MATEMÁTICA SUPERIOR

Trabajo Práctico

Profesor: Santiago Ferreiros

Curso: K3011

INTEGRANTES	
Barreto, José	**LEGAJO:** 155.872-9
Duarte, Gastón	**LEGAJO:** 158.827-8
Zuccotti, Martín	**LEGAJO:** 168.355-0
Ferro, Román	**LEGAJO:** 146.486-3
Cavallaro, Valeria	**LEGAJO:** 159.558-1

1C 2018

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Introducción al problema

A causa del uso indebido de Internet por parte de los miembros de una organización, se han infiltrado ciertos virus que proliferan en memoria RAM en varios ordenadores. Los mismos se inician con el Sistema Operativo y van ocupando todo el espacio en memoria en pocos minutos, lo cual termina generando que los ordenadores no funcionen de forma correcta y se perjudique la productividad del trabajo diario de la empresa.

El encargado de seguridad informática tomó acciones en la problemática presentada y detectó la existencia de los siguientes virus en memoria RAM:

Virus A: Es el más dañino de los encontrados, ya que prolifera en memoria de forma exponencial duplicando el espacio ocupado en memoria por minuto.

Virus B: Se replica en memoria de forma proporcional al tiempo a razón de 100 copias por minuto.

Virus C: Simplemente ocupa un espacio fijo en memoria RAM cuando inicia el sistema operativo y lo deja inutilizable.

A continuación se presenta una tabla con el detalle de cada uno de los virus:

Tipo de Virus	A	B	C
Espacio por copia en memoria RAM	2 KB	512 KB	2MB
Modelo de Comportamiento de Replicación	2^t	100t	Constante

Cuadro 1: Detalle de Espacio y Comportamiento.

El encargado de seguridad notó que durante la replicación del virus se dificultaba cancelar el proceso y por lo tanto sugirió que la mejor forma de detener el mismo es cuando se haya ocupado prácticamente la totalidad de la memoria y no se estén replicando.

Para lo cual es necesario conocer con precisión en que momento la memoria se va a encontrar totalmente ocupada, teniendo en cuenta que los ordenadores tienen una memoria RAM de 4 GB, y que una vez cargado el sistema operativo quedan 3 GB disponibles de utilización.

Aclaración: Considerar que 1 GB = 1024 MB, 1 MB = 1024 KB, B = Bytes.

Desarrollo

1) Modelar una ecuación en función del tiempo que permita encontrar la cantidad de minutos necesaria para que se encuentre totalmente ocupada la memoria RAM del ordenador. Considerar la variable t (tiempo) en minutos.

2) Una vez planteado el modelo, se deberá resolver a través de los siguientes métodos: Bisección, Punto Fijo, Newton Raphson.

Para ello, antes de aplicar los métodos se deberá establecer un intervalo, un criterio de paro adecuado. Se solicita elegir diferentes criterios de paro para los distintos métodos.
Cota de error: 10-5
Cantidad de decimales: 6
Tipo de redondeo: Utilizar el que arroje mejor cota de error (Se deberá elegir entre simétrico o truncado).

3) Resolver por los distintos métodos haciendo uso de las tecnologías de información (Excel, MATLAB, o cualquier otro programa que permita la resolución) presentando los resultados obtenidos de cada iteración mediante el uso de tablas. Se aconseja mostrar número de iteración, valor de Xn, valor de Xn-1, error cometido y otros datos correspondientes a cada uno de los métodos.

4) Comparar los resultados obtenidos por cada uno de los métodos. Mencionando las ventajas y desventajas presentadas en cada uno de ellos a la hora de resolver el modelo planteado para este problema en particular. Para realizar lo solicitado será conveniente tener en cuenta la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar la cota de error, la complejidad de cálculo, la cantidad de operaciones requeridas y la precisión obtenida.

5) ¿Cuál sería la respuesta a la necesidad del encargado de seguridad? ¿En qué momento debería detener el proceso asociado a los Virus?

Resolución

1) Modelado de ecuación.

$$2\ KB * 2^t + 512\ KB * 100t\ +\ 2\ MB\ =\ 3\ GB$$
$$2\ KB * 2^t + 512\ KB * 100t\ +\ 2 * 2^{10}\ KB =\ 3\ * 2^{20}\ KB$$
$$2\ KB * 2^t + 512\ KB * 100t\ +\ 2 * 2^{10}\ KB -\ 3\ * 2^{20}\ KB = 0$$
$$2\ KB * 2^t + 51.200\ KB * t\ - 3.143.680\ KB = 0\ \mathbf{(1)}$$
$$2\ KB * 2^t = 3.143.680\ KB - 51.200\ KB * t\ \mathbf{(2)}$$

Se despejan dos ecuaciones distintas para distintos fines. La ecuación (1) será utilizada para aplicar los distintos métodos de resolución. La ecuación (2) permitirá determinar los intervalos donde se encuentran las raíces, ya que los mismos coincidirán con la intersección de las dos funciones que componen esta ecuación.

2) 3) Resolución por los diferentes métodos.

Partiendo de la ecuación (2), y utilizando un script de Matlab (ver anexo), se grafican ambas funciones para determinar el intervalo que se utilizará para aplicar cada método.

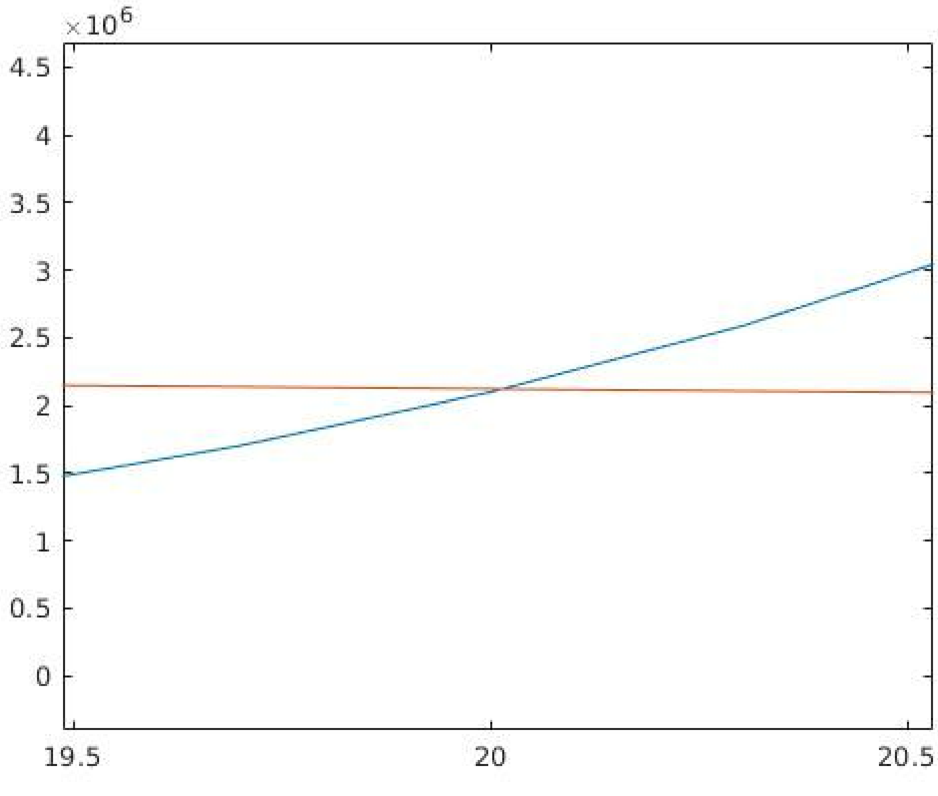

Gráfico 1. Intersección de funciones.

- <u>Bisección</u>:

  Se utiliza criterio de error absoluto: $|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon,\ \varepsilon = 10^{-5}$

  A partir del *Gráfico 1* se elige el intervalo: (19.5; 20.5)

  Cantidad de iteraciones necesarias:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \Rightarrow n > log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) \Rightarrow n > log_2(\frac{20.5-19.5}{10^{-5}}) \Rightarrow n > 16.60 \Rightarrow n = 17$$

REDONDEO SIMÉTRICO					
i	t[i]	f(t[i])	Lim inferior	Lim superior	Error
0			19,5	20,5	1
1	20	-22528	20	20,5	0,5
2	20,25	387068,0796	20	20,25	0,25
3	20,125	173680,4726	20	20,125	0,125
4	20,0625	73520,85137	20	20,0625	0,0625
5	20,03125	24993,64909	20	20,03125	0,03125
6	20,015625	1108,488022	20	20,015625	0,015625
7	20,007813	-10739,91566	20,007813	20,015625	0,007812
8	20,011719	-4823,462776	20,011719	20,015625	0,003906
9	20,013672	-1859,42724	20,013672	20,015625	0,001953
10	20,014649	-375,195068	20,014649	20,015625	0,000976
11	20,015137	366,525236	20,014649	20,015137	0,000488
12	20,014893	-4,365221	20,014893	20,015137	0,000244
13	20,015015	181,072431	20,014893	20,015015	0,000122
14	20,014954	88,351711	20,014893	20,014954	0,000061
15	20,014924	42,752746	20,014893	20,014924	0,000031
16	20,014909	19,953608	20,014893	20,014909	0,000016
17	20,014901	7,794161	20,014893	20,014901	0,000008

REDONDEO TRUNCADO					
i	t[i]	f(t[i])	Lim inferior	Lim superior	Error
0			19,5	20,5	1
1	20	-22528	20	20,5	0,5
2	20,25	387068,0796	20	20,25	0,25
3	20,125	173680,4726	20	20,125	0,125
4	20,0625	73520,85137	20	20,0625	0,0625
5	20,03125	24993,64909	20	20,03125	0,03125
6	20,015625	1108,488021	20	20,015625	0,015625
7	20,007812	-10741,42839	20,007812	20,015625	0,007813
8	20,011718	-4824,979466	20,011718	20,015625	0,003907
9	20,013671	-1860,945915	20,013671	20,015625	0,001954
10	20,014648	-376,714738	20,014648	20,015625	0,000977
11	20,015136	365,005069	20,014648	20,015136	0,000488
12	20,014892	-5,885139	20,014892	20,015136	0,000244
13	20,015014	179,552388	20,014892	20,015014	0,000122
14	20,014953	86,83173	20,014892	20,014953	0,000061
15	20,014922	39,712848	20,014892	20,014922	0,00003
16	20,014907	16,91374	20,014892	20,014907	0,000015
17	20,014899	4,754309	20,014892	20,014899	0,000007

Se observa que arroja menor error la resolución que utiliza el redondeo truncado. A través de este método se establece que la raíz α de la función pertenece al intervalo (20,014892;20,014899).

α∈(20,014892;20,014899)

- <u>Punto fijo</u>:

Se utiliza criterio de error relativo: $\frac{|t_n - t_{n-1}|}{|t_n|} < \varepsilon,\ \varepsilon = 10^{-5}$

A partir del *Gráfico 1* se elige el intervalo: (19.5; 20.5)
Utilizando un Valor Inicial = 20.

Cantidad de iteraciones necesarias: 3

Condiciones para aplicar Punto Fijo:

1. $g(t)\ continua\ en\ [a, b]$
2. $\forall t\ \in [a, b]\ :\ g(t)\ \in [a, b]$
3. $|g'(t)|\ <\ 1,\ \forall t\ \in [a, b]$

Siendo $g(t) = log_2(\frac{3143680-51200t}{2})$

1. $g(t)$ *es continua en* $(19.5\ ;\ 20.5)$
2. $\forall t \in [19.5, 20.5]\ :\ g(t) \in [19.5, 20.5]$
3. $g'(t) = \frac{5}{(5t-307)(ln\ 2)} \Rightarrow |g'(t)| < 1,\ \forall t \in [19.5, 20.5]$

REDONDEO SIMÉTRICO			
i	x[i]	g(x[i])	Error relativo
0	20	20,015415	
1	20,015415	20,014878	0,000770156402
2	20,014878	20,014896	0,00002683004113
3	20,014896	20,014896	0,0000008993301789

REDONDEO TRUNCADO			
i	x[i]	g(x[i])	Error relativo
0	20	20,015415	
1	20,015415	20,014877	0,000770156402
2	20,014877	20,014896	0,00002688000531
3	20,014896	20,014895	0,0000009492929667

Se observa que arroja menor error la resolución que utiliza el redondeo simétrico. A través de este método se establece que la raíz α de la función es, aproximadamente, 20,014896.

α = 20,014896

- Newton-Raphson:

Función: $f(x) = 2.2t + 51200t - 3143680$

Función Derivada: $f'(x) = 2.2t.ln(2) + 51200$

Función Derivada Segunda: $f''(x) = 2t + 1.ln2(2)$

A partir del Gráfico 1 se elige el intervalo: (19.5; 20.5)

Criterio de paro: Error relativo $\frac{|t_n - t_{n-1}|}{|t_n|} < \varepsilon,\ \varepsilon = 10^{-5}$

Cantidad de iteraciones necesarias: 2

Condiciones necesarias:

Sg = signo

1. Sg f(a) ≠ Sg f(b)

2. f(x) continua en [a,b]

3. f'(x) continua en [a,b]

f(19.5) = -662369.5996 **(SIGNO NEGATIVO)**

f(20.5) = 871740.8008 **(SIGNO POSITIVO)**

SE VERIFICA 1.

La función f(x) es continua en [19.5;20.5] porque f(x) representa la suma de funciones continuas en todos los puntos del intervalo, por lo tanto la función f(x) también es una función continua (la función 2.2^t+51200t es continua porque t > 0 y; la función -3143680 es constante, toda función constante es continua en todos los puntos).

SE VERIFICA 2.

La función f'(x) es continua en [19.5;20.5] porque f'(x) representa la suma de funciones continuas en todos los puntos del intervalo, por lo tanto la función f'(x) también es una función continua (la función 2.2^t.ln(2) es continua porque t > 0 y; la función 51200 es constante, toda función constante es continua en todos los puntos).

SE VERIFICA 3.

Condiciones suficientes:

4. f'(x) ≠ 0 para todo x E (a;b) (NO HAY MAX; MIN)

5. f''(x) ≠ 0 para todo x E (a;b) (NO HAY CAMBIOS DE CONCAVIDAD)

6. Coinciden en signo f(x) y f''(x) en (a;b)

7. x_o valor inicial "CERCANO" a la raíz

Se cumple que f'(x) ≠ 0 para todo x E (19.5;20.5)

SE VERIFICA 4.

Se cumple que f''(x) ≠ 0 para todo x E (19.5;20.5)

SE VERIFICA 5.

El signo de f(x) coincide con el signo de f''(x) en (19.5;20.5)

SE VERIFICA 6.

x_o es un valor inicial "CERCANO" a la raíz...

SE VERIFICA 7.

REDONDEO SIMÉTRICO				
i	x[i]	f(x[i])	f'(x[i])	Error
0	20	-22528	1504834,996	
1	20,01497	112,671533	1519997,041	0,000748
2	20,014896	0,19454	1519921,704	0,000004

REDONDEO TRUNCADO				
i	x[i]	f(x[i])	f'(x[i])	Error
0	20	-22528	1504834,996	
1	20,01497	112,671533	1519997,041	0,000747
2	20,014895	-1,325381	1519920,686	0,000003

Al igual que en punto fijo, se establece que la raíz α de la función es, aproximadamente, 20,014896.

α = 20,014896

3) **Se resuelve junto al punto 2.*

4) Comparación de resultados obtenidos.

	Bisección	**Punto fijo**	**Newton-Raphson**
Número de iteraciones	17	3	2
Complejidad del cálculo	Baja	Media	Media
Cantidad de operaciones (por iteración)	Baja	Baja	Baja
Criterio de paro utilizado	Error absoluto $E < 10^{-5}$	Error relativo $E < 10^{-5}$	Error relativo $E < 10^{-5}$
Valor de α (raíz de la función)	$\alpha \in (20{,}014892;20{,}014899)$	$\alpha \approxeq 20{,}014896$	$\alpha \approxeq 20{,}014896$
Error en variable independiente (t)	$E < 7\text{x}10^{-6}$	$E \approxeq 0$	$E \approxeq 0$
Error en variable dependiente (f(t))*	E <= 5,885139	E <= 0,19454	E <= 0,19454

**Al estar aproximando las raíces de la función, $f(\alpha^*) \approxeq 0$, siendo α^* los valores pertenecientes al intervalo calculado a través de los métodos. Se considera que el error en la variable dependiente será el módulo del máximo valor de $f(\alpha^*)$.*

5) **Respuesta.**

Luego de resolver por los distintos métodos, se puede asegurar que la memoria se llenará por completo en un tiempo t contenido en $(20{,}014892;20{,}014899)$. Este intervalo, que coincide con el calculado a partir de la bisección, contiene las respuestas de todos los métodos.

Haciendo un pasaje de los extremos del intervalo nos queda:

$$\begin{aligned} 20,014892\ min &= 20\ min\ 0,89352\ seg \approx 20\ min\ 1\ seg \\ 20,014899\ min &= 20\ min\ 0,89394\ seg \approx 20\ min\ 1\ seg \end{aligned}$$

Considerando que, en el contexto, las unidades menores a un segundo se pueden despreciar debido a la imprecisión humana, se observa que aún utilizando el intervalo de mayor amplitud (y, por lo tanto, el de mayor error) la respuesta es la misma.

El empleado de seguridad debe detener el proceso a los 20 minutos y 1 segundo.

Anexo

Script de matlab

```
>> clear, clc

>> t = linspace(0, 30);

>> figure

>> f1 = 2*2.^t;
>> plot(t,f1)
>> hold on

>> f2 = 3143680 - 51200*t;
>> plot(t,f2)
>> hold off
>> legend("2*2^t","3143680-51200t")
```