Fouriertransformation – Abtasttheorem

Steffen Walter (1145690) Marvin Gaube (4670273)

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Stuttgart
Vorlesung: Digitale Bildverarbeitung

16. April 2020

Agenda

1. Theoretische Grundlagen
   - Abtastung
   - 1D Aliasing-Effekt
   - 1D Abtasttheorem
   - 2D Aliasing-Effekt
   - 2D Abtasttheorem
2. Realisierung
   - MATLAB: FFT2
   - Implementierung in MATLAB
   - Demo
3. Fazit

Abtastung

- Abtastung bedeutet, dass nur die Information an den Gitterpunkten erhalten bleibt
- Multiplikation mit einer Funktion, die nur an den Gitterpunkten ungleich null ist
- Diese Operation lässt sich durchführen, indem wir die Bildfunktion $g(x)$ mit einer Funktion multiplizieren, welche die Summe der an den Gitterpunkten $r_{m,n}$ sitzenden δ-Funktionen darstellt
- Die Funktion wird in der Literatur oft als Nagelbrettfunktion oder 2D-δ-Kamm bezeichnet

Abtastung

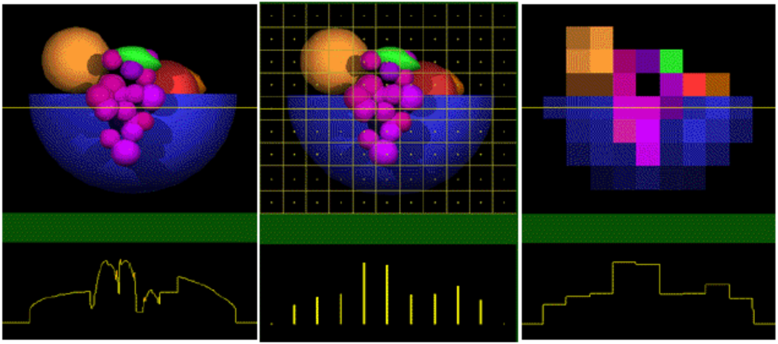

Abbildung: Beispiel Abtastung Quelle [Durand and Cutler(2020)]

Abtastung

- Eine dichte Abtastung im x-Raum führt zu einem weiten Gitter im k-Raum und umgekehrt. Damit führt die Abtastung zu einer Wiederholung des Bildspektrums an jedem Gittervektor im Fourierraum.

- Die Abtastung führt zu einer Reduktion der Auflösung, das heißt, dass Strukturen von der Größe der Abtastschrittweite oder kleiner verloren gehen.

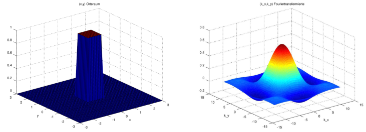

Abbildung: Fouriertransformierte kleines Quadrat
Quelle [Fuchs(2020)]

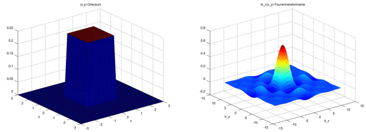

Abbildung: Fouriertransformierte großes Quadrat
Quelle [Fuchs(2020)]

1D Aliasing-Effekt

Beschreibung

Bei der Abtastung eines Signals mit einer Abtastfrequenz etwas kleiner als eine im Signal vorkommende Wellenlänge kann es zum Aliasing-Effekt kommen. Aus dem hochfrequenten Signal wird ein nicht vorhandenes niederfrequenteres Signal erkannt. Diese erkannte Frequenz wird Aliasfrequenz genannt

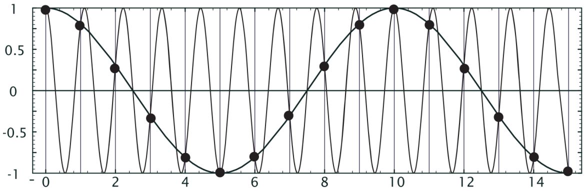

Abbildung: Veranschaulichung des Aliasing-Effektes. Quelle [Jähne(2012)]

1D Abtasttheorem

Beschreibung

Das Abtasttheorem formuliert die Bedingung, welche nötig ist um eine Verfälschung des Signals bei der Abtastung zu vermeiden:

- Aus Abbildung ergibt sich $(f_p - f_g) - f_g \geq 0$
- Daraus lässt sich folgendes Ableiten: $f_p \geq 2f_g$
- f_p ist hierbei die Abtastfrequenz

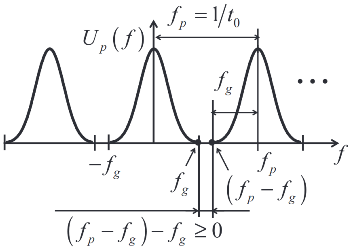

Abbildung: Bedingungen Abtasttheorem. Quelle [Lange(2019)]

2D Aliasing-Effekt

Moiré-Effekt

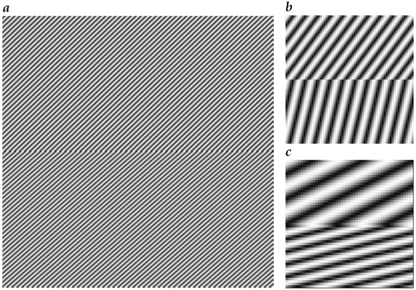

Abbildung: Der Moiré-Effekt: **a** Originalbild mit zwei periodischen Mustern (oben $\hat{k} = [0.21, 0.22]^T$, unten $\hat{k} = [0.21, 0.24]^T$). **b** Jeder vierte und **c** jeder fünfte Punkt in jeder Richtung abgetastet. Quelle 1 (links) [Jähne(2012)] Quelle 2 (rechts) Internet-Link

Exkurs: Abtastung und Fouriertransformation

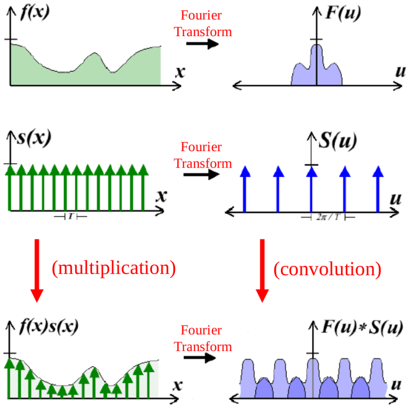

Abbildung: Faltung, Abtastung und Diskretisierung. Quelle [Durand and Cutler(2020)]

2D Abtasttheorem

- Ist das Bildspektrum ausgedehnt, so überlappen sich die sich periodisch wiederholenden Kopien.
- Wir können nicht unterscheiden, ob die spektralen Amplituden aus dem Originalspektrum im Zentrum oder von einer der Kopien stammen.
- Um Verzerrungen zu vermeiden, müssen wir Überlappungen ausschließen.

2D Abtasttheorem

- Wir müssen das Spektrum auf den Bereich um den zentralen Punkt des reziproken Gitters bis zu den Linien, die den Zentralgitterpunkt von allen anderen Gitterpunkten trennen, beschränken.

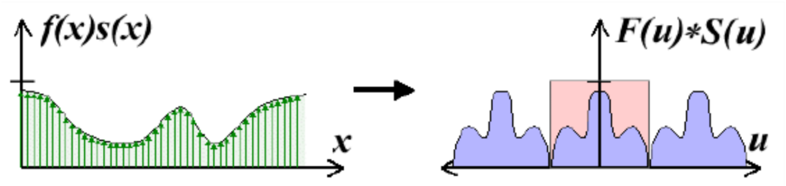

Abbildung: Beschränkung des Spektrums. Quelle [Durand and Cutler(2020)]

2D Abtasttheorem

- Auf einem Rechteckgitter ergibt sich daraus die Bedingung, dass die maximale Wellenzahl, bei der das Bildspektrum nicht null ist, auf weniger als die Hälfte des Abstands zwischen den Gitterpunkten in der Bildebene beschränkt werden muss.
- Quantitativ kann das so ausgedrückt werden: Ist das Spektrum $\tilde{g}(\kappa)$ einer kontinuierlichen Funktion $g(x)$ bandbegrenzt, d. h.

$$\tilde{g}(\kappa) = 0 \quad \forall \, \|k_{x_1,x_2}\| \geq \frac{\Delta k_{x_1,x_2}}{2}$$

dann kann es aus Punkten welche mit der Schrittweite

$$\Delta x_{x_1,x_2} = \frac{1}{\Delta k_{x_1,x_2}}$$

abgetastet wurde exakt rekonstruiert werden. [Jähne(2012)]

2D Abtasttheorem

- Wir erhalten nur dann eine korrekte periodische Struktur, wenn wir pro Wellenlänge mindestens zwei Abtastpunkte setzen.
- Die maximale Wellenzahl, die ohne Fehler abgetastet werden kann, wird als Nyquist-Wellenzahl oder Grenzwellenzahl bezeichnet.

Realisierung

Implementierung in MATLAB

Ziel: Wie muss ich ein gegebenes Bild abtasten, um noch alle Informationen zu behalten?

- Berechnung der 2D-Fourier-Transformation mittels *fft*2
- Bestimmung des "Schwellwertes", ab dem wir den Wert der Fouriertransformierten als null annehmen:
  $Z = max(FFT) * 0.001$

Realisierung

Implementierung in MATLAB

- Iteration über die Fouriertransformierte, Bestimmung von Grenzfrequenzen k_x und k_y durch Vergleich mit Z
- Bestimmung der Abtastdistanz: $d_x \leq \frac{1}{2k_x} * I_{Breite}$
- Abtastung des Orginalbildes in der Distanz d_x bzw. d_y, jeweils mittig
- Anzeige des abgetasteten Bildes

Berechnung Vgl. [Raviv()]

Realisierung

MATLAB: FFT2

Unser Programm verwendet die matlab-interne fft2-Funktion:

$$Y_{p+1,q+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i\left(\frac{jp}{m} + \frac{kq}{n}\right)} X_{j+1,k+1}$$

mit X: Matrix im Ortsraum $(m \times n)$, $p, j : 0 - m - 1$,
$q, k : 0 - n - 1$
Y ist ebenfalls eine $(m \times n)$-Matrix
Vgl. [MathWorks(2020)]

Realisierung

MATLAB: FFT2

Vgl. DFT aus der Vorlesung
Unterschiedlich: Normierung, Division durch m bzw. n

$$e^{-2\pi i(\frac{jp}{m}+\frac{kq}{n})}$$

vs.

$$e^{-i(jp+kq)}$$

Wichtig für das Δ_x/Δ_y-Kriterium

Realisierung

Demo

Fazit

- Faustregel: Je größer die Frequenzen, desto niedriger die Sampledistanz
- Fouriertransformation zeigt Verteilung, und ermöglicht die Abschätzung
- Praktische Anwendung: Kompression

Quellen

Durand and Cutler.
Sampling, Aliasing, Mipmaps.
MIT EECS, 2020.
Link
.

Christian Fuchs.
Skript - Digitale Bildverarbeitung.
DHBW Stuttgart, 2020.

.

Bernd Jähne.
Digitale Bildverarbeitung und Bildgewinnung.
Springer Vieweg, 2012.
ISBN: 978-3-642-04952-1
.

Jörg Lange.
Mathematische Grundlagen der Digitalisierung.
Springer Vieweg, 2019.
ISBN: 978-3-658-26686-8.

MathWorks.
2-D fast Fourier transform.
2020.
https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/fft2.html.

Tammy Riklin Raviv.
Digital Image Processing - Lecture 4 - Frequency domain.
Ben-Gurion University of the Negev.
http://www.ee.bgu.ac.il/~rrtammy/DIP/classes/Class4-Frequency.pdf.