Kompendium
Lineare Algebra

Vorwort

Dieses Kompendium wurde von einem Studenten der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck verfasst. Es wurde während des Studiums Lernbegleitend geschrieben und ist – trotz detaillierten Zusammenfassungen – lückenhaft! Es wurde nicht kontrolliert und beinhaltet wahrscheinlich viele Fehler ☺

Es diente lediglich für meine Zwecke und half mir durchs Studium. Obwohl es jegliche Inhalte aus dem Skriptum, Google und Youtube-Videos beinhaltet, sind diese stets in eigenen Worten, überdacht und neu verfasst worden. Es wurden einzelne Bilder verlinkt. Deshalb möchte ich ausdrücklich darauf hinweisen, dass dieses Kompendium ausnahmslos für private Zwecke, nicht für die Veröffentlichung gedacht ist! Es sind alle Referenzen auf verwendete Materialen im Anhang, aber es wurde nichts kopiert. Wenn doch, war es wohl mal ein Glühwein zu viel und in keiner Weiße beabsichtigt!

Ansonsten viel Spaß beim Lernen, wie gesagt, das Kompendium ist eine enorme Kurzfassung der Lehrveranstaltung – wär aber trotzdem nicht unangebracht, die Lehrveranstaltung zu besuchen und das Skriptum zu lesen ☺

Zusatzinfo:

Weil des a Mathematik-Kompendium is, müss ma noch was klarstellen:

Fett-geschriebene Mengen sind immer in der gesamten Mathematik bekannte Mengen, wie z.B. **N** = Natürliche Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

Mengen, Zahlen und Funktionen

Grundlegende Begriffe, Konventionen, Zeichen

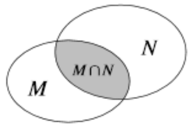
Nachfolgend finden Sie verschiedene Begriffe samt ihrer Erklärung/Definition, die im Skriptum (und für die Lehrveranstaltung *702101*) verwendet werden. Sie sind fundamental und werden durch das gesamte Skriptum, Kompendium, Ausschnitten, Vorlesungen verlangt. Gemäß dem ersten Paragraph im Skriptum, setzen diese Definitionen (wie alle) Vorwissen voraus. Dabei kann ich nur von meinem Vorwissen aus gehen. Wenn Sie was nicht verstehen, schauen’s gefälligst selbst nach auf Google, dem Skriptum oder fragen Leute, die mehr davon verstehen.

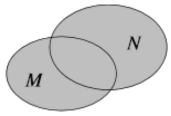
zu definierender Begriff **:=** *definierende (bekannte) Begriffe*

:= verwenden wir in der Mathematik zum Definieren.

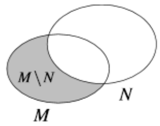
Gerade Zahl := ganze Zahl, die von 2 ohne Rest geteilt wird.

Mengen



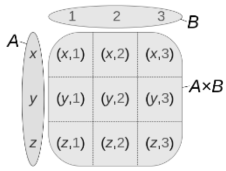


M∪N



Eine Menge ist ein Grundbaustein der Mathematik! Es ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, die wiederrum Elemente der Menge heißen. **Alle** Elemente/Objekte können zu einer Menge zusammengefasst werden. Dabei kann eine Menge entweder durch Anschreiben der Elemente: *{1, 3, 5, 7, 9}* oder aber durch Eigenschaften: *{n / n ganze Zahl, n > 0, n < 7}* definiert werden.

Dabei gibt es folgende über die gesamte Mathematik gültige Definitionen:



θ	:=	{}	Leere Menge
N	:=	{0, 1, 2, ..., n, n+1, ...}	Menge der natürlichen Zahlen
Z	:=	{0, 1, -1, 2, -2, ..., n, -n, n+1, -(n+1), ...}	Menge der ganzen Zahlen
Q	:=	$\left\{\dots,-\frac{2}{1},-\frac{1}{2},-\frac{1}{1},0,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\dots\right\}$	Menge der rationalen Zahlen (Echte Brüche)
R	:=	{ De facto alle Zahlen }	Menge der reellen Zahlen
R \ Q	:=	{..., π, Wurzel aus 2, ...}	Menge der irrationalen Zahlen (Unechte Brüche)

Ist M eine Menge und *e* ein Element der Menge M, dann schreiben wir:

$e \in M$, analog dazu, wenn *e* kein Element ist: $e \notin M$

Wenn M eine Teilmenge von N ist, schreiben wir:

$M \subseteq N$ oder $M \subset N$, das heißt, jedes Element von M ist auch in N.

$M \not\subset N$ bedeutet, dass M nicht Teilmenge von N ist.

$M = N$, falls M und N gleich sind, d.h.: $M \subset N$ und $N \subset M$.

Schließlich bedeutet $M \subsetneq N$, dass $M \subset N$ und $M \neq N$, also eine *echte* Teilmenge ist.

Durschnitt, Vereinigung, Differenz, kartesisches Produkt

Der Durchschnitt zweier Mengen wird wie folgend geschrieben:

$M \cap N := \{a \mid a \in M \text{ und } a \in N\}$

Die Mengen M und N heißen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist.

Die Vereinigung zweier Mengen erfolgt durch das einschließende Oder („und-oder“)

$M \cup N := \{a \mid a \in M \text{ oder } a \in N\}$

Zuletzt gibt es noch die Differenz:

$M \setminus N := \{a \mid a \in M \text{ und } a \notin N\}$

Auch wichtig ist das Kartesische Produkt:

$M \times N := \{ (x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N \} \subseteq (M \cup N)^2$

Weitere Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften betreffen entweder eine Menge selbst, oder aber die Elemente einer oder aller Mengen. Es ist einfach eine unorganisierte Zusammenfassung wichtiger Informationen.

Rationale Zahlen

Eine Rationale Zahl ist durch Vorgabe von Zähler und Nenner eindeutig bestimmt, aber umgekehrt sind Zähler und Nenner durch die rationale Zahl **nicht** eindeutig bestimmt!

Es seien a, a‘, b, b‘ ganze Zahlen und b, b‘ ungleich 0. Dann sind die Bruchzahlen a/b und a‘/b‘ genau dann gleich, wenn a*b‘ = a‘*b

Betrag

Was bereits aus der vorherigen Schule bekannt sein sollte, ist der Betrag:
$| a | = vz(a) * a$, wobei vz := Vorzeichen einer Zahl ist. vz(a) = 1, wenn $a \in N$ bzw. -1 wenn $a \notin N$

Inverses Element

Ein Inverses Element (oder aber auch Funktion in späteren Kapiteln) hat stets die Eigenschaft:

$a * a^{-1} = 1$

Diese Eigenschaft ist allgemein gültig, lässt sich aber in verschiedenen Mengen/Funktionen präzisieren. So ist zum Beispiel jedes Element der rationalen Zahlen **Q** wie folgt invertiertbar:

$(a/b)^{-1} = (b/a)$, somit gilt: $(a/b) * (b/a) = 1$

Neutrales Element

Ein neutrales Element hat die Eigenschaft, andere Elemente in einer bestimmten Rechenoperation nicht zu beeinflussen:

$a * e = e * a = a$

Funktionen

Neben Mengen ist die Funktion der nächste Grundbaustein. Dabei ist eine Funktion im Grunde immer nur eine vorschriftliche Abbildung von M nach N, die jedem Element in M genau ein Element in N zuordnet. Dann heißt M der Definitionsbereich der Funktion und N der Bildbereich.

$f: M \to N,\ m \to f(m)$

Zum Beispiel ordnet folgende Funktion jeder natürlichen Zahl z die ganze Zahl 2z - 3 zu. Das Bild von 0, 1 bzw. 2 ist -3, -1 bzw. 1.

$F: \mathbf{N} \to \mathbf{Z},\ z \to 2z - 3$

Zwei Funktionen (f und g) sind gleich, wenn gilt:

$f: M \to N, \quad g: P \to Q$

$M = P$ und $N = Q$ und für alle $m \in M$ [(=P)] ist $f(m) = g(m)$. Man sagt dann auch, deren Graph ist gleich!

Graph(f) = Wertepaar $:= \{ (m, f(m)) \mid m \in M\} \subseteq M \times N$ [(= kartesisches Produkt)]

Die Familienschreibweise ist sehr wichtig! Sie wird oft verwendet, weil sie einfacher ist und schneller dargestellt werden kann. Durch die Schreibweise geht allerdings ein wichtiger Faktor verloren: Die Menge des Bildbereichs.

$(f(m))_{m \in M} = (f_m)_{m \in M}$

Man sagt dann, die Familie der Elemente von N (nicht zu sehen) wird durch M indiziert, d.h. M ist die Indexmenge der Familie $(f_m)_{m \in M}$

Wichtige Spezialfälle hierbei sind die Tupel:
$\{1, 2, \ldots, n\} \to M$, $i \to x(i) =: x_i$ wird als $(x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ geschrieben.

Und eine Folge:
$m \in \mathbf{N}$ und $I := \{ i \in \mathbf{N} \mid i \geq m \}$,
Die Funktion $x: I \to M$, $i \to x(i) =: x_i$ wird dann in der Form

$(x_i)_{i \geq m}$ geschrieben und heißt Folge von M. Sie darf jedoch nicht mit der Menge $\{ x_i \mid i \geq m\}$ verwechselt werden!

Wichtige Unterscheidung der Schreibweise
Wird in der Klausur zu 100% benötigt!

f (oder ein anderes Symbol) steht für eine Funktion von M nach N, oder auch: $(f(m))_{m \in M}$

$f(m) \in N$, für den Funktionswert an der Stelle $m \in M$

$(m, f(m)) \in \text{Graph}(f) \subseteq M \times N$

Rechenregeln

Verdammt wichtig! Wirklich! Des muss echt nach am kompletten Absturz am Wochenende um 4 Uhr no laufen. Hier wird aber nur kurz besprochen, genauere Infos sind im Kompendium: „Theoretische Informatik“ zu finden.

Assoziativität
Das **Assoziativgesetz** beschreibt, dass Operationen auch in **unterschiedlicher Reihenfolge** ausgeführt, zum **gleichen Resultat** führen. Das bedeutet, die **Klammerung ist irrelevant**.

$(a + b) + c = a + (b + c) =: a + b + c$

Kommutativgesetz
Es beschreibt, dass alle **Argumente einer Operation vertauscht** werden können, **ohne** dass sich das **Resultat verändert**.

$a + b = b + a$

Distributivgesetz
Beschreibt, wie zwei verschiedene Operationen miteinander „distribuieren“.

$(a + b) * c = (a * c) + (b * c) =: a*c + b*c$

Schreibweisen

Summenschreibweise: (siehe auch Gaußsche Summenformel, Seite 8)

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

Produktschreibweise:

$$\prod_{l=2}^{6} l^2 = 4 * 9 * 16 * 25 * 36$$

Zusammengesetzte Aussagen

Während in der Theoretischen Informatik die Bindewörter (und, oder, nicht, ...) der Aussagenlogik und Mengenlehre äquivalent/synonym verwendbar sind, ist es in der Algebra von Vorteil diese zu trennen (und hilft auch beim merken).

So sind die Zeichen ∪, ∩ auch in der Aussagenlogik aufzutreffen, wenn man selbst aber konsequenter weiße diese für die Mengen und folgende für die Aussagenlogik verwendet, gibt's keine Verwechslungen etc.

Zeichen in der Aussagenlogik	Deutsch
$\wedge$	Und („**A**nd")
$\vee$	Oder
$\neg$	Nicht
$\Rightarrow$	Wenn, dann
$\Leftrightarrow$	Genau dann, wenn

Hierbei gilt folgende Tabelle:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

Das Oder ist in der Mathematik immer das Inklusive-Oder (und oder)!

Wichtige, grundlegende Formeln

Gaußsche Summenformel

Der Kleine Gauß ist eine Formel für die Summe der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen:

1 + 2 + 3 + ... + n = $\sum_{k=1}^{n} k$ = $(n * (n+1)) / 2$

Induktionsbeweis

Hahahahahahahahahaha

Hab ich bis heut nicht verstanden, also lerns gscheider ausm Skriptum, aber ich versuch mein bestes, weil ichs sowieso für mich zammenschreiben muss zum Lernen. Viel Spaß ☺

Grundsätzlich läuft die Induktion wie folgt ab:

Sei m eine natürliche Zahl und
sei (A_m, A_{m+1}, ...) eine Folge von Aussagen.

Dann beweist man zunächst den **Induktionsanfang**, das heißt, man beweist, dass A_m wahr ist.

Als nächstes muss der **Induktionsschritt** (auch Induktionsschluss genannt) bewiesen werden. Dieser besagt ganz einfach, dass für alle n > m, aus A_{n-1} auch A_n folgt.

Wenn aus A_{n-1} auch A_n folgt, sind alle Aussagen A_n, n > m wahr.
Weil A_m auch wahr ist, ist die gesamte Folge wahr.

Wie machen wir das jetzt?

Nochmal von Anfang: Wir zeigen, dass der Induktionsanfang wahr ist, und nehmen dann – um den Induktionsschritt zu beweisen – an, dass A_{n-1} wahr ist (= Induktionsannahme). Aus dieser Annahme heraus versuchen wir zu beweisen, dass A_n wahr ist. Beachte: Hier darfst du mal richtig kreativ werden – aber gut argumentieren können ☺

Beispiel:

Sei n eine natürliche Zahl. Die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist S(n) := (1/6) n (n+1) (2n+1).

Induktionsanfang: S(1) = (1/6) * 1 * (1+1) * (2*1 +1) = 1 = 1^2. Korrekt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass S(n-1) gleich wahr ist, das heißt, die Summe aller Quadrate von 1 bis n-1 ist gleich S(n-1) (=Induktionsannahme). Die Summe aller Quadrate von 1 bis n ist damit:

S(n-1) + n^2.

Weil S(n-1) + n^2 = (1/6) * (n-1) * n * (2n-1) + n^2 = S(n). Korrekt.

Damit ist die Behauptung richtig. Hast eh verstanden oder? I nit haha

Zifferndarstellung von Zahlen

Eine „mehrstellige“ Zahl (1234) ist nur eine Aneinanderreihung von Zahlen in einem bestimmten Zahlensystem. In seinen elementarsten Bestandteilen besteht eine beliebige Zahl, in einem beliebigen Zahlensystem, daher aus folgender Formel:

$$\sum_{i=0}^{n} z_i b^i \;=\; z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \cdots + z_1 b^1 + z_0 \;=\; a$$

Wobei n gleich die Anzahl an Ziffern und z_i die Ziffer an der Stelle i ist, während b die Basis der Zahl (und damit des Zahlensystems) ist. „a“ ist dann die Zahl.

Die Ziffern z_0, ..., z_n von a zur Basis b können mit folgendem Verfahren berechnet werden (a ≠ 0):

- Setze i := 0

- Solange a > 0: Die i-te Ziffer z_i ist der Rest von a nach Division durch b. Ersetze a durch den ganzzahligen Quotienten von a und b und i durch i+1.

Auch für rationale Zahlen funktioniert diese Darstellung äquivalent:

$$0 \leq \frac{c}{d} - (z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b^1 + z_0 + z_{-1} b^{-1} + \ldots + z_{-p} b^{-p}) < b^{-p}$$

Die Berechnung der Ziffern von c/d zur Basis b erfolgt so:

- Ziffern $z_0, \ldots, z_k$ zur Basis b des ganzzahligen Quotienten m von c * b^p und d (also einfach das Verfahren oben verwenden)
- Setze $z_i := y_{i+p}$
  $n := -p \leq i \leq k - p$

$p \in \mathbb{N}, c, d \in \mathbb{N} \mid d \neq 0$

$$0 \leq c/d - \sum_{i=-p}^{m} z_i b^i < b^{-p} = \frac{1}{b^p}$$

$$c \cdot b^p = m \cdot d + r, \quad 0 \leq r < d$$

$$c/d = \frac{c \cdot b^p}{d \cdot b^p} = \frac{md}{db^p} + \frac{r}{db^p}$$

Sofern b fest gewählt ist, schreibt man auch

$z_n z_{n-1} \ldots z_0 z_{-1} \ldots z_{-p}$ statt $\sum_{i=-p}^{n} z_i b^i$.

Divisionsalgorithmus

$$a = m * b + r \quad und \quad 0 \leq r < |b|$$

a, b ∈ **Z**; b ≠ 0;

m, r sind eindeutig mit obiger Eigenschaft eindeutig bestimmt und heißen ganzzahliger Quotient von a und b (m) bzw. (r) heißt Rest von a nach Division durch b. Sie können mit dem Divisionsalgorithmus berechnet werden:

<u>Falls a und b natürliche Zahlen sind:</u>
Setze m := 0 und r := a
Solange r ≥ b ist,
ersetze r durch r-b
und m durch m+1

<u>Falls a < 0 *oder* b < 0 ist:</u>
Berechne wie links die Zahlen n und s,
sodass |a| = n * |b| + s
und 0 ≤ s < |b| ist
Wenn a ≥ 0 ist,
setze m := vz(b) * n
und r := s
Wenn a < 0 und s > 0 ist,
setze m := -vz(b) * (n+1)
und r := |b| - s
Wenn a < 0 und s = 0 ist,
setze m := -vz(b) * n
und r := 0

Lexikographie

Wie wird nun aber bestimmt, welche Zahl (und in weiterer Folge Wörter) größer als eine andere sei? Naja, durch Lexikographie halt ☺

Seien $v = (v_1, ..., v_n)$ und $w = (w_1, ..., w_n)$ zwei verschiedene n-Tupel von ganzen Zahlen und j die kleinste Zahl in {1, ..., n} mit der Eigenschaft $v_j \neq w_j$.

Dann ist v genau dann lexikographisch kleiner als w, wenn $v_j < w_j$ ist. Man schreibt dann $v <_{lex} w$.

$(1, 2, 3, 4) <_{lex} (1, 2, 4, 3) <_{lex} (2, -7, -3, -5)$

Gruppen, Ringe und Körper

Gruppe

Sei G eine Menge und
$* : G \times G \to G$ eine Funktion.

Wenn G eine Gruppe ist, können wir die Funktion auf die Elemente $a, b \in G$ anwenden: *(a, b) => Wobei wir kurz einfach a*b schreiben.

Damit das Paar (G, *) aber eine Gruppe bilden kann, müssen folgende drei Bedingungen („**Gruppen-Axiome**“) erfüllt sein:

1. Für alle Elemente $a, b, c \in G$ gilt das **Assoziativgesetz***
2. Es gibt ein **neutrales Element*** $e \in G$
3. Für alle Elemente $a \in G$ gibt es ein **inverses Element*** a^{-1}

Im Weiteren kann eine Gruppe auch abelsch (bzw. kommutativ) sein, wenn zusätzlich gilt:

4. Für alle Elemente $a, b \in G$ gilt das **Kommutativgesetz***

Das * steht jedoch für eine beliebige Operation, nicht zwangsläufig für die Multiplikation! So heißt die Funktion * auch Gruppenverknüpfung, bzw**.** Multiplikation (auch wenns nicht wirklich zur Multiplikation genutzt wird!!). Sollte (G, *) abelsch sein, heißt * Addition!!

Wenn‘s ersichtlich ist, darf man die Gruppe (G, *) auch auf G abkürzen.

Ring

Ist im Grunde nur eine Erweiterung der Gruppe.

Sei R eine Menge und
$+ : R \times R \to R$ sowie
$* : R \times R \to R$ Funktionen.

*Wir schreiben +(a, b) kurz a+b und *(a, b) kurz a*b oder ab*

Dann heißt das Tripel (R, +, *) ein Ring, wenn die folgenden „**Ring-Axiome“** erfüllt sind:

1. **(R, +)** ist eine **abelsche Gruppe**
2. Für alle $a, b, c \in R$, (ab)c = a(bc) gilt das **Assoziativgesetz***
3. Es gibt ein Element $e \in R$, sodass für alle $a \in R$ gilt:
   ea = ae = a (a heißt **Einselement** und wird mit 1_R bezeichnet)
4. Für alle $a, b, c \in R$ ist a(b+c) = (ab) + (ac), es gilt das **Distributivgesetz***

Ein Ring heißt zudem kommutativ, wenn zusätzlich gilt:

5. Für alle $a, b \in R$ ist ab = ba (**Kommutativgesetz***)

Wenn (R, +, *) ein Ring ist, dann heißt + die Addition und * die Multiplikation des Ringes. Das neutrale Element heißt Nullelement und wird 0_R geschrieben. Das zu a $\in$ R bezüglich + inverse Element wird mit -a bezeichnet (a + (-a) = 0_R), das bezüglich * inverse Element mit a^{-1}, wenn a * a^{-1} = 1_R

Die Subtraktion ist definiert durch:

$$a-b := a + (-b)$$

Um Klammern zu sparen, gilt PuStri, Punkt vor Strich.

Sollte aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, welche Addition und Multiplikation auf der Menge R durchgeführt wird, kann statt (R, +, *) kurz R geschrieben werden.

Ring-Axiome sind den Rechenregeln für ganze Zahlen nachgebildet.

Unterring

Ein Unterring S ist eine **nichtleere Teilmenge** vom Ring R, wenn **1** $\in$ **S** und für alle a, b $\in$ S auch die **Elemente a+b, -a, a*b in S enthalten** sind.

Körper

Ums kurz zusammenzufassen: Ein Körper ist ein Ring, in dem zusätzlich noch durch Elemente ungleich Null dividiert werden kann.

Das heißt, Sei (R, +, *) ein kommutativer Ring mit mind. zwei Elementen, dann heißt R ein Körper, wenn jedes Element in R \ {0} invertierbar ist. Dann kann die Division durch folgendes definiert werden:

$$a/b := a*b^{-1}$$

So ist z.B. (**Q**, +, *) ein Körper, der Ring (**Z**, +, *) aber nicht! **Z** sind natürliche Zahlen, die nicht invertierbar sind.

Für mich als Informatiker:

Die Menge {0, 1} mit der Addition:

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0

und der Multiplikation:

0*0=0, 0*1=1, 1*0=0, 1*1=1

ist ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Dieser Körper heißt binärer Körper und wird mit $\mathbf{Z}_2$ (Z modulo 2) bezeichnet.

Rechnen mit Summen und Produkten

Grundsätzlich gilt:

Sei (R, +, *) ein Ring, n eine positive ganze Zahl und $a_1, \ldots, a_n \in$ R.

Dann sei die Summe aller a_i mit i von 1 bis n:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n := (\dots((a_1 + a_2) + a_3) + \dots + a_{n-1}) + a_n$$

Wobei $a_1, \dots, a_n$ die Summanden heißen.

Das Produkt aller a_i mit i von 1 bis n und den Faktoren $a_1, \dots, a_n$ schaut so aus:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n := (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n$$

Die Klammern können wir Weglassen (Beweis durch Induktion über n, bzw. Assoziativgesetz).

Bijektivität

---

*Eine Funktion f: M → N heißt **bijektiv**, wenn **jedes Element von N genau ein Urbild** hat.*

Eine Menge M heißt endlich, wenn sie leer ist, oder es eine positive ganze Zahl n und eine bijektive Funktion f : {1, ..., n} → M gibt. Dann nennt man #(M) := n die Anzahl der Elemente von M (d.h.: #(θ) = 0)

Die Menge M heißt unendlich, wenn M nicht endlich ist. Hah.

„Eine endliche Menge abzählen" heißt, eine bijektive Funktion von {1, 2, ..., #(M)} nach M angeben.

Kleiner, logischer Schmee des bisher gelernten:

Allgemeines Kommutativgesetz

Seien (R, +, *) ein kommutativer Ring,
n eine positive ganze Zahl und
$a_1, a_2, \dots, a_n \in R$
und f eine bijektive Funktion von {1, ..., n} nach {1, ..., n}.

Dann gilt folgendes Paradigma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{f(i)}$$ und $$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_{f(i)}$$

Weil aufgrund des **allgemeinen Kommutativgesetzes*** die Reihenfolge der Summanden, bzw. Faktoren nicht von Bedeutung ist. Weiteres ist aufgrund der Bijektivität eine eindeutige Zuordnung von i nach f(i) möglich, es kommt also jede Zahl weiterhin nur einmal vor ☺

Faszinierend, ain't it? Wär so a klassische Klausurfrage ;)

Selbiges gilt für eine Familie von Elementen in R:

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{j=1}^{n} a_{f(j)} \in R \qquad \sum_{i\in\emptyset} a_i := 0_R$$

$$\prod_{i\in I} a_i := \prod_{j=1}^{n} a_{f(j)} \in R \qquad \prod_{i\in\emptyset} a_i := 1_R\,.$$

f ist eine bijektive Funktion von {1, 2, ..., n := #(I)} nach I.

Hier noch zwei Beispiele aus dem Skriptum zum besseren Verständnis:

Beispiel 40 : Sei $I := \{x,y,z\}$, $(R,+,\cdot) := (\mathbb{Z},+,\cdot)$ und $a_x := 3, a_y := 4, a_z := 1$. Sei f die bijektive Funktion von $\{1,2,3\}$ nach I mit $f(1) = y, f(2) = x, f(3) = z$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j=1}^{3} a_{f(j)} = a_y + a_x + a_z = 4+3+1 = 8\,.$$

und

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{j=1}^{3} a_{f(j)} = a_y \cdot a_x \cdot a_z = 4\cdot 3\cdot 1 = 12\,.$$

Beispiel 41 : Seien $m,n \in \mathbb{Z}$, $m < n$, $I := \{m, m+1, \ldots, n\}$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in R$. Die Funktion

$$f : \{1,\ldots,n-m+1\} \longrightarrow I,\ j \longmapsto j+m-1\,,$$

ist bijektiv, also ist

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i=j}^{n-m+1} a_{f(j)} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n\,.$$

In diesem Fall schreibt man oft

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad \text{statt} \quad \sum_{i\in I} a_i$$

und analog

$$\prod_{i=m}^{n} a_i \quad \text{statt} \quad \prod_{i\in I} a_i\,.$$

Allgemeines Distributivgesetz

Sei (R, +, *) ein Ring,
m, n ∈ **N** und
$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in R$, dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i\cdot b_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot b_j\right)$$

Sei $a := \sum_{i=1}^{m} a_i \in R$. Dann ist

$$a \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_j \right)$$

Seien I und J endliche Mengen, R ein Ring und $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ Familien in R. Mit der Schreibweise von Definition 39 erhält man aus Satz 42:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i \cdot b_j \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_i \cdot b_j \right) =$$
$$= \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i \cdot b_j =: \sum_{i \in I,\, j \in J} a_i \cdot b_j =: \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i \cdot b_j .$$

Skriptum Seite 23, §9. Fragen üben und machen → Wenn alle erfolgreich gelöst, Bivetten aufmachen, sonst trotzdem eins aufmachen aber nochmal probieren.

Have Fun!

Matrizen

Einführung

Matrizen sind rechteckige Anordnungen von mathematischen Elementen, meist in tabellarischer Form, beliebiger Dimensionen.

Sie dienen zur übersichtlichen Darstellung, einfacheren Rechen- und Denkvorgängen und können besonders gut für lineare Abbildungen verwendet werden.

Übungen zu Matrizen sind auf dem Übungsblatt 4, 24. Oktober, zu finden

Rechnen mit Matrizen

Wichtige Informationen

Hab keinen besseren Titel dafür gefunden, aber hier sammel ich einfach alles Wichtige rund um das Rechnen mit Matrizen, des keine eigene Überschrift wert ist, aber zur Prüfung gebraucht wird!

Addition einer Matrix mit einem Koeffizienten (z.b. sei A eine 2x3 Matrix und n ∊ **N**, A + n, dann ist n der Koeffizient) ist nicht möglich.

Wann sind 2 Matrizen definitionsgemäß gleich?

- Matrizen gleich groß (mxn)
- Koeffizienten gleich
- Zuweisung aus ij gleich

Unter dieser Vorrausetzung ist das Rechnen mit Matrizen zum Rechnen mit Zahlen äquivalent. Es gelten dieselben Regeln und es werden daher dieselben Paradigmen benötigt:

0-Matrix: 0 := ((0, 0, 0), (0,0,0)) = 2x3 0-Matrix. Eine Matrix mit der invertierten Matrix gibt die 0-Matrix.

Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativitätsgesetz gelten:

$$[(r+s)A]_{ij} = (r+s) * A_{ij} = (r * A_{ij}) + (s * A_{ij}) = [(rA)+(sA)]_{ij}$$

Wobei r und s Koeffizienten und A eine Matrix ist.

Skalar-Multiplikation

Zum Multiplizieren einer Matrix mit einer Zahl wird einfach jedes Element der Matrix mit der entsprechenden Zahl multipliziert und in eine typgleiche Matrix eingefügt.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot(-3) & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 7 \end{pmatrix}$$

Summe zweier typgleicher Matrizen

Die Summe von zwei Matrizen kann bei typgleichen Matrizen[1] sehr einfach gebildet werden. Dabei wird einfach jeweils der Eintrag der ersten Matrix an der Stelle *i,j* mit dem Eintrag der zweiten Matrix an der Stelle *i,j* summiert und in eine Matrix mit demselben Typ projiziert.

Definition:

$$A, B \in K^{m \times n}, \quad A + B := (A_{ij} + B_{ij})_{(1 \leq i \leq m)\ \&\&\ (1 \leq j \leq n)} = \begin{array}{ccc} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{array}$$

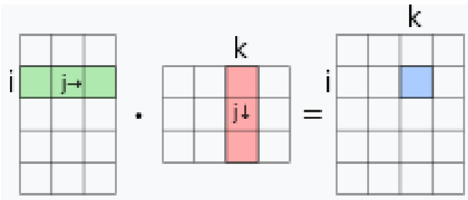
Multiplikation zweier Matrizen

Voraussetzung: Die Zeilenanzahl der ersten Matrix muss mit der Spaltenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen!

$M \in K^{mxn}$, $N \in K^{nxp}$, M * N => $M*N \in K^{mxp}$

Auf Deutsch: Beim Multiplizieren erhält die neue Matrix die Zeilenanzahl von M, und die Spaltenanzahl von N

Man summiert die Multiplikationsergebnisse zwischen allen Elementen der Zeile aus der Matrix M mit allen Elementen einer Spalte und überträgt dieses Ergebnis in die Zelle der Zielmatrix, wo sich die Zeile und Spalte treffen:



Im Allgemeinen gilt: **A * B ≠ B * A**,
außerdem ist wichtig zu wissen, dass **A*B = 0 nicht** sofort **bedeutet**, dass A = 0 oder B = 0! Im Umkehrschluss heißt dass, eine Multiplikation zweier „natürlicher Matrizen“ kann 0 ergeben, bei natürlichen Zahlen ist das nicht möglich.

Grundlegende Begriffe und Konventionen

Begriff	Erklärung
Kronecker Delta *(in Körper K)*	$\delta_{ij} := \begin{cases} 1_K & \text{falls } i = j \text{ ist,} \\ 0_K & \text{falls } i \neq j \text{ ist.} \end{cases}$
Gram'sche Matrix	Ist eine spezielle Matrix, bei der die Elemente Skalarprodukte einer Basis entsprechend ihrer Position sind: $M := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$

Standardmatrizen

E_{11} ist zum Beispiel $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, also ist eine Standardmatrix einfach eine 0er-Matrix mit einer 1 an der Stelle E_{ij}.

Elementarmatrix

Eine Elementarmatrix ist grundsätzlich eine quadratische Matrix, wobei sich genau ein Element (oder eine mit einer anderen vertauschten Zeile) von der Einheitsmatrix unterscheidet. Die Einheitsmatrix ist eine Matrix mit alles 0 außer einer Diagonalen mit 1en. Rechnet man mit Elementarmatrizen, nennt man die Resultate daraus, elementare Umformung.

I_n := Einheitsmatrix mit nxn ZeilenxSpalten
rE_{kl} := das veränderte Element r * E, wobei E = 1 an der Stelle *kl*

Mit Elementarmatrizen kann man also sogenannte elementare Zeilen-/ und Spaltenumformungen durchführen:

Elementarumformungen

$A \in K^{mxn}$, $P \in K^{mxm}$, $Q \in K^{nxn}$
Elementare Zeilenumformung = A * P
Elementare Spaltenumformung = A * Q

Typ 1: $I_n + rE_{kl}$, wobei $r \in K$, $1 \leq k,l \leq n$
Zeilenumformung: zur k-ten Zeile von A das r-fache der l-ten Zeile addieren.
Spaltenumformung: zur l-ten Spalte von A das r-fache der k-ten Spalte addieren.

Typ 2: $I_n - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk}$, wobei $r \in K$, $1 \leq k,l \leq n$
Zeilenumformung: die k-te und l-te Zeile von A vertauschen
Spaltenumformung: die k-te und l-te Spalte von A vertauschen

Typ 3: $I_n + (t - 1)E_{kk}$, wobei $t \in K$ invertierbar, $1 \leq k \leq n$
Zeilenumformung: die k-te Zeile von A mit t multiplizieren
Spaltenumformung: die k-te Spalte von A mit t multiplizieren

Invertierbare Matrix

Eine Matrix $A \in K^{nxn}$ ist genau dann invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in K^{nxn}$ gibt, für die gilt: $A * B = I_n$ && $B * A = I_n$

$GL_n(K) := \{ A \in K^{n \times n} \mid A$ invertierbar $\}$
$GL_n(K)$ heißt dann allgemeine lineare Gruppe.

Weiteres ist eine Matrix A nur dann invertierbar, wenn deren Zeilen linear unabhängig sind. Das heißt, es darf **keine** Zeile durch Kombination der anderen Zeilen erhältlich seien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

würde also nicht gehen da die 3. zeile mit der 1. und 2. dargestellt werden kann

Und wie berechnet man die Inverse Matrix?

Inverse Matrizen erhält man, indem man die Einheitsmatrix neben die quadratische Matrix stellt und dann mittels elementarer Umformungen die Quadratische auf eine Einheitsmatrix umformt. Dabei alle elementaren Umformungen auch auf die rechte Einheitsmatrix anwenden, diese ist dann die Inverse.

Eben genau deshalb sind alle invertierbaren Matrizen ein Produkt Elementarmatrizen, weil wir ja elementare Umformungen (also Multiplikation mit Elementarmatrizen) mache.

A, P $\in GL_M$ (K), somit auch B:= PA $\in GL_m$ (K). B hat Stufenform, daher ist B = I_m

Beachte, eine Matrix mit Nullzeile ist nahezu unmöglich zu invertieren.

Inverse Elementarmatrizen

Jede Elementarmatrix lässt sich auch invertieren:

Typ1: $(I_n + rE_{kl})^{-1} = I_n - rE_{kl}$

Typ2: $(I_n - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk})^{-1} = I_n - E_{kk} - E_{ll} + E_{kl} + E_{lk}$

Typ3: $(I_n + (t-1)E_{kk})^{-1} = I_n + (t^{-1} - 1) E_{kk}$

Stufenformmatrix

Eine Matrix hat A $\in K^{m \times n}$ hat Stufenform, wenn die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

- Ist $A_{i-} = 0$, dann sind auch $A_{(i+1)-} = \ldots = A_{m-} = 0$
  Das bedeutet, **alle Zeilen ab der ersten Nullzeile sind auch Nullzeilen**
- Der erste Koeffizient von links $\neq 0$ in jeder Zeile heißt **Pivot** und **ist 1**
- Der **Pivot in** der **Zeile i + 1 steht rechts** vom **Pivot in der Zeile i**.
- Der **Pivot jeder Zeile** ist der **einzige Koeffizient ≠ 0 in seiner Spalte**.

Spalten- bzw. Zeilenraum

Der Spaltenraum, bzw. der Zeilenraum einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist der Untervektorraum von $K^{m \times 1}$ bzw. $K^{1 \times n}$, der von den Spalten bzw. Zeilen dieser Matrix erzeugt wird.

System linearer Gleichungen

Ein System linearer Gleichungen ist grundsätzlich eine Menge linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, welche jedoch alle gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Matrizen eignen sich hervorragend zur Veranschaulichung. Es gibt eine Matrix (als Gleichungen) und eine Spalte mit gleichviel Zeilen (die das Ergebnis jeder Zeile repräsentieren)

4	6	8
2	3	4

0
0

Die Lösungsmenge eines solchen Systems ist genau jene Menge, für die alle Gleichungen in dem System linearer Gleichungen korrekt sind.

Formal ausgedrückt:

$A \in K^{m \times n}$, $b \in K^{m \times 1}$

$L(A, b) := \{x \mid x \in K^{n \times 1} \mid Ax = b)$

Beschrieben wird das lineare Gleichungssystem
durch eine beliebige Menge an Zahlenpaaren, für die das Gleichungssystem korrekt ist. Also reicht ein einziges Element aus L(A,b), um die Gleichung zu beschreiben. Die Lösungsmenge jedoch ist nur durch L(A,b) gegeben.

Sie kann semantisch auch wie folgt definiert werden:

Die Lösungsmenge ist die Schnittmenge (Durchschnittsmenge) aller Lösungen, der einzelnen Gleichungen im Linearen Gleichungssystem

Vektoren

Vektorraum

Ein **Vektorraum** ist eine Menge V (V = Vektoren) mit 2 Verknüpfungen, welche über einen Körper K definiert ist.

Beispielsweiße (V, +, *) über K ist ein Vektorraum, wobei die Elemente der Menge V „Vektoren“ heißen, die Elemente der Menge des Körpers K „Skalare“, + nennt sich „Addition“ und * die „Skalar-Multiplikation“.

Bei der Addition werden die Elemente von V miteinander „addiert“, bei der „Skalar-Multiplikation“ werden die Elemente von V mit dem Skalar $k \in K$ „multipliziert“.

Man schreibt auch einfach einen Pfeil über die v zum symbolisieren.

Bedingungen

(V, +) muss eine **abelsche Gruppe** sein:

- **Abgeschlossenheit**: jede +-Verknüpfung beliebiger Elemente in V, muss wieder ein Element in V sein.[*]
- **Assoziativität**: $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$
- **Neutrales Element**: $v + e = e + v = v$, e = Nullvektor
- **Inverses Element**: $v + v^{-1} = v^{-1} + v = e$
- **Kommutativität**: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

Weiteres muss für (V, +, *) gelten:

- **Distributivität von * mit +**: $k * (v_1 + v_2) = (k * v_1) + (k * v_2)$
  - Auch muss das Zahlenplus zweier Skalare mit der Skalar-Multiplikation multipliziert werden können (**Distributiv**): $(k_1 \mathbf{+} k_2) * v = (k_1 * v) + (k_2 * v)$
  - Ähnlich gilt es auch für die Zahlenmultiplikation, dort allerdings muss es assoziativ sein: $(k_1 \mathbf{*} k_2) * v = k_1 * (k_2 * v)$
- **Neutralität von e ∈ K**: das neutrale Element der Skalar-Multiplikation multipliziert mit dem Vektor v muss den Vektor ergeben: $e * v = v$

Vektoraddition

Kartesische Produkt: **V x V** := $\{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V)$ $\rightarrow v_1 + v_2$

Skalar-Multiplikation

Kartesische Produkt: **K x V** := $\{(k, v) \mid k \in K, v \in V)$ $\rightarrow k * v$

Nullvektor

Das neutrale Element von (V, +) wird oft mit 0_v geschrieben und heißt Nullvektor

Skalares Vielfaches

Ein Vektor *v* heißt **ein skalares Vielfaches** von w, wenn es ein Element $r \in K$ gibt | $v = r*w$

[1] Menge der ganzen Zahlen **Z** ist für Addition, Subtraktion, Multiplikation abgeschlossen, aber nicht für die Division (weil da ½ = 0,5 ≠ **Z**)

Dimension eines Vektorraums

Ein Vektorraum V heißt endlich-erzeugt, wenn es ein endliches Erzeugendensystem von V gibt.

Sei nun $\{0\} \neq V$ ein endlich erzeugter Vektorraum über K, dann heißt die Zahl

$$\dim_K(V) := \text{Anzahl der Elemente einer Basis von } V$$

die Dimension von V. Für den Nullraum {0} definieren wir extra: die leere Menge ist eine Basis von {0} und $\dim_K(V) = 0$.

Die Dimension eines Vektorraums ist also die kleinste Anzahl von Zahlen (oder, allgemeiner, von Elementen von K), die für die vollständige Beschreibung eines Vektors in V nötig sind.

Zum Beispiel ist $\dim_K(K^n) = n$ und $\dim_K(K^{m \times n}) = m*n$

Cool zu wissen ist auch (haha), dass wenn V ein Vektorraum über K mit der Dimension n ist, und $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ (1) eine Basis, (2) ein Erzeugendensystem und (3) linear unabhängig.

Für Lösungsräume von homogenen LGS gilt:

Die Dimension des Lösungsraums eines homogenen Systems linearer Gleichungen ist gleich der Anzahl der Unbekannten minus dem Rang der Matrix der Koeffizienten dieses Systems.

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Dimension des Spaltenraums von A.

Wir wissen, der Spaltenraum von $A^{m \times n}$ ist $A^{m \times 1}$ und die Dimension davon ist m.

Schreibweise ist: rg(A)

Leichter zu berechnen ist der Rang, wenn die Matrix Stufenform hat, weil dann ist der Rang = Anzahl an Pivots,
die Anzahl an Spalten – rg(A) gibt dann (bei Stufenform) die Dimension an.

Untervektorraum

Ein Untervektorraum U muss in dem Vektorraum V liegen (also $U \subseteq V$) und drei Bedingungen erfüllen:

- **$U \neq \emptyset$, bzw. $v_0 \in U$**: U darf also nicht leer sein, bzw. muss den Nullvektor beinhalten
- **Abgeschlossenheit bzgl der Vektoraddition:** $\forall\, u,v \in U := u + v \in U$
  Wenn $u,v \in U$, muss auch deren Summe im Untervektorraum sein.
- **Abgeschlossenheit bzgl der Skalar-Multiplikation:** $\forall\, k \in K, u \in U := k * u \in U$
  Wenn $u,v \in U$, muss auch deren Skalar-Multiplikation im Untervektorraum sein.

Natürlich müssen alle Bedingungen eines Vektorraums auch für einen Untervektorraum gelten (die nicht ident mit denen des Übervektorraums sind)

Man schreibt dann auch U $\leq_K$ V oder U ≤ V

*Welche Mengen sind Untervektorräume von **Q**^{3x3} (über **Q**)?*

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A \text{ invertierbar }\},$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{12} - A_{22} + A_{31} - A_{21} = 1\},$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 = 0\},$$
$$\{sE_{13} + tE_{31} - 2uE_{33} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid s, t, u \in \mathbb{Q}\}.$$

(Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).

Zur Erinnerung: Standardmatrizen sind jene, wo genau ein Element in der Matrix gleich 1 ist, alle anderen gleich 0:

$$E_{21} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Die Erste:

- Nullvektor enthalten
- Die Summe zweier Vektoren an rationale Zahlen ist immer eine rationale Zahl, weil auch jede invertierte rationale Zahl eine rationale Zahl ist.
- Gleich auch jede Skalare-Multiplikation mit einer rationalen Zahl des Körpers **Q** mit einer rationalen Zahl von **A**

Damit ist die erste ein Untervektorraum

Die Zweite:

- Nullvektor enthalten
- Die Summe zweier Vektoren u,v ∈ U ist nicht zwingend ∈ U.
  Beweis: Siehe Zettel

Damit ist die der zweite Untervektorraum kein Untervektorraum von **Q**^{3x3}

Die Dritte:

- Nullvektor enthalten
- Die Summe zweier Vektoren u,v ∈ U sind immer ein Element des Vektorraums **Q**^{3x3}
  Beweis: siehe Zettel
- Das Produkt zweier Vektoren u,v ∈ U ist nicht immer ein Element des Vektorraums **Q**^{3x3}
  Beweis: siehe Zettel
- Damit ist die der dritte Untervektorraum wieder ein Untervektorraum von **Q**^{3x3}

Die Vierte:

- Nullvektor enthalten
- Die Summe zweier Vektoren u,v ∈ U sind immer ein Element des Vektorraums **Q**^{3x3}
  Beweis: siehe Zettel
- Das Produkt zweier Vektoren u,v ∈ U ist nicht immer ein Element des Vektorraums **Q**^{3x3}
  Beweis: siehe Zettel

Damit ist die der vierte Untervektorraum kein Untervektorraum von **Q**^{3x3}

Basis eines Vektorraums

Grundsätzlich: Eine Basis ist ein **linear unabhängiges Erzeugungssystem**.

Die Basis ist eine Teilmenge des Vektorraums, mit dem sich jeder Vektor des Vektorraums „basteln“ lässt. Man kann damit also jeden Vektor eindeutig als endliche Linearkombination darstellen.

Jeder Vektorraum hat eine Basis! (und meistens besitzt ein Vektorraum mehrere Basen).

Ein Erzeugendensystem ist ein „Bausatz“, mit dem man jeden beliebigen Vektor im Vektorraum „basteln“ kann.

*Wenn aus einem **Set an Vektoren** der **gesamte Vektorraum** gebaut werden kann, ist es ein **Erzeugendensystem**.*

*Wenn aus **irgendwelchen Teile** in diesem Set **andere Teile** desselben Sets **gebaut** werden können, ist es **linear abhängig**.*

*Nur wenn alle Teile in dem Set **nicht von anderen Teilen gebaut** werden kann, ist es **linear unabhängig**.*

Beispiel

Weil dieses Beispiel EZS, linearer Unabhängigkeit und Basis ziemlich gut mit Stufenform-Matrix beschreibt, hier ein Auszug aus dem Skriptum:

2) A sei eine rationale Matrix in Stufenform mit m Zeilen und n Spalten. Begründen Sie:
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \dots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn die letzte Zeile von A nicht nur Nullen enthält.
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \dots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
   - Das n-Tupel $(A_{-1}, \dots, A_{-n})$ der Spalten von A ist genau dann eine Basis von $\mathbb{Q}^{m\times 1}$, wenn A die Einheitsmatrix ist.

1.) Zunächst: Was ist ein Erzeugendensystem?

Einfach formuliert, ein Erzeugendensystem ist ein „Bausatz“, mit dem man jeden beliebigen Vektor im Vektorraums „basteln“ kann. [1]

Ist die letzte *(und wohlgemerkt auch jede andere)* Zeile von A gleich null, ist auch jeweils die letzte Zeile meiner $\mathbf{Q}^{mx1}$ n-Tupels der Spalten von A gleich null. Und egal wie ich die Koeffizienten für das EZS wähle, das Resultat wird in der letzten Zeile ebenfalls immer null haben. Damit kann ich also nur jene Vektoren des Vektorraums bauen, die in der letzten Zeile null haben, nicht aber jeden beliebigen.

2.) Wieder zunächst: Wann ist etwas linear unabhängig?

Nur wenn alle Teile in einem Bausatz/EZS nicht von den anderen Teilen gebaut werden kann, ist es linear unabhängig. [1]

Da wir eine Matrix in Stufenform haben, kann in jeder Spalte mit einem Pivot nur der Pivot in der entsprechenden Zeile stehen. Alle anderen Zeilen sind null. Weiteres können wir folglich sagen, dass jede Spalte den Pivot in einer anderen Zeile hat.

Aber ist es linear unabhängig? Ja! Da in jeder Spalte ein Pivot steht (und dieser immer in einer anderen Zeile ist), können wir in diesem Bausatz aus keiner Spalte unseres n-Tupels eine andere Spalte bauen.

3.) Nochmal zunächst die Frage, was ist eine Basis?

Grundsätzlich: Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugungssystem.[1]

Wir betrachten also die zwei vorherigen Begründungen (erste = Erzeugungssystem, zweite = linear unabhängig), sowie die Ausgangsaussage „A ist Matrix mit Stufenform".

Es darf in jeder Spalte und jeder Zeile nur ein Pivot stehen. Alle anderen sind 0. Das ist eine Einheitsmatrix der Größe I_m

Linearkombination

Sei V ein Vektorraum über K und
$v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V

Ein Vektor $w \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ wenn es Elemente $c_1, \ldots, c_n$ in K gibt, sodass

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n \ (= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(c_i v_i)\ )$$

Dann heißen die Elemente $c_1, \ldots, c_n$ Koeffizienten von w bezüglich $v_1, \ldots, v_n$

Die Menge
$$\{\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \,|\, c_1, \ldots, c_n \in K\}$$
aller Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist ein Untervektorraum von V, enthält $v_1, \ldots, v_n$ und heißt der von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugte Untervektorraum von V. Er wird bezeichnet:

$${}_K\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=1}^{n} K v_i$$

Koordinatenspalte

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V

dann heißt das eindeutig bestimmte n-Tupel $(c_1, \ldots, c_n)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i v_i)$$

das Koordinaten-n-Tupel des Vektors w bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_n$.
Das Element c_i heißt dann Koordinate von W beim Basisvektor v_i (bzw. die i-te Koordinate von w bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$).
Die Spalte $c_1, \ldots, c_n$ heißt dann Koordinatenspalte des Vektors w bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$.

Skalarprodukt

Grundsätzlich ist ein Skalarprodukt auf V eine Funktion:

$$\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbf{R},\ (v, w) \to \langle v, w\rangle$$

welche folgenden Eigenschaften erfüllen:

Für alle $c \in \mathbf{R}$ und $u,v,w \in V$ gilt

1) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
   „$\langle -,- \rangle$ ist *symmetrisch*"

2) <u, c(v+w)> = c<u, v> + c<u, w>
   „<-,-> ist *linear in der zweiten Komponente*“
3) Für v ≠ 0 ist <v, v> eine positive reelle Zahl
   „<-,-> ist *positiv definit*“

Aus 1) und 2) folgt, dass auch <c(u+v), w> = c<u, w> + c<v, w>

Standardskalarprodukt

$$\langle -,- \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad ((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$ und heißt Standardskalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$. Für die Standardbasis (e_1, ..., e_n) gilt:

<e_i, e_j> = $\boldsymbol{\delta}_{ij}$
||e_i|| = 1

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right) \text{ ist die Standardbasis von } K^{4\times 1}$$

Im Grunde verwenden wir jedes Skalarprodukt als Standardskalarprodukt, aber man könnte theoretisch das Skalarprodukt generischer verwenden als das Standardskalarprodukt.

Euklidischer Raum

Euklidischer Raum ist ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt:

(V, <-,->) v, w ∈ V

Orthogonal zueinander

stehen zwei Vektoren/Geraden, wenn <v, w> = 0. Man schreibt dann v ⊥ w.

Lösungsmenge LGS

A sei eine Matrix in Stufenform.

Die Menge L(A, b) heißt Lösungsmenge des durch A und b gegebenen Systems linearer Gleichungen. Wenn b = 0 (Nullspalte), heißt die Menge **homogen**.

Wir suchen also die Basis der homogenen Lösungsmenge von A.

Es gibt genau so viele Basen, wie Spalten ≠ Pivot-Spalte

Da wir L(A, 0) suchen, setzen wir die unsere Stufenform-Matrizen gleich dem Nullvektor mit entsprechend vielen Zeilen und suchen die Lösungen (wobei die triviale Lösung = 0 ignoriert wird).

Anders formuliert, suchen wir für jede Spalte ungleich Pivot-Spalte einen Vektor, mit dem das Produkt der Null-Vektor ist, wobei der Null-Vektor selbst **nicht** als Faktor verwendet werden darf.

Also: Stufenformmatrix * *was* = Nullvektor, wobei *was* ≠ Nullvektor

Frage: Wie berechnet man die Lösungsmenge v. LGS?

Eine gute Beschreibung von L(A, b) heißt:

„Berechne irgendeine Lösung von (A, b) und eine Basis des Lösungsraums (A, 0)“

Damit lässt sich durch endlich viele Daten eine (möglicherweise) unendliche Lösungsmenge bestimmen.

(K)Eine/Mehrere Lösungen?

Wie entscheidet man, ob ein System linearer Gleichungen eine Lösung hat – und wenn ja, wie schreibt man solche an?

Die Entscheidung, ob eine Stufenform-Matrix eine Lösung hat, hängt von der Form der Matrix ab. Gibt es in **jeder Zeile einen Pivot**, existiert **definitiv eine Lösung**. Sollte in der Stufenform-Matrix jedoch **eine (oder mehrere) Nullzeilen** vorhanden sein, so muss auch der **Vektor *b*** im System linearer Gleichungen **in den selben Zeilen das Element 0** beinhalten.

Frei formuliert, ich muss mit **beliebigen Koeffizienten des Vektorraums von *A* nach *B* kommen**. Ist das **nicht möglich**, gibt es **keine Lösung**.

EIN LGS hat:

Genau eine Lösung, wenn

Es linear unabhängig ist und dadurch genau bestimmt ist.

Keine Lösung, wenn

Das LGS „widersprüchlich“ ist, bzw. in einer Nullzeile ein Ergebnis ≠ 0 rauskommt.

Auch gut zu merken, wenn $A \in K^{m \times n}$ und $m < n$ ist (also mehr Spalten als Zeilen, bzw. Unbekannte als Gleichungen) dann gibt es immer eine Lösung, die nicht trivial ist.

Mehrere Lösungen, wenn

Es linear Abhängig ist, also ein Teil von anderen gebaut werden kann.

Existiert eine Lösung, so berechne ich eine beliebige Lösung für die Gleichung, ermitteln *n*-beliebige Basen des Vektorraums L(A, 0), wobei *n* der Anzahl an Spalten ≠ Pivot-Spalte entspricht. Das heißt, wir berechnen eine Basis aus den Pivot-Spalten für alle Spalten, die keine Pivot-Spalte sind.

Die Lösung wird dann mit allen Vielfachen (des Vektorraums) der ermittelten Basen summiert und stellt damit alle Lösungen, sprich die Lösungsmenge dar.

$$L(A, b) := \{ \text{LÖSUNGSVEKTOR} + C_1 * \text{BASISVEKTOR}_1 + \ldots + C_N * \text{BASISVEKTOR}_N \mid C \in \text{VEKTORRAUM} \}$$

Also durch welche (endlich vielen) Daten wird die Lösungsmenge eines LGS beschrieben?

Durch irgendeine Lösung von (A, b) und eine Basis des Lösungsraums (A, 0)

Leer oder nicht leer?

Eine Lösung L(A,b) ist genau dann **nicht** leer, wenn für alle i > Anzahl Pivots[1] gilt, dass $b_i = 0$ ist. Das heißt, der Vektor b muss in der Zeile i = 0 sein, wenn in der Zeile in A eine Nullzeile steht.

Steht in A in der Zeile 3 eine Nullzeile (und damit auch in allen folgenden), muss $b = \{x_1, x_2, 0, \ldots, 0\}$ sein. Ist das nicht der Fall, ist die Lösung leer.

Damit ist in auf dem Übungsblatt L(A, b) leer, L(A, c) aber nicht leer.

Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus dient dazu, ein komplexes System linearer Gleichungen mittels elementarer Umformungen auf Stufenform zu bringen, um dann die Lösung (die bei elementaren Umformungen erhalten bleibt) leichter abzulesen.

Wir bringen eine Matrix in Stufenform. Dazu sehen wir uns zunächst A_{11} an.

Fall 1: Ist $A_{11} \neq 0$, können wir das Vielfache einer geeigneten Zeile von dieser abziehen, bis $A_{11} = 1$.

Fall 2: Ist $A_{11} = 0$, es gibt allerdings einen Index i > 1 mit $A_{i1} \neq 0$, können wir die Zeilen i und 1 vertauschen, und das oben beschrieben Szenario anwenden.

Fall 3: Wenn die gesamte Spalte, also $A_{\cdot 1} = 0$, können wir diese Spalte überspringen und mit $A_{\cdot 2}$ wieder zu Fall 1, bzw. Fall 2 gehen.

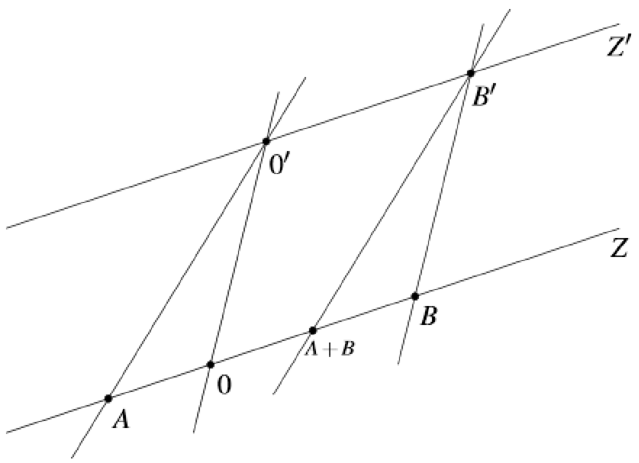
Das machen wir solange, bis wir Stufenform haben. Dann können wir auch sehr einfach den Lösungsraum berechnen.

Vektorrechnung und Geometrie

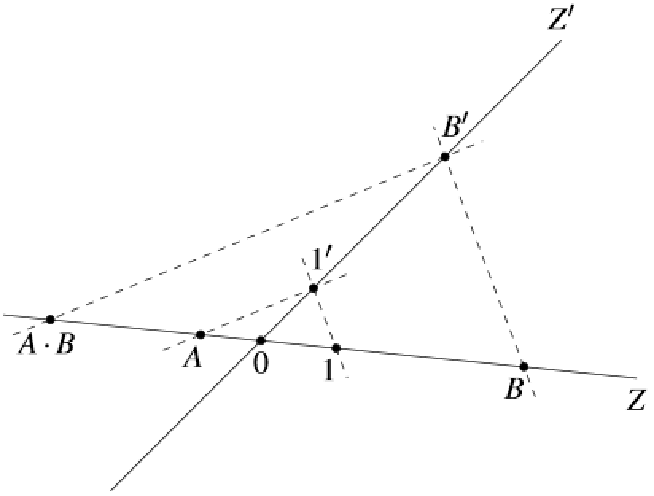
Rechnen mit Punkten

Das Rechnen mit Punkten auf einer Zahlengerade ist relativ simpel:

Addition auf Zahlengerade



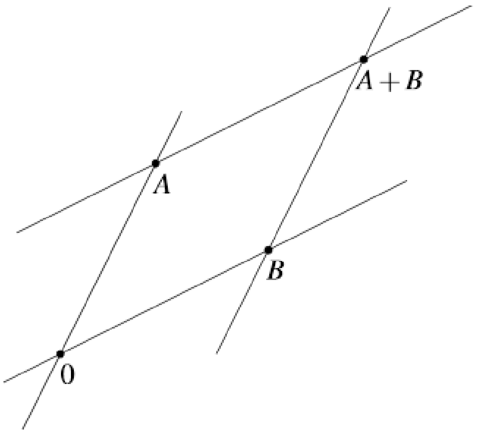
Multiplikation auf Zahlengerade



Wollen wir das Ganze jedoch nichtmehr nur auf einer Zahlengeraden, sondern auf einer Zeichenebene durchführen, müssen wir eine kleine Änderung durchführen:

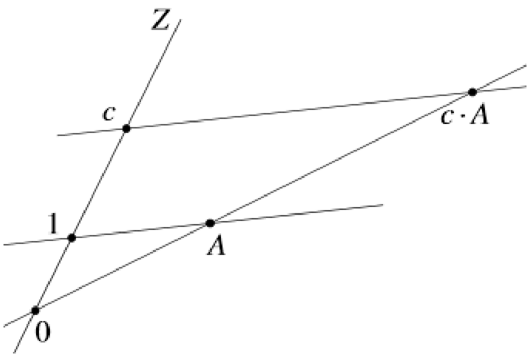
Addition auf Zeichenebene

Wenn 0, A und B nicht auf einer Zahlengerade liegen, müssen wir einen Punkt 0 frei definieren und dann verschieben:



wobei dies nur gilt, wenn A & B nicht auf einer Zahlengeraden liegen!

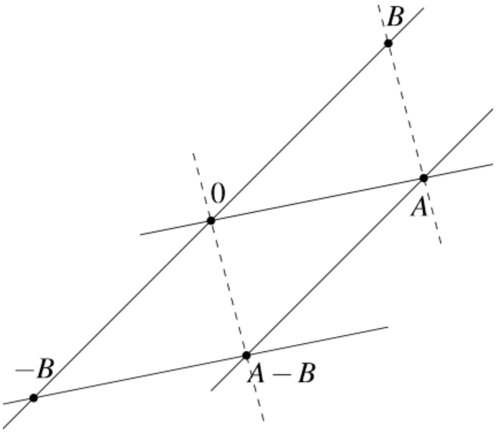
Multiplikation auf Zeichenebene



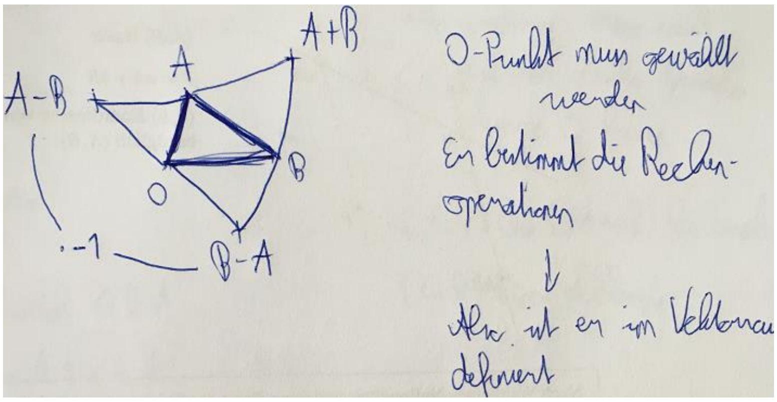
Angemerkt, 1 muss auf der Zahlengerade zwischen 0 und c gesetzt werden.

Wir merken uns: Bei Addition erzeugen wir ein Viereck, bei Multiplikation erzeugen wir Dreiecke.

Subtraktion auf der Zeichenebene

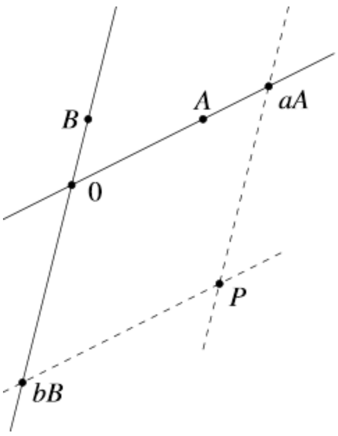


Zusammenfassung



Die Wahl eines Nullpunktes in der Ebene und von zwei Punkten A, B, sodass 0, A, B nicht auf einer Zahlengerade liegen, nennt man auch Wahl eines Koordinatensystems.

Diese Wahl kann man auch durch die Wahl eines Zahlengeraden-Paars, welche genau einen Punkt gemeinsam haben, treffen, indem man auf jeder Geraden einen Punkt, der nicht der Schnittpunkt ist, wählt. Der Schnittpunkt ist dann der Nullpunkt und das Paar, der auf den Geraden gewählten Punkten ist die **Basis**.



(A,B) Basis

$P = aA + bB$

(a,b) Koordinaten von P bezüglich (A,B)

Nach Wahl eines Nullpunktes und einer Basis in der Zeichenebene (mit 0) entspricht:

- *jedem Punkt genau ein Zahlenpaar,*
- *der Summe von Punkten, die Summe der entsprechenden Zahlenpaare und*
- *dem c-fachen eines Punktes das c-fache des entsprechenden Zahlenpaares*

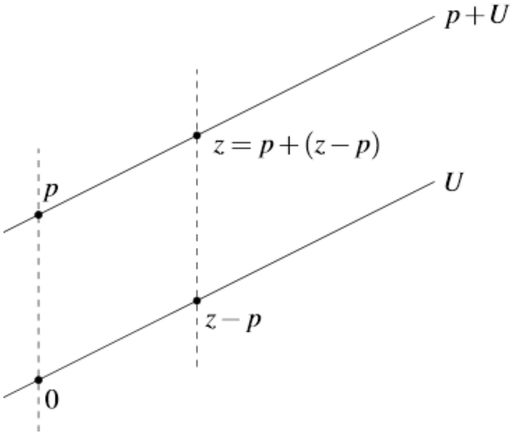
Affiner Unterraum

Wenn ein Vektor $p \in V$ und ein Untervektorraum U von V existiert, sodass

$$Z = p + U := \{ p + u \mid u \in U \}$$
Z ist Teilmenge von V

p heißt dann Aufpunkt von Z und
U der zu Z parallele Untervektorraum.

Man verschiebt also den Untervektorraum U um den Vektor p.



Cool ist: Ein Affiner Unterraum ist eine Lösung eines LGS: $\{(v_1,\ldots,v_n) + t*(b_1,\ldots,b_n)\}$

Es gilt:

$U = \{w - z \mid w, z \in Z\} =: Z - Z$, insbesondere ist der zu Z parallele Untervektorraum eindeutig durch Z bestimmt.
Für alle $q \in Z$ gilt $Z = q + U$, und somit kann jedes Element von Z als Aufpunkt gewählt werden.
Z ist ein Untervektorraum von V genau dann, wenn $0_V \in Z$ ist.

Wann sind zwei affine Unterräume parallel?

Zwei affine Untervektorräume sind genau dann parallel, wenn es einen Vektor $p \in V$ gibt, für den gilt:

$Z - p = U := \{ z - p \mid z \in Z \}$

Dimension

Ist $\dim_K(Z) = 0$, heißt Z ein Punkt, bei $\dim_K(Z) = 1$ eine Gerade und bei $\dim_K(Z) = 2$ eine Ebene. Wenn $\dim_K(Z) = n-1$, nennen wir dies Hyperebene, auch wenn wir nicht wissen was dat ist.

Parameterform

Ist ein **Aufpunkt *p* ∈ V** und eine **Basis des parallelen Untervektorraums** gegeben, dann lässt sich mithilfe von bestimmten Elementen $c_1, \ldots, c_k \in K$ jedes Element $z \in Z$, eines affinen Unterraums von V, schreiben als

$$Z = p + \sum_{k=1}^{n} (c_i v_i)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Mit der Parameterform können beliebig viele Elemente von Z angeschrieben werden.

Impliziter Form

$V = K^{n \times 1}$

$b \in K^{m \times 1}$

$A \in K^{m \times n}$

Wenn dann $Z = L(A, b)$, dann sagt man, dass Z durch das
System linearer Gleichungen (A, b) in impliziter Form gegeben ist.

Mit der impliziten Form lässt sich leichter beantworten, ob eine Spalte $y \in K^{n \times 1}$ in Z enthalten ist, durch Multiplikation von A mit y.

Abstand zwischen zwei Vektoren

<-,-> ist Skalarprodukt auf V.

Dann heißen:

$d: V \times V \to \mathbf{R}$
$(v, w) \to \|v - w\| := \sqrt{< v - w, v - w >}$

bzw.

$\|*\| : V \to \mathbf{R}$
$v \to \|v\| := \sqrt{< v, v >}$

Die von <-,-> induzierte Metrik, bzw. Norm auf V.

Die Zahl d(v,w) heißt Abstand zwischen v und w.

Die Zahl || v || = d(v,0) heißt Abstand zwischen v und 0, Norm, Betrag oder Länge von v

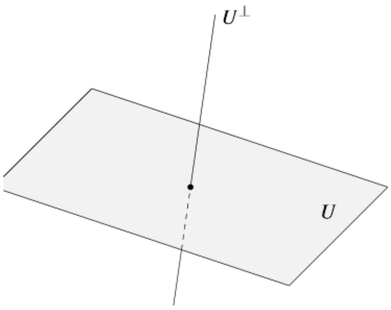
Fußpunkt des Lotes

Sei U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V und v ∈ V, dann gibt es genau einen Vektor $p_U(v) \in U$, sodass $v - p_U(v) \in U^\perp$

$$p_U(v) = \sum_{k=1}^{m} \langle u_k, v \rangle u_k \in U$$

Wenn v ∈ U, dann ist $v = p_U(v)$.

Diesen Vektor $p_U(v)$ nennt man Fußpunkt des Lotes:



Abstand eines Vektors zu einem affinen Unterraum

Nachdem wir den Fußpunkt des Lotes, der auf U liegt bestimmt haben – und dieser der geringste Abstand zwischen einem Punkt v und dem affinen Unterraum[1] U bestimmt – können wir den Abstand zwischen diesen Punkten definieren.

Die Zahl $\|v - p_U(v)\|$ heißt geringster Abstand von v zum affinen Unterraum U.

Orthogonales Komplement

Eine Gerade auf einer Ebene im rechten Winkel, welche den geringsten Abstand von einem Punkt zu dieser Ebene bestimmt, heißt orthogonales Komplement von der Ebene im Raum.

Diese Gerade ist das orthogonale Komplement von U in V:

$U^\perp := \{v \in V \mid \text{für alle } u \in U \text{ ist } \langle v, u \rangle = 0\}$

Gerade

Eine Gerade ist ein 1-dimensionaler, affiner Unterraum

Eine Gerade ist eine unendlich lange und in beide Richtungen unbegrenzte Linie. Durch zwei Punkte kann eine Gerade bestimmt definiert werden.

Eine Zahlengerade ist eine Gerade durch 0, auf der ein weiterer Punkt 1 ausgewählt wurde.

Ebene

Eine Ebene ist ein 2-dimensionaler Vektorraum

Orthonormalbasen

Ein n-Tupel (v_1, ..., v_n) in V heißt **orthonormal** bezüglich <-, -> wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ folgendes gilt:

$<v_i, v_j> = \delta_{ij}$

Ein n-Tupel (v_1, ..., v_n) in V heißt **Orthonormalbasis** bezüglich <-, -> wenn sie eine **Basis** von V **und orthonormal** bezüglich <-, -> ist.

Zum Beispiel ist die Standardbasis von $\mathbf{R}^n$ eine Orthonormalbasis bzgl. ihres Standardskalarprodukts.

Cool für die Klausur ist zu wissen, dass eine Basis (v_1, ..., v_n) von V genau dann eine Orthonormalbasis bzgl. des Std. Skalarproduktes (<-, ->) ist, wenn die Gram'sche Matrix gleich der Einheitsmatrix I_n ist, wobei die Gram'sche Matrix ist:

$$(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$$

„Auf einem reellen Vektorraum ein Skalarprodukt wählen"
bedeutet dasselbe wie
„von Basis dieses Vektorraums festlegen, dass sie eine ON-Basis ist".
nämlich:
„Ein rechtwinkliges Koordinatensystem wählen"

Ein orthonormales n-Tupel ist dabei immer linear unabhängig. Weiteres wichtig ist:

„Die Koordinate von w bei v_i ist das Skalarprodukt von v_i mit w" (also sehr leicht zu berechnen:)

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, w \rangle v_i$$

Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren

Damit kann eine ON-Basis (v_1, ..., v_n) von V berechnet werden:

- $u_1 := w_1$
- Für $2 \leq j \leq n$ sei

$$u_j := w_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\langle u_i, w_j \rangle / \langle u_i, u_i \rangle) u_i$$

- Für $1 \leq j \leq n$

$$v_j := \|u_j\|^{-1} u_j$$

Jeder euklidische Raum hat eine ON-Basis. Für alle j ist
$_{\mathbf{R}}<v_1, ..., v_j> = {}_{\mathbf{R}}<w_1, ..., w_j>$

Winkel

Cosinus und Sinus

Wir haben zwei Halbgeraden[1]:

$w + \mathbf{R}_{\geq 0}u$, $w + \mathbf{R}_{\geq 0}v$, wobei w der Anfangspunkt ist.

Der Winkel zwischen diesen beiden Halbgeraden lässt sich formell als

Länge des (kürzeren) Bogens zwischen
$w + ||u||^{-1}$ und $w + ||v||^{-1}$
auf dem Einheitskreis um w

beschreiben. Der Einheitskreis ist ein Kreis ($\{v \in V \mid ||v-w|| = r\}$, $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$) mit r=1.

Da diese Zahl aber nicht von w und v abhängen soll, gehen wir im Weiteren davon aus, w=v=0. Sei dann

$u' := ||u||^{-1} u$, $v' := ||v||^{1} v$

dann ist der Fußpunkt des Lotes $p_{\mathbf{R}u}(v')$

$\langle u', v' \rangle u'$

Die Zahl $|\langle u', v' \rangle|$ ist der Abstand zwischen 0 und $p_{\mathbf{R}u}(v')$, welcher leichter gemessen werden kann, als die Länge des kürzeren Bogens.

Wenn jetzt $\alpha \in [0, \pi]$ die Länge des kürzeren Bogens zwischen u‘ und v‘ ist, dann:

$\cos(\alpha) := \langle u', v' \rangle = \langle u, v \rangle / (||u|| * ||v||)$ „(Cosinus von Alpha)“

Weil zu jeder Zahl $z \in [-1, 1]$ genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit $\cos(\alpha) = z$ gibt, ist die Funktion

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1], \alpha \to \cos(\alpha)$

$\sin(\alpha)$ hingegen bezeichnen wir den Abstand von v‘ zur Geraden $\mathbf{R}u$ für $\alpha \in [0, \pi]$.

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

Winkel zwischen zwei Halbgeraden[1]

Sei $u, v, w \in V$; $u \neq 0$ und $v \neq 0$; dann heißt

$\cos(\alpha) = \langle u, v \rangle / (||u|| * ||v||)$

der Winkel zwischen den Halbgeraden $w + \mathbf{R}_{\geq 0} u$ und $w + \mathbf{R}_{\geq 0} v$, kurz **Winkel zwischen u und v**.

Orientierung, Volumen und Vektorprodukt

Orientierung

Die Definition im Skriptum ist schwierig, daher definiere ich zunächst die Matrix T:

Sei $T \in K^{nxn}$, $A = (a_1, ..., a_n)$, $B = (b_1, ..., b_n)$, wobei A und B Basen von V sind.
Dann können wir die Matrix A (also die a_i) durch eine Linearkombination bezüglich der Basis B schreiben:

$$a_j = w_{1,j} * b_1 + ... + w_{n,j} * b_n$$

Die ganzen $w_{i,j}$ wiederrum bilden die Matrix T. Wir nennen sie auch **Transformationsmatrix**. (heh, weil wir B nach A transformieren)
Nun heißt eine Matrix **gleich orientiert**, wenn det(T) > 0 ist, bzw. **verschieden orientiert**, wenn det(T) < 0 ist.

Was ist jetzt aber Orientierung?

Wenn wir nun eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V auswählen, dann wird die Menge aller Basen in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt:

jene Teilmenge, aller gleich wie $(v_1, \ldots, v_n)$ orientierten Basen und
jene Teilmenge der anderen Basen.

Diese beiden Mengen heißen Orientierungen von V.

Wählen wir eine Basis von V aus, wird automatisch eine Orientierung festgelegt, welche zusammen mit dem V **orientierter Vektorraum** heißt. Die Basen in der gegebenen Orientierung heißen *positiv orientiert*, die anderen *negativ orientiert*.

Parallelotop

$P(w_1, \ldots, w_2) := \{c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n \mid 0 \leq c_i \leq 1, c_i \in \mathbf{R}\}$

$w_1, \ldots, w_n \in V$

Dann heißt $P(w_1, \ldots, w_n)$ das von $w_1, \ldots, w_n$ erzeugte Parallelotop.

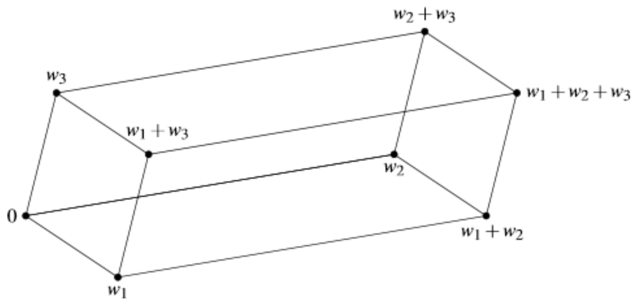


ABBILDUNG 1. Parallelotop $P(w_1, w_2, w_3)$

Parallelogramm

Ist ein Parallelotop, mit n = 2, also $P(w_1, w_2)$

Volumen

Die Zahl

$$\mathrm{vol}(P(w_1, \ldots, w_n)) := |\det(S)|$$

heißt Volumen von $P(w_1, \ldots, w_n)$. Dabei ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ON-Basis von V, $w_1, \ldots, w_n \in V$ und $S \in \mathbf{R}^{n\times n}$ die Matrix, deren i-te Spalte die Koordinatenspalte von $w_i \in V$ bzgl. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist. Haha.

Sei nun wieder $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ON-Basis von V und $w_1, \ldots, w_n \in V$, dann ist

$$\mathrm{vol}(P(w_1, \ldots, w_n)) = \sqrt{\det((\langle w_i, w_j \rangle))_{1 \leq i,j \leq n}}$$

Wichtig! Das Volumen eines Parallelotops hängt nicht von der Wahl der ON-Basis $(v_1, ..., v_n)$ ab. Wenn $(w_1, ..., w_n)$ eine ON-Basis von V wäre, dann ist $vol(P(w_1, ..., w_n)) = 1$. Fancy.

Es seien $u, w \in V$, $u \neq 0$, $w \neq 0$ und α der Winkel zwischen u und w. Dann ist

$$vol(P(u,w)) = \|u\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\alpha) .$$

Vektorprodukt/Kreuzprodukt

V sei ein dreidimensionaler, orientierter euklidischer Raum.

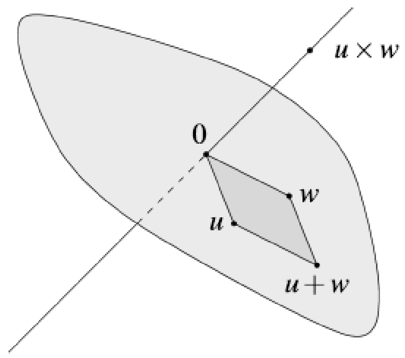
Für u, w ∈ V sei u x w der eindeutig bestimmte Vektor in V mit drei Eigenschaften:

- $\|u \times w\| = vol(P(u,w))$
- u x w und u, sowie u x w und w, stehen zueinander senkrecht
- wenn $u \times w \neq 0$, dann ist (u, w, u x w) eine positiv orientierte Basis von V

Bemerkung:

$$\|u \times w\| = vol(P(u,w)) = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle u,w\rangle & \langle w,w\rangle \end{pmatrix}}$$

Sollte u, w linear abhängig sein, so ist u x w = 0,
sollte u, w jedoch linear unabhängig sein, so ist
$u \times w \perp u : \langle u\, x\, w, u\rangle = 0$ und $u \times w \perp w : \langle u\, x\, w, w\rangle = 0$



$$\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a2 * b3 - a3 * b2 \\ a3 * b1 - a1 * b3 \\ a1 * b2 - a2 * b1 \end{pmatrix}$$

Folgende Regeln gelten:

(1) $v_1 \times v_2 = v_3$, $v_1 \times v_3 = -v_2$, $v_2 \times v_3 = v_1$.

(2) *Ist* (u,w) *eine ON-Basis des von* u *und* w *erzeugten Untervektorraums, dann ist* $(u,w,u\times w)$ *eine wie* (v_1,v_2,v_3) *orientierte ON-Basis von* V.

(3) *Für* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, *ist*

$$(\sum_{i=1}^{3} a_i v_i) \times (\sum_{i=1}^{3} b_i v_i) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} v_1 - \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} v_2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} v_3 .$$

(4) *Für* $u,u',w,w' \in V$, $c,d \in \mathbb{R}$ *ist*

$$c(u+u') \times w = c(u \times w) + c(u' \times w),$$

$$u \times (d(w+w')) = d(u \times w) + d(u \times w')$$

$$\textit{und} \;\; u \times w = -w \times u .$$

(5) *Für* $x,y,z \in V$ *ist* $x \times (y \times z) = \langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z$.

(6) *Für* $x,y,z \in V$ *ist*

$$(x\times y)\times z + (z \times x) \times y + (y \times z) \times x = 0 .$$ ← Jakobi-Identität

(Beachte: im Allgemeinen ist $(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z)$*).*

Das heißt, das Assoziativgesetzt gilt hier nicht!

Permutationen, Determinanten und Eigenwerte

Permutation

Sei X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine Menge mit n Elementen, dann ist eine n-stellige Permutation eine bijektive Abbildung f: X → X.

Das heißt, jedem Element der Menge wird ein Element der gleichen Menge zugeordnet. Man könnte auch sagen, durch die Permutation nimmt jedes Element x_i für i = 1, ..., n den Platz des ihm zugeordneten Elements $f(x_i)$ ein.

Eine Permutation

σ : {1, 2, ..., n} → {1, 2, ..., n}

schreibt man oft auch als 2xn-Matrix:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(\ldots) & \sigma(n) \end{matrix}$$

Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zykel, jeder Zykel als Produkt von Transpositionen geschrieben werden.

Hintereinanderausführung von Permutationen

Die Permutationen der Menge {1, 2, ..., n} bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe S_n, auch Permutationsgruppe vom Grad n genannt.

Definition:

Zwei n-stellige Permutationen $\tau, \pi \in S_n$ lassen sich hintereinander ausführen, indem man zuerst die rechte Permutation anwendet und das Resultat dann auf die Zweite. Man schreibt:

$\tau \circ \pi$

Es wird zuerst π, danach τ angewandt. Das nennt man nicht Multiplikation, sondern Komposition oder Verknüpfung, bzw. Produkt zweier Permutationen, und das Resultat ist wieder eine n-stellige Permutation.

Sie ist in der Regel nicht kommutativ, definitiv aber assoziativ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \to 2 \to 1$$
$$2 \to 1 \to 3$$
$$3 \to 3 \to 2$$

Zykel

Ein Zykel ist eine Permutation, in der bestimmte Elemente einer Menge im Kreis vertauscht werden und die übrigen Elemente auf sich selbst abgebildet werden.

Heißt, sei $l \in \mathbf{N}$, $l \geq 2$ und seien $j_1, \ldots, j_l$ paarweise verschiedene Elemente von $\{1, \ldots, n\}$, dann ist diese Funktion ein Zykel der Länge l (kurz: $(j_1\ j_2 \ldots j_l)$)

$$\tau: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$i \to \begin{cases} i & \text{falls } i \notin \{j_1, \ldots, j_l\} \\ j_k+1 & \text{falls } i = j_k \text{ mit } k < l \\ j_1 & \text{falls } i = j_l \end{cases}$$

Ein Zykel der Länge 2 heißt **Transposition** oder Vertauschung von j_1 und j_2.

Zwei Zykel heißen disjunkt, wenn deren Disjunktion die leere Menge ist.

Seien zwei disjunkte Zykel $(i_1, \ldots, i_l)$ und $(j_1, \ldots, j_k)$, dann gilt:

- $(i_1, \ldots, i_l)(j_1, \ldots, j_k) = (j_1, \ldots, j_k)(i_1, \ldots, i_l)$
- $(j_1, \ldots, j_k)^{-1} = (j_k, j_{k-1}, \ldots, j_1)$

Beispiel

$(2\ 4\ 1) = (1\ 2\ 4) = (4\ 1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Vorzeichen einer Permutation

Fixpunkt:
Sei M eine Menge und $f: M \to M$ eine Funktion, dann heißt $x \in M$ Fixpunkt, wenn $f(x) = x$

Sei $\sigma \in S_n$ (Permutation Element der **Permutationsgruppe mit Grad n**, mit **p Fixpunkten** und **m Zyklen**, dann heißt die Zahl

$$\text{sign}(\sigma) := (-1)^{n-p-m}$$

Vorzeichen, bzw. Signum von σ.

Grad beschreibt die Anzahl an Zahlen in der Permutation {1, 2, ..., n}
Ein **Fixpunkt** ist ein Element $x \in M$, wenn $\mathbf{f(x) = x}$ für $f: M \to M$

Ist eine wichtige Kennzahl von Permutationen und z.B. für Leibniz-Formel für Determinante.

Haben wir zwei Permutationen kann das gemeinsame Vorzeichen als Produkt ihrer eigenen Vorzeichen geschrieben werden $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma) * \text{sign}(\tau)$, bzw. $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$

Inverses Element

Zu jeder Permutation gibt es genau ein inverses Element, welches man erhält, indem man die untere Zeile mit der oberen Zeile vertauscht:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Wobei die Komposition davon gleich:

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = \text{id}.$$

und

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Funktionen

Punktweise Addition & Skalar-Multiplikation

M := Menge

W := Vektorraum über K

$$F(M, W) := \{f \mid f: M \to W\}$$

Punktweise Addition:

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m) \ \forall\, m \in M$$

Punktweise Skalar-Multiplikation

$$(cf)(m) := cf(m) \ \forall\, m \in M$$

Die Menge aller Funktionen von M nach W mit punkweiser Addition und der punktweisen Skalar-Multiplikation ist ein Vektorraum über K und heißt Vektorraum der W-wertigen Funktionen auf M

Für M = N erhält man als Spezialfall den Vektorraum der Folgen in W

$$F(\mathbf{N}, W) = \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \mid \forall\, n \in \mathbf{N} \text{ ist } a_n \in W\}$$

komponentenweisen Addition

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} + (b_n)_{n \in \mathbf{N}} := (a_n + b_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

komponentenweisen Skalar-Multiplikation

$$c * (a_n)_{n \in \mathbf{N}} := (c * a_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

Für M = {1, ..., n} erhält man den Vektorraum K^n.

Es gelten die Gesetze der **Assoziativität, Distributivität** und **Kommutativität**

Hintereinanderausführung von Funktionen

Seien
f: M → N und
g: P → Q

wobei für alle m ∈ M die Bilder f(m) Elemente von P sind (z.B. wenn N = P), dann heißt die Funktion

$$g \circ f : M \to Q,\ m \to g(f(m))$$

die Hintereinanderausführung von f und g (wir sprechen „g nach f") und schreiben oft nur gf statt g ∘ f. Beachte, g wird vor das f geschrieben, aber f wird zuerst „ausgeführt"!

Beispiel:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ z \mapsto 2z+1,$$

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto 3z-7,$$

$$gf : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto 6z-4.$$

aber! f ∘ g ist nicht definiert! weil z.b. g(0) = -7 keine natürliche Zahl ist und damit nicht in der „Urbildmenge" von f, sehr wohl aber in der Bildmenge von g.

Zudem ist die Hintereinanderausführung von Funktionen „assoziativ":

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f =: h \circ g \circ f$$

Identität

Eine Funktion

$$Id_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M},\ m \to m$$

heißt identische Funktion oder Identität auf **M**.

Sei f : **M** → **N**, dann ist

$$Id_{\mathbf{N}} \circ f = f = f \circ Id_{\mathbf{N}}$$

Bijektivität

Eine Funktion f : **M** → **N** heißt bijektiv, wenn jedes Element von **N** genau ein Urbild hat. Das heißt, man kann die Elemente in N (welche ein Bild von M sind, also nicht alle) exakt auf ein Element in M abbilden (deshalb bijektiv, weil es in beide Richtungen eindeutig bestimmbar ist, welches Element zu welchem gehört).

Werden zwei bijektive Funktionen hintereinander ausgeführt, so ist auch die Hintereinanderausführung wieder bijektiv.

Umkehrfunktion

Sei f : **M** → **N** eine bijektive Funktion, dann heißt die ebenfalls bijektive Funktion

$$f^{-1} : \mathbf{N} \to \mathbf{M},\ n \to \text{Urbild von } n \text{ bezüglich } f,$$

die zu f inverse Funktion oder auch Umkehrfunktion von f.

$$M \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N$$

Translationen

Translationen sind einfach nur **Verschiebungen**!

Das heißt, sei v ∊ V, dann ist folgende Funktion eine **Translation um v in V**:

$$t_v : V \to V,\ x \to x + v$$

Deshalb ist auch jede Translation bijektiv, die Umkehrfunktion von t_v immer $t_{(-v)}$. Auch eine Hintereinanderausführung zweier Translationen ist wieder eine Translation.

$$t_v \circ t_w = t_{v+w} = t_w \circ t_v$$

Gucksch du das:

$$T(V) \times T(V) \longrightarrow T(V),\ (s,t) \longmapsto s \circ t,$$

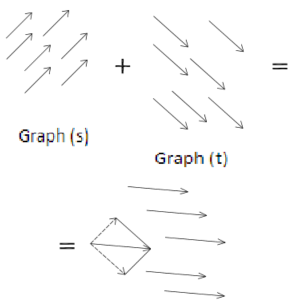
$$K \times T(V) \longrightarrow T(V),\ (c,t_v) \longmapsto t_{cv},$$

Damit ist T(V) ein Vektorraum („Translationen sind Vektoren“)

Pfeile

Sei M eine Menge. Wir bezeichnen das Paar (a, e) ∊ M x M als Pfeil in M mit Anfangspunkt a und Endpunkt e. Stichwort Richtungsvektoren.

Das heißt, wir kennen nicht nur die Strecke von a nach e, sondern auch die Reihenfolge, folglich die Richtung des Pfeils (deshalb ja auch Pfeil und nicht Stock)



Der Graph der Translation t_v ist die Menge

$$\{(y, y + v) \mid y \in V\} \subseteq V \times V$$

Die Gerade durch die Punkte $x \in V$ und $x + v$ ist $x + \mathbf{R}v$, also sind für alle $y, z \in V$ die Geraden durch y und $y + v$ bzw. durch z und $z + v$ parallel.

Polynomfunktion

Sei
$n \in \mathbf{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ (=Körper)

Dann heißt folgende Funktion **Polynomfunktion**

$f: K \to K$

$z \to a_0 + a_1{*}z + a_2{*}z^2 + \ldots + a_n{*}z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind die Koeffizienten von f

Eine Polynomfunktion von K nach K ist ein Unterring des Ringes F(K, K) aller Funktionen von K nach K.
Daher gelten alle Regeln von Funktionen für Polynomfunktionen.

Wofür Polynomfunktionen?

Zum Auswerten

Das heißt, zum Berechnen eines bestimmten Bildes $f(c) = \text{Summe}(a_i c^i)$. Darin liegt eine „rechnerische Bedeutung“

Interpolation

Sei eine endliche Teilmenge E von K und eine Funktion $g: E \to K$ gegeben.

Dann sei eine Polynomfunktion f von K nach K gesucht, sodass für alle $z \in E$ gilt: $f(z) = g(z)$

Man will also zwischen den Punkten der endlichen Teilmenge E zum Beispiel Punkte finden, um einen „flüssigen“ Übergang zwischen den Punkten zu gewährleisten.

Überprüfen der Gleichheit

von zwei Polynomfunktionen:

Sind zwei Polynomfunktionen durch ihre Koeffizienten gegeben, kann man feststellen (ist aber nicht so leicht), ob sie gleich sind:

$f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, z \to z$
und
$g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, z \to z^2$

Berechnen der Nullstellen

Finde alle Elemente $c \in K$ mit der Eigenschaft, dass $f(c) = 0$. Gibt es überhaupt solche Elemente? Wenn ja, wie viele?

Horner-Schema

Damit wir die Polynomfunktion mit möglichst wenig Multiplikationen berechnen können, gibt es das Horner-Schema.

$p(x) = x{*}b^n + x{*}b^{n-1} + \ldots x * b^0$ =>

$$p(x) = (\ldots(b_n x + b_{n-1})x + \cdots)x + b_0$$

oder

$$11 + 7x - 5x^2 - 4x^3 + 2x^4 \ = \ 11 + x \cdot (7 + x \cdot (-5 + x \cdot (-4 + x \cdot 2)))$$

Multiplikation zweier Polynomfunktionen

Sei f und g eine Polynomfunktion

Man müsste jeden Term des ersten Polynoms mit dem zweiten Polynom multiplizieren, was natürlich scheiße viel Aufwand ist. Gottseidank gilt aber:

[f * g](x) = f(x) * g(x). Daher müssen wir nur die Resultate beider Funktionen miteinander multiplizieren.

Determinante

Formal definiert ist die Determinante von A ∊ $K^{n \times n}$: des σ mit Minipenis is Sigma

$$\det(A) := \sum_\sigma sign(\sigma)\ A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \ldots A_{\sigma(n)n} \ \in K$$

Aber die Determinante ist verdammt einfach erklärt:

Wenn n = 1, dann ist det(A) = A_{11} Es gibt 1! = 1 Element

Wenn n = 2, dann

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Es gibt 2! = 2 Elemente

Wenn n = 3, dann

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} - \\ - A_{31}A_{22}A_{13} - A_{11}A_{32}A_{23} - A_{21}A_{12}A_{33}$$

3! = 6 Elemente

Und wenn n ≥ 4, dann ist es zu aufwändig (4! = 24), drum gibt es eine einfachere Variante dafür:

Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$ = Obere Dreiecksform, wobei * beliebige Elemente sind

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$ = Untere Dreiecksform

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$ = Diagonalmatrix

Dreiecksmatrix = Eine der beiden Dreiecksformen.

Weil jede Stufenformmatrix obere Dreiecksform hat, können wir jede quadratische Matrix durch Elementarumformung in eine Dreiecksmatrix umwandeln.

Und nun brauchen wir nur das Produkt der Diagonalelemente einer Dreiecksmatrix berechnen und erhalten die Determinante ☺

$$\det(A) = (-1)^k B_{11}B_{22} \dots B_{nn}$$

Wobei k die Anzahl an ausgeführten Zeilenvertauschungen und B die umgeformte Matrix von A sei.

Zum Beispiel ist $\det(I_n)$ immer = 1 ;)

Transponieren

Wir können zum Berechnen der Determinante die Matrix auch transponieren, dafür wird jede Zeile zu einer Spalte und jede Spalte zu einer Zeile:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Dabei ändert sich die Determinante nicht: $\det(A^T) = \det(A)$

Wichtige „Shortcuts“

Wenn zwei Zeilen oder zwei Spalten einer Matrix gleich sind, dann ist ihre Determinante gleich 0.

Wenn eine Frage kommt, „ist det(A + B) = det(A) + det(B)“ ist das immer falsch! Generell, wenn det(A+B) steht, fast immer falsch...

Aber det(A * B) = det(A) * det(B) = det(B*A).
„Determinate des Produkts ist das Produkt der Determinanten“

Sollte jedoch det(c * B), wobei $c \in K$ ist, kommen, dann beachte:
det(c * B) = $\mathbf{c^n}$ * det(B)

Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante nicht 0 ist!

Sei B die Matrix, die man erhält, wenn man zwei Zeilen/Spalten in A vertauscht, dann ist det(B) = -det(A)

Sei B die Matrix, die man erhält, wenn man ein skalares Vielfaches einer Zeile/Spalte von A zu einer anderen addiert, dann ist det(B) = det(A)

Eigenwert

Eigenwert und Eigenvektor

Sei ein **Element c** $\in$ **K** und eine **Spalte u** $\in$ **K^{nx1}** mit **u** $\neq$ **0** und **Au = cu**.

Dann heißt die Spalte **u Eigenvektor** von A zum **Eigenwert c**.

Das bedeutet, die Matrix multipliziert mit dem Eigenvektor ergibt ein Vielfaches des Eigenvektors, das Vielfache ist der Eigenwert.

Eigenraum

Für einen Eigenwert c von A ist

$$E\,(A,c) := \{y \in K^{nx1} \mid Ay = cy\} = L(cI_n - A, 0)$$

ein Untervektorraum von K^{nx1}.
Dieser Lösungsraum heißt Eigenraum von A zum Eigenwert c, und besteht aus dem Nullvektor, sowie allen Eigenvektoren von A zum Eigenwert c.

Beispiel

prüfen Sie, ob eine oder mehrere der Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 15 & \frac{39}{2} & 0 & 8 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{23}{2} & -\frac{39}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Eigenwerte.

Wir multiplizieren den Eigenvektor mit der Matrix. Sollte das Resultat ein Vielfaches des Eigenvektors sein, ist es tatsächlich ein Eigenvektor und das Vielfache ist der Eigenwert.

1) **Ja**, ist ein Eigenvektor von A zum **Eigenwert 7**

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-8 \\ 0-3/2+3/2 \\ 0 \\ -23/2+9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -14/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) **Nein**, ist kein Eigenvektor

$$\cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45-39/2+16 \\ -9/2-1/2-6/2 \\ 0 \\ -69/2+39/2-18/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41{,}5 \\ -8 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$$

3) **Ja**, ist ein Eigenvektor von A zum **Eigenwert 3,5**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 39/2 + 8 \\ -3/2 - 1/2 - 3/2 \\ 0 \\ -23/2 + 39/2 - 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -3{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = 3{,}5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie berechnet man Eigenwert und Eigenvektoren?

Sei $A \in K^{nxn}$

$c \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn

$\det(cI_n - A) = 0$

ist. Zum Berechnen dieser Eigenwerte bedienen wir uns des charakteristischen Polynoms von A, einer Polynomfunktion:

$$X_A : K \to K, \qquad z \to \det(zI_n - A)$$

Die Eigenwerte einer Matrix sind die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms.

Das heißt, zum Berechnen der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix, berechnen wir zunächst alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A und bestimmen für jeden dieser gefunden Eigenwerte c den Eigenraum E(A, c) durch Lösen des homogenen Systems linearer Gleichungen $(cI_n - A, 0)$.

Eigenbasis

Eine Eigenbasis von A ist eine Basis von K^{nx1}, deren Vektoren Eigenvektoren von A sind.

Das heißt, weil jede Spalte in K^{nx1} ein Eigenvektor der Einheitsmatrix I_n zum Eigenwert 1 ist, ist auch jede Basis von K^{nx1} eine Eigenbasis von I_n. Eh logisch.

$(T^{-1}AT)_{ii} = c_i$, … etc. etc. KEINEN PLAN → Unbedingt Tutorium am Freitag gehen, um das zu klären ☺

Irgendwas mit T sei eine Matrix deren Spalten eine Eigenbasis von A bilden, dann ist der Eigenwert von T_{-1} c_i und $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix

Ist zum berechnen von großen Potenzen

Quadratische Funktionen

Ein Element $y \in K$ ist genau dann eine Nullstelle von f, wenn $f(y) = 0$

Eine Polynomfunktion mit den Koeffizienten a_0, a_1, a_2 heißt quadratische Funktion von K nach K, wenn $a_2 \neq 0$.

Seien p, q ∈ K und f: $x^2 + px + q$ eine quadratische Funktion mit Koeffizienten 1, p, q, dann hat f genau dann eine Nullstelle in K, wenn in K ein Element z mit

$$z^2 = (p/2)^2 - q$$

existiert. In diesem Fall sind

$$-(p/2) + z \quad \text{und} \quad -(p/2) - z$$

die einzigen Nullstellen von f.

Komplexe Zahl

Grundsätzlich erweitern komplexe Zahlen den Zahlenbereich der reellen Zahlen um eine imaginäre Einheit. Das heißt, **R** ⊆ **C**. Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form **a +b * i** anschreiben, wobei a und b reelle Zahlen sind, i jedoch keine reelle Zahl ist.

Der Körper der komplexen Zahl wird mit (a_1, a_2) geschrieben und wird mit **C** bezeichnet.

Eigenschaften

Es existiert eine komplexe Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$
Für jede komplexe Zahl x existiert eine komplexe Zahl -x, sodass x+(-x) = 0
Für jede komplexe Zahl x ≠ 0 existiert eine komplexe Zahl 1/x, sodass x* (1/x) = 1
Der Zahlenbereich der komplexen Zahlen ist minimal.
Es gilt Assoziativität und Kommutativität, sowie Distributivgesetz.

Addition

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Weil i Wikipedia besser gfunden hab:

Für die Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a + b\,\mathrm{i}$ und $z_2 = c + d\,\mathrm{i}$ gilt

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}.$$

Multiplikation

$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

bzw.

$$z_1 \cdot z_2 = (ac + bd\,\mathrm{i}^2) + (ad + bc)\,\mathrm{i} = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}.$$

Inverse Element

$(a_1, a_2)^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}\right)$

Lineare Funktionen

Eine Lineare Funktion ist eine Polynomfunktion höchstens ersten Grades, also

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \to m*x + n\ ;\quad m, n \in \mathbf{R}$$

Eine Funktion f: V → W heißt **K-Linear**, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- ∀ v, w ∈ V ist f(v+w) = f(v) + f(w)
- ∀ c ∈ K und ∀ v ∈ V ist f(cv) = c*f(v)

So ist zum Beispiel die Nullfunktion 0: V → W, v → 0w, und die Identität Id_V: V → V, v → v, K-Linear!

Auswertungsfunktion:

$$a : V \longrightarrow K^{n+1}, f \longmapsto (f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n))$$

Grundlegende Eigenschaften

$$f(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_i).$$

„Das Bild der Linearkombination ist die Linearkombination der Bilder."

Und:

$$f(-v) = -f(v)$$

Weiteres ist die Zusammensetzung von linearen Funktionen auch wieder linear, die Umkehrfunktion von bijektiven linearen Funktionen ebenfalls linear.

Isomorphismus

Eine **lineare und bijektive** Funktion von V nach W heißt **Isomorphismus** von Vektorräumen. V und W heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus von V nach W (oder von W nach V) gibt. Wir schreiben dann V ≅ W

Dabei ist jeder Vektorraum über K der Dimension n zum Vektorraum K^n isomorph. Nach Wahl einer Basis erhält man einen Isomorphismus durch
V → K^n, u → Koordinaten-n-Tupel von u bzgl der Basis.

Auch isomorph sind zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K genau dann, wenn ihre Dimensionen gleich sind.

Matrix einer linearen Funktion

Eine lineare Funktion zwischen Vektorräumen kann durch (beliebige) Vorgabe der Bilder einer Basis, eindeutig definiert werden:

$$f(v_i) = u_i$$

Wobei $u_1, \ldots, u_n \in W$ und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

Sei nun
f: V → W eine K-Lineare Funktion und
$A_{1j}, \ldots, A_{mj}$ die Koordinaten von $f(v_j)$ bzgl. w, d.h.:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i \, , 1 \leq j \leq n$$

Dann heißt folgende Matrix, die Matrix von f bezüglich der Basen v und w:

$$M(f, v, w) := \left(A_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{mxn}$$

Damit ist die j-te Spalte von M(f, v, w), die Koordinatenspalte von $f(v_j)$ bzgl w. Sollte V = W und v = w, schreiben wir einfach nur M(f, v), statt M(f, v, v).

Nach Wahl von Basen im Definitionsbereich und Bildbereich einer linearen Funktion ist diese eindeutig durch ihre Matrix bestimmt. Das heißt, anstatt der linearen Funktion können wir die Matrizen zur Berechnung verwenden.
Zusammensetzen von lin. Abbildungen = Matrizenmultiplikation
Umkehrabbildung = Invertieren der Matrix

Zusammensetzung von linearen Funktionen

Sie entspricht der Multiplikation der zugehörigen Matrizen:

$$M(g \circ f, v, u) = M(g, w, u) * M(f, v, w)$$

wobei f: v → W und g: W → U K-Lineare Funktionen und u die Basis des Vektorraums U mit der Dimension l seien.

Isomorphismus

Die lineare Funktion f: v → W ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Matrix (f, v, w) invertierbar ist, das heißt

$$M(f^{-1}, w, v) = M(f, v, w)^{-1}$$

Eigenvektor, -wert & -raum einer lin. Funktion

Sei V ein Vektorraum über K und f: V → V eine lin. Funktion

Ein Vektor $u \in V$ heißt Eigenvektor von f, wenn $u \neq 0$ ist und eine Zahl $c \in K$ existiert, sodass

$$f(u) = cu$$

In diesem Fall ist **c** eindeutig bestimmt und heißt der **Eigenwert** von f **zum Eigenvektor u.**

Zudem ist für einen Eigenwert c von f folgendes Ding

$$\mathbf{E(f,c)} := \{ x \in V \mid f(x) = cx \}$$

ein Untervektorraum von V. Er heißt **Eigenraum** von f **zum Eigenwert c** und besteht aus dem Nullvektor sowie allen Eigenvektoren von f zum Eigenwert c.

Berechnung

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K,
f: V → V eine lin. Funktion,
v eine Basis von V und
A := M(f, v) die Matrix von f bzgl v.

Weil die Spalte $y \in K^{n\times1}$ genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $c \in K$ ist, wenn der Vektor in V mit Koordinatenspalte y bezgl. v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $c \in K$ ist, können wir folgendes Verfahren zum Berechnen der Eigenwerte und Eigenfunktionen einer linearen Funktion $f: V \to V$ verwenden, sofern V endlich ist:

Schritt 1)
Wir wählen eine Basis $v := (v_1, \ldots, v_n)$ von V und bestimmen die Matrix A von f bzgl v

Schritt 2)
Alle $c \in K$ mit $\det(cI_n - A) = 0$ finden, welche die Eigenwerte von A und daher auch von f sind.

Schritt 3)
Anschließend für alle Eigenwerte c eine Basis des Eigenraums E(A, c) von A zum Eigenwert c bestimmen. Die Vektoren in V, deren Koordinatenspalte die Elemente dieser Basis sind, bilden eine Basis des Eigenraums E(f, c) von f zum Eigenwert c.