

# Fouriertransformation – Abtasttheorem

Steffen Walter (1145690) Marvin Gaube (4670273)

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Stuttgart  
Vorlesung: Digitale Bildverarbeitung

16. April 2020

# Agenda

## 1 Theoretische Grundlagen

- Abtastung
- 1D Aliasing-Effekt
- 1D Abtasttheorem
- 2D Aliasing-Effekt
- 2D Abtasttheorem

## 2 Realisierung

- MATLAB: FFT2
- Implementierung in MATLAB
- Demo

## 3 Fazit

# Abtastung

- Abtastung bedeutet, dass nur die Information an den Gitterpunkten erhalten bleibt
- Multiplikation mit einer Funktion, die nur an den Gitterpunkten ungleich null ist
- Diese Operation lässt sich durchführen, indem wir die Bildfunktion  $g(x)$  mit einer Funktion multiplizieren, welche die Summe der an den Gitterpunkten  $r_{m,n}$  sitzenden  $\delta$ -Funktionen darstellt
- Die Funktion wird in der Literatur oft als Nagelbrettfunktion oder 2D- $\delta$ -Kamm bezeichnet

# Abtastung

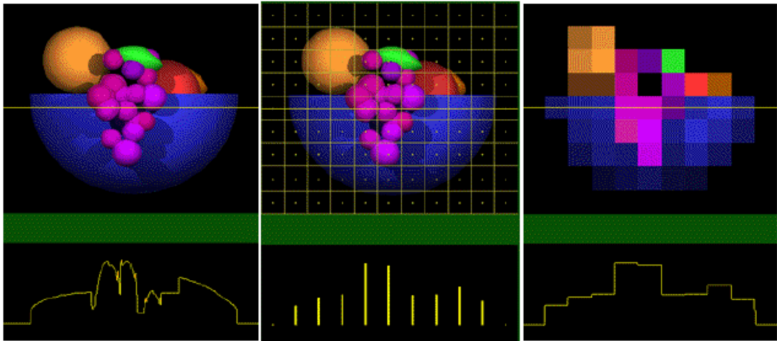


Abbildung: Beispiel Abtastung Quelle [Durand and Cutler()]

# Abtastung

- Eine dichte Abtastung im  $x$ -Raum führt zu einem weiten Gitter im  $k$ -Raum und umgekehrt. Damit führt die Abtastung zu einer Wiederholung des Bildspektrums an jedem Gittervektor im Fourierraum.
- Die Abtastung führt zu einer Reduktion der Auflösung, das heißt, dass Strukturen von der Größe der Abtastschrittweite oder kleiner verloren gehen.

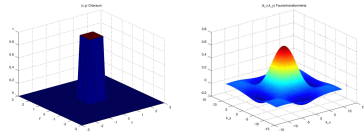


Abbildung: Fouriertransformierte kleines Quadrat  
Quelle [Fuchs(2020)]

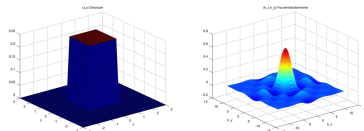
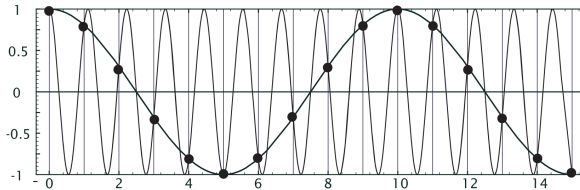


Abbildung: Fouriertransformierte großes Quadrat  
Quelle [Fuchs(2020)]

# 1D Aliasing-Effekt

## Beschreibung

Bei der Abtastung eines Signals mit einer Abtastfrequenz etwas kleiner als eine im Signal vorkommende Wellenlänge kann es zum Aliasing-Effekt kommen. Aus dem hochfrequenten Signal wird ein nicht vorhandenes niederfrequenteres Signal erkannt. Diese erkannte Frequenz wird Aliasfrequenz genannt



**Abbildung:** Veranschaulichung des Aliasing-Effektes. Quelle [Jähne(2012)]

# 1D Abtasttheorem

## Beschreibung

Das Abtasttheorem formuliert die Bedingung, welche nötig ist um eine Verfälschung des Signals bei der Abtastung zu vermeiden:

- Aus Abbildung ergibt sich  $(f_p - f_g) - f_g \geq 0$
- Daraus lässt sich folgendes Ableiten:  $f_p \geq 2f_g$
- $f_p$  ist hierbei die Abtastfrequenz

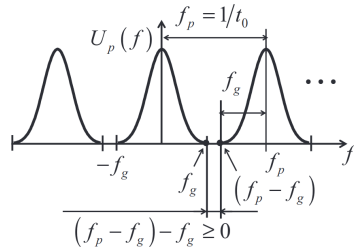
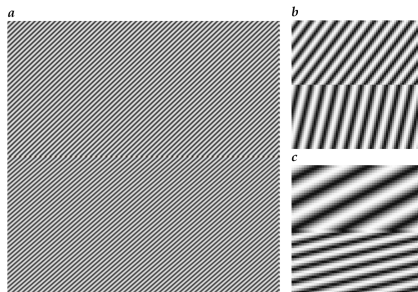


Abbildung: Bedingungen  
Abtasttheorem. Quelle [Lange(2019)]

## 2D Aliasing-Effekt

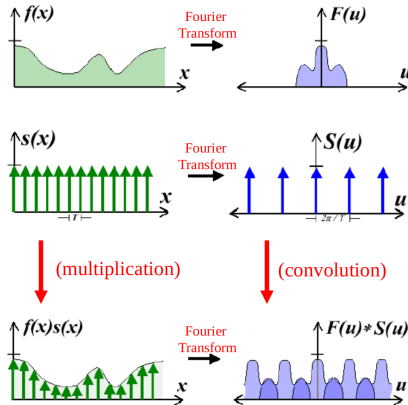
### Moiré-Effekt



**Abbildung:** Der Moiré-Effekt: **a** Originalbild mit zwei periodischen Mustern (oben  $\hat{k} = [0.21, 0.22]^T$ , unten  $\hat{k} = [0.21, 0.24]^T$ ). **b** Jeder vierte und **c** jeder fünfte Punkt in jeder Richtung abgetastet. Quelle 1 (links) [Jähne(2012)]  
Quelle 2 (rechts) Internet-Link



# Exkurs: Abtastung und Fouriertransformation



**Abbildung:** Faltung, Abtastung und Diskretisierung. Quelle [Durand and Cutler()]

## 2D Abtasttheorem

- Ist das Bildspektrum ausgedehnt, so überlappen sich die sich periodisch wiederholenden Kopien.
- Wir können nicht unterscheiden, ob die spektralen Amplituden aus dem Originalspektrum im Zentrum oder von einer der Kopien stammen.
- Um Verzerrungen zu vermeiden, müssen wir Überlappungen ausschließen.

## 2D Abtasttheorem

- Wir müssen das Spektrum auf den Bereich um den zentralen Punkt des reziproken Gitters bis zu den Linien, die den Zentralgitterpunkt von allen anderen Gitterpunkten trennen, beschränken.

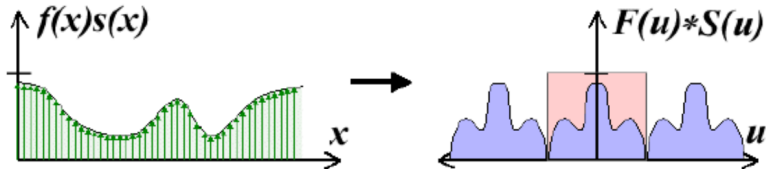


Abbildung: Beschränkung des Spektrums. Quelle [Durand and Cutler()]

## 2D Abtasttheorem

- Auf einem Rechteckgitter ergibt sich daraus die Bedingung, dass die maximale Wellenzahl, bei der das Bildspektrum nicht null ist, auf weniger als die Hälfte des Abstands zwischen den Gitterpunkten in der Bildebene beschränkt werden muss.
- Quantitativ kann das so ausgedrückt werden: Ist das Spektrum  $\tilde{g}(\kappa)$  einer kontinuierlichen Funktion  $g(x)$  bandbegrenzt, d. h.

$$\tilde{g}(\kappa) = 0 \quad \forall \|k_{x_1, x_2}\| \geq \frac{\Delta k_{x_1, x_2}}{2}$$

dann kann es aus Punkten welche mit der Schrittweite

$$\Delta x_{x_1, x_2} = \frac{1}{\Delta k_{x_1, x_2}}$$

abgetastet wurde exakt rekonstruiert werden. [Jähne(2012)]

## 2D Abtasttheorem

- Wir erhalten nur dann eine korrekte periodische Struktur, wenn wir pro Wellenlänge mindestens zwei Abtastpunkte setzen.
- Die maximale Wellenzahl, die ohne Fehler abgetastet werden kann, wird als Nyquist-Wellenzahl oder Grenzwellenzahl bezeichnet.

# Realisierung

## MATLAB: FFT2

Unser Programm verwendet die matlab-interne fft2-Funktion:

$$Y_{p+1,q+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i(\frac{jp}{m} + \frac{kq}{n})} X_{j+1,k+1}$$

mit  $X$ : Matrix im Ortsraum ( $m \times n$ ),  $p, j : 0 - m - 1$ ,  
 $q, k : 0 - n - 1$

$Y$  ist ebenfalls eine ( $m \times n$ )-Matrix

Vgl. [MathWorks(2020)]

# Realisierung

## MATLAB: FFT2

Vgl. DFT aus der Vorlesung  
Unterschiedlich: Normierung, Division durch  $m$  bzw.  $n$

$$e^{-2\pi i(\frac{jp}{m} + \frac{kq}{n})}$$

vs.

$$e^{-i(jp+kq)}$$

Wichtig für das  $\Delta_x/\Delta_y$ -Kriterium

# Realisierung

## Implementierung in MATLAB

- Berechnung der 2D-Fourier-Transformation mittels *fft2*
- Bestimmung des "Schwellwertes", ab dem wir den Wert der Fouriertransformierten als null annehmen:  
$$Z = \max(FFT) * 0.001$$



# Realisierung

## Implementierung in MATLAB

- Iteration über die Fouriertransformierte, Bestimmung von Grenzfrequenzen  $k_x$  und  $k_y$  durch Vergleich mit  $Z$
- Bestimmung der Abtastdistanz:  $d_x \leq \frac{1}{2k_x} * I_{Breite}$
- Abtastung des Originalbildes in der Distanz  $d_x$  bzw.  $d_y$ , jeweils mittig
- Anzeige des abgetasteten Bildes

Berechnung Vgl. [Raviv()]

# Realisierung

Demo

# Fazit

- Faustregel: Je größer die Frequenzen, desto niedriger die Sampleddistanz
- Fouriertransformation zeigt Verteilung, und ermöglicht die Abschätzung
- Praktische Anwendung: Kompression

# Quellen



Durand and Cutler.

*Sampling, Aliasing, Mipmaps.*

MIT EECS.

<https://www.slideserve.com/ogden/sampling-aliasing-mipmaps-powerpoint-ppt-presentation>



Christian Fuchs.

*Skript - Digitale Bildverarbeitung.*

DHBW Stuttgart, 2020.



Bernd Jähne.

*Digitale Bildverarbeitung und Bildgewinnung.*

Springer Vieweg, 2012.

ISBN: 978-3-642-04952-1.



Jörg Lange.



*Mathematische Grundlagen der Digitalisierung.*

Springer Vieweg, 2019.

ISBN: 978-3-658-26686-8.

MathWorks.

*2-D fast Fourier transform.*

2020.

<https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/fft2.html>.



Tammy Riklin Raviv.

*Digital Image Processing - Lecture 4 - Frequency domain.*

Ben-Gurion University of the Negev.

<http://www.ee.bgu.ac.il/~rrtammy/DIP/classes/Class4-Frequency.pdf>.