**武汉大学计算机学院**

**2021 --- 2022学年度第二学期**

**《组合数学》期末考试试卷 ( A )**

[闭卷，试卷共 2 页，答题时间120分钟]

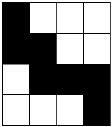
**姓名：**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **学号：**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **专业：**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ **成绩：**\_\_\_\_\_\_\_

**注意：（1）请将答案一律写在答卷纸上，注意标明题号并按顺序解答。答在试卷上不得分。**

（2）离开考场时将试卷及答卷纸一起上交。

一.(15分，每小题5分)

1.将n男n女排成一只男女相间的队伍，共有多少种排列方法；若围成一圆桌坐下，又有多少种方法？

2.求图形中阴影部分的棋盘多项式是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

3.张三和李四进行了一场中国象棋对抗赛，约定一共下21局（和棋时则加赛快棋到分出胜负为止），其中最后局数获胜多者赢得本次对抗赛。最终的比分结果是张三赢了其中的12局，且比赛的过程中张三的赢棋局数一直不少于李四的赢棋局数。问有多少种不同的赢棋局数比分记录？

二、（15分）

1.红、黄、蓝三色的球各8个，从中取出9个，要求每种颜色的球至少一个，问有多少种不同的取法？

2.用红、黄、蓝3种颜色给1×n的棋盘染色，其中红色必须有奇数格，黄色必须有偶数格，且至少有一格染蓝色。求其染色方案数。

三、( 15分)求解满足初始值h0 = 1, h1 = 2, h2 = 0的递推关系：

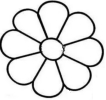
。

四、（10分）求满足下列条件的整数解数目：x1+x2+x3+x4=20，其中1≤x1≤5，0≤x2≤7，4≤x3≤8，2≤x4≤6。

五、（15分）

1.证明：如果从集合S={1,3,5,7,…,599} 中任选101个数，在所选出的数中总存在2个数，它们之间最多相差4.

2.一个学生有37天用来准备考试,他需要不超过60小时的复习时间,而每天他至少复习1个小时。试证明:无论他如何安排复习时间,都存在连续的若干天,在此期间他恰好复习了13小时 (假定每天复习的时间都是整数小时)。

六、（15分）现在设计了一个如右图所示由8片一样的花瓣和1个中心圆形花蕊组成的装饰品摆件。对这9个部分可以用红黄绿3种颜色进行染色，问可以有多少种不同的设计方案？另外其中出现2红3黄4绿的不同设计方案有多少个？经过旋转使之吻合的两种方案视为同一方案。要求：写出所求置换群的型和循环指数多项式，无过程者不得分！

七、(15分，每小题5分)：

1.证明组合恒等式：

2. 证明n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒的方案数S(n,m)(第2类Stirling数)具有性质: 。

3. 设<H,\*>是群<G,\*>的子群，对a∈G，定义集合:aH={a\*h|h∈H}，则称aH为a确定的H在G中的左陪集。试证：对任何a,b∈G,有aH∩bH=Φ 或者 aH=bH。

试题对课程目标的支撑关系表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 课程目标 | 期末试卷题号 | 总计  分值 | 支撑理由 |
| 课程目标1：掌握常用组合计数的构造思想和计算方法。要求理解和掌握排列数和组合数的一些重要性质，掌握常见的基本组合恒等式，理解其证明方法；理解和掌握母函数的定义和基本性质，会求数列的母函数;会用两种类型母函数解决多重集的r-组合数、有限制排列、递归关系等问题。同时，培养学生抽象思维和慎密概括的能力，使学生具有良好的开拓专业理论的素质和使用所学知识，分析和解决实际问题的能力。 | 一（1）（3） 10分；  二（1）（2） 15分；  三 15分  七（1）（2） 10分 | 50分 | 考察学生对以下基础知识/知识点的理解与运用能力：  掌握集合及多重集的排列和组合、二项式定理、组合恒等式、路径问题、牛顿二项式定理、多项式定理、包含排斥原理、多重集的组合数、递推关系的求解、母函数与多重集的组合数、指数生成函数与多重集的排列数。理解用母函数求解递推关系、Catalan数和Stirling 数 |
| 课程目标2：掌握基本的组合数学工具，如容斥原理和鸽笼原理。理解和掌握容斥原理及其推广形式，能熟练地应用容斥原理解决组合计数问题;掌握容斥原理在排列组合问题中的应用，能应用容斥原理解决错位排列问题以及相对位置上有限制条件的排列问题，了解其在其他应用问题中的运用;对简单形式鸽笼原理、加强形式鸽笼原理、一般形式鸽笼原理的掌握和对Ramsey理论的熟悉和了解以及在实际研究中的应用。 | 一（2） 5分  四 10分  五（1）（2） 15分 | 30分 | 考察学生对以下基础知识/知识点的理解与运用能力：熟练掌握容斥原理，会用容斥原理解决相应的问题。了解错位排列和禁位排列的背景及其应用。掌握鸽笼原理及其使用方法，了解 Ramsey 数及其推广形式。 |
| 课程目标3：熟练掌握代数结构和组合数学相关的基本概念与基本运算，包括代数结构、群、半群、独异点的概念;以及置换群的循环指数多项式、Burnside引理、波利亚（Pólya）计数等知识。掌握使用波利亚定理等理论方法和技巧解决实际工作中的组合计数及其应用问题。使学生能得到组合数学的思想、方法和理论严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练，了解数学中的抽象思维与计算机科学实践之间的内在联系，提高分析问题和解决问题的能力。 | 六 15分  七（3） 5分 | 20分 | 考察学生对以下基础知识/知识点的理解与运用能力：掌握群的概念、置换群;置换群中的共轭类与型; Burnside引理; Pólya定理的特殊形式与应用;Pólya定理的母函数及其应用。 |