benutze Cauchy-Riemann und löse ähnlich wie Aufgabe 1, oder benutze alternativ die Bedingung der harmonischen Funktionen.