华中农业大学本科课程考试
参考答案与评分标准

考试课程：微积分 A(1)　　　　学年学期：2009-2010-1
试卷类型：A　　　　考试日期：2010-01-27

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分。）

1.【 A 】　2.【 C 】　3.【 D 】　4.【 C 】　5.【 B 】
6.【 B 】　7.【 B 】　8.【 D 】　9.【 A 】　10.【 C 】

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分。）

11. $e^{-\frac{2}{e}}$　12. $y=x$　13. $xf(x^2)$　14. $2-\frac{\pi}{2}$　15. $y=Cxe^{-x}$

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{1-e^{-x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1, g'(0)=-1, g''(0)=2$，求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}$　（5 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=\dfrac{1}{2}.$　（5 分）

17. 计算不定积分 $\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解 令 $x=\tan t$，则

$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{\tan t\, e^t}{\sec^3 t}\sec^2 t dt=\int\sin t\cdot e^t\, dt$　（4 分）

$=-\int e^t\, d\cos t=-(e^t\cos t-\int e^t\cos t dt)$

$=-e^t\cos t+\int e^t\, d\sin t=-e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\sin t dt$

$\int e^t\sin t=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$，　（5 分）

$\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$.　（1 分）

18. 求微分方程 $y'' - a(y')^2 = 0$ 满足 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = -1$ 的特解.

解 令 $y' = p, y'' = \frac{dp}{dx}$，

代入原方程，得 $\frac{dp}{dx} - ap^2 = 0$， （2 分）

$\int \frac{dp}{p^2} = \int a dx$， $\int \frac{dp}{p^2} = \int a dx$， $-\frac{1}{p} = ax + C_1$，

由 $x = 0, y = 0, y' = p = -1$，得 $C_1 = 1$，

$-\frac{1}{p} = ax + 1$，$p = -\frac{1}{ax+1}$，即 $y' = -\frac{1}{ax+1}$， （5 分）

故 $y = -\int \frac{1}{ax+1} dx = -\frac{1}{a}\ln(ax+1) + C_2$，

由 $x = 0, y = 0$ 得 $C_2 = 0$，所以 $y = -\frac{1}{a}\ln(ax+1)$. （3 分）

四、应用题（本题 10 分）

19. 求微分方程 $xy' = 2x - y$ 的一个解 $y = y(x)$，使得曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2, y = 0$ 所围成的平面图形绕 $y = 0$ 旋转一周所得旋转体体积最小.

解 方程 $xy' = 2x - y$ 化为 $y' + \frac{y}{x} = 2$，

$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx}[\int 2e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C] = \frac{1}{x}[x^2 + C] = x + \frac{C}{x}$， （4 分）

旋转体体积 $V = \int_1^2 \pi(x + \frac{C}{x})^2 dx = \pi\int_1^2 (x^2 + \frac{C^2}{x^2} + 2C)dx = \frac{7}{3} + \frac{1}{2}C^2 + 2C$， （4 分）

令 $V'(C) = C + 2 = 0$，解得 $C = -2$，又 $V''(C) = 1 > 0$，故 $C = -2$ 时，V 最小，

所以 $y = x - \frac{2}{x}$. （2 分）

五、证明题（本题 10 分）