Les codes identifiants dans certaines classes de graphes

Encadrants : Ralf Klasing, André Raspaud

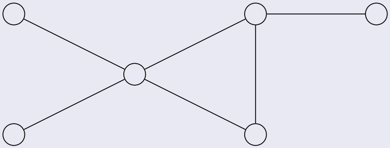
Florent Foucaud

Université Bordeaux 1

26 Juin 2009

Graphes

graphes finis non orientés, simples, connexes : $G = (V, E)$



Ensembles dominants

Définition : ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$

sous-ensemble C de V tel que pour chaque sommet v de V :

- v est dans C, ou
- v a au moins un voisin c dans C (v est *dominé* par c)

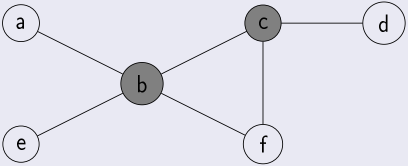
Ensembles dominants

Définition : ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$

sous-ensemble C de V tel que pour chaque sommet v de V :

- v est dans C, ou
- v a au moins un voisin c dans C (v est *dominé* par c)

Exemple



Codes identifiants

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [8])

sous-ensemble C de V tel que :

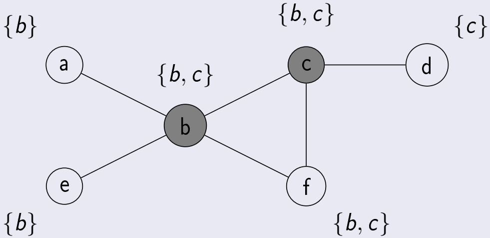
- C est un ensemble dominant de G, et
- pour tous sommets u, v de V, u et v sont dominés par des sous-ensembles de sommets distincts (*ensembles identifiants*)

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [8])

sous-ensemble C de V tel que :

- C est un ensemble dominant de G, et
- pour tous sommets u, v de V, u et v sont dominés par des sous-ensembles de sommets distincts (*ensembles identifiants*)

Contre-exemple



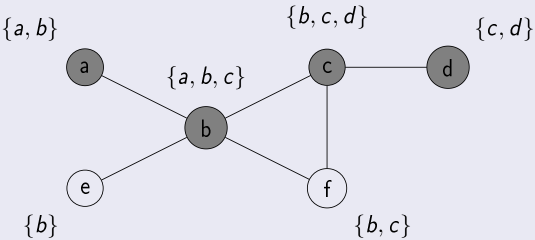
Codes identifiants

Définition : code identifiant d'un graphe $G = (V, E)$ (Karpovsky et al. 1998 [8])

sous-ensemble C de V tel que :

- C est un ensemble dominant de G, et
- pour tous sommets u, v de V, u et v sont dominés par des sous-ensembles de sommets distincts (*ensembles identifiants*)

Exemple



Graphes non identifiables

Remarque

Tout graphe admet un ensemble dominant, mais pas forcément un code identifiant !

C'est le cas ssi existe deux sommets *jumeaux* u et v : $N[u] = N[v]$.

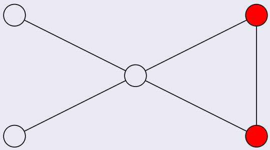
Graphes non identifiables

Remarque

Tout graphe admet un ensemble dominant, mais pas forcément un code identifiant !

C'est le cas ssi existe deux sommets *jumeaux* u et v : $N[u] = N[v]$.

Exemples

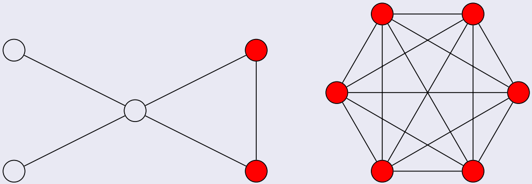


Graphes non identifiables

Remarque

Tout graphe admet un ensemble dominant, mais pas forcément un code identifiant !
C'est le cas ssi existe deux sommets *jumeaux* u et v : $N[u] = N[v]$.

Exemples



Une application à la détection d'erreurs

- réseau de processeurs modélisé par un graphe
- certains processeurs sont capables de détecter une erreur dans leur voisinage
- deux états : normal / erreur

Une application à la détection d'erreurs

- réseau de processeurs modélisé par un graphe
- certains processeurs sont capables de détecter une erreur dans leur voisinage
- deux états : normal / erreur

processeur défectueux p : détecteurs voisins de p en état d'erreur

Une application à la détection d'erreurs

- réseau de processeurs modélisé par un graphe
- certains processeurs sont capables de détecter une erreur dans leur voisinage
- deux états : normal / erreur

processeur défectueux p : détecteurs voisins de p en état d'erreur

$\longrightarrow$ si les détecteurs forment un code identifiant : identification de p possible

Une application à la détection d'erreurs

- réseau de processeurs modélisé par un graphe
- certains processeurs sont capables de détecter une erreur dans leur voisinage
- deux états : normal / erreur

processeur défectueux p : détecteurs voisins de p en état d'erreur

$\longrightarrow$ si les détecteurs forment un code identifiant : identification de p possible

But : minimiser le nombre de processeurs détecteurs nécessaires

$\longrightarrow$ déterminer la cardinalité minimum d'un code identifiant de G, $M_1(G)$

Difficulté du problème

Théorème (Cohen, Hudry, Lobstein, Zemor 2001 [4])

Etant donné un graphe G et un entier k, déterminer si $M_1(G) \leq k$ est un problème NP-complet.

Difficulté du problème

Théorème (Cohen, Hudry, Lobstein, Zemor 2001 [4])

Etant donné un graphe G et un entier k, déterminer si $M_1(G) \leq k$ est un problème NP-complet.

Théorème (Trachtenberg et al. 2006, Suomela 2007, Gravier et al. 2008 [1, 9, 5])

Etant donné un graphe G, on ne peut pas trouver une approximation de $M_1(G)$ à un facteur constant près (le problème est log-APX-complet).

Difficulté du problème

Théorème (Cohen, Hudry, Lobstein, Zemor 2001 [4])

Etant donné un graphe G et un entier k, déterminer si $M_1(G) \leq k$ est un problème NP-complet.

Théorème (Trachtenberg et al. 2006, Suomela 2007, Gravier et al. 2008 [1, 9, 5])

Etant donné un graphe G, on ne peut pas trouver une approximation de $M_1(G)$ à un facteur constant près (le problème est log-APX-complet).

$\longrightarrow$ déterminer des propriétés (bornes inférieure/supérieure)

$\longrightarrow$ étudier des familles ou classes de graphes particulières

Relation avec les ensembles dominants

$\gamma(G)$: cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G

$M_1(G)$: cardinalité minimum d'un code identifiant de G

Relation avec les ensembles dominants

$\gamma(G)$: cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G

$M_1(G)$: cardinalité minimum d'un code identifiant de G

Propriété

Soit G un graphe sans jumeaux, alors $\gamma(G) \leq M_1(G)$.

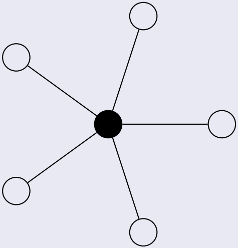
Relation avec les ensembles dominants

Mais : $\gamma(G)$ et $M_1(G)$ peuvent être très différents

Relation avec les ensembles dominants

Mais : $\gamma(G)$ et $M_1(G)$ peuvent être très différents

Exemple : étoile $K_{1,n-1}$

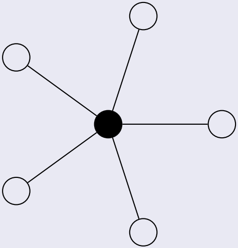


(i) $\gamma(K_{1,n-1}) = 1$

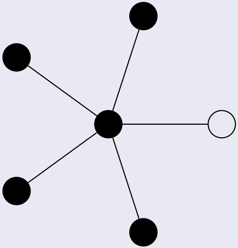
Relation avec les ensembles dominants

Mais : $\gamma(G)$ et $M_1(G)$ peuvent être très différents

Exemple : étoile $K_{1,n-1}$



(k) $\gamma(K_{1,n-1}) = 1$



(l) $M_1(K_{1,n-1}) = n-1$

Résultats sur certaines familles de graphes

Cas résolus :

- chemins et cycles (Bertrand et al. 2004, Gravier et al. 2006 [2, 7])
- arbres k-aires complets (Bertrand et al. 2005 [3]...)
- certaines grilles infinies (Karpovsky et al. 1998 [8]...)
- ...

Résultats sur certaines familles de graphes

Cas résolus :

- chemins et cycles (Bertrand et al. 2004, Gravier et al. 2006 [2, 7])
- arbres k-aires complets (Bertrand et al. 2005 [3]...)
- certaines grilles infinies (Karpovsky et al. 1998 [8]...)
- ...

Cas étudiés mais non totalement résolus :

- arbres en général (Karpovsky et al. 1998 [8]...)
- hypercube (Karpovsky et al. 1998 [8]...)
- ...

Thèmes abordés pendant le stage

- borne inférieure en fonction du degré maximum

Thèmes abordés pendant le stage

- borne inférieure en fonction du degré maximum
- deux familles de graphes : les graphe butterfly et cube-connected-cycles

Thèmes abordés pendant le stage

- borne inférieure en fonction du degré maximum
- deux familles de graphes : les graphe butterfly et cube-connected-cycles
- borne supérieure en fonction du degré maximum

Borne supérieure

Théorème (Gravier, Moncel [6])

Soit G un graphe connexe, sans jumeaux, $n \geq 3$ sommets. Alors il existe un code identifiant de cardinalité $n-1$ dans G.

Borne supérieure

Théorème (Gravier, Moncel [6])

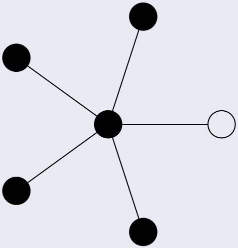
Soit G un graphe connexe, sans jumeaux, $n \geq 3$ sommets. Alors il existe un code identifiant de cardinalité $n-1$ dans G.

Théorème (Gravier, Moncel [6])

Pour tout $n \geq 3$, il existe des graphes à n sommets n'ayant pas de code identifiant plus petit que $n-1$.

Borne supérieure - exemple

Exemple : L'étoile $K_{1,n-1}$



Borne supérieure et degré maximum

Remarque

Ces graphes ont un degré maximum, noté $\Delta(G)$, élevé : $n-1$ ou $n-2$.

Borne supérieure et degré maximum

Remarque

Ces graphes ont un degré maximum, noté $\Delta(G)$, élevé : $n-1$ ou $n-2$.

Question

Quelle est la relation entre la borne supérieure et $\Delta(G)$?

Borne supérieure et degré maximum

Remarque

Ces graphes ont un degré maximum, noté $\Delta(G)$, élevé : $n-1$ ou $n-2$.

Question

Quelle est la relation entre la borne supérieure et $\Delta(G)$?

Idée

Enlever un sommet influence uniquement son voisinage (plus ou moins distant)
$\longrightarrow$ borne supérieure de la forme $n - \frac{n}{f(\Delta)}$ avec f un polynôme (f linéaire ?)

Borne supérieure et degré maximum

Pour Δ donné, on peut construire des graphes “mauvais” :

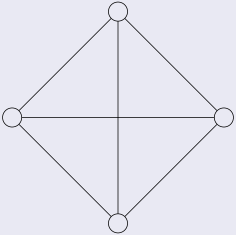
- prendre un graphe Δ-régulier, H, à m sommets
- remplacer chaque sommet par une clique de taille Δ

Borne supérieure et degré maximum

Pour Δ donné, on peut construire des graphes “mauvais” :

- prendre un graphe Δ-régulier, H, à m sommets
- remplacer chaque sommet par une clique de taille Δ

Exemple : $H = K_4$

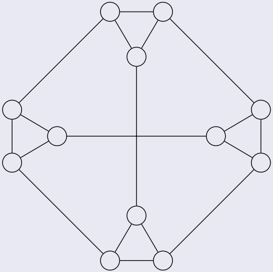


Borne supérieure et degré maximum

Pour Δ donné, on peut construire des graphes “mauvais” :

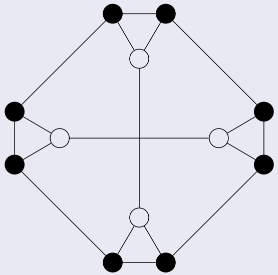
- prendre un graphe Δ-régulier, H, à m sommets
- remplacer chaque sommet par une clique de taille Δ

Exemple : $H = K_4$



- un graphe Δ-régulier, H, à m sommets
- remplacer chaque sommet par une clique de taille Δ

Exemple : $H = K_4$



Pour chaque clique, on doit au moins prendre $\Delta - 1$ sommets dans le code
$\Rightarrow$ Un code identifiant a au moins $m \cdot (\Delta - 1) = n - \frac{n}{\Delta}$ sommets

Borne supérieure : conjecture

Conjecture

Soit G un graphe connexe, sans jumeaux, $n \geq 3$ et de degré maximum Δ. Alors il existe un code identifiant de G de cardinalité $n - \frac{n}{\Delta}$.

Borne supérieure : nos résultats

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta}, \; n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)} \right\rangle$	
graphes sans triangle		
graphes de maille au moins 5		

Borne supérieure : nos résultats

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n-1}{\Delta^2} \right\rangle$
graphes sans triangle		
graphes de maille au moins 5		

Borne supérieure : nos résultats

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta},\ n - \frac{n-1}{\Delta^2} \right\rangle$
graphes sans triangle	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta - 1 + \frac{1}{\Delta}},\ n - \frac{n}{3\Delta + 3} \right\rangle$	
graphes de maille au moins 5	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta - 1 + \frac{1}{\Delta}},\ n - \frac{n}{3\Delta + 3} \right\rangle$	

Borne supérieure : nos résultats

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta}, \; n - \frac{n}{\Theta(\Delta^4)} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta}, \; n - \frac{n-1}{\Delta^2} \right\rangle$
graphes sans triangle	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta - 1 + \frac{1}{\Delta}}, \; n - \frac{n}{3\Delta + 3} \right\rangle$	$\left\langle n - \frac{n}{\frac{2\Delta}{3}}, \; n - \frac{n}{2\Delta + 2} \right\rangle$
graphes de maille au moins 5	$\left\langle n - \frac{n}{\Delta - 1 + \frac{1}{\Delta}}, \; n - \frac{n}{3\Delta + 3} \right\rangle$	

Borne supérieure : nos résultats

	graphes arbitraires	graphes Δ-réguliers
graphes arbitraires	$\left\langle n-\frac{n}{\Delta},\ n-\frac{n}{\Theta(\Delta^4)}\right\rangle$	$\left\langle n-\frac{n}{\Delta},\ n-\frac{n-1}{\Delta^2}\right\rangle$
graphes sans triangle	$\left\langle n-\frac{n}{\Delta-1+\frac{1}{\Delta}},\ n-\frac{n}{3\Delta+3}\right\rangle$	$\left\langle n-\frac{n}{\frac{2\Delta}{3}},\ n-\frac{n}{2\Delta+2}\right\rangle$
graphes de maille au moins 5	$\left\langle n-\frac{n}{\Delta-1+\frac{1}{\Delta}},\ n-\frac{n}{3\Delta+3}\right\rangle$	$\left\langle \frac{2n}{\Delta+2},\ n-\frac{n-8}{8}\right\rangle$

Conclusion

Perspectives :

- amélioration des résultats sur les graphes butterfly et cube-connected-cycles
- étude approfondie de la borne supérieure, notamment :
  - cas général
  - graphes de maille au moins 5

Bibliographie I

Tanya Y. Berger-Wolf, Moshe Laifenfeld, and Ari Trachtenberg.
Identifying codes and the set cover problem.
Proceedings of the 44th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Monticello, USA, September 2006.

Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles.
European Journal of Combinatorics, 25(7) :969–987, 2004.

Nathalie Bertrand, Irène Charon, Olivier Hudry, and Antoine Lobstein.
1-identifying codes on trees.
Australasian Journal of Combinatorics, 31 :21–35, 2005.

G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, and G. Zémor.
On identifying codes.
Vol. 56 of Proceedings of the DIMACS Workshop on Codes and Association Schemes '99, pages 97–109, 2001.

Bibliographie II

Sylvain Gravier, Ralf Klasing, and Julien Moncel.
Hardness results and approximation algorithms for identifying codes and locating-dominating codes in graphs.
Algorithmic Operations Research, 3(1) :43–50, 2008.

Sylvain Gravier and Julien Moncel.
On graphs having a $V\setminus\{x\}$ set as an identifying code.
Discrete Mathematics, 307(3-5) :432 – 434, 2007.

Sylvain Gravier, Julien Moncel, and Ahmed Semri.
Identifying codes of cycles.
European Journal of Combinatorics, 27(5) :767–776, 2006.

Mark G. Karpovsky, Krishnendu Chakrabarty, and Lev B. Levitin.
On a new class of codes for identifying vertices in graphs.
IEEE Transactions on Information Theory, 44 :599–611, 1998.

Bibliographie III

Jukka Suomela.

Approximability of identifying codes and locating–dominating codes.

Information Processing Letters, 103(1) :28–33, 2007.