

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

86.54 - Redes Neuronales
1er Cuatrimestre 2022

Trabajo Práctico 1 - Hopfield '82

Alumnos:

Fernando Fraga - Legajo: 102369 - ffraga@fi.uba.ar

Profesores:

Juan Camilo Mininni

Ing. Sergio Eduardo Lew

Ing. Ricardo Veiga

Fecha de Entrega: 20/04/2022

Índice

1. Ejercicio 1	2
1.1. Enunciado	2
1.2. Red de Hopfield	2
1.3. Aprendizaje	3
1.4. Reconstrucción de imágenes alteradas	3
1.5. Estados espurios	4
1.6. Entrenamiento con 6 imágenes	5
2. Ejercicio 2	6
2.1. Enunciado	6
3. Ejercicio 3	10
3.1. Enunciado	10
4. Ejercicio 4	11
4.1. Enunciado	11

1. Ejercicio 1

1.1. Enunciado

1. Entrene una red de Hopfield '82 con un conjunto de imágenes binarias.
 - a) Verifique si la red aprendió las imágenes enseñadas.
 - b) Evalúe la evolución de la red al presentarle versiones alteradas de las imágenes aprendidas: agregado de ruido, elementos borrados o agregados.
 - c) Evalúe la existencia de estados espurios en la red: patrones inversos y combinaciones de un número impar de patrones. (Ver Spurious States, en la sección 2.2, Hertz, Krogh & Palmer, pág. 24).
 - d) Realice un entrenamiento con todas las imágenes disponibles. ¿Es capaz la red de aprender todas las imágenes? Explique.

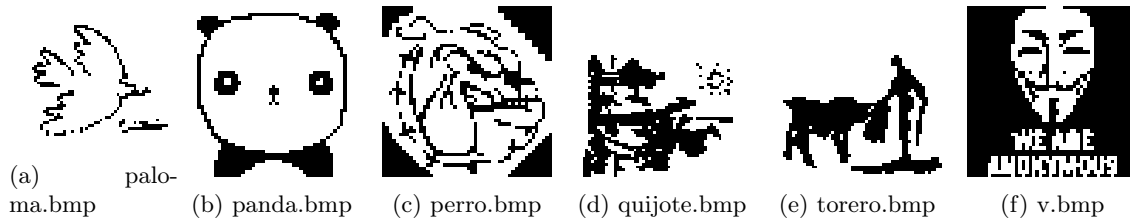


Figura 1: Imágenes binarias utilizadas para entrenar la red Hopfield82'

1.2. Red de Hopfield

A lo largo de los siguientes ejercicios se trabaja con el Modelo de Hopfield '82 el cual requiere que todas las neuronas estén completamente conectadas, menos en si mismas, utiliza el modelo de McCulloch Pitts y hacen uso de la *sinapsis Hebbiana*.

La ley de Hebb nos indica que si dos neuronas disparan juntas, sincronizadas, su nivel de conexión aumenta haciendo que la eficacia sináptica, es decir, la probabilidad de que las neuronas disparen juntas crezca. Esta eficacia va a estar representada en una matriz W de pesos sinápticos donde se acumulan las conexiones entre todos los patrones enseñados a la red. Dicha ley se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\Delta w_{ij} &= \eta s_i s_j, \quad s \in \{-1, 1\}, \forall i \neq j \\ \Delta w_{ij} &= 0, \quad \forall i = j\end{aligned}$$

Con estas ecuaciones y con $\eta = 1$, se puede calcular la matriz de pesos sinápticos W .

$$W = p_1 \cdot p_1^T + p_2 \cdot p_2^T + \dots + p_k \cdot p_k^T - kI, \quad k : \text{patrones} \quad (1)$$

La idea es que una vez entrenada un patrón, se calcule por medio de los estados del mismo, el siguiente estado por medio de la evolución natural del sistema.

$$s_{i(t+1)} = \text{sign}\left(\sum_{j \neq i} W_{ij} s_{j(t)}\right) \quad (2)$$

Además, se describe la energía del sistema

$$H(s) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j s_i W_{ij} s_j \quad (3)$$

1.3. Aprendizaje

En primer lugar, se verificó que cada imagen haya sido aprendida por nuestra red de Hopfield después de entrenarla con cada una de manera individual. Todas las imágenes fueron redimensionadas a un tamaño de 50×65

Para lograr esto, se creó la matriz con los pesos de cada conexión de par de neuronas para cada una de las imágenes. Luego se generaron patrones pseudoaleatorios para verificar que al reconstruir estos patrones el sistema converja a la imagen original con la cual se entrenó a la red.

Para la reconstrucción se sigue la manera natural de evolución del sistema que se calcula por medio de la ecuación [2] de manera asíncrona, es decir, se fueron actualizando un elemento elegido aleatoriamente por una única vez, y esta modificación afecta a las siguientes actualizaciones.

Que se haya actualizado por una única vez está relacionado que el sistema a temperatura 0, todos los cambios de estado reducen la energía del sistema acercándolo siempre así a un mínimo local.

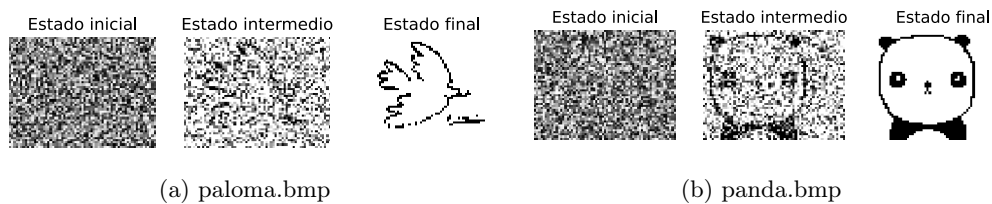


Figura 2: Reconstrucción asíncrona de las imágenes.

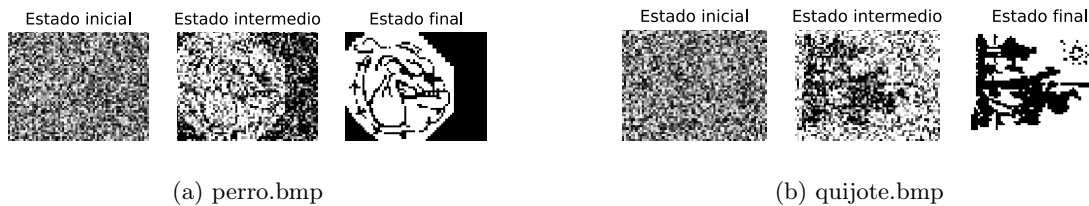


Figura 3: Reconstrucción asíncrona de las imágenes.

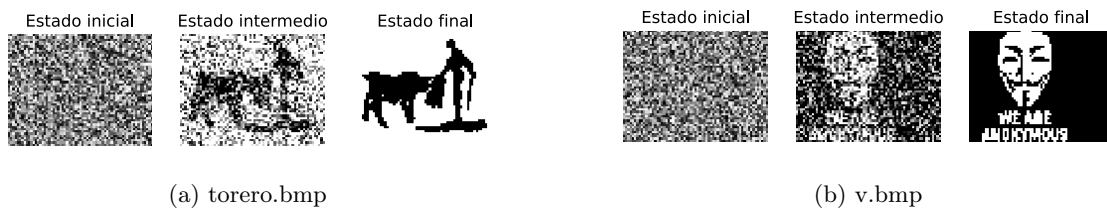


Figura 4: Reconstrucción asíncrona de las imágenes.

Efectivamente, la red aprendió cada imagen que se le expuso individualmente.

1.4. Reconstrucción de imágenes alteradas

En esta segunda parte se eligieron 3 imágenes distintas de las 6 disponibles para entrenar a la red. Cada imagen fue alterada para luego ser reconstruida asincrónicamente con la expectativa de recrear la imagen original.

Como se puede ver en las siguientes figuras, antes las distintas alteraciones, la red pudo recuperar cada patrón que se le paso como entrada de manera alterada.

Se eligió poner ruido uniforme en el borrado de la imagen para evitar favorecer alguno de los dos estados, por ejemplo, si se le rellenara con el estado en 1, la red mostraría una tendencia a recrear siempre la imagen *v.bmp* por la predominancia de dicho estado.

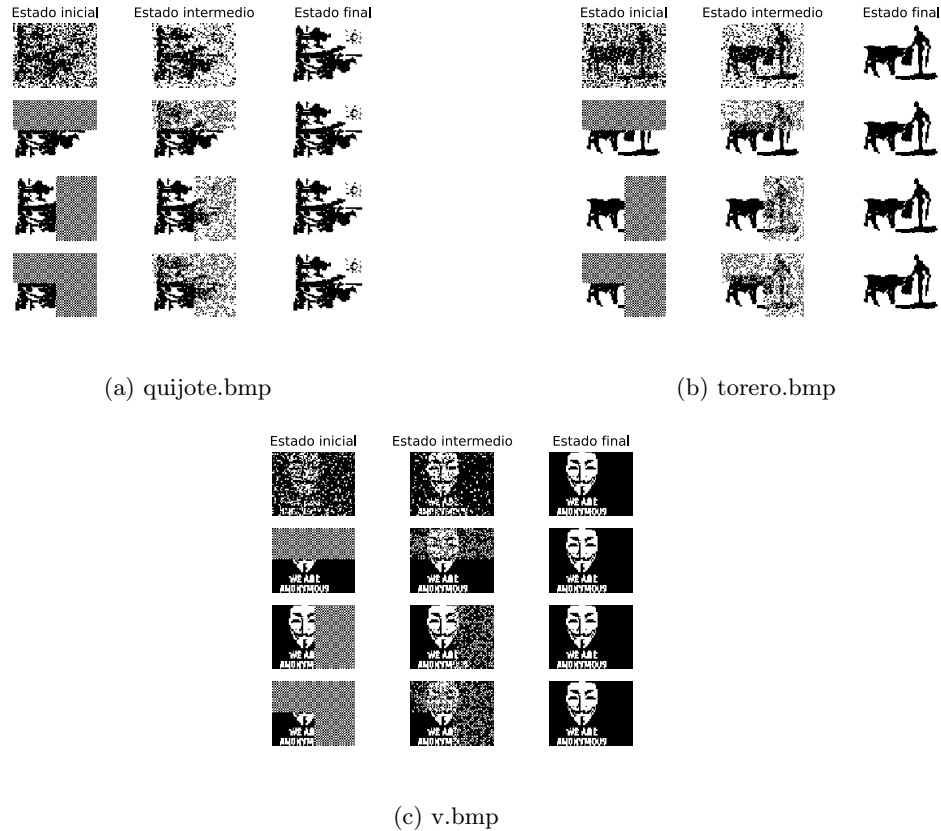


Figura 5: Reconstrucción asíncrona de las imágenes alteradas.

1.5. Estados espurios

Dados una cantidad pequeña y suficiente de patrones enseñados, se pudo demostrar que el sistema converge a puntos deseados; sin embargo, el sistema también puede converger a mínimo locales de energía que no pertenecen a ninguna imagen enseñada.

En este ejercicio se busca comprobar que para un estado inicial producto de una combinación lineal de una cantidad impar de patrones enseñados, sea efectivamente un mínimo local de energía.

Se entrenó nuevamente a la red con 3 imágenes distintas, pero esta vez se construyeron combinaciones lineales de los 3 patrones.

Se observa que los estados iniciales coinciden con los estados finales, por lo que la red tiene un mínimo local en dicho estado. Al no ser un patrón enseñado, se considera un estado espurio.

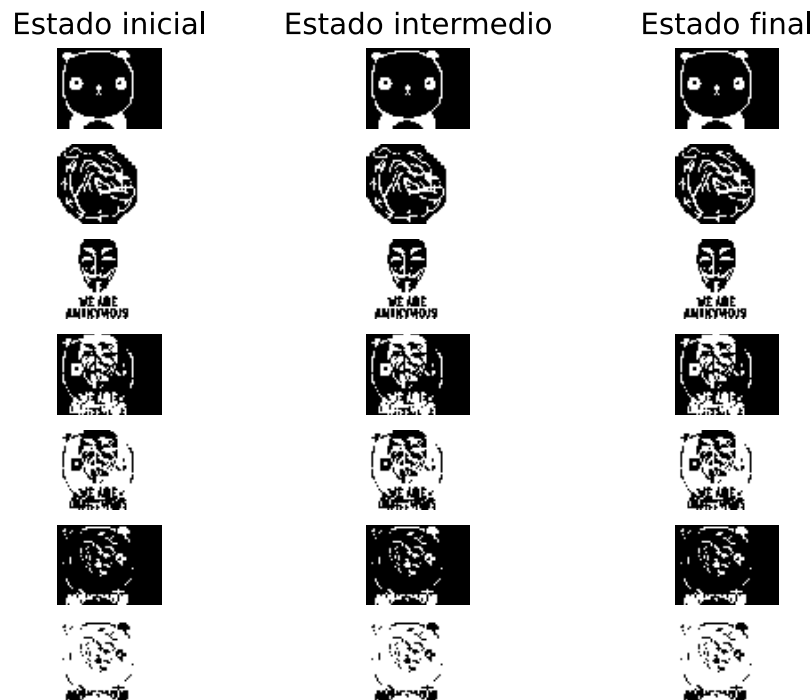


Figura 6: Verificación de estados espureos.

1.6. Entrenamiento con 6 imágenes

Por último, se entrenó a la red con todas las imágenes del trabajo práctico para comprobar si la red era capaz de aprender a las 6, es decir, reconstruirlas.

El resultado que se espera del ejercicio es demostrar que para un número grande de patrones enseñados, no existan mínimos locales para ninguno de los patrones originales.

Al igual que en los anteriores ejercicios, si dichos patrones fuesen aprendidos, serían mínimos locales de energía, por lo que al ingresarle a la red la imagen, no deberían modificarse.

Como se puede ver, en nuestra red sólo pudo aprender la imagen del `perro.bmp`, mientras que el resto tienden a un estado espurio comprobando que nuestra red no es capaz de aprender las 6 imágenes a la vez.

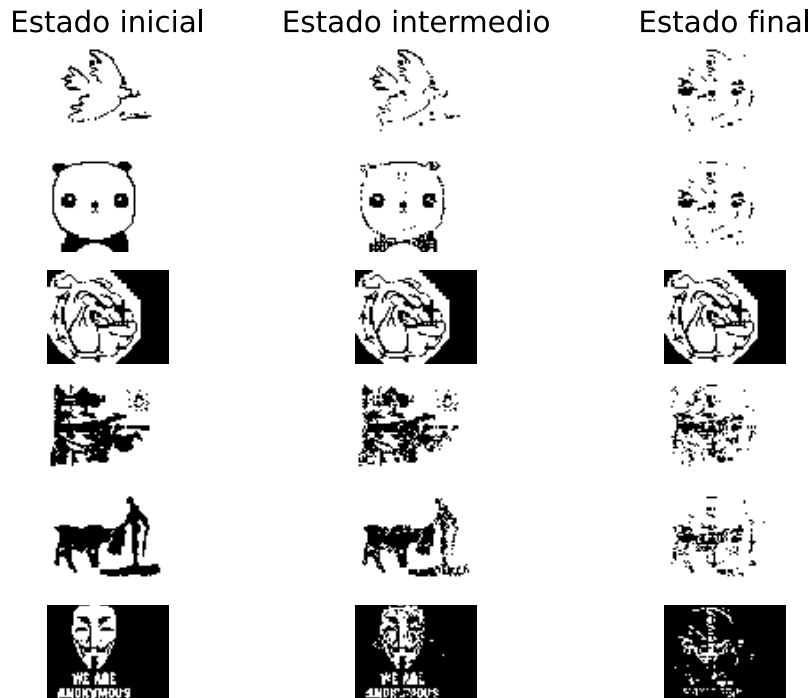


Figura 7: Resultado de aprender las 6 imágenes.

Cabe destacar que para normalizar el tamaño de las imágenes a lo largo de todo el ejercicio, se agrandaron todos los patrones a un largo de 50×65 , por lo que la cantidad de neuronas es más grande afectando así al comportamiento de la red. En caso de haber recortado las imágenes para que tengan el mismo tamaño, algunos resultados serían distintos.

2. Ejercicio 2

2.1. Enunciado

- 2 a) Comprobar estadísticamente la capacidad de la red de Hopfield '82 calculando la cantidad máxima de patrones pseudo-aleatorios aprendidos en función del tamaño de la red. Obtener experimentalmente los resultados de la siguiente tabla (los valores de la tabla corresponden a una iteración con actualización sincrónica).
- b) Analice cómo cambia la capacidad de una red en función de la correlación entre patrones

La capacidad de almacenamiento de la red es un parámetro que nos indica cuantas imágenes podemos almacenar en una red de N neuronas, reconstruyendo con una probabilidad de error aceptada.

$$C_i^\nu = -\xi_i^\nu \frac{1}{N} \sum_{\nu} \sum_{\mu \neq \nu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^\nu \quad (4)$$

Si consideramos patrones aleatorios, con la misma probabilidad de tener un elemento en 1 como en -1 y considerando un numero muy grande de N neuronas y una cantidad de patrones p grande

comparado a 1, la probabilidad de error tiene una distribución binomial con media 0 y varianza $\sigma^2 = p/N$, la cual puede ser aproximada a una distribución gaussiana gracias a que Np se asume muy grande.

$$P_{error} = P(C_i^v > 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5)$$

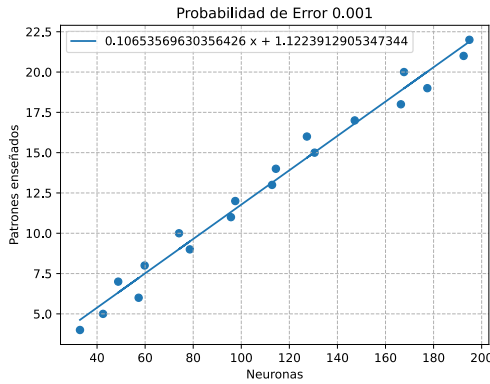
La Tabla [4] muestra valores de p/N que se requieren para obtener distintos valores de P_{error} .

El objetivo es comprobar estadísticamente dicha tabla y para eso, se busca la cantidad de neuronas necesarias que lograban que el error al reconstruir patrones pseudoaleatorios sea menor que a la probabilidad de error para distinta cantidad de imágenes.

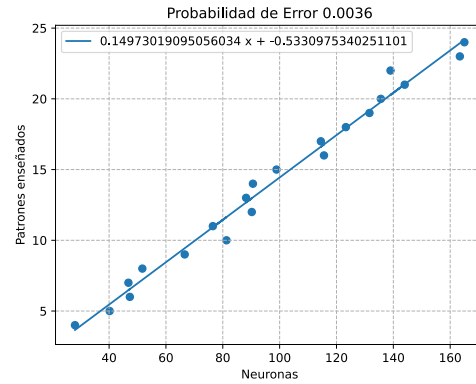
Se construyó la matriz de pesos sinápticos con patrones pseudoaleatorias y luego con las mismas se intentó reconstruirlas para poder obtener el error. Dicho error fue calculado como la diferencia encontradas entre el patrón enseñado y el patrón una vez reconstruido.

P_{error}	p_{max}/N
0.001	0.105
0.0036	0.138
0.01	0.185
0.05	0.37
0.1	0.61

Tabla 1: Capacidades.

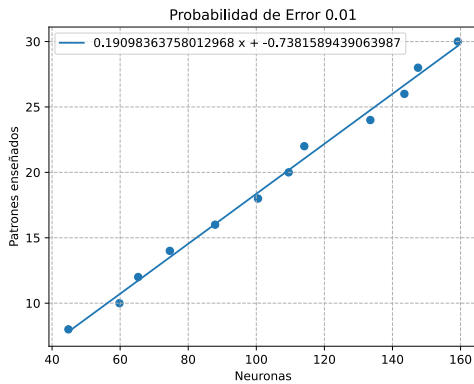
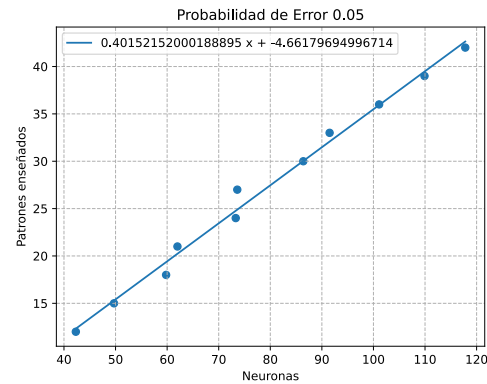
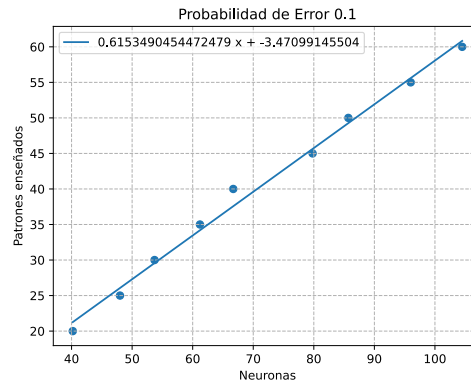


(a) $P_{error} = 0,001$



(b) $P_{error} = 0,0036$

Figura 8: Gráficas, cantidad de imágenes aprendidas vs el número de neuronas para cada P_{error}

(a) $P_{error} = 0,01$ (b) $P_{error} = 0,05$ (c) $P_{error} = 0,1$ Figura 9: Gráficas, cantidad de imágenes aprendidas vs el número de neuronas para cada P_{error}

En las Figuras [??] y [??], se puede observar que las pendientes de las rectas son cercanas a las capacidades expuestas en la tabla.

P_{error}	Capacidad	Capacidad Estimada	Diferencia
0.001	0.105	0.106	0.95 %
0.0036	0.138	0.149	8 %
0.01	0.185	0.190	2.7 %
0.05	0.37	0.40	8.1 %
0.1	0.61	0.61	0 %

Tabla 2: Comparación de los resultados obtenidos.

Luego, se realizó el cálculo de la capacidad para un set de patrones generados con distintas correlación para visualizar el efecto de la correlación sobre la capacidad de almacenamiento de la red

Utilizando una matriz de covarianza para la creación de dichos patrones pseudoaleatorios, donde en cada iteración se les fue aumentando la covarianza cruzada de los elementos, se obtuvieron los siguientes resultados.

Covarianza	Capacidad
------------	-----------

Tabla 3: Variación de la capacidad calculada en función a la covarianza cruzada entre elementos de la matriz de sinapsis.

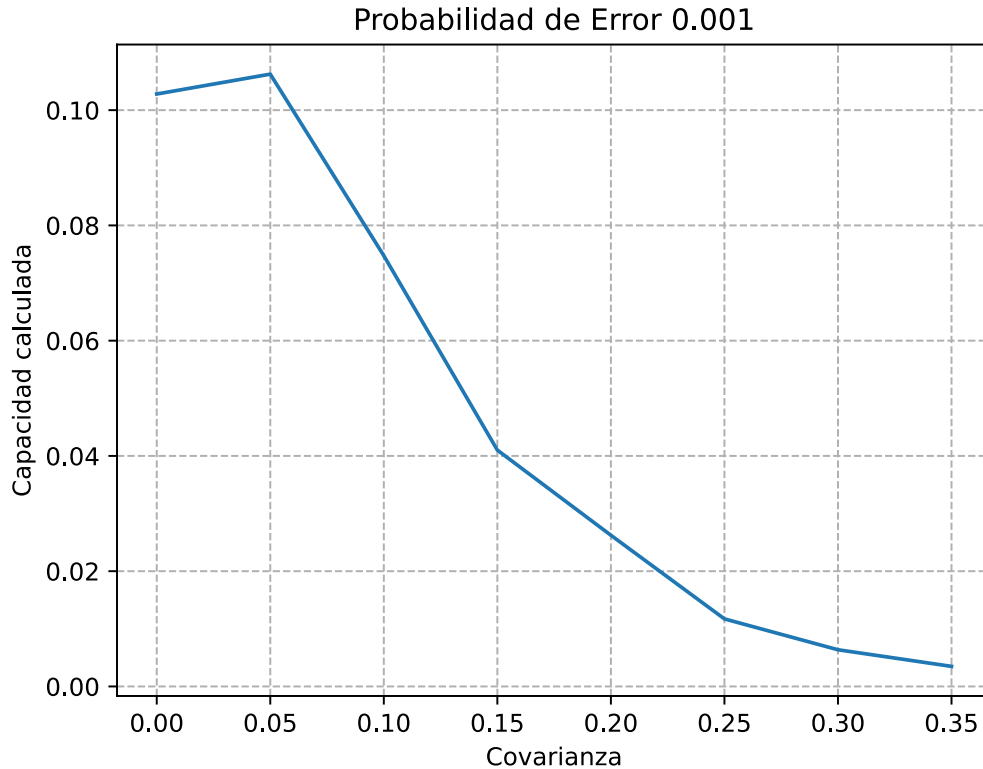


Figura 10: Resultado de aprender las 6 imágenes.

El resultado era el esperado, ya que al aumentar la correlación entre los patrones, las imágenes se encuentran más difíciles de aprender sin errores por su similaridad.

Covarianza	Capacidad Estimada	Diferencia [%]
0	0.10280244	2.85
0.05	0.10624907	0.95
0.1	0.07474665	29.5
0.15	0.04101304	60.9
0.2	0.02623828	75.2
0.25	0.01172262	89.5
0.3	0.00636576	94.2
0.35	0.00348393	96.7

Tabla 4: Resultados obtenidos variando la covarianza.

Cabe aclarar que no pude realizar un barrido completo de las covarianzas ya que ya que la tendencia de la capacidad es notoria y computacionalmente el algoritmo se relentizaba considerablemente a medida que aumentaba la covarianza ya que cada vez se necesitaban más neuronas

para aprender las imágenes, por lo tanto, más poder de cómputo.

3. Ejercicio 3

3.1. Enunciado

3 Implemente una red de Hopfield '82 que aprenda patrones pseudo-aleatorios y estudie qué sucede con los patrones aprendidos cuando algunas interconexiones son eliminadas al azar.

- ¿Cómo cambia el error en función del porcentaje de sinapsis eliminadas?
- ¿Cómo cambia la capacidad en función del porcentaje de sinapsis eliminadas?

En este ejercicio se busca observar como altera el comportamiento de la red si comenzamos a olvidar interconexiones entre las neuronas de manera aleatoria, es decir, setear en 0 un porcentaje de los pesos sinápticos.

El primer comportamiento fue el error generado al cambiar el porcentaje de los pesos olvidados. El resultado fue lo esperado, ya que cuando nos acercamos a un porcentaje grande de interconexiones olvidadas, el error se dispara a 0,5 ya que las probabilidades de acertarle aleatoriamente a los estados que son equiprobables es $\frac{1}{2}$.

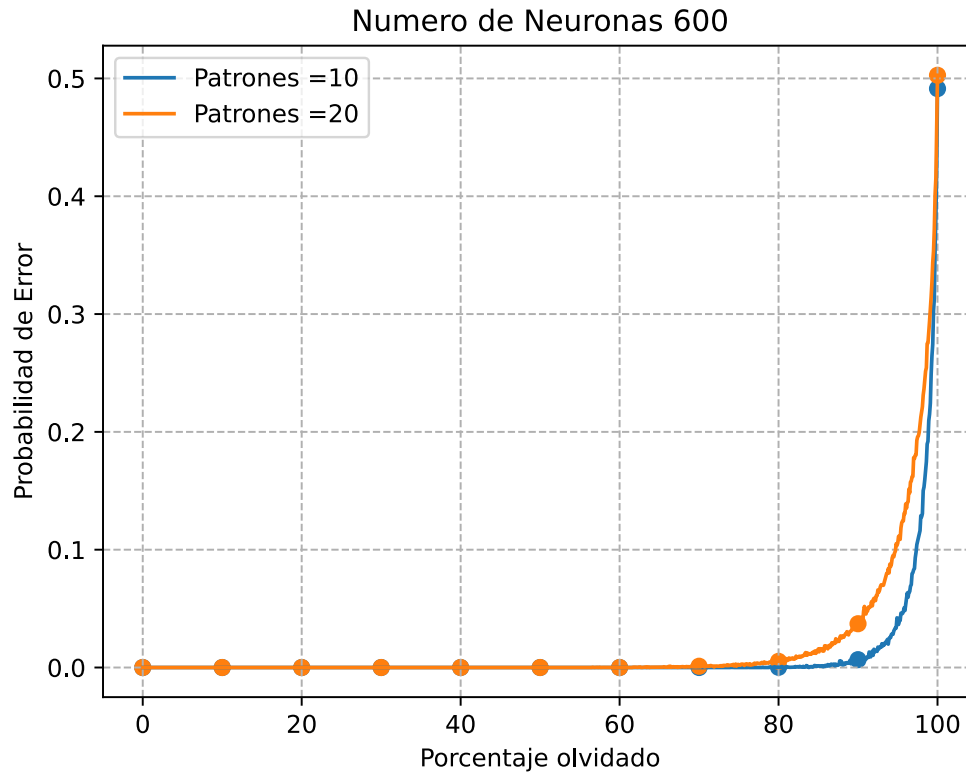


Figura 11: Dipolos en 1 dimensión.

El segundo comportamiento fue la capacidad según el porcentaje de las interconexiones borradas. En este caso observamos que la capacidad disminuye a medida que olvidamos interconexiones, debido a la imposibilidad de la red de poder recrear las imágenes correctamente, el error aumenta

considerablemente, generando que se requieran muchas más neuronas para que aleatoriamente puedan acertar con los estados y así alcanzar el error aceptado.

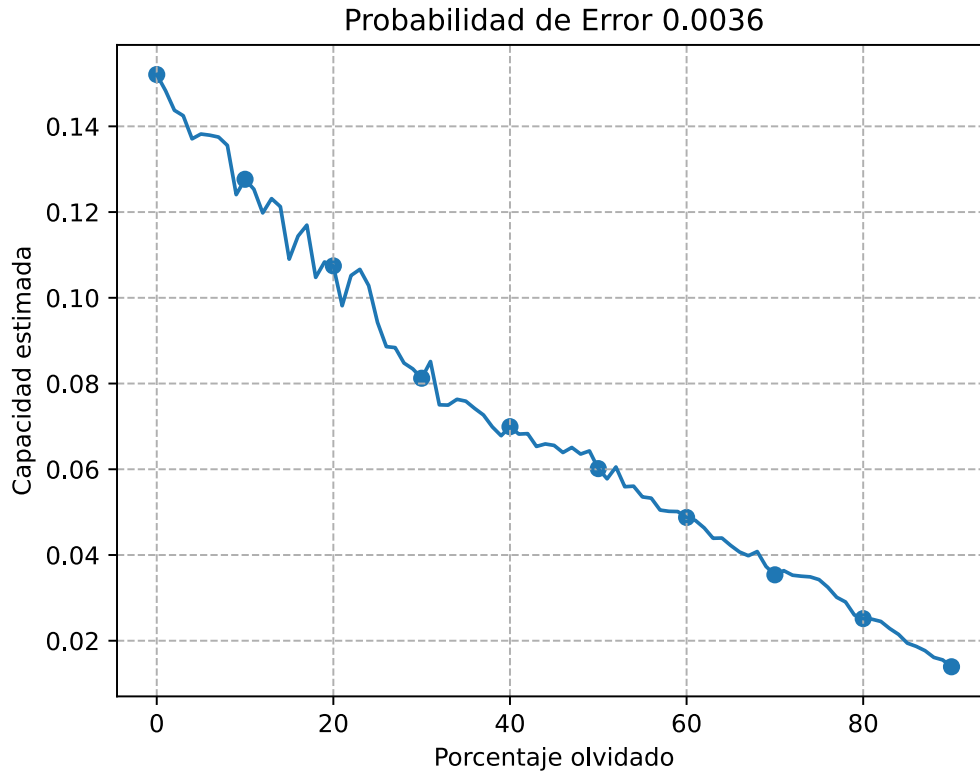


Figura 12: Dipolos en 1 dimensión.

4. Ejercicio 4

4.1. Enunciado

1. Simular un modelo de Ising en una y dos dimensiones. Encontrar la temperatura crítica para ambos casos.

En este caso se realizó un modelo de Ising, en el cual se crea un arreglo de dipolos y la matriz de pesos sinápticos muestra como están conectados los dipolos. A diferencia de la Red de Hopfield, la red no está 100 % conectada si no que solamente se conecta con los spines que son vecinos.

El experimento consiste en realizar un promedio de los estados de cada dipolo a medida que se reduce lentamente la temperatura de la red.

La temperatura afecta al sistema de manera que la probabilidad de que se encuentren en un estado de energía H_e es proporcional a $e^{H_e/kT}$ siendo k la constante de Boltzmann, que a fines prácticos tendrá valor 1.

Cuando la temperatura es 0, todo cambio de estado aceptable produce una contribución de energía es negativa, pero al aumentar la temperatura, existen cambios aceptables que hacen que la energía aumente. Por lo que ahora nuestra regla de aceptación de cambios deja de ser determinista, y debemos aceptar los cambios que varíen la energía positivamente con una cierta probabilidad.

Para el cálculo de la probabilidad se busca la relación entre la probabilidad entre dos estados de energía distintos

$$\frac{P_e}{P_r} = e^{-\frac{\Delta H}{T}}$$

Con la probabilidad calculada, se lanzará un experimento Bernoulli y se aceptará un cambio en caso de que de 1 dicho experimento.

En este ejercicio se espera observar que a medida que uno reduce la temperatura, los dipolos comienzan a sincronizarse de manera que vayan cambiando de manera más uniforme hasta que todas terminen en el mismo estado, lo cual podemos ver como una *magnetización* de la red.

Se realizó el experimento para los dipolos en un arreglo de 1 dimensión y en 2 dimensiones.

En el caso de la primera dimensión, nunca llega a una magnetización completa ya que para una dimensión, en un caso de condiciones termodinámicas ideales, no es posible. Sin embargo, vemos un sistema que no llega a magnetizarse completamente, pero se observa como el promedio de los estados aumenta, dando a entender que existen una predominancia mayor de dipolos en un estado. Esto se debe a que computacionalmente la cantidad de spines son finitos, permitiendo que se visualizé una cierta tendencia de que un grupo de dipolos comience a magnetizarse.

En el experimento con el arreglo de dipolos de dos dimensiones, se pudo observar claramente que la temperatura de Curie se encuentra entre 2 y 3 grados, ya que es en el momento en el cual los dipolos comienzan a magnetizarse.

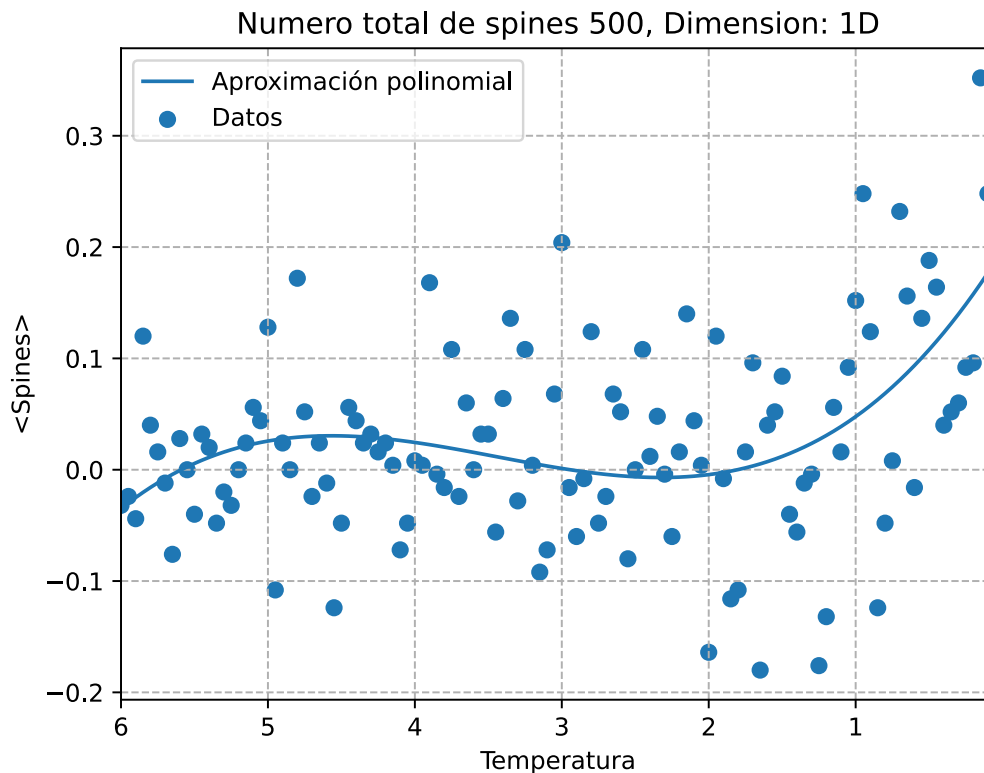


Figura 13: Dipolos en 1 dimensión.

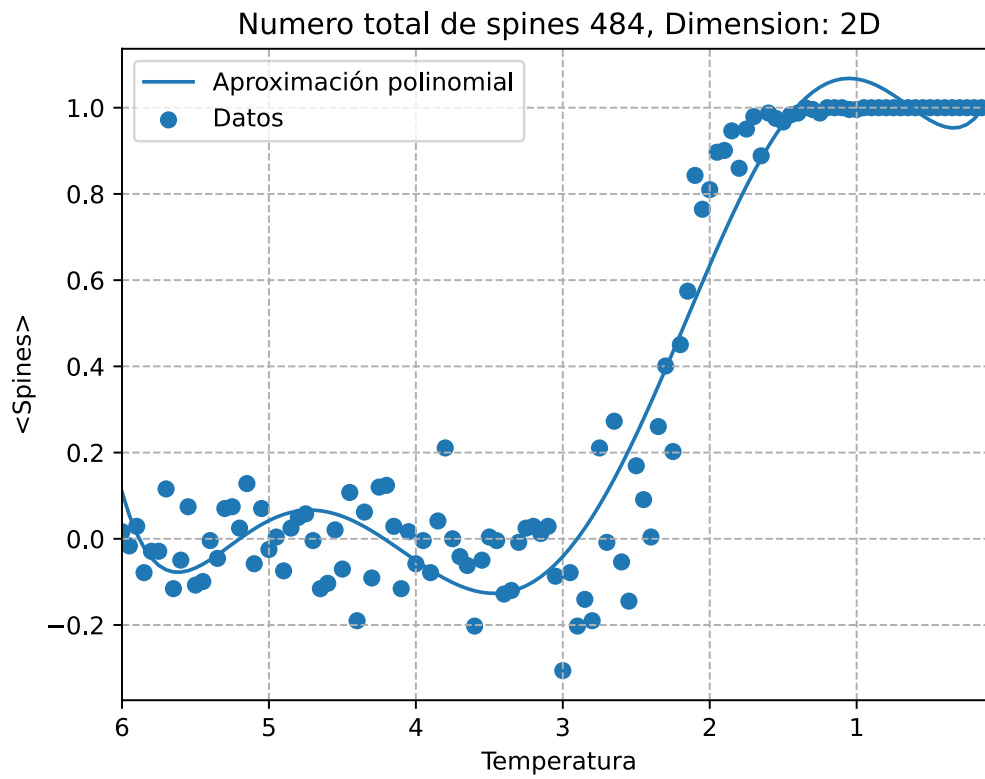


Figura 14: Dipolos en 2 dimensiones.