**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

Escuela Superior de Física y Matemáticas

# Apuntes de Álgebra 3

*Imparte el Dr. Joel Cruz Ramírez*

Autor:
Francisco Alexis Franco Camacho

Febrero 2023

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Objetivo

No dieron objetivo

## 1.2. Temario

- Transformaciones ortogonales.
- Funciones lineales y operadores adjuntos.
- Productos interno y operadores positivos.

## 1.3. Bibliografía

- Elements of linearl Algebra and matrix theory Moore; Mc. Graw Hill.
- Elements of linearl Algebra L.J Paige and J.D Swift; Blaisdell.
- Lectures on Linear Algebra Gelfand; Interscience.
- Foundations of linearl Algebra A.I Malcer; Freeman.* *Densos,

## 1.4. Evaluación

- Primer Parcial 33 %.
- Segundo Parcial 33 %.
- Tercer Parcial 33 %.

# Capítulo 2

# Transformaciones Ortogonales

## 2.1. Operadores Ortogonales

Definición: Un operador lineal $T$ en un espacio euclidiano $V$ es Ortogonal si $(T\alpha, T\alpha) = (\alpha, \alpha)$ para cualquier $\alpha \in V$.
Esto es un Operador lineal Ortogonal si se conserva la distancia de todo vector en el espacio.

### 2.1.1. Ejemplo/Ejercicio.

Sea: $T : R^2 \longrightarrow R^2$ Ortogonal, Transformación lineal.
$R^2$ Con el producto estándar para cada $X \in R^2$
Sea $(x, y) \in R^2$ y $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$
Operando Producto Interno:

$$\begin{aligned}
(T(x,y), T(x,y)) &= ((ax + by, cx + dy), (ax + by, cx + dy)) \\
&= (ax + by)(ax + by) + (cx + dy)(cx + dy) \\
&= a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2 \\
&= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 \\
&= x^2 + y^2 \Longleftrightarrow a^2 + c^2 = 1 \\
&\Longleftrightarrow 2(ab + cd) = 0 \\
&\Longleftrightarrow b^2 + d^2 = 1
\end{aligned}$$

Tomamos la base canónica $(1, 0), (0, 1)$
Entonces
$T(1, 0) = (a * 1 + b * 0, c * 1 + d * 0) = (a, c)$
$T(0, 1) = (a * 0 + b * 1, c * 0 + d * 1) = (b, d)$
$((1, 0), (0, 1)) = 0$ es decir que es ortogonal
Por lo tanto:
$((1, 0), (0, 1)) = (T(1, 0), T(0, 1)) = ((a, c), (b, d)) = ab + cd = 0$
El análisis siguiente lo haremos por casos:

1. Cuando $ab + cd = 0$ y al menos a o b son 0 lo que implica que c o d son 0.
   $-cd = ab$

   a) Caso: b=0 y d=0: $\longrightarrow b^2 + d^2 = 1$ sustituyendo $0^2 + d^2 = 1$ lo que es una incongruencia, por lo tanto descartamos este caso.

   b) Caso: b=0 y c=0:
      $\longrightarrow a^2 + c^2 = 1$ sustituyendo $\longrightarrow a^2 + 0^2 = 1 \longrightarrow a^2 = 1 \longrightarrow a = \pm 1$

      $\longrightarrow b^2 + d^2 = 1$ sustituyendo $\longrightarrow 0^2 + d^2 = 1 \longrightarrow d^2 = 1 \longrightarrow d = \pm 1$
      Entonces Usando esto en la transformación lineal:

      1) a=1, b=0, c=0, d=1:
         $T(x, y) = (x + 0y, 0x + y) = (x, y)$ entonces es un operador ortogonal.
      2) a=-1, b=0, c=0, d=1:
         $T(x, y) = (-x, y)$ entonces no es un operador ortogonal.
      3) a=1, b=0, c=0, d=-1:
         $T(x, y) = (x, -y)$ entonces no es un operador ortogonal.
      4) a=-1, b=0, c=0, d=-1:
         $T(x, y) = (-x, -y)$ entonces no es un operador ortogonal.

2. Cuando $ab + cd = 0$ pero a, b, c ,d distintos de 0
   $\longrightarrow -\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \lambda$
   $-\frac{a}{c} = \lambda \longrightarrow a = -\lambda c$
   $d = \lambda b$
   Sustituimos:
   $a^2 + c^2 = 1 \longrightarrow \lambda^2 c^2 + c^2 = 1 \longrightarrow c^2(\lambda^2 + 1) = 1$
   $b^2 + d^2 = 1 \longrightarrow b^2 + \lambda^2 b^2 = 1 \longrightarrow b^2(1 + \lambda^2) = 1$
   Dividimos las expresiones divididas tal que así:
   $\frac{c^2}{b^2} = 1 \longrightarrow c^2 = b^2 \longrightarrow b = \pm c$

   a) b=c:
      $ab + cd = 0$ sustituyendo: $a(c) + cd = 0 \longrightarrow a = -d$
      $T(x, y) = (ax + by, bx - ay)$

   b) b=-c:
      $ab + cd = 0$ sustituyendo: $a(-c) + cd = 0 \longrightarrow a = d$
      $T(x, y) = (ax - by, -bx + ay)$

3. Podemos obtener también la representación matricial:

$$[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

### 2.1.2. Tarea

Demostrar que $(R^n, +, *)$ es un R-espacio vectorial de dimensión n.

#### Demostración de que $R^n$ es un espacio vectorial

Sean: $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in R^n$

#### Demostración de que su dimensión es n

## 2.2. Hipótesis

# Capítulo 3

# Resultados

## 3.1. Simulación de resultados

### 3.1.1. Suposiciones

### 3.1.2. Modelos

## 3.2. Resultados preliminares

## 3.3. Resultados postprocesados

### 3.3.1. Valores atípicos

### 3.3.2. Correlaciones

# Capítulo 4

# Conclusiones