Fouriertransformation – Abtasttheorem

Steffen Walter (1145690) Marvin Gaube (4670273)

Duale Hochschule Baden-Württemberg – Stuttgart
Vorlesung: Digitale Bildverarbeitung

16. April 2020

Agenda

Theoretische Grundlagen

- Platzhalter

Abtastung

- Abtastung bedeutet, dass nur die Information an den Gitterpunkten erhalten bleibt
- Mathematisch ist dies eine Multiplikation mit einer Funktion, die nur an den Gitterpunkten ungleich null ist
- Diese Operation lässt sich durchführen, indem wir die Bildfunktion $g(x)$ mit einer Funktion multiplizieren, welche die Summe der an den Gitterpunkten $r_{m,n}$ sitzenden δ-Funktionen darstellt
- Diese Funktion wird in der Literatur oft als Nagelbrettfunktion oder 2D-δ-Kamm bezeichnet

Abtastung

- Eine dichte Abtastung im x-Raum führt zu einem weiten Gitter im k-Raum und umgekehrt. Damit führt die Abtastung zu einer Wiederholung des Bildspektrums an jedem Gittervektor im Fourierraum.
- Es folgt, dass die Abtastung zu einer Reduktion der Auflösung führt, d. h., dass Strukturen von der Größe der Abtastschrittweite oder kleiner verloren gehen.

1D Aliasing-Effekt

Beschreibung

Bei der Abtastung eines Signals mit einer Abtastfrequenz etwas kleiner als die Wellenlänge kommt es zum Aliasing-Effekt. Aus dem hochfrequenten Signal wird ein deutlich niederfrequenteres Signal abgetastet.

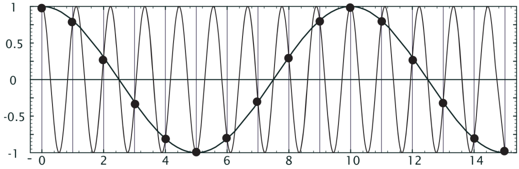

Abbildung: Veranschaulichung des Aliasing-Effektes. Quelle [Jähne(2012)]

1D Abtasttheorem

Beschreibung

Das Abtasttheorem formuliert die Bedingung, welche nötig ist um eine Verfälschung des Signals bei der Abtastung zu vermeiden:

- Aus Abbildung ergibt sich $(f_p - f_g) - f_g \geq 0$
- Daraus lässt sich folgendes Ableiten: $f_p \geq 2f_g$
- f_p ist hierbei die Abtastfrequenz

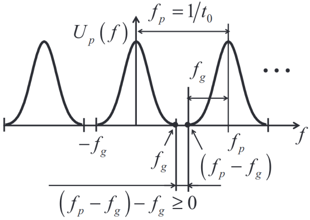

Abbildung: Bedingungen Abtasttheorem, Quelle [Lange(2010)]

2D Aliasing-Effekt

Moiré-Effekt

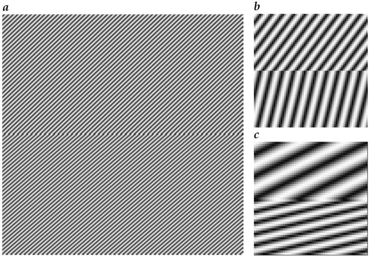

Abbildung: Der Moiré-Effekt: **a** Originalbild mit zwei periodischen Mustern (oben $\hat{k} = [0.21, 0.22]^T$, unten $\hat{k} = [0.21, 0.24]^T$). **b** Jeder vierte und **c** jeder fünfte Punkt in jeder Richtung abgetastet. Quelle 1 (links) [Jähne(2012)] Quelle 2 (rechts) Internet-Link

2D Abtasttheorem

- Bei einem großen Bildspektrum können wir nicht vermeiden, dass es Überlappungen von Frequenzen gibt.
- Wir können in diesen Fällen keine automatisierte Entscheidung treffen, welche Frequenz der korrekten Darstellung entspricht.
- Um Verzerrungen zu vermeiden, müssen wir Überlappungen ausschließen.
- Wir müssen das Spektrum auf den Bereich um den zentralen Punkt des reziproken Gitters bis zu den Linien, die den Zentralgitterpunkt von allen anderen Gitterpunkten trennen, beschränken.

2D Abtasttheorem

- Auf einem Rechteckgitter ergibt sich daraus die einfache Bedingung, dass die maximale Wellenzahl, bei der das Bildspektrum nicht null ist, auf weniger als die Hälfte der Gitterkonstanten des reziproken Gitters beschränkt werden muss.
- Quantitativ kann das so ausgedrückt werden: Ist das Spektrum $\tilde{g}(\kappa)$ einer kontinuierlichen Funktion $g(x)$ bandbegrenzt, d. h.

$$\tilde{g}(\kappa) = 0 \forall \|k_d\| \geq \frac{k_d}{2}$$

dann kann es aus Punkten welche mit der Schrittweite

$$\Delta x_d = \frac{1}{k_d}$$

Praktische Anwendung

Wo kommt das Abtasttheorem zum Einsatz?

Realisierung

MATLAB: FFT2

Unser Programm verwendet die matlab-interne fft2-Funktion:

$$Y_{p+1,q+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\pi i(\frac{jp}{m}+\frac{kq}{n})} X_{j+1,k+1}$$

mit X: Matrix im Ortsraum $(m \times n)$, $p, j : 0 - m - 1$,
$q, k : 0 - n - 1$
Y ist ebenfalls eine $(m \times n)$-Matrix

Realisierung

MATLAB: FFT2

Vgl. DFT aus der Vorlesung
Unterschied: Faktor 2π, Division durch m/n

Realisierung

Implementierung in MATLAB

- Berechnung der 2D-Fourier-Transformation
- Bestimmung des "Schwellwertes", ab dem wir den Wert der Fouriertransformierten als null annehmen:
  $Z = max(FFT) * 0.001$

Realisierung

Implementierung in MATLAB

- Iteration über die Fouriertransformierte, Bestimmung von k_x und k_y durch Vergleich mit Z
- Bestimmung der Abtastdistanz: $d_x \leq \frac{1}{2k_x} * l_{Breite}$
- Abtastung des Orginalbildes in der Distanz d_x bzw. d_y, jeweils mittig
- Anzeige des abgetasteten Bildes

Fazit

- Platzhalter

Quellen

Bernd Jähne.
Digitale Bildverarbeitung und Bildgewinnung.
Springer Vieweg, 2012.
ISBN: 978-3-642-04952-1.

Jörg Lange.
Mathematische Grundlagen der Digitalisierung.
Springer Vieweg, 2019.
ISBN: 978-3-658-26686-8.