INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Apuntes de Cálculo 3

Imparte la Dra. Laura Roció Gózalez

Autor:
Francisco Alexis Franco Camacho

Febrero 2023

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo

Cálculo diferencial en varias variables de manera teórica y con aplicaciones.

1.2. Temario

- R^n como espacio euclidiano
- Norma, distancia y desigualdad del triangulo.
- Conjuntos abiertos, cerrados.
- Conexidad.
- Sucesiones en R^n.
- Convergencia, compacidad.
- Teorema de Bolzano-weirstrass.*
- Teorema de Heine-Borel.* *Propiedades de compacidad.
- Limite de transformaciones.
- Continuidad de transformación.
- Continuidad de inversa de transformación.
- La diferencial de una transformación.
- Transformaciones diferenciales.
- Regla de la cadena.
- Derivada direccional.

- Funciones clase C^n.
- Teorema de función inversa y Teorema de función implícita.
- Diferenciales de orden superior.
- Teorema de Taylor. Aplicaciones a máximos y mínimos.

1.3. Bibliografía

- Elementary Classical Analysis-Marsden and Hoffman.
- Mathematical Analysis, Apostol.
- Analysis on manifolds, Munkres.
- Mathematical Analysis, Rudin.*
- Calculus on manifolds, Spivak.* *Densos,

1.4. Evaluación

- Primer Parcial 25 %.
- Segundo Parcial 25 %.
- Tercer Parcial 25 %.
- Quizes 25 %.

1.4.1. Quizes

- Son de opción múltiple.
- Son sorpresa.
- Se elimina el Quiz que tenga la calificación mas baja.
- Se saca promedio al final del semestre.

Capítulo 2

R^n como espacio euclidiano.

2.1. El espacio R^n.

Se define el n-espacio euclidiano de n-tuplas en R como:

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \;|\; x_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$$

Es decir:

$$R^n = R * R * R * ... * R$$

Sea:

$$\overrightarrow{x} \in R^n$$

Entonces: $\overrightarrow{x}$ es un punto en R^n o un vector en el R-espacio vectorial.

2.1.1. Definición de la suma y multiplicación por escalar.

Sea:

$$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

$$\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$$

$$\alpha \in R$$

Se define la suma:

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Se define la multiplicación por escalar:

$$\alpha\overrightarrow{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

2.1.2. Tarea

Demostrar que $(R^n, +, *)$ es un R-espacio vectorial de dimensión n.

Demostración de que R^n es un espacio vectorial

Sean: $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in R^n$
$\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
$\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$
$\overrightarrow{z} = (z_1, z_2, ..., z_n)$

1. $\forall \; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^n \longrightarrow \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in R^n$
   Demostración:
   Como cada una de las entradas son números reales:
   $\longrightarrow (x_i + y_i) \in R, i = 1, 2, ..., n$
   $\longrightarrow (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \in R^n$

2. $\forall \; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^n \longrightarrow \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
   Demostración:
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)$
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
   Por asociatividad en los reales
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n)$
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$

3. $\forall \; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in R^n \longrightarrow (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
   Demostración:
   $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) + (z_1, z_2, ..., z_n)$
   $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, ..., x_n + y_n + z_n)$
   $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, ..., z_n)$
   $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$

4. $\exists \; \overrightarrow{0} \in R^n$ tal que $\forall \overrightarrow{x} \in R^n \longrightarrow \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{x}$
   Demostración:
   Sea $\overrightarrow{0} = (0, 0, ..., 0)$
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, ..., x_n + 0)$
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{x}$

5. $\forall \; \overrightarrow{x} \in R^n \; \exists \; -\overrightarrow{x} \in R^n \; talque \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \; Existenciadeinversos$
   Demostración:
   $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = (x_1, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$
   $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), ..., x_n + (-x_n))$
   $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = (0, 0, ..., 0)$
   $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$

6. Sea $\alpha, \beta \in R$
   $\forall \; \overrightarrow{x} \in R^n \; y \; \alpha \in R \longrightarrow \alpha \overrightarrow{x} \in R^n$
   Demostración:
   $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n), \;\; x_i \in R, \;\; i = 1, 2, ..., n$
   $\alpha x_i \in R, \;\; i = 1, 2, ..., n$

$\alpha\overrightarrow{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$
$\longrightarrow \alpha\overrightarrow{x} \in R^n$

7. $\forall\overrightarrow{x} \in R^n \longrightarrow 1 * \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
   Demostración:
   $1 * \overrightarrow{x} = 1 * (x_1, ..., x_n)$
   $1 * \overrightarrow{x} = (1 * x_1, 1 * x_2, ..., 1 * x_n)$
   $1 * \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
   $1 * \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

8. $\forall\alpha, \beta \in R \;\; y \;\; \overrightarrow{x} \in R^n \longrightarrow \alpha(\beta\overrightarrow{x}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$
   Demostración:
   $\alpha(\beta\overrightarrow{x}) = \alpha(\beta(x_1, x_2, ..., x_n))$
   $= (\alpha(\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n))$
   $= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, ..., (\alpha\beta)x_n)$
   $= (\alpha\beta)(x_1, ..., x_n)$
   $= (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$

9. $\forall\alpha, \beta \in R \;\; y \;\; \overrightarrow{x} \in R^n \longrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}$
   Demostración:
   $(\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = (\alpha + \beta)(x_1, ..., x_n)$
   $= ((\alpha + \beta)x_1, ..., (\alpha + \beta)x_n)$
   $= (\alpha x_1 + \beta x_2, ..., \alpha x_n + \beta x_n)$
   $= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) + (\beta x_1, ..., \beta x_n)$
   $= \alpha(x_1, ..., x_n) + \beta(x_1, ...x_n)$
   $= \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}$

10. $\forall\alpha \in R \;\; y \;\; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^n \longrightarrow \alpha(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha\overrightarrow{x} + \alpha\overrightarrow{y}$
    Demostración:
    $\alpha(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha((x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n))$
    $= \alpha((x_1 + y_1), ..., (x_n + y_n))$
    $= (\alpha(x_1 + y_1), ..., \alpha(x_n + y_n))$
    $= ((\alpha x_1 + \alpha y_1), ..., (\alpha x_n + \alpha y_n))$
    $= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) + (\alpha y_1, ..., \alpha y_n)$
    $= \alpha(x_1, ..., x_n) + \alpha(y_1, ..., y_n)$
    $= \alpha\overrightarrow{x} + \alpha\overrightarrow{y}$

Demostración de que su dimensión es n

Definición:
Sea $\overrightarrow{V} un \;\; F - e.v.$ con base finita $\beta \longrightarrow \;\; dim(V) = |\beta|$
R^n tiene como base canonica: $\beta = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)\}$
$\longrightarrow dim(R^n) = n$

2.2. Recordatorio/Repaso

En R^2 teniamos nociones de distancia, Norma y producto interno.

Norma

$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, es decir la longitud del vector.

Distancia

$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y}\| = \sqrt{(x_1 * y_1)^2 + (x_2 * y_2)^2}$ Es la distancia entre dos vectores.

Producto interno

$< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= x_1 y_1 + x_2 y_2$
$< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\| \cos\theta$
El producto interno nos da informacion sobre el angulo entre dos vectore:
si $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$ y $\|\overrightarrow{x}\| \neq 0$
$\|\overrightarrow{y}\| \neq 0$
Entonces los vectores son ortoganales.

Propiedades del producto punto

1. $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} * \overrightarrow{x}$

2. $(\alpha \overrightarrow{x}) * \overrightarrow{y} = \alpha(\overrightarrow{x} * \overrightarrow{y})$

3. $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2}) = \overrightarrow{x} * \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x} * \overrightarrow{y_2}$

4. $\overrightarrow{x} * \overrightarrow{x} \geq 0; \overrightarrow{x} * \overrightarrow{x} = 0 \longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

Observaciones

- Es posible definir otras normas, distancias o productos internos.

- Si tienes una norma puedes definir una distancia.

- Si tienes un producto interno puedes definir una norma.

¿Por que la ortogonalidad es importante?
Por que nos permite establecer bases sencillas de manipular.

Ejemplo

Sea $B = \{\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}\}$ una base ortogonal y unitaria de R^2

- B genera a R^2 (U_1 y U_2 son linealmente independientes), eso de la definicion de una base ortogonal.
- $\|\overrightarrow{U_1}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1} \rangle} = 1$
- $\|\overrightarrow{U_2}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_2} \rangle} = 1$

Sea $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2) \in R^2,\ \ \exists\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in R^2$ tal que $\overrightarrow{X} = \alpha_1 \overrightarrow{U_1} + \alpha_2 \overrightarrow{U_2}$
Por un lado considerar el Producto interno con $\overrightarrow{U_1}$
$\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U_1} \rangle = \langle \alpha_1 \overrightarrow{U_1} + \alpha_2 \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_1} \rangle$
$\qquad = \alpha_1 \langle \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_1} \rangle + \alpha_2 \langle \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_1} \rangle$
$\longrightarrow \quad \alpha_1 = \langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U_1} \rangle$
De manera similar:
$\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U_2} \rangle = \alpha_2$
Entonces podemos decir que:
$\overrightarrow{X} = \langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U_1} \rangle \overrightarrow{U_1} + \langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{U_2} \rangle \overrightarrow{U_2}$

El espacio Euclidiano R^n

Producto interno.

Definición: Se define el prodcuto interno entre $\overrightarrow{X}$ y $\overrightarrow{Y} \in R^n$ como:

$$R^n * R^n \longmapsto R$$

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{Y}) \longmapsto \ < \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} > := \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

Con:

$$\overrightarrow{X} = (x_1, ..., x_n)$$
$$\overrightarrow{Y} = (y_1, ..., y_n)$$

Intuitivamente: El producto interno nos da informacion de la nocion de ortogonalidad.

Teorema: Propiedades del Producto interno.

Sean $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \ \in R^n$, $\alpha \in R$

1. $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} > = < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} >$
   Demostración:
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} > = < (x_1, ..., x_n), (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) >$
   $\qquad = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i + x_i z_n)$
   $\qquad = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$
   $\qquad = < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} >$

2. $< \overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{y} >= \alpha < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< \alpha\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$
   Demostración:
   $< \overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{y} >=< (x_1, ..., x_n), \alpha(y_1, ..., y_n) >$
   $=< (x_1, ..., x_n), (\alpha y_1, ..., \alpha y_n) >$
   $= \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
   $= \alpha < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$
   Se puede probar facilmente la tercera igualdad, nota: Es mas facil usar la segunda igualdad previamente probada.

3. $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} >$
   Demostración:
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >$
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} >$

4. $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >\geq 0$ y $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >= 0 \longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
   Demostración:
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$
   $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} >= 0 \longleftrightarrow x_i = 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n$

Observación:

Usando Las Propiedades 1 y 3:
$< \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} >=< \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} > + < \overrightarrow{z}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} > + < \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} >$

Norma euclidiana

Se define la norma euclidiana de $\overrightarrow{x} \in R^n$, con $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$.
Como una función:

$$\| \cdot \| : R^n \mapsto R^+ \cup \{0\}$$

$$\overrightarrow{x} \mapsto \|\overrightarrow{x}\| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \rangle}$$

Intuitivamente: La norma euclidiana nos da informacion de la longitud del vector.

Teorema: Propiedades de la norma euclidiana.

Sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in R^n$, $\alpha \in R$ con $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$
Entonces:

1. $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ y $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

2. $\|\alpha\overrightarrow{x}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{x}\|$

3. Cauchy-Schwarz $| < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > | \leq \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|$

4. Desigualdad triangular $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$

Distancia euclidiana

Capítulo 3

Resultados

3.1. Simulación de resultados

3.1.1. Suposiciones

3.1.2. Modelos

3.2. Resultados preliminares

3.3. Resultados postprocesados

3.3.1. Valores atípicos

3.3.2. Correlaciones

Capítulo 4

Conclusiones