FY1020 Mekanikk
Numerisk prosjekt 1: Koblede svingninger

Vår 2026

Dette obligatoriske numeriske prosjektet handler om koblede svingninger av matematiske pendler. Oppgave 1 og 2 er obligatoriske, mens oppgave 3 er en ekstraoppgave for numerisk fremadstormende studenter. Se også notatet *Akselererte referansesystemer med anvendelse på koblede svingninger* på Blackboard, som kan være nyttig for å løse oppgavene.

For å besvare oppgaven, skriver dere en rapport som sammenfatter svarene på punktene under, og leverer sammen i grupper på 2 (± 1) innen 16. februar 2026 på Blackboard. Rapporten kan leveres som en `pdf`-fil eller en Jupyter notebook (`.ipynb`) *der punktene under er besvart* i en fornuftig rekkefølge.

Introduksjon

Dette numeriske prosjektet handler om svingninger av idealiserte matematiske pendler som er koblet sammen. Likningene som beskriver systemene er gitt ved Newtons andre lov kombinert med ulike krefter. Likningssystemene vi ender opp med er ofte ikke-lineære og kan ikke generelt løses analytisk (uten visse antakelser) og dermed må vi løse dem numerisk for å få innsikt i hvordan systemet oppfører seg.

Når vi løser et slikt *dynamisk system*, altså et system av koblete ordinære differensiallikninger (ODE-er), må vi diskretisere likningene. Her vil vi ende opp med et likningssystem som kan løses for en vektor av ukjente, $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \ldots]$, som i dette prosjektet vil ha fra 1 til 3 elementer U_i (vi vil finne at $U_1 = \theta_1, U_2 = \theta_2$ og $U_3 = x_b$, der disse symbolene vil introduseres etter hvert i oppgaveteksten). Én del av utfordringen er å ordne likningssystemet slik at det kan uttrykkes på formen

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}), \tag{0.1}$$

der vi må bestemme $\mathbf{F}$, som er en ikkelineær vektorfunksjon som bare avhenger av $\mathbf{U}$ og tidsderiverte av $\mathbf{U}$ (ikke annenderiverte!). Den enkleste måten å løse slike systemer er ved hjelp av `scipy.integrate.solve_ivp` som er tilgjengelig i Python. Denne funksjonen forutsetter imidlertid at likningssystemet er et system av førsteordens ODE-er, og likning (0.1) er andreordens, da venstresiden består av andrederiverte mhp. tid t. Dette kan vi imidlertid fikse ved å utvide vektoren av ukjente med

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1, \dot{U}_2, \ldots]$$

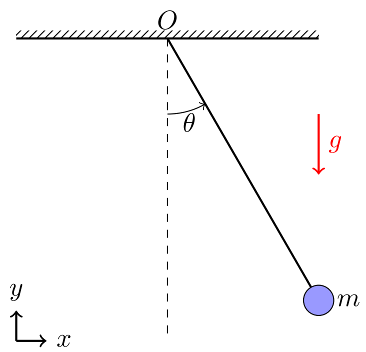
slik at det førsteordens ODE-systemet vi må løse er:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \end{aligned}$$

som vi kan samle sammen til

$$\dot{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{W}) \quad \text{hvor} \quad \mathbf{W} = [\mathbf{U}, \mathbf{V}] \quad \text{og} \quad \tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{V}, \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{V})].$$

Dette vil forhåpentligvis fremstå litt mindre abstrakt etter hvert som oppgaven blir presentert. Du står selvfølgelig fritt til å bruke andre metoder i løsningen om du foretrekker dette. Lykke til!



Figur 1: Skjematisk oppsett av en enkel pendel.

1 Enkel pendel

En enkel pendel henger i en fastmontert bjelke i et punkt O (se figur 1). Vi modellerer pendelen som en punktmasse $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ som er forbundet med en masseløs stang med lengde $\ell = 0.1\,\mathrm{m}$ fra O til kulen. Gravitasjonen virker nedover med en akselerasjon $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1.1. Hva er kreftene som virker på kulen, og på bjelken, ved et vinkelutslag θ? Uttrykk svaret ved hjelp av snordraget S.

1.2. Vis at differensiallikningen som beskriver vinkelutslaget kan skrives på formen

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta \tag{1.5}$$

og finn dermed uttrykket for den naturlige frekvensen ω_0.

1.3. Løs likning (1.5) numerisk, for eksempel ved å bruke Eulers metode eller en høyere ordens metode – gjerne ved å bruke `scipy.integrate.solve_ivp` tilgjengelig i Python. Du kan simulere fra $t = 0$ til $t = t_{\max} = 10\,\mathrm{s}$.

(a) Beregn vinkelutslaget $\theta(t)$ som funksjon av tid. Sammenlikn tidsutviklingen av $\theta(t)/\theta(0)$ for ulike initielle utslag $\theta(0) = \theta_0 \in \{0.1, 0.5, 1.0\}$ radianer med det analytiske uttrykket man kan finne for $\theta \ll 1$.

(b) Plott også den kinetiske, potensielle og totale energien som funksjon av tid for $\theta_0 = 0.5$ rad. Hvordan avhenger resultatet av størrelsen på det numeriske tidssteget $\Delta t \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ (og eventuelt hvilket numerisk skjema) du bruker?

2 Pendler fra en fri bjelke

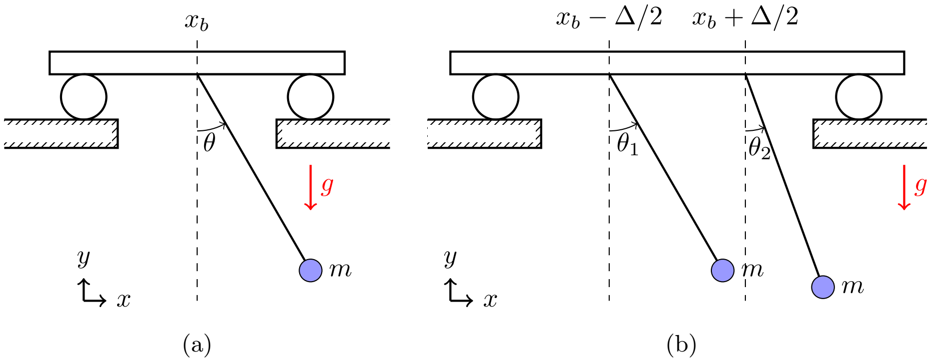
Vi antar nå at bjelken balanserer på to rullende sylindre på hver sin hylle, som vist i figur 2a. Bjelken har en masse $M = 1\,\mathrm{kg}$ og vi neglisjerer rullefriksjon og massen/treghetsmomentet til sylindrene. Bjelken kan dermed bevege seg helt fritt i x-retningen. Massesenteret til bjelken er angitt ved x_b.

2.1. Hvordan blir kraftbalansen nå?

2.2. Skriv ned differensiallikningen for pendel-bjelke-systemet uttrykt ved hjelp av vinkelen θ. Anta at systemet er i ro ved start. **Hint:** Bruk kraftbalanse i x-retning og dreiemomentbalanse rundt hengselen til å finne et uttrykk for $\ddot{x}_b$ og deretter $\ddot{\theta}$.

2.3. Nå skal vi studere to identiske pendler som henger fra samme rullende bjelke. Avstanden Δ mellom hengslene er konstant og stor nok til at pendlene ikke vil kollidere med hverandre. Hva blir de koblede differensiallikningene for de to vinkelutslagene θ_1, θ_2? Forklar hvorfor vi nå må løse for vektoren av ukjente $\mathbf{U} = [\theta_1, \theta_2]$.

2.4. Løs likningene numerisk og simuler systemet med initialtilstanden $\theta_1(0) = 0.5$, $\theta_2(0) = 0$ og $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$. Sjekk at løsningen er riktig/nøyaktig nok ved å plotte den totale energien og posisjonen til massesenteret i x-retning over tiden t til $t_{\max} = 30\,\mathrm{s}$.



Figur 2: Pendler som henger en bjelke som kan forflytte seg friksjonsfritt i x-retningen.

Forklar hva som skjer med amplitudene til θ_1 og θ_2 etter hvert som tiden går.
Kan du forklare oppførselen kvalitativt ved å se på den lineariserte likningen, hvor $\theta_i \ll 1$ og bruke at $m \ll M$?
Hint: Du vil kunne få bruk for de trigonometriske identitetene

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}, \quad \text{og} \quad \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

3 To pendelklokker fra en koblet bjelke (ekstraoppgave)

Nå ønsker vi å simulere *Huygens' synkroniseringseksperiment* [1]. Christian Huygens (1629-1695) var en nederlandsk fysiker og matematiker som gjorde viktige oppdagelser innenfor blant annet astronomi, optikk og sannsynlighetsteori. I tillegg fant han opp pendelklokken. Han oppdaget ved en tilfeldighet at to pendelklokker som var festet parallelt opp i en bjelke ville synkroniseres over tid; en observasjon som blant annet har analogier i biologi [2].

For å gjøre modellen fra punktet over, av to pendler, til en modell for to pendel*klokker*, gjør vi to endringer. Først antar vi at det virker en viskøs friksjonskraft i hengselen. Bidraget til dreiemomentet for pendel $i \in \{1, 2\}$ kan da modelleres som $\tau_{f,i} = -c\dot{\theta}_i$ der c er en friksjonskoeffisient. For å opprettholde svingningen når man har friksjon trengs et hemverk (se `https://snl.no/hemverk`), en mekanisme som tilfører litt energi ved hver periode. Vi modellerer dette som et "spark" av dreiemoment idet pendelen passerer $\theta_i = 0$ i retningen den har fra før:

$$\tau_{H,i} = \kappa \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_i)\delta(\theta_i).$$

Her er $\delta(x)$ Diracs deltafunksjon, som er definert slik at

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x \neq 0, \\ \infty & \text{for} \quad x = 0, \end{cases} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Videre er $\mathrm{sgn}(x)$ fortegnsfunksjonen (signum), definert ved

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{for} \quad x < 0, \\ 0 & \text{for} \quad x = 0, \\ 1 & \text{for} \quad x > 0. \end{cases}$$

Endringen i (kinetisk) rotasjonsenergi fra rett før til rett etter dette sparket er (sjekk selv!)

$$\Delta W_{\mathrm{rot}} = \int_{-\dot{\theta}_i \Delta t/2}^{\dot{\theta}_i \Delta t/2} \tau_{H,i} \mathrm{d}\theta_i = \kappa.$$

Tips: En deltafunksjon kan være vanskelig å implementere numerisk, så det kan være en fordel å erstatte den med en "utsmurt" (dvs. flat) funksjon med samme integral, f.eks.:

$$\delta(x) \approx \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad |x| > \epsilon/2, \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{for} \quad |x| < \epsilon/2, \end{cases}$$

der ϵ er en liten parameter.

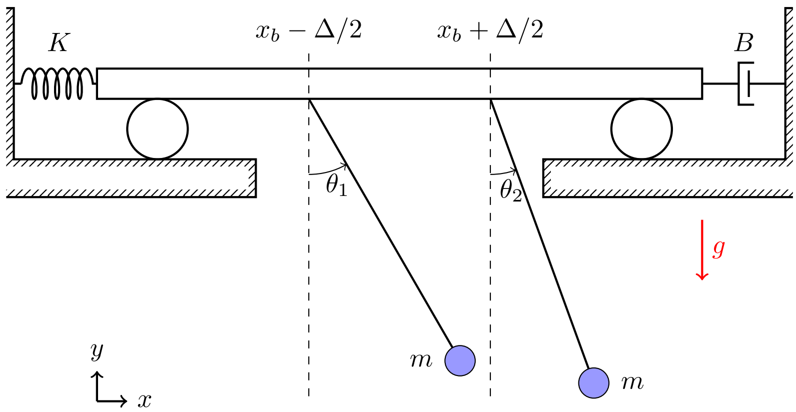
3.1. Hva blir de koblede differensiallikningene for θ_1 og θ_2? Løs likningssettet numerisk. Du kan bruke de numeriske verdiene $c = 0.000\,25\,\mathrm{N\,m\,s\,rad^{-1}}$, $\kappa = 0.0005\,\mathrm{N\,m}$, $\epsilon = 0.01$ (men prøv gjerne også andre verdier) og samme initialtilstand som over.
Hvordan endrer total mekanisk energi seg med tiden? Beskriv oppførselen til systemet.

3.2. Til slutt, for å modellere elastisiteten og friksjonstapet i opphenget, f.eks. en bjelke som hviler på et oppheng, kobler vi bjelken til en fjær med fjærkonstanten K og en viskøs demper med proporsjonalitetskonstanten B, slik at kraftbidraget blir

$$\mathbf{F}_b = (-Kx_b - B\dot{x}_b)\hat{\mathbf{x}}.$$

Forklar at vi nå må løse for de tre ukjente $\mathbf{U} = [\theta_1, \theta_2, x_b]$. Vis at det dynamiske systemet vi må løse er gitt ved

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -\eta_1 - a\cos\theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 &= -\eta_2 - a\cos\theta_2 \\ \ddot{x}_b &= \ell a. \end{aligned}$$



Figur 3: To pendelklokker som henger fra en dempet og fjæret bjelke.

der

$$a(\theta_1, \theta_2, x_b, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{x}_b) = \frac{\mu(\cos\theta_1\eta_1 + \cos\theta_2\eta_2 + \sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \sin\theta_2\dot{\theta}_2^2) - \frac{K}{M}\frac{x_b}{\ell} - \frac{B}{M}\frac{\dot{x}_b}{\ell}}{1 + \mu(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)}$$

$$\eta_i = \frac{g}{\ell}\sin\theta_i - \frac{\tau_{f,i} + \tau_{H,i}}{m\ell^2}.$$

3.3. Plott vinkelutslagene som funksjon av tid for initialtilstandene gitt ved $\theta_1(0) = 0.5$, $x_b(0) = 0$ og ulike $\theta_2 \in \{-0.25, 0, 0.25\}$. Videre er $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{x}_b(0) = 0$. Du kan bruke parameterverdiene $K = 10.0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ og $B = 0.5\,\mathrm{N\,s\,m^{-1}}$. Plott også mekanisk energi som funksjon av tid og posisjonen til massesenteret. (Prøv gjerne også andre initialtilstander/parametre.)
Beskriv hvorvidt og hvordan klokkene synkroniseres i de ulike tilfellene.
(Utfordring!) Kan du forklare hvorfor de synkroniseres ved å se på de lineariserte likningene ($\theta_i \ll 1$ og $m \ll M$)?

Versjonslogg

- 2. februar 2026: Oppgaveteksten er lagt ut.
- 5. februar 2026: Presisering om at Oppgave 3 er frivillig. Tilleggsnotat om utledning av modellen lagt ut på Blackboard.

Referanser

[1] Matthew Bennett, Michael F Schatz, Heidi Rockwood, and Kurt Wiesenfeld. Huygens's clocks. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 458(2019):563–579, 2002.

[2] Jonatan Pena Ramirez and Henk Nijmeijer. The secret of the synchronized pendulums, 2020. URL `https://physicsworld.com/a/the-secret-of-the-synchronized-pendulums/`.