

Complexité des homomorphismes de graphes signés

Florent Foucaud¹ et Reza Naserasr²

Une *signature* d'un graphe G est une assignation de signes $+$ et $-$ à ses arêtes ; l'ensemble des arêtes négatives est noté Σ . Etant donné un graphe et une signature, l'opération de *re-signage* en un sommet v consiste à changer le signe de toutes les arêtes incidentes à v . On dit que deux signatures Σ_1 et Σ_2 sont équivalentes si on peut obtenir l'une à partir de l'autre via une suite de re-signages. Un *graphe signé* est un graphe G avec une classe d'équivalence C de signatures. On le note (G, Σ) , où Σ est un membre quelconque de C .

La théorie des graphes signés a permis d'étendre et de généraliser de nombreux résultats et conjectures en théorie des graphes, en particulier, le Théorème des Quatre Couleurs et la Conjecture de Hadwiger.

Récemment, les homomorphismes de graphes ont été étudiés pour les graphes signés [3]. Etant donnés deux graphes signés (G, Σ) et (H, Σ_1) , un *homomorphisme* de (G, Σ) vers (H, Σ_1) est une fonction $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ qui préserve l'adjacence et tel qu'il existe un représentant de la classe de signatures de Σ pour lequel ϕ préserve aussi les signes des arêtes. Nous étudions le problème de décision associé à ce concept :

(H, Σ_1) -COLORATION

INSTANCE : Un graphe signé (G, Σ) .

QUESTION : (G, Σ) admet-il un homomorphisme vers (H, Σ_1) ?

Nous montrons que si H est un cycle, ce problème est polynomial si $|V(H)|$ et $|\Sigma|$ sont pairs, et NP-complet sinon. Nous définissons la notion d'*ensemble relationnel signé* et les *problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) signés*. Ces questions sont en lien avec la Conjecture de Dichotomie de Feder et Vardi [1], prouvée dans le cas des graphes par Hell et Nešetřil [2].

Références

- [1] T. Feder et M. Y. Vardi. The Computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction : a study through datalog and group theory. *SIAM J. Comput.* 28(1) :57–104, 1998.
- [2] P. Hell et J. Nešetřil. On the complexity of H-coloring. *J. Combin. Theor. Series B* 48(1) :92–110, 1990.
- [3] R. Naserasr, E. Rollova et E. Sopena. Homomorphisms of signed graphs. Manuscrit soumis, 2012.

1. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

2. LRI, Université Paris-Sud, Orsay