Fouriertransformation – Abtasttheorem

Steffen Walter (1145690) Marvin Gaube (4670273)

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Stuttgart
Vorlesung: Digitale Bildverarbeitung

16. April 2020

Agenda

Theoretische Grundlagen

- Platzhalter

Abtastung

- Abtastung bedeutet, dass nur die Information an den Gitterpunkten erhalten bleibt
- Mathematisch ist dies eine Multiplikation mit einer Funktion, die nur an den Gitterpunkten ungleich null ist
- Diese Operation lässt sich durchführen, indem wir die Bildfunktion $g(x)$ mit einer Funktion multiplizieren, welche die Summe der an den Gitterpunkten $r_{m,n}$ sitzenden δ-Funktionen darstellt
- Diese Funktion wird in der Literatur oft als Nagelbrettfunktion oder 2D-δ-Kamm bezeichnet

Abtastung

- Eine dichte Abtastung im x-Raum führt zu einem weiten Gitter im k-Raum und umgekehrt. Damit führt die Abtastung zu einer Wiederholung des Bildspektrums an jedem Gittervektor im Fourierraum.
- Es folgt, dass die Abtastung zu einer Reduktion der Auflösung führt, d. h., dass Strukturen von der Größe der Abtastschrittweite oder kleiner verloren gehen.

1D Aliasing-Effekt

Beschreibung

Bei der Abtastung eines Signals mit einer Abtastfrequenz etwas kleiner als die Wellenlänge kommt es zum Aliasing-Effekt. Aus dem hochfrequenten Signal wird ein deutlich niederfrequenteres Signal abgetastet.

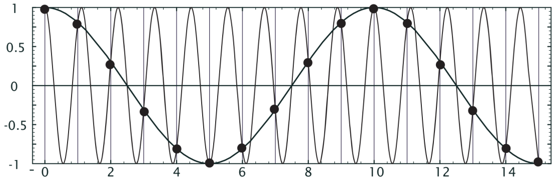

Abbildung: Veranschaulichung des Aliasing-Effektes. Quelle [Jähne(2012)]

1D Abtasttheorem

Beschreibung

Das Abtasttheorem formuliert die Bedingung, welche nötig ist um eine Verfälschung des Signals bei der Abtastung zu vermeiden:

- Aus Abbildung ergibt sich $(f_p - f_g) - f_g \geq 0$
- Daraus lässt sich folgendes Ableiten: $f_p \geq 2f_g$
- f_p ist hierbei die Abtastfrequenz

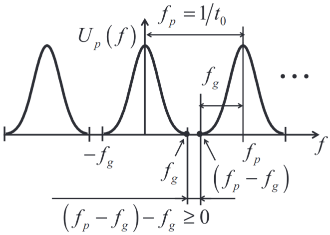

Abbildung: Bedingungen Abtasttheorem. Quelle [Lange(2019)]

2D Aliasing-Effekt

2D Abtasttheorem

Praktische Anwendung

Wo kommt das Abtasttheorem zum Einsatz?

Realisierung

Implementierung in MATLAB

- Berechnung der 2D-Fourier-Transformation
- Bestimmung des "Schwellwertes", ab dem wir den Wert der Fouriertransformierten als null annehmen:
  $Z = max(FFT) * 0.001$

Realisierung

Implementierung in MATLAB

- Iteration über die Fouriertransformierte, Bestimmung von k_x und k_y durch Vergleich mit Z
- Bestimmung der Abtastdistanz: $d_x \leq \frac{1}{2k_x} * I_{Breite}$
- Abtastung des Orginalbildes in der Distanz d_x bzw. d_y, jeweils mittig
- Anzeige des abgetasteten Bildes

Fazit

- Platzhalter

Quellen

Bernd Jähne.
Digitale Bildverarbeitung und Bildgewinnung.
Springer Vieweg, 2012.
ISBN: 978-3-642-04952-1.

Jörg Lange.
Mathematische Grundlagen der Digitalisierung.
Springer Vieweg, 2019.
ISBN: 978-3-658-26686-8.