Lineare Algebra II: Übungsstunde 1

Florian Frauenfelder
florian-frauenfelder.ch/ta/linalg/

24.02.2025

1 Quiz 14: Lösungsvorschlag

1.1 Aufgabe 14.1

Schreibe die Vektoren als Spaltenvektoren in eine Matrix und berechne den Rang mithilfe von elementaren Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{S(2,1,-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & \boxed{0} & -1 \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 5 & 1 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Man sieht damit direkt nach Betrachtung der dritten Spalte, dass keine weiteren lineare Abhängigkeiten bestehen und somit

$$\underline{\underline{\dim_{\mathbb{R}} U = 3}} \tag{2}$$

gilt.

1.2 Aufgabe 14.2

Berechne das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(x) = -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1, \tag{3}$$

dessen Wurzeln man beispielsweise mit der "Mitternachtsformel" erhält:

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}} \qquad \lambda_1 = \varphi, \quad \lambda_2 = \psi, \tag{4}$$

welche dem goldenen Schnitt entsprechen.

Alternativ: Man sieht direkt, dass die Matrix A eine Darstellung der Verschiebungsabbildung der Fibonacci-Folgen ist, die die bekannten Eigenwerte φ und ψ hat.

Um die Eigenvektoren zu berechnen, betrachte einen Vektor $v = (v_1, v_2)^\top$, der folgende Gleichungen erfüllen muss:

$$v_2 = \lambda v_1 \tag{5}$$

$$v_1 + v_2 = \lambda v_2. \tag{6}$$

Wenn man diese Gleichungen nicht direkt erkennt, setze probeweise $v_1 = 1$, prüfe die Gleichungen und erhalte:

$$\underline{\underline{v, \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Alternativ: Man sieht direkt, dass diese Gleichungen die definierenden Gleichungen für den goldenen Schnitt sind und schreibt ein (φ- beziehungsweise ψ-)Vielfaches der oben genannten Eigenvektoren hin.

Einschub: Recap Lineare Algebra I

Kurzer Überblick der wichtigsten behandelten Themen im letzten Semester mit Ausblick auf das neue Semester.

2 Theorie-Recap letzte Woche

Behandelte Themen: Polynome und ein erster Teil von Eigenwerten und Eigenvektoren.

2.1 Zusätzliches Material

Notation (Spektrum). *Die Menge aller Eigenwerte einer linearen Abbildung $T : V \to V$ wird als Spektrum von T bezeichnet:*

$$\sigma(T) \equiv \operatorname{spec}(T) := \{\lambda \in K \mid \exists v \neq 0_V : Tv = \lambda v\}. \tag{8}$$

Definition (Definitheit). *Betrachte $T : V \to V$, dann heisst T*

- ***positiv definit*** $\iff \lambda > 0, \forall \lambda \in \sigma(T)$,
- ***positiv semidefinit*** $\iff \lambda \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(T)$,
- ***indefinit*** $\iff \exists \lambda, \tilde{\lambda} \in \sigma(T) : \lambda > 0 \wedge \tilde{\lambda} < 0$.

*Analog für **negativ definit** und **negativ semidefinit**.*

3 Aufgaben

Aufgaben mit HSxx *oder* FSxx *sind aus der Prüfungssammlung des VMP entnommen:* `https://exams.vmp.ethz.ch/category/LineareAlgebraIII`

3.1 Determinanten

Besprochene Aufgaben:

- FS02: 1

Weitere Aufgaben:

- FS00: 1 (aufwändig)
- HS03: 4 (schwierig, Induktion)
- FS04: 7a (gut!)
- HS04: 2 (ohne A_4)
- HS05: 5 (eher schwierig)

3.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Besprochene Aufgaben:

- HS00: 1a
- HS01: 7.2
- HS05: 7i

Weitere Aufgaben:

- HS00: 2 (diagonalisierbar)
- FS01: 2 (diagonalisierbar)
- FS04: 2b
- HS05: 2c

Tipps zur Serie 14 auf der nächsten Seite!

4 Tipps zur Serie 14

1. keine
2. Definitionen/Formeln der Determinante benutzen
3. schwierig: mit Definitionen, Indizes und Umformungen jonglieren
4. nicht sehr wichtig, nicht sehr schwierig, aber nette kleine Übung zu den Eigenschaften der Adjunkten
5. uralte Prüfungsaufgabe zur Determinantenentwicklung (Induktion)
6. keine
7. keine