

Funktionentheorie: Übungsstunde 3

Florian Frauenfelder

<https://florian-frauenfelder.ch/ta/ca/>

07.10.2025

1 Feedback Serie 1

1. Vorsicht mit dem Vorzeichen bei Argumenten, die mit trigonometrischen Funktionen berechnet werden (Resultate überprüfen).
3. Solche \iff -Beweise brauchen meistens zwei Teile: \implies und \impliedby .
4. Die Idee ist hier, die Formel zu benutzen, um $\overline{w} = w^4, \overline{w^2} = w^3$ zu finden und damit die Berechnung zu vereinfachen.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Kurven, Kurven- bzw. Pfadintegrale.

2.1 Zusätzliches Material

Definition (Invertierte und zusammengehängte Kurven). Für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definieren wir die invertierte Kurve (Kurve in die andere Richtung):

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad (1)$$

$$t \mapsto \gamma(b + a - t) \quad (2)$$

Für zwei Kurven $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ definieren wir die hintereinandergehängte Kurve:

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{C} \quad (3)$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \leq t \leq b_1 \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2) & b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2 \end{cases} \quad (4)$$

Daraus finden wir zusätzliche Eigenschaften des Kurvenintegrals:

- $\int_{-\gamma} f(z) \, dz = - \int_{\gamma} f(z) \, dz$
- $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\gamma_2} f(z) \, dz$

3 Aufgaben

Besprochene Aufgaben:

Aufgabe 1. Seien $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (1+i)t$ und $f(z) = ze^{z^2}$. Berechne $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Lösung, Variante 1. Mit der Definition des Pfadintegrals:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 (1+i)te^{(1+i)^2t^2} (1+i) dt \quad (5)$$

$$= \int_0^1 2ite^{2it^2} dt \quad (6)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{it^2} \right]_0^1 \quad (7)$$

$$= \frac{e^{2i} - 1}{2} \quad (8)$$

□

Lösung, Variante 2. Man sieht, dass $f(z)$ eine einfach Stammfunktion hat: $F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2} \implies F' = f$. Damit ist die Berechnung hier direkter:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) \quad (9)$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{z^2} \right]_0^{1+i} \quad (10)$$

$$= \frac{e^{2i} - 1}{2} \quad (11)$$

□

Je nach Aufgabentyp, Funktion und Kurve kann die direkte Berechnung der Stammfunktion deutlich schneller sein als das Ausrechnen mit der Definition des Pfadintegrals.

Aufgabe 2. Finde für $\gamma(0 \leq t \leq 1) = e^{2\pi it}$:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \quad \int_{\gamma(2t)} \frac{1}{z} dz \quad \int_{\gamma(nt)} \frac{1}{z} dz \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz \quad \int_{\gamma} \frac{1}{z+2} dz \quad (12)$$

Lösung. Gemäss der Definition des Pfadintegrals:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi it}} 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i \quad (13)$$

Ähnlich finden wir das zweite und dritte Integral:

$$\int_{\gamma(2t)} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi it}} 4\pi i e^{4\pi it} dt = 4\pi i \quad \int_{\gamma(nt)} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{n\pi it}} n\pi i e^{n\pi it} dt = n\pi i \quad (14)$$

Das Resultat für das vierte Integral lässt sich mit einer Stammfunktion begründen oder ausrechnen:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi it}} 2\pi i e^{2\pi it} dt = - \int_0^1 -2\pi i e^{-2\pi it} dt = - \left[e^{-2\pi it} \right]_0^1 = 0 \quad (15)$$

Das letzte Integral kann nicht (direkt) mit Ausrechnen gelöst werden. Die Funktion ist aber auf einer offenen Umgebung, die γ und ihr Inneres beinhaltet, holomorph. Damit kann der Satz von Cauchy (Korollar 3.13) angewendet werden, womit auch dieses Integral verschwindet. \square

Aufgabe 3. Begründe, weshalb $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

Lösung. In Aufgabe 2 haben wir einen geschlossenen Pfad in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gefunden, der das Integral nicht verschwinden lässt. Damit können wir Satz 3.17: (i) \iff (ii) anwenden, woraus folgt, dass keine auf Ω holomorphe Stammfunktion von f existiert. \square

Weitere Aufgaben:

- Aufwändig, hier ohne Lösung: $\int_0^\infty \sin x^2 dx$

Tipps zur Serie 3 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 3

2. Schau Ableitungen in verschiedenen Richtungen an oder plotte $u(x, y)$.
3. Satz 2.13 hilft.
5.
 - a) Zeige, dass die Behauptung stimmt.
 - b) Zeige Injektivität (einfach) und Surjektivität einzeln.
 - c) Zeige Injektivität und Surjektivität von g einzeln.