

# Redes Neuronales: Práctico 1

Maria Florencia Molina

Octubre 2021

## 1. Introducción

En este informe se describe como se trabajó con la ecuación diferencial del modelo "Integrate-and-fire" que describe el comportamiento del potencial de membrana  $V_m(t)$  de una neurona.

La ecuación diferencial del modelo está dada por

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)) \quad (1)$$

donde

- $\tau = 10 \text{ ms}$  es el tiempo característico de la neurona
- $E_L = -65 \text{ mV}$  es el potencial de reposo
- $R_m = 10 \text{ M}\Omega$  es la resistencia
- $I_e(t)$  es una corriente eléctrica externa

Analizaremos primero el comportamiento del potencial para tiempos largos sin activar el mecanismo de disparo y luego se analizará cómo se comporta activando el mecanismo de disparo.

## 2. Primera parte: sin activación del mecanismo de disparo

Analizemos el comportamiento de la ecuación diferencial del modelo cuando la corriente externa  $I_e(t) \equiv I_e$  es constante. Al ser la ecuación lineal en  $V_m(t)$ , esta se anula en un solo punto, por lo que la ecuación tiene un solo punto fijo:  $V_m = E_L + R_m I_e$ . Observemos que  $f'(V_m) = \frac{-1}{\tau}$ , donde  $f(x) = \frac{dV_m(t)}{dt}$ , o sea el signo de la primera derivada de  $\frac{dV_m(t)}{dt}$  respecto de  $V_m$  es siempre negativo, lo cual nos indica que el punto de equilibrio que encontramos siempre será estable.

Veamos el comportamiento de la ecuación para dos valores distintos de  $I_e$ .

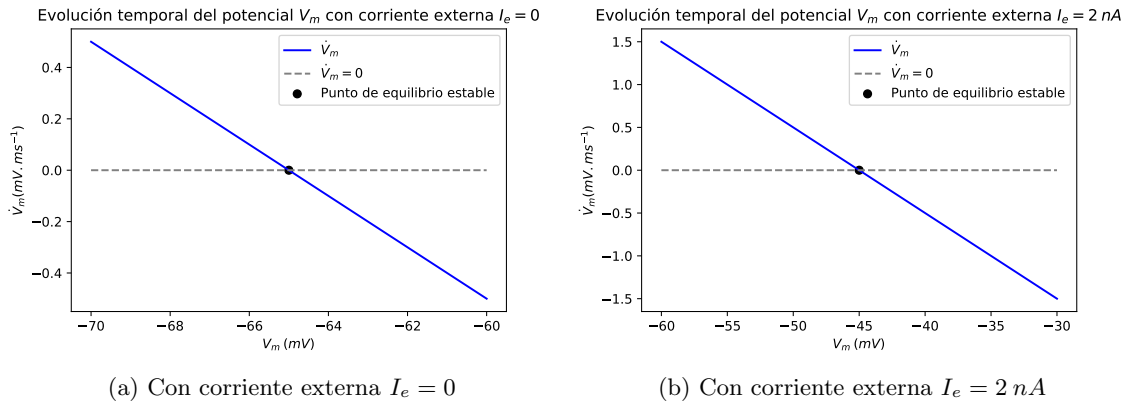


Figura 1: Comportamiento del potencial para distintos valores de  $I_e$

Para valores iniciales del potencial menores o mayores al de reposo, este se acerca al punto fijo cada vez más lentamente (la velocidad con la que se acerca decrece linealmente) hasta llegar a este, donde permanecerá a tiempos largos a menos que sea perturbado.

La solución analítica de la ecuación diferencial para  $I_e$  constante está dada por

$$V_m(t) = (E_L + R_m I_e)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

donde  $V_0$  es el valor de  $V_m$  en el tiempo inicial,  $V_0 = V_m(0)$  Abajo se muestra el gráfico de la solución exacta con un valor inicial  $V_0$  dado por  $V_0 = E_L = -65 \text{ mV}$  y corriente externa  $I_e = 2 \text{ nA}$  en el intervalo  $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$  y el gráfico de esta solución comparada con la solución numérica dada por el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso  $h = 0,05 \text{ ms}$ .

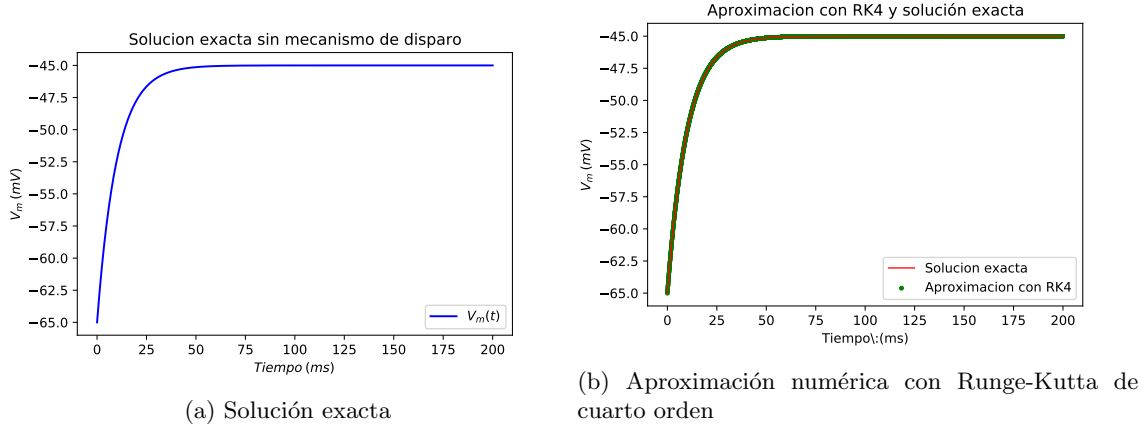


Figura 2: Soluciones exacta y numérica del modelo

### 3. Segunda parte: con activación del mecanismo de disparo

En esta sección se analizará el comportamiento del potencial de membrana regido por la ecuación (1) pero introduciendo el mecanismo de disparo que le da el nombre al modelo (integrate-and-fire). Este consiste en establecer que si el potencial  $V_m$  sobrepasa cierto valor umbral  $V_{um}$ , entonces este debe restituirse al valor de potencial de reposo  $E_L$ .

Para ver cómo es el comportamiento de la evolución temporal del potencial de membrana bajo esta imposición, resolvemos numéricamente la ecuación integrando el mecanismo de disparo utilizando Runge-Kutta de cuarto orden, con los valores antes establecidos para los parámetros y  $V_{um} = -50 \text{ mV}$ , y utilizando un paso de integración  $h = 0,05 \text{ ms}$  en el intervalo  $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$ .

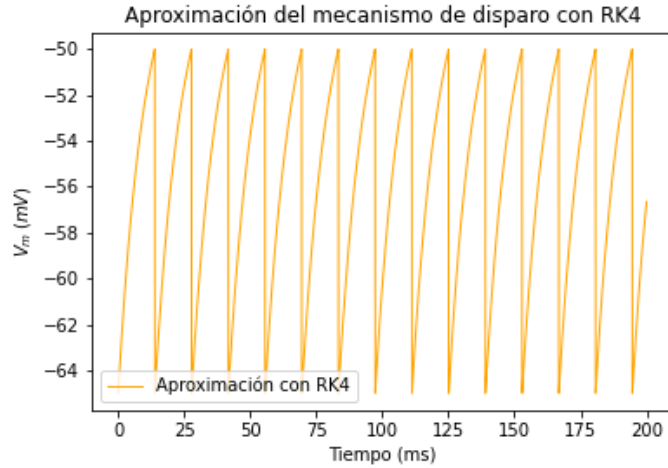


Figura 3: Aproximación numérica del mecanismo de disparo para una corriente externa  $I_e$  constante

Podemos calcular la frecuencia de disparo analíticamente. Queremos ver:

$$\begin{aligned}
 V_m(t + \Delta t) &= (E_L + R_m I_e)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = V_{um} \\
 \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} (-E_L - R_m I_e + V_0) &= V_{um} - E_L - R_m I_e \\
 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} &= \frac{V_{um} - E_L - R_m I_e}{V_0 - E_L - R_m I_e} \\
 \frac{-t}{\tau} - \frac{\Delta t}{\tau} &= \ln\left(\frac{V_{um} - E_L - R_m I_e}{V_0 - E_L - R_m I_e}\right) \\
 \Delta t &= \tau \ln\left(\frac{V_0 - E_L - R_m I_e}{V_{um} - E_L - R_m I_e}\right) - t
 \end{aligned} \tag{2}$$

Este  $\Delta t$  es el tiempo que la neurona demorará en llegar al valor de umbral a partir de un  $t$  arbitrario. En este caso, tenemos que nuestro  $t$  inicial es  $t = 0$  y además  $V_m(0) = V_0 = E_L$  por lo que  $\Delta t$  será equivalente al período de disparo, y la frecuencia de disparo  $\nu$  será  $\nu = \frac{1}{\Delta t}$ . Para los valores de  $E_L, R_m, I_e, \tau$  que tenemos se obtiene

$$\nu = 0,07213475204 \text{ ms}^{-1}$$

En general, la frecuencia de disparo en función de  $I_e$  constante estará dada por

$$\nu(I_e) = \frac{1}{\tau} \left[ \ln \left( \frac{V_0 - E_L - R_m I_e}{V_{um} - E_L - R_m I_e} \right) \right]^{-1}$$

Comparemos este valor con respecto a la frecuencia  $\nu_{num}$  obtenida numéricamente. Para lograr esto, se modifica el integrador de Runge-Kutta para que por cada valor de la solución que supere al potencial de umbral  $V_{um}$  se grabe el tiempo  $t$  en el que esto sucede en un arreglo. El primer valor de este arreglo dará entonces el período de disparo, siendo su inverso la frecuencia de disparo. Se obtiene entonces que el valor de la frecuencia de disparo obtenida numéricamente es

$$\nu_{num} = 0,07220216606498163 \text{ ms}^{-1}$$

Observemos que este valor difiere de la frecuencia calculada analíticamente con un error relativo del 0,09%

A continuación, calculamos la frecuencia de disparo numérica para valores de  $I_e$  en el intervalo  $2 \text{ nA} \leq I_e \leq 10 \text{ nA}$  con un paso de  $0,5 \text{ nA}$ , y graficamos estos valores en función de  $I_e$  junto con la frecuencia de disparo calculada analíticamente en ese intervalo.

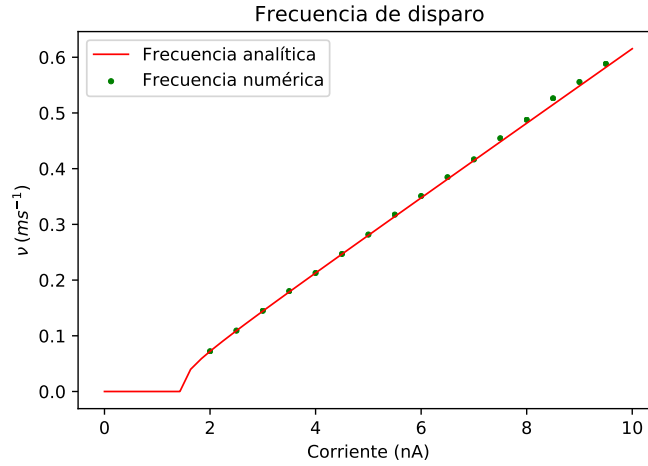


Figura 4: Frecuencia de disparo calculada numérica y analíticamente

Para explicar el comportamiento de la frecuencia de disparo, usamos que  $V_0 = E_L$  para escribir  $\nu(I_e)$  como

$$\nu(I_e) = \frac{-1}{\tau} \left[ \ln \left( 1 - \frac{V_{um} - E_L}{R_m I_e} \right) \right]^{-1} \quad (3)$$

Se ve que el término dentro del logaritmo se anula cuando  $I_e = \frac{V_{um} - E_L}{R_m} = 1,5 \text{ nA}$  para los valores de  $V_{um}$  y  $E_L$  que tenemos. Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ , se tiene que  $\lim_{I_e \rightarrow 1,5 \text{ nA}} \nu(I_e) = 0$ . Para valores de  $I_e$  menores a  $1,5 \text{ nA}$ , la frecuencia de disparo escrita como en (3) ya no está definida pues el término dentro del logaritmo es negativo, lo que significa que el potencial no llega al valor de umbral y el mecanismo de disparo no se activa, por lo que la frecuencia de disparo es cero. Para valores mayores a  $1,5 \text{ nA}$  vemos que  $\nu(I_e)$  sigue un régimen lineal con  $I_e$ .

Por último, queremos ver cómo se comporta el potencial de membrana  $V_m(t)$  para corrientes externas dependientes del tiempo,  $I_e(t)$ . Resolvemos la ecuación (1) con Runge-Kutta de cuarto orden para dos corrientes  $I_e(t)$  dadas por

$$\begin{aligned} I_e^1(t) &= I_0 \cos \left( \frac{t}{30} \right), \quad I_0 = 2,5 \text{ nA} \\ I_e^2(t) &= 0,35 \cdot \left( \cos \left( \frac{t}{3} \right) + \sin \left( \frac{t}{5} \right) + \cos \left( \frac{t}{7} \right) + \sin \left( \frac{t}{11} \right) + \cos \left( \frac{t}{13} \right) \right)^2 \text{ nA} \end{aligned} \quad (4)$$

Se presentan a continuación los gráficos del potencial  $V_m(t)$  con mecanismo de disparo para las corrientes  $I_e^1(t)$  e  $I_e^2(t)$  en el intervalo  $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$ .

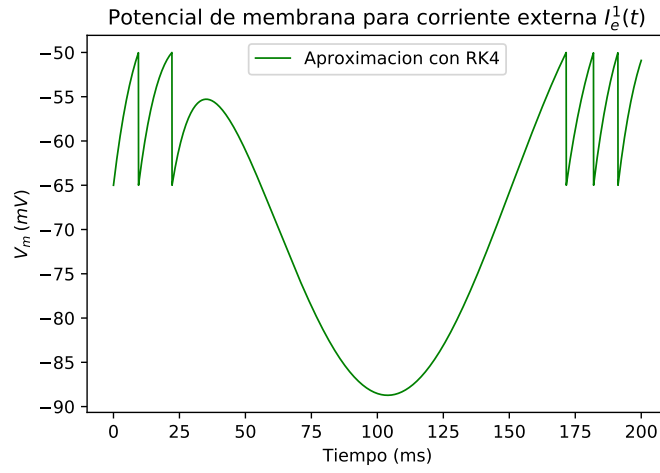


Figura 5: Potencial de membrana  $V_m(t)$  para la corriente externa  $I_e^1(t)$

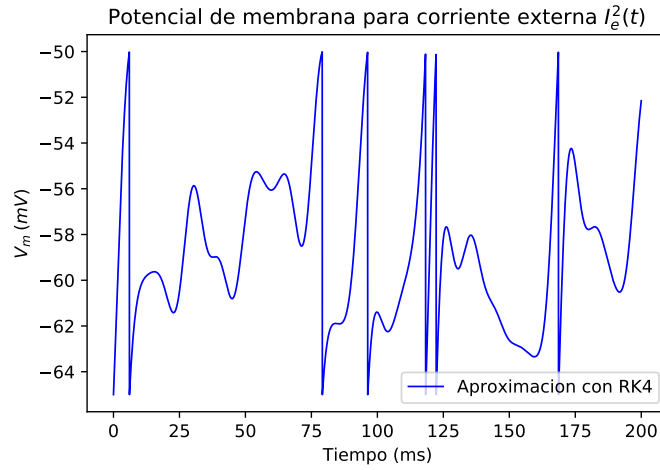


Figura 6: Potencial de membrana  $V_m(t)$  para la corriente externa  $I_e^2(t)$

Observemos que la frecuencia de disparo deja de ser constante.

## 4. Conclusión

Se logró analizar el comportamiento del potencial de membrana de una neurona con el modelo Integrate-and-fire sin el mecanismo de disparo para corrientes externas constantes y su dinámica con el mecanismo de disparo, logrando obtener una expresion analítica para la frecuencia de disparo cuando  $I_e$  es constante y una buena aproximacion numérica para esta. Se vió también la dependencia del potencial cuando la corriente  $I_e(t)$  depende del tiempo.