FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

Números y números negativos

Sistema de números reales

Los números reales se pueden dividir en números irracionales y racionales:

Números reales: se representan con el símbolo $\mathbb{R}$

- **Números irracionales**: aquellos números que no pueden ser expresados mediante fracciones, como los que tienen una parte decimal sin final, como $\sqrt{2}$ o π. No tienen un símbolo propio, pero se representan con los símbolos $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. (reales - racionales).
- **Números racionales**: los números que pueden ser expresados como fracciones. Se representan con el símbolo $\mathbb{Q}$.

  $$\mathbb{Q} = \{-1.2, 0.4, 0, 2\}$$

  Estos además incluyen:

  - **Íntegros**: números sin parte decimal, tanto negativos como positivos. Se representan con el símbolo $\mathbb{Z}$.

    $$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

  - **Enteros**: números sin parte decimal positivos, además del 0. Se representan con el símbolo $\mathbb{W}$.

    $$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

  - **Naturales**: números sin parte decimal positivo sin el 0. Se representan con el símbolo $\mathbb{N}$.

    $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Elemento neutro

Un elemento neutro es el que no altera el resto de números cuando realizamos una operación con él.

El elemento neutro de la suma y la resta es 0, ya que $x + 0 = x$

El elemento neutro de la multiplicación y división es 1, ya que $x \cdot 1 = 1$

Números opuestos

Dos números son opuestos cuando están a la misma distancia del 0 pero en dirección opuesta. Por ejemplo el -2 y el 2 son números opuestos. Para obtener el número opuesto de un número simplemente hay que añadirle un signo de negativo si no lo tiene, o quitárselo si lo tiene.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número es su distancia hasta el 0. Se obtiene quitando el signo negativo al número si lo tiene. De tal forma que el valor absoluto de -3 y de 3 es en ambos casos 3.

El valor absoluto se representa con el número rodeado por dos barras:

$$|-3| = 3$$

Resultado combinaciones de signos

Si los signos son del mismo tipo darán como resultado un signo positivo, mientras que si son de tipo distinto darán como resultado un signo negativo.

$$\begin{aligned} ++ &\implies + \\ -- &\implies + \\ +- &\implies - \\ -+ &\implies - \end{aligned}$$

Añadiendo y sustrayendo números con signo

$$\begin{gathered} 1+3=4 \\ -1+-3=-4 \implies -1-3=-4 \\ 2+-1=1 \implies -1=1 \\ -3+(+2)+(-2)=-3 \implies -3 \cancel{+2} \cancel{-2} = -3 \implies -3=-3 \\ -2--3=1 \implies -2+3=1 \end{gathered}$$

Multiplicando números con signo

$$\begin{gathered} 2 \cdot 3 = 6 \\ 2(-3) = -6 \\ -2(3) = -6 \\ (+2)(+3) = 6 \\ (-2)(-3)(-4) \implies 6(-4) = -24 \\ (-2)(-3)(-4)(-5) \implies 6 \cdot 20 = 120 \end{gathered}$$

Dividiendo números con signo

$$6 \div 3 \implies \frac{6}{3} = 2$$

$$-6 \div 3 \implies \frac{-6}{3} \implies -\left(\frac{6}{3}\right) = -2$$

$$6 \div -3 \implies \frac{6}{-3} \implies -1 \cdot \frac{6}{3} = -2$$

$$-6 \div -3 \implies \frac{\cancel{-}6}{\cancel{-}3} \implies \frac{6}{3} = 2$$

Valor absoluto de una expresión

Podemos sacar el valor absoluto de una expresión (esto es, eliminar el negativo si lo tiene, que el valor siempre quede en positivo), pero hay que tener en cuenta que siempre hay que sacar el resultado de la expresión antes de sacar el valor absoluto.

$$|-3+4| \implies |-1| = +1$$

En este caso, tenemos que resolver la expresión del valor absoluto antes de eliminar el negativo. Si eliminásemos los negativos de los números internos de la expresión antes de resolverla nos quedaría +3+4=7, pero eso es completamente incorrecto.

$$2 + |5-9| - |-3| \implies 2 + |-4| - |-3| \implies 2 + 4 - 3 = 3$$

Factores y Múltiplos

Un factor es un número íntegro que puede dividir exactamente a otro número. Dicho de otro modo, un factor es un íntegro que se puede multiplicar por otro íntegro para obtener el número del que es factor.

1, 2, 3, 4, 6 y 12 son factores de 12, ya que pueden dividir al 12 y devolver otro íntegro, o pueden ser multiplicados por otro número íntegro para obtener 12.

Un múltiplo es el número resultado de multiplicar un número íntegro por otro íntegro. 4 es múltiplo de 1, 2 y 4.

Reglas de divisibilidad

La divisibilidad de un íntegro significa que el resultado de la división debe a su vez ser un íntegro (división exacta).

- **Divisible por 2 si**: el último dígito del número es 0, 2, 4, 6 o 8.
- **Divisible por 3 si**: la suma de los dígitos del número son divisibles por 3. 252 es divisible por 3 porque 2 + 5 + 2 = 9
- **Divisible por 4 si**: los dos últimos dígitos del número son divisibles por 4. 3324 es divisible por 4 porque 24 / 4 = 6

- **Divisible por 5 si**: el último dígito del número es 0 o 5.
- **Divisible por 6 si**: es divisible tanto por 2 como por 3. 24 es divisible por 6 porque acaba por 2 y 2 + 4 = 6 que es divisible por 3.
- **Divisible por 7 si**: el último dígito multiplicado por 5 mas la suma del resto de dígitos es divisible por 7, o bien si restando dos veces el último dígito al número (sin ese dígito) da como resultado un número divisible por 7. 679 es divisible por 7, ya que 9 multiplicado por 5 es igual a 45, mas 67 da 112. 112 dividido por 7 da 16. De igual forma 546 es divisible por 7 ya que 54 - (6x2) da 42. 42 / 7 = 6.
- **Divisible por 8 si**: si los tres últimos dígitos del número son divisibles por 8. 3256 es divisible por 8 porque 256 / 8 = 32.
- **Divisible por 9 si**: la suma de los dígitos del número es divisible por 9. 1423 es divisible por 9, ya que 1 + 4 + 2 + 2 = 9.
- **Divisible por 10 si**: el número acaba en 0.

Números primos y compuestos

Los números primos son aquellos números enteros, mayores a 1, que únicamente pueden ser divididos por 1 y por si mismos. Los números que no cumplen esta condición se llaman compuestos.

5 es un número primo, ya que únicamente es divisible por 1 y por 5.

4 es un número compuesto, ya que puede ser dividido por 1, por 4, pero también por 2.

Factorización prima

La factorización prima de un número compuesto es la representación de ese número como un producto de números primos:

$$12 \Longrightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Normalmente se ordenan los primos de menor a mayor y se agrupan los factores que son iguales (como potencias):

2 x 2 x 3 -> 2^2 x 3

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \Longrightarrow 2^2 \cdot 3$$

Para encontrar el producto de primos podemos ir descomponiéndolo en sus factores inmediatos hasta llegar a los primos.

Por ejemplo para encontrar el producto de primos de 45:

$$45 \Longrightarrow 9 \cdot 5 \Longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 5 \Longrightarrow 3^3 \cdot 5$$

Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números es el número más pequeño entre dichos números.

El MCM de 2 y 4 es 4.

El MCM de 2 y 3 es 6.

El MCM de 2 y 5 es 10.

Para números pequeños, se puede conseguir el MCM buscando los múltiplos del número más grande empezando por el más pequeño y parando cuando encontramos uno que también es múltiplo del número más pequeño.

Por ejemplo para el 3 y el 4, cogeremos el 4 ya que es el número más grande y probaremos sus múltiplos:

4 x 1 = 4 -> no es múltiplo de 3

4 x 2 = 8 -> no es múltiplo de 3

4 x 3 = 12 -> 12 es múltiplo de 3

12 es el MCM de 3 y 4

Para números grandes tenemos que buscar la factorización prima de ambos números, y usar los factores primos para construir el MCM.

Por ejemplo para 20 y 75:

La factorización prima de 20 es 2 x 2 x 5 -> 2^2 x 5

La factorización prima de 75 es 3 x 5 x 5 -> 3 x 5^5

El número de veces que cada factor primo aparece en el MCM de 20 y 75 será el mayor del número de veces que aparece en cada una de las factorizaciones primas de los dos números.

2 aparece dos veces en 20 y 0 en 75 -> 2^2

3 aparece 0 veces en 20 y 1 en 75 -> 3

5 aparece 0 veces en 20 y 2 en 75 -> 5^2

Así que el MCM se calculará así:

2^2 x 3 x 5^5 = 300.

El MCM de 20 y 75 es 300.

Si queremos comprobar si es correcto, solo tenemos que dividir el MCM por todos los números de los que es MCM, y debería dar un resultado entero.

300 / 20 = 15

300 / 75 = 4

Otro ejemplo con 3 números: 24, 10 y 15.

Las factorizaciones primas son los siguientes:

24 -> 2^3 x 3

10 -> 2 x 5

15 -> 3 x 5

Así que el cálculo del MCM se hará: 2^3 * 3 * 5 = 120.

120 / 24 = 5

120 / 10 = 12

120 / 15 = 9

Máximo Común Divisor

El máximo común divisor (MCD) de dos o más números enteros es el número más grande capaz de realizar una división exacta de ambos números.

Una manera de encontrar el MCD es hacer la factorización prima de los números y ver que factores aparecen en ambas factorizaciones.

Se tiene que coger el menor número de veces que aparece cada factor en todos los números (si en alguno de ellos no aparece un factor, este se ignora.)

Para el 14 y el 28:

14 -> 2 * 7

28 -> 2 * 2 * 7

2 aparece 1 vez en 14 y 2 veces en 28, asi que se coge solo 1 vez.

7 aparece 1 vez en 14 y 1 vez en 28, asi que se coge una vez.

El MCD de 14 y 28 es 2 *7 -> 14.

De igual forma que en el MCM, se puede comprobar que es correcto si dividiendo los números por el MCD dan todos una división exacta.

14 / 14 = 1

28 / 14 = 2

Otro ejemplo con 5, 10 y 20:

5 -> 5

10 -> 5 * 2

20 -> 5 * 2 * 2

5 aparece 1 vez en todos los números, así que se coge 1 vez

2 aparece 0 veces en 5, 1 vez en 10 y 2 veces en 20, así que se coge 0 veces, se ignora.

El MCD de 5, 10 y 20 es 5.

Otro ejemplo con variables:

6a, 6a^2, 12a^3

6a -> 3 * 2 * a

6a^2 -> 3 * 2* a * a

12a^3 -> 3 * 2 * 2 * a * a * a

3 aparece 1 vez en todos los números, así que se coge una vez

2 aparece 1 vez en 6a y 6a^2, y 2 veces en 12a^3, así que se coge una vez.

a aparece 1 vez en 6a, 2 veces en 6a^2 y 3 veces en 12a^3, así que se coge 1 vez.

El MCD es 2 * 3 * a

Otro ejemplo con variables al cuadrado.

4x^2y -> 2, 2, x, x, y

2xy -> 2, x, y

10xy^2-> 2,5,x,y,y

Esto daría como resultado:

2 * x * y

Fracciones

Una fracción describe una parte de un todo. Consta de dos números, el de arriba, que se llama numerador, y el de abajo, que se llama denominador:

2/3

Una fracción también representa la división del numerador por parte del denominador, de tal forma que podemos decir que 2 es dividido por 3. Por esta misma razón el denominador no puede nunca ser 0, ya que no se puede dividir por 0 (un número dividido por 0 da un resultado indefinido, incluso si el número dividido también es 0).

Simplificar fracciones

Una forma fácil de simplificar fracciones es usando la factorización prima:

630/945

630:

3*210

3 * 3 * 70

3 * 3 * 5 * 14

3 * 3 * 5 * 7 * 2

945

3 * 315

3 * 3 * 105

3 * 3 * 5 * 21

3 * 3 * 5 * 7 * 3

De este modo se cancelan todos los números del numerador y del denominador excepto un 2 en el numerador y un 3 en el denominador.

Sumando y restando fracciones

Cuando el denominador es el mismo, simplemente tenemos que sumar o restar los numeradores mientras mantenemos el denominador.

5/7 + 12/7 = (5+12)/7 = 19/7

Cuando el denominador es distinto tenemos que encontrar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

3/5 + 1/3 -> MCM 15 -> tenemos que multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción para llegar a 15.

3 * 3 / 5 * 3 + 1 * 5 / 3 * 5

9/15 + 5 /15 = 14/15

3/5 - 1/3

3 * 3 / 5 * 3 - 1 * 5 / 3 * 5

9/15 - 5 /15 = 4/15

Multiplicando y dividiendo fracciones

Para multiplicar fracciones simplemente se multiplican los numeradores entre ellos y los denominadores entre ellos.

3/4 * 1/7 = 3 * 1 / 4 * 7 = 3 / 28

Para dividir fracciones intercambiamos el numerador y denominador del divisor (segunda fracción), para lograr lo que se llama recíproco de la fracción o fracción inversa. (El recíproco de a/b es b/a)

3/4 / 1/7 = 3/4 * 7/1 = 21 / 4

Si necesitamos multiplicar o dividir una fracción por un número entero, tenemos que convertir ese entero a fracción:

7/3 * 5 -> 7/3 * 5/1 -> 35 / 3

Signo de una fracción

Una fracción puede tener signo en 3 sitios, el signo de la fracción en si, el signo del numerador y el signo del denominador.

+(+3/+2)

Para que una fracción sea negativa en su conjunto tiene que tener un signo negativo en 1 o 3 de los sitios.

-3/-2 Ambos negativos se neutralizan y queda positivo

-3/2 La fracción quedaría negativa -(3/2)

-(-3/-2) La fracción queda negativa porque aunque dos de los negativos se neutralicen queda el tercero.

De igual forma que cuando operamos con números enteros, si multiplicamos dos fracciones negativas nos da una fracción positiva.

Recíproco de la fracción

Como hemos visto antes, el recíproco de una fracción se obtiene intercambiando el lugar del numerador con el denominador.

a/b -> b/a

Una fracción multiplicada por su recíproco siempre da 1.

3/4 * 4/3 = 12/12 = 1

El 0 no tiene recíproco, ya que sería 1/0 y eso da un resultado indefinido.

Cuando tomamos el recíproco de una fracción que tiene al menos un signo negativo, debemos incluir dicho signo(s) en el recíproco, de tal forma que al multiplicarse la fracción por el recíproco los signos se anulen entre sí y el resultado sea 1 positivo.

Números Mixtos y Fracciones Impropias

Las fracciones pueden ser propias, en las que el numerador es menor que el denominador (3/5) o impropias, en las que el numerador es mayor que el denominador (11/5).

Mientras una fracción propia representa un número entre -1 y 1 (pero no igual a -1 o 1), una fracción impropia representa un numero que es mayor o igual a 1, o menor o igual a -1.

Una fracción impropia puede ser convertida a un número mixto (una mezcla entre un número entero y una fracción). Lo que hay que hacer es dividir el numerador por el denominador, y el resultado que se obtenga se pone a la izquierda de la fracción como un número entero, y el resto se pone como numerador de la parte fraccionaria. Si el resto fuese 0, eso significaría que lo que tenemos es un número entero, no un número mixto.

$$\frac{15}{4} \Longrightarrow 3,75 \Longrightarrow 3\frac{3}{4}$$

Los números mixtos no indican multiplicación, sino adición.

$$1\frac{3}{4} \Longrightarrow 1 + \frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

En un número mixto negativo tanto el número entero como la fracción son negativos.

$$-1\frac{3}{4} \Longrightarrow -\left(1\frac{3}{4}\right) \Longrightarrow -1 - \frac{3}{4} \Longrightarrow -\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

Sumar y restar números mixtos

Para sumar o restar números mixtos primero separamos el número entero de la parte fraccionaria.

Sumamos - o restamos - la parte entera.

Buscamos el mínimo común múltiplo de las partes fraccionarias.

Sumamos por separado el entero y la fracción.

$$\begin{aligned} 6\frac{3}{7} + 2\frac{1}{4} &\Longrightarrow (6+2) + \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{4}\right) \\ &\Longrightarrow (6+2) + \left[\frac{3}{7}\left(\frac{4}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{7}\right)\right] \\ &\Longrightarrow (6+2) + \left(\frac{12}{28} + \frac{7}{28}\right) \Longrightarrow 8 + \frac{19}{28} \Longrightarrow 8\frac{19}{28} \end{aligned}$$

Ahora con una resta:

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{5} - 1\frac{1}{2} &\Longrightarrow (4-1) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow (4-1) + \left(\frac{2}{10} - \frac{5}{10}\right) \\ &\Longrightarrow (4-1) + \left(-\frac{7}{10}\right) \Longrightarrow 3 - \frac{7}{10} \end{aligned}$$

En este momento, para convertir en un número mixto hay que convertir la resta de la fracción en suma, para lo cual sacaremos del 3 una unidad entera y lo multiplicaremos por el denominador de la fracción, y a este valor le restaremos la fracción negativa, lo que nos dejará la parte entera y una fracción positiva.

$$3 - \frac{7}{10} \Longrightarrow 2 + 1 - \frac{7}{10} \Longrightarrow 2 + \frac{10}{10} - \frac{7}{10} \Longrightarrow 2 + \frac{3}{10} \Longrightarrow 2\frac{3}{10}$$

Multiplicar y dividir números mixtos

Para multiplicar o dividir números mixtos simplemente tenemos que convertirlos en fracciones impropias. Para convertir en función impropia simplemente multiplicamos el entero por el denominador y el resultado lo añadimos al numerador. Después los multiplicamos o dividimos las fracciones y el resultado lo volvemos a convertir en número mixto.

$$2\frac{2}{3} \cdot 5\frac{3}{7} \Longrightarrow \frac{6+2}{3} \cdot \frac{35+3}{7} \Longrightarrow \frac{8}{3} \cdot \frac{38}{7} \Longrightarrow \frac{304}{21} \Longrightarrow 14\frac{10}{21}$$

Recordemos que para hacer divisiones entre fracciones se invierten el numerador y el denominador de la segunda fracción y se multiplican.

$$4\frac{1}{6} \div 3\frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{25}{6} \div \frac{10}{3} \Longrightarrow \frac{25}{6} \cdot \frac{3}{10} \Longrightarrow \frac{75}{60} \Longrightarrow \frac{5}{4} \Longrightarrow 1\frac{1}{4}$$

Determinar que fracción es más grande

- Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la fracción con el numerador más grande es la más grande. Entre 2/7 y 5/7 el más grande es 5/7.
- Cuando los numeradores son equivalentes la fracción más grande es aquella con el denominador más pequeño. Entre 2/5 y 2/3 el más grande es 2/3.
- Si los numeradores y denominadores de dos fracciones son diferentes no podemos compararlos directamente, primero hay que encontrar un denominador común. Por ejemplo, 5/8 y 2/3. El denominador común sería 24, con lo cual igualamos los denominadores de ambas fracciones a ese número y nos quedan:

  $$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$$

  $$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$$

  Con lo que 2/3 es más grande que 5/8

Decimales

Aritmética Decimal

Suma y resta

La suma y resta de decimales funciona igual que la de enteros, solo hay que alinear por el signo decimal.

$$\begin{array}{r} 13.16 \\ +8.74 \\ \hline 21.90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13.16 \\ -8.74 \\ \hline 4.42 \end{array}$$

Multiplicación

La multiplicación se hace alineando por la derecha, independientemente de que sean decimales o no, o que luga5r decimal sea cada uno. Ignoramos los decimales en principio y multiplicamos como si fuera un entero. Luego, una vez hemos terminado la multiplicación pondremos tantos decimales como la suma de decimales del primer número y el segundo número.

$$\begin{array}{r} 13.1 \\ \times 8.74 \\ \hline 524 \\ 9170 \\ 104800 \\ \hline 114.494 \end{array}$$

División

Para la división tenemos que mover los decimales a la derecha tantas veces como sea necesario para que ambos números sean enteros. En el caso de 13.1 / 8.74 tendremos que moverlos dos veces a la derecha y nos quedara 1310 y 874. Luego debemos coger del dividendo los numeros suficientes desde la izquierda que formen un número mayor que el divisor. Entonces hacemos la división, debajo de la caja del divisor ponemos el multiplo que hemos usado con el divisor para acercarnos al dividendo. Debajo del dividendo ponemos la cantidad que ha faltado entre la operación del multiplo y divisor. Entonces en la parte del dividendo bajamos el siguiente dígito y volvemos a hacer el calculo del nuevo número con el divisor.

Decimales repetidos

Los decimales repetidos se marcan con una raya sobre el último decimal repetido o secuencia de decimales repetidos:

$$32.666 \implies 32.\overline{6}$$
$$23.1212 \implies 23.\overline{12}$$

Redondeo de decimales

Si el último decimal es menor de 5, el dígito anterior al último decimal se deja como esta. Si el último decimal es 5 o más al dígito anterior se le añade 1.

$$3.14159 \implies 3.1416$$
$$2.223 \implies 2.22$$

Ratio (razón) y proporción

Un ratio es una fracción en la que se empatiza la relación entre el numerador y el denominador.

$$\frac{2}{3}$$

Es el ratio de 2 a 3. A veces se escribe como $2:3$

Una proporción es una ecuación de dos ratios, como:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Como los dos ratios en una proporción son iguales entre ellos, una proporción es una ecuación que expresa la equivalencia de dos fracciones. 2 es a 3 lo que 8 es a 12.

Si tenemos una proporción en la que hay una incógnita

$$\frac{4}{5} = \frac{2x}{40}$$

Para resolver esto tenemos que hacer una multiplicación cruzada: multiplicamos ambas fracciones por ambos denominadores.

$$40\left(\frac{4}{5}\right) = 40\left(\frac{2x}{40}\right)$$
$$40\left(\frac{4}{5}\right) = 2x$$
$$\frac{160}{5} = 2x$$
$$5\left(\frac{160}{5}\right) = 5(2x)$$
$$160 = 10x$$
$$16 = x$$

Esto se puede acortar a: el producto del numerador de la izquierda por el denominador de la derecha es igual al producto del denominador de la izquierda por el numerador de la derecha.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2x}{40} \Longrightarrow 160 = 10x$$

Exponentes

Un exponente es un número que se escribe a modo de superíndice al lado de otro.

$$n^x$$

Aquí n seria la base y x el exponente. Esto significa que debemos multiplicar n sobre si misma x veces, es decir, debemos multiplicar la base sobre si misma por el número indicado en el exponente.

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Suma y resta de exponentes

Para poder sumar o restar expresiones exponenciales estas deben tener la misma base y el mismo exponente, o no podremos hacerlo. Simplemente sumaremos o restaremos los coeficientes de la expresión.

$$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$$
$$5x^3 - x^3 = 4x^3$$

Multiplicación y división de exponentes

En este caso solo necesitamos que la base sea la misma, los exponentes pueden ser diferentes.

Para multiplicar dos expresiones exponenciales simplemente sumamos los exponentes:

$$x^4 \cdot x^3 = x^7$$

Si las bases son distintas pero los exponentes son iguales podemos elevar por el exponente original el producto de ambas bases:

$$4^3 \cdot 5^3 = (4 \cdot 5)^3$$

Para dividir, si las bases son iguales simplemente restamos el exponente:

$$5^7 \div 5^2 = 5^5$$

Regla del producto de exponentes

La regla del producto de exponentes dice que cuando queremos elevar un exponente a otro, simplemente tenemos que multiplicarlos.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(3^4)^5 = 3^{20}$$

También

$$\frac{a^4}{b^4} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

Regla del exponente negativo

Si un exponente es negativo se puede cambiar a positivo usando el recíproco (intercambiar el numerador y el denominador de una fracción)

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Las reglas anteriores aplican de tal forma que si tenemos

$$\frac{x^3}{x^{-2}} = x^{3--2} = x^5$$

Como es una división de exponentes con la misma base, intentaríamos restar los exponentes, pero como el del denominador es negativo en realidad estamos sumándolo.

Si tuviéramos una fracción elevada a un exponente negativo también usamos el recíproco:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Raíces

Una raíz es lo contrario de un exponente. La raíz de x sería el número que hay que multiplicar por si mismo para obtener x.

$$\sqrt[n]{x}$$

Aquí n sería el índice y x el radicando.

$$Raíz\ cuadrada: \sqrt{x}$$
$$Raíz\ cúbica: \sqrt[3]{x}$$

La raíz cuadrada sería el número que hay que multiplicar por si mismo 1 vez para obtener x. La raíz cúbica sería el número que hay que multiplicar por si mismo 2 veces para obtener x.

Se puede convertir de raíz a exponente de esta manera:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Hay que tener en cuenta que, como el número que queremos obtener en una raíz cuadrada siempre se va a multiplicar por si mismo, va a dar un resultado positivo siempre, ya que si es negativo, al multiplicarse por si mismo se va a volver positivo.

En el caso de que x fuese negativo su raíz sería un número indefinido, ya que no podemos obtener un resultado negativo haciendo un cálculo de raíz cuadrada.

Simplificar raíces

A veces se puede simplificar la raíz intentando extraer todos los factores que dan una raíz perfecta utilizando la siguiente regla:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \Longrightarrow 2 \cdot \sqrt{10}$$

Sumando y restando raíces

Para sumar o restar índices necesitamos que el índice y el radicando de ambas raíces sea el mismo, o no podremos hacer la operación.

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$
$$3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} \implies \sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 4} \implies \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Multiplicando raíces

Si el índice de las raíces es la misma, simplemente multiplicamos los radicandos.

$$\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{7 \cdot 4} = \sqrt[4]{28}$$

Cuando multiplicamos dos raíces cuadradas iguales el resultado es el radicando:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$$
$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = 5$$

Los coeficientes no importan a la hora de multiplicar raíces:

$$\left(4\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}$$
$$4\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}\right)$$
$$4\sqrt{2 \cdot 3}$$
$$4\sqrt{6}$$

Dividiendo raíces

Si el índice de las raíces es el mismo, simplemente dividimos los radicandos.

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

Una raíz dividida por si misma d0a siempre 1.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = 1$$

Debemos intentar no dejar nunca una raíz en el denominador de una fracción. Para solucionar cuando esto pasa podemos racionalizar el denominador, multiplicando el numerador y el denominador por la raíz cuadrada que queremos despejar.

$$\frac{7}{\sqrt{5}} \implies \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} \implies \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Notación Científica

Potencias de 10

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1,000$$
$$10^4 = 10,000$$
$$10^5 = 100,000$$
$$10^6 = 1,000,000$$

$$67,000 = 67 \cdot 10^3$$

$$10^{-1} = 0.1$$
$$10^{-2} = 0.01$$
$$10^{-3} = 0.001$$

$$4.3 \div 100 = 4.3 \cdot 10^{-2}$$

A la hora de expresar un número en notación científica debemos intentar dejar solo un número entero, o, si el número es menor que 1, que el primer decimal no sea un 0.

$$5.24 \cdot 10^3 \checkmark$$
$$52.4 \cdot 10^2 \times$$
$$0.4 \cdot 10^{-2} \checkmark$$
$$0.04 \cdot 10^{-1} \times$$