

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

## APUNTES DE CÁLCULO 3

*Imparte la Dra. Laura Roció Gózález*

Autor:  
Francisco Alexis Franco Camacho

Febrero 2023



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivo . . . . .	5
1.2. Temario . . . . .	5
1.3. Bibliografía . . . . .	6
1.4. Evaluación . . . . .	6
1.4.1. Quizes . . . . .	6
<b>2. <math>R^n</math> como espacio euclidiano.</b>	<b>7</b>
2.1. El espacio $R^n$ . . . . .	7
2.1.1. Definición de la suma y multiplicación por escalar. . . . .	7
2.1.2. Tarea . . . . .	7
2.2. Recordatorio/Repaso . . . . .	10
<b>3. Resultados</b>	<b>11</b>
3.1. Simulación de resultados . . . . .	11
3.1.1. Suposiciones . . . . .	11
3.1.2. Modelos . . . . .	11
3.2. Resultados preliminares . . . . .	11
3.3. Resultados postprocesados . . . . .	11
3.3.1. Valores atípicos . . . . .	11
3.3.2. Correlaciones . . . . .	11
<b>4. Conclusiones</b>	<b>13</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivo

Cálculo diferencial en varias variables de manera teórica y con aplicaciones.

### 1.2. Temario

- $R^n$  como espacio euclidiano
- Norma, distancia y desigualdad del triángulo.
- Conjuntos abiertos, cerrados.
- Conexidad.
- Sucesiones en  $R^n$ .
- Convergencia, compacidad.
- Teorema de Bolzano-weirstrass.\*
- Teorema de Heine-Borel.\* \*Propiedades de compacidad.
- Límite de transformaciones.
- Continuidad de transformación.
- Continuidad de inversa de transformación.
- La diferencial de una transformación.
- Transformaciones diferenciales.
- Regla de la cadena.
- Derivada direccional.

- Funciones clase  $C^n$ .
- Teorema de función inversa y Teorema de función implícita.
- Diferenciales de orden superior.
- Teorema de Taylor. Aplicaciones a máximos y mínimos.

### 1.3. Bibliografía

- Elementary Classical Analysis-Marsden and Hoffman.
- Mathematical Analysis, Apostol.
- Analysis on manifolds, Munkres.
- Mathematical Analysis, Rudin.\*
- Calculus on manifolds, Spivak.\* \*Densos,

### 1.4. Evaluación

- Primer Parcial 25 %.
- Segundo Parcial 25 %.
- Tercer Parcial 25 %.
- Quizes 25 %.

#### 1.4.1. Quizes

- Son de opción múltiple.
- Son sorpresa.
- Se elimina el Quiz que tenga la calificación mas baja.
- Se saca promedio al final del semestre.

## Capítulo 2

# $R^n$ como espacio euclidiano.

### 2.1. El espacio $R^n$ .

Se define el n-espacio euclidiano de n-tuplas en  $R$  como:

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$$

Es decir:

$$R^n = R * R * R * \dots * R$$

Sea:

$$\vec{x} \in R^n$$

Entonces:  $\vec{x}$  es un punto en  $R^n$  o un vector en el  $R$ -espacio vectorial.

#### 2.1.1. Definición de la suma y multiplicación por escalar.

Sea:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$$

$$\alpha \in R$$

Se define la suma:

$$\vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Se define la multiplicación por escalar:

$$\alpha \vec{x} := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

#### 2.1.2. Tarea

Demostrar que  $(R^n, +, *)$  es un  $R$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .

**Demostración de que  $R^n$  es un espacio vectorial**

Sean:  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$1. \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n \longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in R^n$$

Demostración:

Como cada una de las entradas son números reales:

$$\longrightarrow (x_i + y_i) \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\longrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in R^n$$

$$2. \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n \longrightarrow \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

Demostración:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Por asociatividad en los reales

$$\vec{x} + \vec{y} = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

$$3. \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n \longrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

Demostración:

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n)$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$$

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

$$4. \exists \vec{0} \in R^n \text{ tal que } \forall \vec{x} \in R^n \longrightarrow \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

Demostración:

$$\text{Sea } \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{x} + \vec{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0)$$

$$\vec{x} + \vec{0} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

5.

$$\forall \vec{x} \in R^n \exists -\vec{x} \in R^n \text{ tal que } \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \text{ Existencia de inversos}$$

Demostración:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \dots, x_n + (-x_n))$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

6. Sea  $\alpha, \beta \in R$

$$\forall \vec{x} \in R^n \text{ y } \alpha \in R \longrightarrow \alpha \vec{x} \in R^n$$

Demostración:

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha x_i \in R, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



$$\begin{aligned}\alpha \vec{x} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \\ &\longrightarrow \alpha \vec{x} \in R^n\end{aligned}$$

$$7. \forall \vec{x} \in R^n \longrightarrow 1 * \vec{x} = \vec{x}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}1 * \vec{x} &= 1 * (x_1, \dots, x_n) \\ 1 * \vec{x} &= (1 * x_1, 1 * x_2, \dots, 1 * x_n) \\ 1 * \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ 1 * \vec{x} &= \vec{x}\end{aligned}$$

$$8. \forall \alpha, \beta \in R \text{ y } \vec{x} \in R^n \longrightarrow \alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \vec{x}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta \vec{x}) &= \alpha(\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= (\alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n)) \\ &= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots, (\alpha\beta)x_n) \\ &= (\alpha\beta)(x_1, \dots, x_n) \\ &= (\alpha\beta) \vec{x}\end{aligned}$$

$$9. \forall \alpha, \beta \in R \text{ y } \vec{x} \in R^n \longrightarrow (\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \vec{x} &= (\alpha + \beta)(x_1, \dots, x_n) \\ &= ((\alpha + \beta)x_1, \dots, (\alpha + \beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n) \\ &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n) \\ &= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}\end{aligned}$$

$$10. \forall \alpha \in R \text{ y } \vec{x}, \vec{y} \in R^n \longrightarrow \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) \\ &= \alpha((x_1 + y_1), \dots, (x_n + y_n)) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n)) \\ &= ((\alpha x_1 + \alpha y_1), \dots, (\alpha x_n + \alpha y_n)) \\ &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) \\ &= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \alpha(y_1, \dots, y_n) \\ &= \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}\end{aligned}$$

### Demostración de que su dimensión es n

Definición:

Sea  $\vec{V}$  un  $F$ -e.v. con base finita  $\beta \longrightarrow \dim(V) = |\beta|$   
 $R^n$  tiene como base canonica:  $\beta = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$   
 $\longrightarrow \dim(R^n) = n$

## 2.2. Recordatorio/Repaso

En  $R^2$  teníamos nociones de distancia, Norma y producto interno.

### Norma

$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , es decir la longitud del vector.

### Distancia

$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} * \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 * y_1)^2 + (x_2 * y_2)^2}$  Es la distancia entre dos vectores.

### Producto interno

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta \end{aligned}$$

El producto interno nos da informacion sobre el angulo entre dos vectores:

$$\text{si } \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \text{ y } \|\vec{x}\| \neq 0 \\ \|\vec{y}\| \neq 0$$

Entonces los vectores son ortogonales.

### Propiedades del producto punto

1.  $\vec{x} * \vec{y} = \vec{y} * \vec{x}$
2.  $(\alpha \vec{x}) * \vec{y} = \alpha(\vec{x} * \vec{y})$
3.  $\vec{x}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} * \vec{y}_1 + \vec{x} * \vec{y}_2$
4.  $\vec{x} * \vec{x} \geq 0; \vec{x} * \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

### Observaciones

## Capítulo 3

# Resultados

### 3.1. Simulación de resultados

#### 3.1.1. Suposiciones

#### 3.1.2. Modelos

### 3.2. Resultados preliminares

### 3.3. Resultados postprocesados

#### 3.3.1. Valores atípicos

#### 3.3.2. Correlaciones



## Capítulo 4

## Conclusiones